République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Hamouda Adib

Titre :

stabilité des systèmes différentiels

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	KHELIL NACEUR	UMKB	Président
Dr.	Soltani sihame	UMKB	Encadreur
Dr.	HAMDI SOUMIA	UMKB	Examinateur

Juin 2018.

Dédicace.

Je dédie ce

Modeste travail A celui qui m'a initiée à la vie, qui m'appris

La modestie

A ma mère

A cette source de tendresse, qui a sacrifié sa vie

Pour parfaire mon éducation Et à celui qui me comble le bonheur

A mon père

A vous mes chères parents, le déluge d'amour

Interminable et les sacrifices

Symbolique.

A mon frère

ouadie

A ma merveilleuse soeur

A mes chères amies :

Assia , hatem, rabie, wissem, hafed, nasro, basset, oussama

A tous mes collègues de la promotion sans exception.

REMERCIEMENTS

Je remercie Dieu le tout Puissant qui m'a donné la force et la volonté pour réaliser ce modeste travail.

Je remercie mes parents pour ils m'ont soutenu pendant mes études.

Je tiens à remercier Madame SOLTANI SIHAME d'avoir accepté d'être mon encadreur durant de ce travail, et pour la

confiance qu'elle m'a donnée et ses précieux conseils.

Mes remerciements vont également aux membres de jury d'avoir accepté de juger mon travail.KHELIL NACEUR et HAMDI SOUMIA

Je remercier chaleureusement les proffesseurs du departement des mathématique surtout Mr MNACER.T, Mr SI ABDI.N,

et Mr GHERBAL.B, Mr ZEGHEDOUD.K pour leur soutien à la fois moralement et idéologiquement

Je conclurai, en remerciant vivement toute ma famille qui m'a toujours

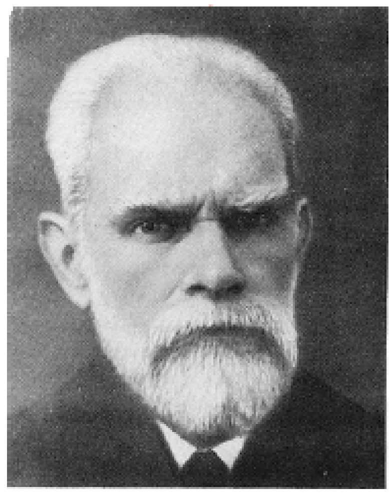
Supporté moralement et financièrement pendant toutes mes longues années d'étude.

..

Table des matières

Table des figures

Introduction



Les processus différentiels sont souvent modélisés par des équations différentielles, du fait que les équations, décrivant un phénomène quelconque caractérisé par une ou plusieurs variables d'états, dépendent continûment du temps en réalité, pue de systèmes sont modélisés par des équations linéaires ; en électronique, par exemple, les circuit linéaires ne peuvent remplir toutes les fonctions désirées par l'ingénieur, dés lors que les effets non linéaires sont indispensable pour assurer la majorité des fonctions. En général, les modèles non linéaires sont innombrables et rester le plus souvent inclassable ; en effet, ils présentent des effets complexes et surprenants tels que les bifurcations, les chaos. Les scientifique ne disposent pas de techniques générales adéquates pour les traiter ; on parvient cependant par construction ou par certains choix, de rester dans le domaine de comportement linéaire. Le modèle linéarisé est très séduisant par la simplicité des calculs, cela malheureusement n'est qu'une approximation qui engendre en contre partie un désavantage évident. Un des aspects qualitatifs les plus importants des systèmes différentiels est leur comportement asymptotique, c'est-à-dire le comportement des solutions lorsque le temps tend vers l'infini ; ce concept qui est directement lié à la stabilité, a fait l'objet d'une recherche abondante depuis la fin du XIX éme siècle. Son importance réside dans le fait que la notion de la stabilité est commune à plusieurs domaines, d'une part, et d'un point de vue technique, la stabilité est nécessaire au fonctionnement des engins. Dans le cas d'un modèle linéaire. Tes critères de la stabilité étant déjà anciens, le problème reste posé pour les modèles non linéaires, l'approximation par linéarisation, représentant l'astuce la plus proche à l'esprit, n'est pas toujours justifiée et donne dans certaines situations une fausse description du système non linéaire, l'élaboration des théorèmes de linéarisation a résolu partiellement problème. En effet, dans des cas limites, le problème est encore posé jusqu'à nos jours et il en est de même pour les cas où les théorèmes de linéarisation classique ne sont pas applicables. Les problèmes de la stabilité sont apparus pour la première fois en mécanique. Un critère pour la stabilité des corps rigides sous l'effet de forces gravitationnelles a été formulé par E Torrcelli en 1644 ; G.Lagrange, en 1788, démontra un théorème qui définit les conditions nécessaires pour la stabilité des systèmes conservatifs. Au XIX éme siècle, le développement de la technologie et les problèmes de fonctionnement des engins ont poussé les scientifiques à chercher des méthodes pour l'étude de la stabilité du mouvement, les travaux de Routh et Herwitz restant des grandes références jusqu'à n et Herwitz restant des grandes références jusqu'à nos jours Toute fois commence à utiliser les systèmes linéarisés pour l'étude des systèmes non linéaires sans aucune justification.

En 1892. A.M.Lyapunov a publié sa thèse "Problème général de la stabilité du mouvement", on il a introduit une définition très rigoureuse du problème de la stabilité du mouvement, l'absence d'une telle définition ayant causé un grand malentendu. Lyapunov a justifié en quelque sorte l'utilisation de la première approximation. Après Lyapunov, le développement de la théorie de la stabilité s'est orienté dans plusieurs directions, en précisant les résultats déjà élaborés. Notre travail est structuré en deux chapitres :

Le premier chapitre a essentiellement pour objectif de donner les premières définitions et propriétés concernant les systèmes différentiels (linéaire et non linéaire) et quelque notions sur la stabilité

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la notion de stabilité et la classification d'un système différentiel linéaire et la présentation détaillée de la théorie de Lyapunov dans les systèmes non linéaires, autonomes ou non autonomes. et systèmes presque linéaires

Chapitre 1

Génèralités sur les systèmes différentiels

1.1 Rappels sur les équations différentielles

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité ou la mécanique céleste, par conséquent les équations différentielles représentent un vaste-champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. La théorie des équations différentielles ordinaires permet d'étudier de nombreux processus d'évolution déterministes, finis et différentiables. Nous exposons ici les principales notions indispensables à l'étude de tels systèmes.

Dans la suite $J \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $U \subset E$ sont des ouverts d'un espace de Banach E, et très souvent on prendra $E = \mathbb{R}^n$

1.1.1 Equations différentielles

Définition 1.1.1 ***(Equation différentielle ordinaire)*** *Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t, une* *fonction inconnue* $t \mapsto x(t)$ *et ses dérivées* $x^{'}, x^{''}, ..., x^{(n)}$ *au point* t *définie par*

$$f(t, x, x^{'}, x^{''}, ..., x^{(n)}) = 0$$

où f *est une fonction de* $n+2$ *variables et n'est pas indépendante de sa dernière variable* $x^{(n)}$. x *est une fonction de la variable réelle* $t \in J$ *tel que* x *en général sera à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. *On peut écrire*

$$f(t, x(t), x^{'}(t), x^{''}(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0 \ , \forall \ t \in J$$

Définition 1.1.2 ***(Ecriture vectorielle d'un système différentiel)*** *On rappelle qu'une équation différentielle (linéaire ou non) est de la forme dans* E

$$x' = f(t, x) \tag{1.1}$$

On s'intéressera plus particulièrement aux systèmes différentiels, i.e. au cas où $E = \mathbb{R}^n$, *l'équation ci-dessus étant écrite avec les notations usuelles*

$$\overrightarrow{x}' = \overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{x}) : \ \overrightarrow{x}^{'}(t) = \overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{x}(t)) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

avec $x \in M \subset \mathbb{R}^n$, $t \in J \subset \mathbb{R}$ *; où* M *est l'espace d'état.*

Exemple 1.1.1 *Soit le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x_1^{'} = 4x_1 - 2x \\ x_2^{'} = x_1 \ + \ x_2 \end{cases}$$

C'est un système différentiel autonome (linéaire), de solution sur $\mathbb{R}$*, tel que* $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ *,* $f_1 = 4x_1 - 2x_2$ *et* $f_2 = x_1 + x_2$

Définition 1.1.3 ***(Problème de cauchy)*** *Des conditions initiales peuvent être données en* $t = t_0$ *pour chacune des variables d'état d'ou le problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1^{'}(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, \ldots, x_n(t)), \ x_1(t_0) = \alpha_1 \\ x_2^{'}(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, \ldots, x_n(t)), \ \ x_2(t_0) = \alpha_2 \\ \vdots \\ x_n'(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, \ldots, x_n(t)), \ \ x_n(t_0) = \alpha_n \end{cases} \tag{1.2}$$

comme $x, x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$*,* $t_0 \in J$ *et* $f : J \times \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*. On appelle solution du problème de Cauchy un ensemble des fonctions* $(x_1(t), x_2(t), \ldots, \ldots, x_n(t))$ *définies sur un intervalle* J *contenant* t_0 *et qui satisfont les équations de* (1.2)

1.1.2 Systèmes autonomes

Définition 1.1.4 *On appelle équation différentielle autonome une équation différentielle pour laquelle* f *ne dépend pas du temps :* $f(t, x) = f(x)$*.C'est donc un équation différentielle de type :*

$$x' = f(x) \tag{1.3}$$

Proposition 1.1.1 *Pour un système différentiel autonome, si* φ *est solution sur* J*, toutes ses translatées* $\psi(t) = \varphi(t + c)$ *pour* $c \in \mathbb{R}$ *sont solutions sur* $J - c$*.*

Preuve. Soit φ une solution sur $J \subset \mathbb{R}$: $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ pour tout $t \in J$. Et donc, pour $c \in \mathbb{R}$ et t tel que $t + c \in J$, il vient $\varphi'(t + c) = f(\varphi(t + c))$ pour tout $t \in J - c$, i.e. $\psi'(t) = f(\psi(t))$ pour tout $t \in J - c$ ■

Remarque 1.1.1 *Cette proposition est bien sûre fausse pour les systèmes non autonomes : on a alors*

$$\varphi'(t+c) = f(t+c, \varphi(t+c)), \quad d'o\grave{u} \;\; \psi'(t) = f(t+c, \psi(t)) \neq f(t, \psi(t))$$

Remarque 1.1.2 *Les équations autonomes sont très importantes quand on cherchera des solutions stationnaires ainsi que leur stabilité*

Remarque 1.1.3 *Un système autonome est indépendant du temps initial alors qu'un système non autonome ne l'est pas. Tout instant peut être considéré comme instant initial .Tout état $x(t)$ du système peut être considéré comme un état initial. Dans la suite nous ne considérerons que des systèmes autonomes. De plus nous considérerons uniquement des systèmes dont le vecteur d'état est réel de dimension finie*

Définition 1.1.5 ***(champs de vecteurs)*** *Un champ de vecteurs X sur $\mathbb{R}^2$ est défini par la donnée de deux applications f_1 et f_2 aux quelles on associe le système d'équations différentielles ordinaires :*

$$X =: \begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

Définition 1.1.6 ***(Espace des phases)*** *L'espace des phases M' est un espace mathématique souvent multidimensionnel. Chaque axe de coordonnée de cet espace correspond un variable d'état du système dynamique étudié et chaque variable d'état caractérise le système à un instant donné le système est donc caractérisé par point de cet espace. A l'instant suivant, il sera caractérisé par un autre point et ainsi de suite. Si l'espace des phases est représenté en trois dimensions, cette suite des points peut montrer graphiquement l'évolution du système dans le temps. L'ensemble des trajectoires possibles constitue le portrait des phases*

Définition 1.1.7 ***(Portrait de phase)*** *La portrait de phase est une représentation géométrique des trajectoires d'un système dynamique dans l'espace des phases M' à chaque* *ensemble de conditions initiales correspond une courbe ou un point.*

Définition 1.1.8 ***(orbite)*** *L'orbite d'un point x de M' est l'ensemble $\Omega(x)$ défini par :*

$$\Omega(x) = \{\phi_t(x), t \in I(x)\}$$

Définition 1.1.9 ***(Trajectoire)*** *La trajectoire d'un point x de M' est l'application*

$$t \in I(x) \longrightarrow \phi(x) \in M'$$

un trajectoire est une courbe paramétrée de l'espace des phases

Définition 1.1.10 ***(Attracteur)*** *Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble de situations) vers laquelle évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales. Mathématiquement, l'ensemble A est un attracteur si :*

- *Pour tout voisinage U de A, il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) = \phi_t(x_0)$ restera dans U*

si $x_0 \in V$

- $\cap \phi_t(V) = A$, $t \geq 0$
- *Il existe une orbite dense dans A, il y a deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges où chaotiques.*

1.1.3 Transformation d'une équation différentielle à une système différentiel d'ordre 1

Plus généralement, nous donnons la façon de déterminons un système différentiel du premier ordre équivalent à une équation différentielle ordinaire d'ordre n $(n \in \mathbb{N} - \{1\})$

Définition 1.1.11 ***(Equation différentielle normale)*** *Une équation différentielle d'ordre n dans $\mathbb{R}^n$, est une équation de la forme :*

$$x^n = f(t, x, x^{'}, \ldots, \ldots, \ldots, x^{n-1}) \tag{1.4}$$

où $f : U \to \mathbb{R}^n$ *, une application continue définie sur* U*. Nous introduisons de nouvelles variables, dites d'état* $x_1, x_{2,\ldots}, x_n$ *en posant :*

$$x_1 = y,\ x_2 = y^{'}, x_3 = y^{"}, ..., x_n = y^{n-1} \tag{1.5}$$

On dérive chaque terme de chaque équation de (1.5)*et on utilise ces équations encore une fois ainsi que l'équation*(1.4)*pour déterminer les systèmes d'EDO du premier ordre*

$$\begin{cases} x_1^{'} & = & y^{'} & = & x_2 \\ x_2^{'} & = & y^{"} & = & x_3 \\ x_3^{'} & = & y^{'''} & = & x_4 \\ \vdots & = & \vdots & = & \vdots \\ x_{n-1}^{'} & = & y^{n-1} & = & x_n \\ x_n^{'} & = & y^n & = & -a_0 y - a_1 y^{(1)} - a_2 y^{(2)} - \ldots. - a_{n-1}\ y^{n-1} + g \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x_1^{'} & = & 0.x_1 \ + \ 1.x_2 \ + \ \ldots \ + \ 0.x_n & = & f_1(t, x, x^{'}, \ldots, \ldots, \ldots, x_n) \\ x_2^{'} & = & 0.x_1 \ + \ 0.x_2 \ + \ x_3.0 \ - \ 1.0.x_n & = & f_1(t, x, x^{'}, \ldots, \ldots, \ldots, x_n) \\ \vdots & = & \vdots & = & \vdots \\ x_n^{'} & = & -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - \ldots. - a_{n-1} x_n + g & = & f_1(t, x, x^{'}, \ldots, \ldots, \ldots, x_n) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ -g & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow X'(t) = A(t)X(t)+b(t) \tag{1.6}$$

ou $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ *est une matrice et* $b(t) \in \mathbb{R}^n$*. Alors ,* $Y \in C^n(J,\, \mathbb{R})$ *est solution de* (1.4) *si et seulement si* $X \in \mathbb{C}^1(J,\mathbb{R}^n)$ *est solution de* (1.6) *.*

Exemple 1.1.2 *Soit*

$$y^{(4)}(t) - 3t^2y^2(t) = t+1.$$

$$\Longleftrightarrow y^{(4)}(t) = 3t^2y^2(t) + t + 1$$

On a :

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ x_3 = y'' \\ x_4 = y''' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1' = y' = x_2 \\ x_2' = y'' = x_3 \\ x_3' = y''' = x_4 \\ x_4' = y'''' = 3t^2y^2(t) + t + 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3t^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t+1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow X' = AX + b.$$

1.1.4 Expontielle d'une matrice :

Dans cette section on donne quelques définitions et propriétés qui généralisent aux matrices des résultats bien connus pour les éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.12 *Soit* A *une matrice* $n \times n$ *et* t *un réel,* e^{At} *est la matrice* $n \times n$ *qui* *vérifie :*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}e^{At} = & Ae^{At} \\ e^{A_0} = & e^0 = Id \end{cases}$$

Définition 1.1.13 *Si $A \in M(\mathbb{k})$,on pose*

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

Munissons $M_n(\mathbb{k})$ de la norme $(\|\|\|\|)$ des opérateurs linéaires sur $\mathbb{k}^m$ associée à la norme euclidienne (resp hermitienne) de $\mathbb{R}^m$(resp $\mathbb{C}^m$). On a alors

$$||| \frac{1}{n!} A^n ||| \quad \leq \frac{1}{n!} ||| A^n |||$$

de sorte que la série $\sum \frac{1}{n!} A^n$ est absolument convergente. On voit de plus que $||| e^A ||| \leq e^{|||A|||}$

Proposition 1.1.2 *L'exponentielle de matrice vérifie les propriétés suivantes :*

1. $e^{(A(t+t_0))} = e^{(At)} e^{(At_0)}$
2. *Si $BA = AB$, alors $Be^{(At)} = e^{(At)} B$*
3. *Si $BA = AB$, alors $Be^{(At)} = e^{(At)} B$*
4. *Si $BA = AB$, alors $e^{(A+B)} = e^{(A)} e^{(B)}$*
5. $(e^{(A)})^{-1} = e^{(-A)}$
6. *det* $(e^{(A)}) = e^{(trace(A))}$
7. *Si B est inversible,* $e^{(BAB^{-1})} = Be^{(A)} B^{-1}$
8. *Si A est symétrique définie positive e^A est symétrique définie positive. Calcul de*

l'expontielle d'une matrice

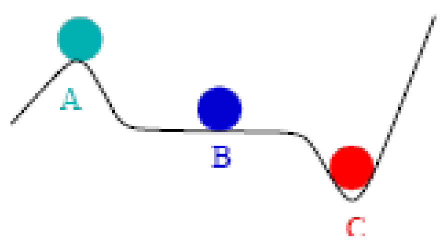
$$si\ A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},\ alors : e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

De manière générale, si A est nilpotente d'indice de nilpotente k, $(\exists k \diagup A^k = 0)$

$$e^A = \sum_{k=0}^{k-1} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!}$$

1.2 Notions de stabilité

La question de la stabilité d'une des questions fondamentale de la théorie qualitative, elle a été étudier à des mathématiciennes comme LYAPUNOV, elle se pose de la façon suivante : Si l'on écarte le système de l'équilibre, y reviendra-t-il ? Ou bien une petite perturbation, qui éloigne le système légèrement de son régime stationnaire, peut avoir des conséquences importantes et être amplifiée au cours du temps ?



A) Instable B) Localement stable C) Asymptotiquement stable

Soit le système différentiel autonome

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t))\ ,\ x \in U \subset \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0\ ,\ t_0 \in J \subset \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.7}$$

1.2.1 Point d'équilibre

Définition 1.2.1 *Nous appelons point d'équilibre (ou point critique ou point singulier ou point stationnaire, solution stationnaire, point critique) de* (1.7) *le point* P *qui vérifie* $f(P) = 0$

Exemple 1.2.1 *Soit le système suivant*

$$\begin{cases} x' = 1 - (x^2 + y^2) \\ y' = -2xy \end{cases}$$

Les points d'équilibre sont les points $P = \{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ *où* $x' = y' = 0$*, soit* $x^2 + y^2 = 1$*,* $x = 0$ *où* $y = 0$*. Donc* $p_1 = (1,0)$ *et* $p_2 = (0,1)$*,* $p_3 = (0,-1)$*,* $p_4 = (-1,0)$

1.2.2 Stabilités et classification des points critiques :

Le problème est de savoir si 2 solutions 'proches' à un temps t_0 vont rester 'proches' (stabilité) et si même elles se 'rapprochent' quand $t \longrightarrow \pm\infty$ (stabilité asymptotique)

Définition 1.2.2 *Une trajectoire* $\{\overrightarrow{\varphi}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ *approche un point* $P = (a_1,\ldots,a_n)^t$*ssi :*

$$\lim_{t \to \pm\infty} \overrightarrow{\varphi}(t) = P$$

On se limite dans la suite au cas 2-D.

Classification des points critiques

1. Un point critique P est un nœud ssi : ou bien il y a une infinité de trajectoires entrantes, ou bien une infinité de trajectoires sortantes.

2. Un point critique P est un point selle ssi il y a 2 trajectoires entrantes et 2 trajectoires sortantes, les autres trajectoires étant asymptotiques à ces 4 là

3. Un point critique P est un point spiral ssi chaque trajectoire s'approchant de P s'y enroule en spiral quand $t \to +\infty$

4. Un point critique P est un centre ssi P est au centre d'une famille de trajectoires fermées, aucune trajectoire n'approchant P asymptotiquement.

Stabilité

Définition 1.2.3 *1. Un point critique P est stable ssi pour tout $R > 0$ il existe $r > 0$ tel que si une trajectoire est dans la boule $B(P, r)$ à un instant t_0, elle reste dans la boule $B(P, R)$ à tout instant $t > t_0$*

2. Il est dit instable ssi il n'est pas stable.

3. Il est dit asymptotiquement stable ssi il est stable et de plus il existe $\rho > 0$ tel que toute trajectoire qui est dans $B(P, \rho)$ à t_0 s'approche de P quand $t \to +\infty$.

Chapitre 2

Stabilité des systèmes différentiels

2.1 introduction

Les systèmes linéaires sont d'un intérêt particulier, car souvent, c'est à leur théorie que l'on se référera pour une étude locale des systèmes non linéaires. l'on se référera pour une étude locale des systèmes non linéaires

L'objet de la théorie de la stabilité est de tirer des conclusions quant au comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires. La contribution majeure fut apportée par A M Lyapunov en dont les travaux n ont et e connus qu'a partir des années il a introduit la majorité des concepts et définitions de base concernant la stabilité et des systèmes représentes par des systèmes différentiels arbitraires mais a aussi fourni les principaux résultats théoriques. Nous ne présentons dans cette partie qu'une version simplifiée et abrégée de ses travaux. Dans la suite $D_0 \subset D \subset U$ sont des ouverts non vides et $K \subset U$ aussi

2.2 Stabilité des systèmes différentiels linéaires

La stabilité est l'étude de la dépendance des solutions par rapport aux conditions initiales. Physiquement, si on jette deux pierres tout d'un cous on aimerai bien savoir si l'une s'éloigne de l'autre au cours du temps ou non. En terme d'équations différentielles, si on prend deux solutions d'une même équation différentielle est-ce-que ceux deux solutions restent assez proches lorsque leurs conditions initiales sont suffisamment proches

2.2.1 Cas autonome

Définition 2.2.1 ***(Stabilté)*** *La position d'équilibre La position d'équilibre $P = 0$ est stable en sens de lyapunov si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta(t_0, \varepsilon)$ telle que :$\forall x_0$ vérifiant : $\| x_0 \| < \delta$ (i.e. $x_0 \in B(0, \delta)$,la solution de (1.7) vérifie :*

1. *$x(t)$ est définie pour tout $t \geq t_0$*
2. *$\| x(t) \| < \varepsilon$ (i.e. $x(t) \in B(0, \varepsilon)$).*

Définition 2.2.2 ***(Stabilité asymptotique)*** *La position d'équilibre $P = 0$ est asymptotiquement stable si :*

1. *Elle est stable en sens de lyapunov*
2. *$\lim\limits_{t \to +\infty} \| x(t) \| = 0$, (0 :point d'équilibre)*

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x_0 :\| x_0 \| < \delta \Longrightarrow \| x(t) \| < \varepsilon$$

Remarque 2.2.1 *on dit que la position d'équilibre P est instable si elle n'est pas stable*

Théorème 2.2.1 ***(Cas d'un système différentiel linéaire)*** *Soit le système différentiel linéaire homogène autonome :*

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 - bx_2 \\ x_2' = cx_1 + dx_2 \end{cases} \quad ab - dc \neq 0$$

où a,b,c et d sont réels. Alors $P = (0, 0)^t$ est le seul point critique. Et si $\lambda_1$et λ_2 sont les racines du polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc$, alors :

1. *P est un nœud ssi λ_1 et λ_2 sont réels de même signe $(\lambda_1\lambda_2 > 0)$. Ce nœud est asymptotiquement stable ssi $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, instable sinon. (En particulier vrai si $\lambda_1 = \lambda_2$).*
2. *P est un point selle (instable) ssi λ_1 et λ_2 sont réels de signe opposé $(\lambda_1\lambda_2 < 0)$.*
3. *P est un point spiral ssi $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ est non réel, stable si $Re(\lambda_1) < 0$ et instable si $Re(\lambda_1) > 0$.*
4. *P est un centre ssi, $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ est un imaginaire pur.*

2.2.2 Cas non autonome

Définition 2.2.3 *Soit $(T_s,T_f) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tels que $T_s < T_f$, on dit que K est (J,T_s,T_f,D_0,D) -pratiquement stable pour le système non autonome*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \ , \ x \in U \subset \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = x_0 \qquad , \ t_0 \in J \subset \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.1}$$

si $\forall x_0 \in D_0$ et $t_0 \in J$, on a :

1. *$x(t,t_0,x_0)$ est définie sur $[t_0,t_0 + T_f]$*
2. *$\forall t \in [t_0,t_0 + T_f]$, $x(t,t_0,x_0) \in D$*
3. *$\forall t \in [t_0 + T_s,t_0 + T_f]$, $x(t,t_0,x_0) \in K$. De plus, K est (J,T_s,T_f,D_0,D)-pratiquement stable en temps fini si K est $(J,T_s,+\infty,D_0,D)$-pratiquement stable*

Définition 2.2.4 *On dit que le système (2.1) est stable au sens de Lyapunov par rapport au point d'équilibre x_η si pour des conditions initiales $x(t_0)$ suffisamment proches du point d'équilibre soit :*

$$\forall \varepsilon > 0 \, ; \exists \delta > 0 : \| x(t_0) - x_\eta \| \leq \delta \Longrightarrow \| x(t,x(t_0)) - x_\eta \| \leq \varepsilon, \ \forall t \geq t_0$$

telle que : $x(t_0) \in B(x_\eta,\delta)$ et $x(t,x(t_0)) \in B(x_\eta,\varepsilon)$

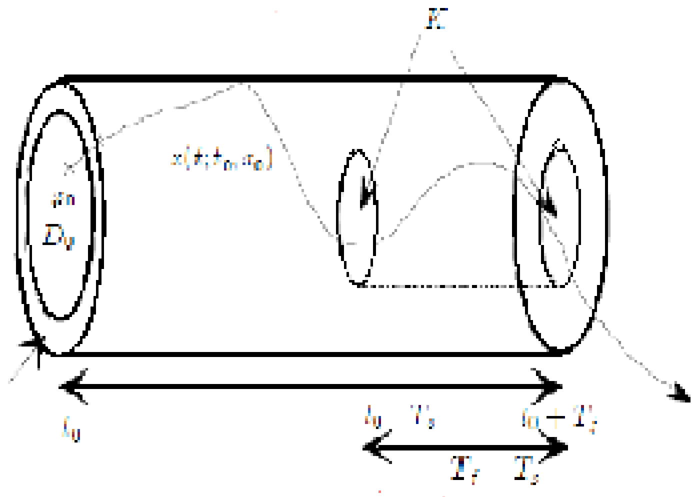


FIG. 2.1 – Stabilité pratique

Définition 2.2.5 *On dit que K est stable pour le système (2.1) si pour tout $\varepsilon > 0$, et $t_0 \in J$, il existe $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que*

$$(x_0 \in B_{\delta(\varepsilon,t_0)}(K)) \Longleftrightarrow \begin{cases} x(t, t_0, x_0) \text{ est définie pour } t \geq t_0 \\ x(t, t_0, x_0) \in B_\varepsilon(K) \qquad \forall t \geq t_0. \end{cases}$$

Exemple 2.2.1 *On considère l'équation :*

$$x' = (6t.sin(t) - 2t)x \ , \ t \in \mathbb{R}.$$

Il admet des solutions de la forme :

$$x(t, t_0, x_0) = x_0 exp[\int_{t_0}^{t} (6s.sin(s) - 2s)ds] = x_0 exp[6sin(t) - 6tcos(t) - t^2 - 6sin(t_0) + 6t_0cos(t_0) + t_0^2]$$

On voit que le terme en exponentielle est borné pour tout $t \geq t_0$ par une constante $c(t_0)$ qui dépend seulement de t_0. Ainsi, on a :

$$|x(t, t_0, x_0)| \ \leq \ |x_0| \ c(t_0) \qquad \forall \ t \geq t_0$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, *si l'on choisit* $\delta = \frac{\varepsilon}{c(t_0)}$, *on voit que* 0 *est stable.*

Définition 2.2.6 *Si* K *n'est pas stable pour le système* (2.1), *on dit que* K *est instable pour le système* (2.1).

Stabilité asymptotique

Définition 2.2.7 *Le point d'équilibre* x_η *est asymptotiquement stable si*

$$\forall\delta > 0 \;:\parallel x(t_0) - x_\eta \parallel \leq \delta \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty} \parallel x(t, x(t_0)) - x_\eta \parallel = 0$$

Définition 2.2.8 ***(Stabilité d'attraction)*** *On appelle bassin d'attraction* D_0 *de* $x_\eta = 0$ *pour l'équation différentielle* $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, *l'ensemble des* $x_0(x(t = t_0))$, $\exists\delta > 0$ *telle que*

$$\lim_{t\to+\infty} \parallel x(t, x_0) \parallel = 0, \forall, \parallel x_0 \parallel \prec \delta.$$

Définition 2.2.9 *Soit* $K \subset U$, *on dit que* K *est attractif pour le système* (2.1) *si pour tout* $t_0 \in J$, *il existe* $\delta(t_0) > 0$ *tel que :*

$$(x_0 \in B_{\delta(t_0)}(K)) \Longleftrightarrow \begin{cases} x(t,t_0,x_0) \text{ est définie, } \forall t \geq t_0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} d(x(t,t_0,x_0),\, K) = 0 \end{cases}$$

Définition 2.2.10 *On dit que* K *est asymptotiquement stable pour le système* (2.1) *si :*

1. K *est stable pour le système* (2.1)
2. K *est attractif pour le système* (2.1).

Définition 2.2.11 *On dit que* K *est globalement asymptotiquement stable pour le système* (2.1) *si :*

1. K *est stable pour le système* (2.1)
2. $\forall t_0 \in J$, *et* $x_0 \in U$, $x(t,t_0,x_0)$ *est définie* $\forall t \geq t_0$; $\lim\limits_{t\to+\infty} d(x(t,t_0,x_0),\, K) = 0$

Exemple 2.2.2 *On considère l'équation :*

$$x' = \frac{x}{1+t},\ t \geq 0$$

Il admet des solutions de la forme : $x(t,t_0,x_0) = x_0\ exp[\int_{t_0}^{t} \frac{-1}{1+s} ds] = x_0\ \frac{1+t_0}{1+t}$*. On voit ainsi que* 0 *est globalement asymptotiquement stable*

Définition 2.2.12 ***(Stabilité expontielle)*** *Le point d'équilibre* x_η *est exponentiellement stable si :*

$$\forall \varepsilon > 0\,;\, \exists\ \delta,a,b > 0\ :\| x(t_0) - x_\eta \| \leq \delta \Longrightarrow \| x(t,x(t_0)) - x_\eta \| \leq a \| x(t_0) - x_\eta \| e^{-bt},\ \forall t \geq t_0$$

Exemple 2.2.3 *Considérons l'équation décrit par*

$$x' = -(1 + sin(x^3))x$$

Il est claire que $P = 0$ *est un point d'équilibre. La solution du l'équation est donnée par*

$$x(t) = x(0)e^{\int -(1+sin(x^3))ds}$$

On a

$$\forall t \geq 0.\ \mid x(t) \mid \prec k \mid x(0) \mid e^{-t}$$

D'où la stabilité expontielle de système

Remarque 2.2.2 *Stabilité exponentielle* $\Longrightarrow$ *Stabilité asymptotique*

Définition 2.2.13 *Le point d'équilibre* x_η *est instable si le système* (2.1) *n'est pas satisfaite.*

Stabilité uniforme

Définition 2.2.14 *On dit que K est uniformément stable pour le système (2.1) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que :*

$$\forall\ t_0 \in J,\ (x \in B_{\boldsymbol{\delta(\varepsilon)}}(K)) \Longrightarrow \begin{cases} x(t,t_0,x_0) \text{ est définie pour } t \geq t_0 \\ x(t,t_0,x_0) \in B_\varepsilon(K) \text{ pour } \quad t \geq t_0 \end{cases}$$

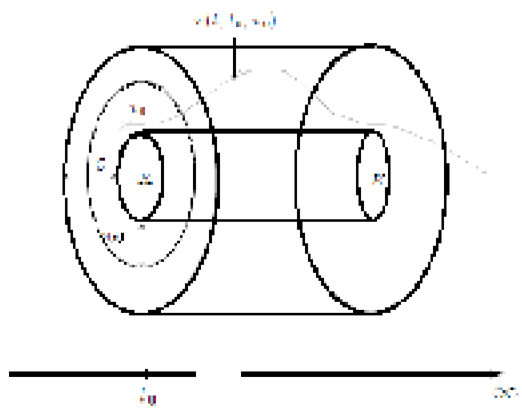


Fig. 2.2 – Stabilité uniforme

Remarque 2.2.3 *La stabilité uniforme entraine la stabilité, mais la réciproque est fausse. Reprenons l'exemple précédent*

$$x' = (6t\ sin(t) - 2t)x,\ t \in \mathbb{R}.$$

Supposons que t_0 prenne les valeurs successives $t_0 = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$ et que $x(t,t_0,x_0)$, soit évalué en $t_0 + \pi$, alors

$$x(t_0 + \pi, t_0, x_0) = x_0\ exp[(4n+1)(6-\pi)\pi]$$

Donc si $x_0 \neq 0$ *on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(t_0+\pi,t_0,x_0)}{x_0} = \lim_{n\to\infty} exp[(4n+1)(6-\pi)\pi] = +\infty$$

Ainsi, pour ε *donné, il n'existe pas de* δ *indépendant de* t_0 *qui permette de dire que* 0 *est uniformément stable.*

Définition 2.2.15 ***(stabilité absolue)*** *La position d'équation* $P = 0$ *est absolument stable si :elle est asymptotiquement pour tout* x_0

- *Si il existe une valeur propre* λ *de* A *tell que* $Re(\lambda) \succ 0$ *alors le point d'équilibre* P *est instable.*
- *Si toute les valeurs propres de* A *ont un partie réelle strictement négative alors le point d'équilibre* P *est asymptotiquement stable.*
- *Si toute les valeurs propres de* A *ont une partie réelle négative ou nulle et si toute valeur propre a partie réelle nulle est simple alors le point d'équilibre* P *est stable.*

Preuve. Nous étudions d'abord le cas le plus simple à savoir le cas d'un système linéaire sans second membre

$$x' = Ax$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Avec x_j ,$a_{ij} \in \mathbb{C}$; le cas réel peut bien entendu être vu comme un cas particulier du cas complexe. La solution du problème de cauchy de condition initiale $x(t_0) = x_0$ est données par $x(t,x_0) = e^{(t-t_0)A}x_0$ est la stabilité est liée au comportement de $e^{(t-t_0)A}$ quand t tend vers $+\infty$, dont la norme $\| e^{(t-t_0)A} \|$ doit rester bornée. Distinguions quelques cas

1^er cas

$\star$ $n = 1$, $A = (a)$, on a alors$\mid e^{((t-t_0)a)} \mid = e^{((t-t_0)\,\mathrm{Re}(a))}$. Les solutions sont stables ssi cette quantité reste bornée quand t tend vers $+\infty$, c'est-à-dire si $Re(a) \leq 0$. De même les solutions sont asymptotiquement stable ssi $Re(a) < 0$ et on peut alors prendre :

$$\gamma(t) = e^{((t-t_0)\,\mathrm{Re}(a))} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2ercas

$\star$ n quelconque

– Si A est diagonalisable , on se ramène après un changement linéaire de coordonnée

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Où $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ désignent les valeurs propres de A , le système se ramène aux équations indépendantes $x_j' = \lambda_j x_j$ et admet pour solution $x_j(t,y) = y_j e^{(\lambda_j(t-t_0))}$, $j = \overline{1,n}$. Les solutions donc sont stables ssi $Re(\lambda_j) \leq 0$ pour tout j et asymptotiquement stable ssi $Re(\lambda_j) < 0$ pour tout j et instable si $Re(\lambda_j) > 0$

– Si A n'est pas diagonalisable, il suffit de regarder ce qui se passe pour chaque bloc d'une triangulation de A supposons donc

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & \omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N$$

Où N est une matrice nilpotente (triangulaire supérieur) non nulle. Il vient alors :

$$e^{((t-t_0)A)} = e^{((t-t_0)\lambda I)} e^{((t-t_0)N)} = e^{(\lambda(t-t_0))^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)}{k!} N^k$$

Donc les coefficients de $e^{((t-t_0)A)}$ sont des produits de $e^{((t-t_0)\lambda)}$ par des polynômes de degré $\leq n-1$ non tous constants (car $N \neq 0$, donc le degré est aux moins 1).

– Si $Re(\lambda) < 0$, les coefficients tendent vers 0, et si $Re(\lambda) > 0$ leur module tend vers $+\infty$ car la croissance de l'expontielle l'emporte sur celle des polynômes.

– Si $Re(\lambda_j) = 0$ on a $\mid e^{((t-t_0)\lambda)} \mid = 1$ et par suit $e^{((t-t_0)A)}$ est non bornée on voit donc que les solutions sont asymptotiquement stables ssi $Re(\lambda) < 0$ et sinon elles sont instables

■

2.2.3 Portrait de phase en dimension 2

Soit le polynôme caractéristique de la matrice A :

$$P_A(x) = det(A - xI) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$$

alors A possède deux valeurs propres λ_1 et λ_2, ces valeurs propres nous renseignent sur le type de stabilité du système $x' = Ax$ selon leur signe :

1ercas

I- Si λ_1 et λ_2 sont réels :

– Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ alors le point d'équilibre est instable et il est appelé nœud instable.

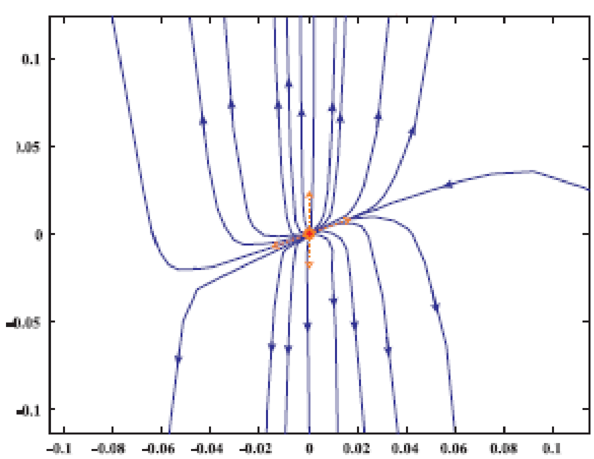


Fig. 2.3 – Nœud instable

Exemple 2.2.4 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 \\ x_2' = 2x_2 \end{cases} \quad où\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$ sont toutes positives et différentes on parle de nœud instable ou de source

– Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ alors le point d'équilibre est stable et il est appelé un noeud stable

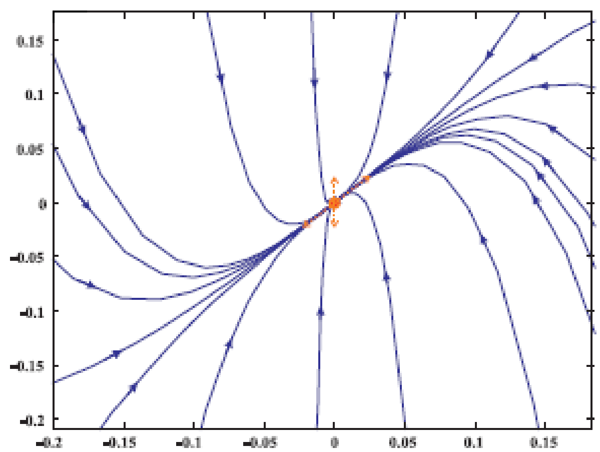


FIG. 2.4 – Nœud stable

Exemple 2.2.5 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases} \quad où\ A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -1$ sont toutes négatives et différentes, on parle de nœud stable

– Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_1 < 0$ dans ce cas Le point d'équilibre représente un col ou un point selle -

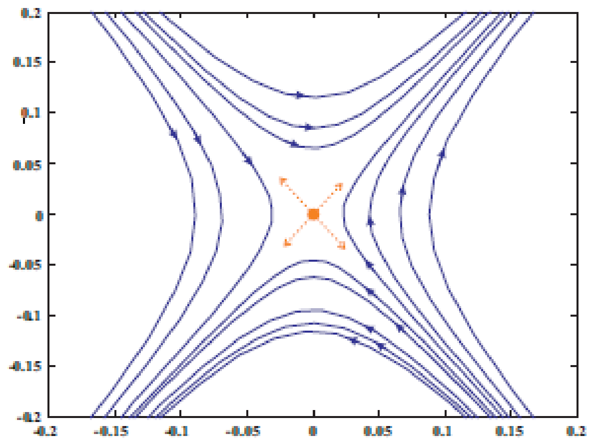


FIG. 2.5 – Point selle

Exemple 2.2.6 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = -2x_2 \end{cases} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1 > 0$ et $\lambda_2 = -2 < 0$,alors on parle d'un point selle

i) Si A est diagonalisable : ceci a lieu si tous les vecteurs sont des vecteurs propres, chaque droite qui passe par le point d'équilibre est une trajectoire, on distingue deux cas :

– Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$: le point d'équilibre est un nœud asymptotiquement instable

Exemple 2.2.7 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$ sont positives et égaux, alors on parle de nœud asymptotiquement instable

– Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$: le point d'équilibre est un nœud asymptotiquement stable.

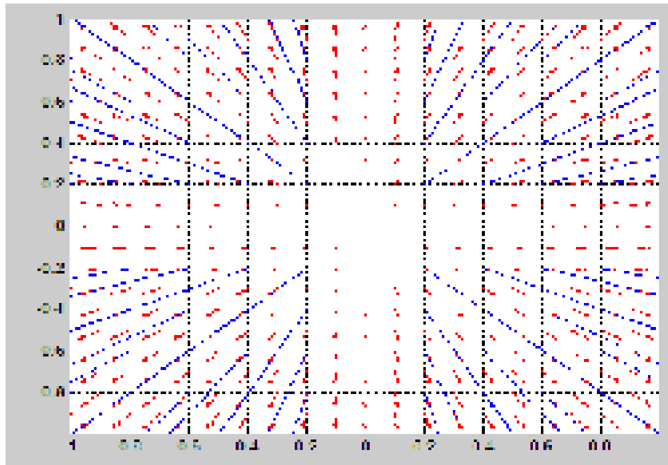


FIG. 2.6 – Nœud asymptotiquement instable

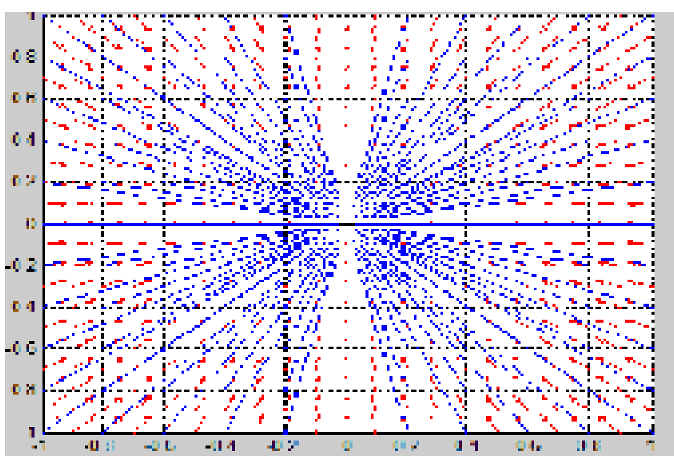


FIG. 2.7 – Nœud asymptotiquement stable

Exemple 2.2.8 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1^{'} = x_1 \\ x_2^{'} = x_2 \end{cases} \quad où\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -1 = \lambda_2$ sont négative et égaux , alors on parle de nœud asymptotiquement stable

ii) Si A n'est pas diagonalisable : il existe un seul vecteur propre et donc une seule droite qui contient une trajectoire. Le point d'équilibre est dénommé nœud dégénéré.

– Si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ le point d'équilibre est un nœud dégénéré instable

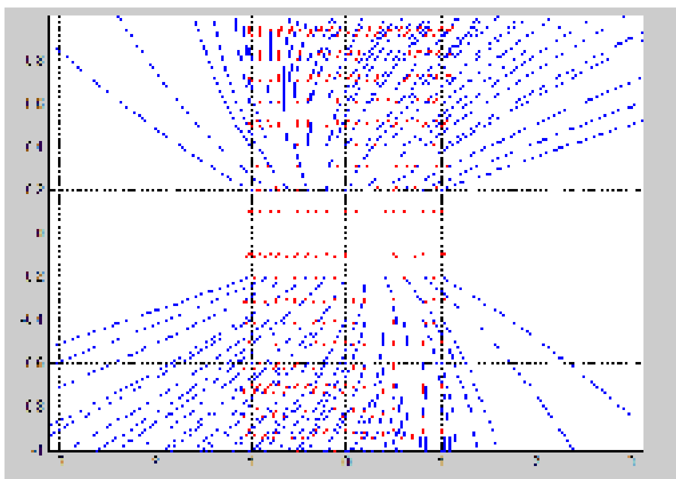


FIG. 2.8 – Nœud dégénéré instable

Exemple 2.2.9 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1^{'} = x_1 + x_2 \\ x_2^{'} = x_2 \end{cases} \quad où\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a une valeur propre double $\lambda = 1 > 0$ alors on parle d'un nœud dégénéré instable

– Si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ le point d'équilibre est un nœud dégénéré stable.

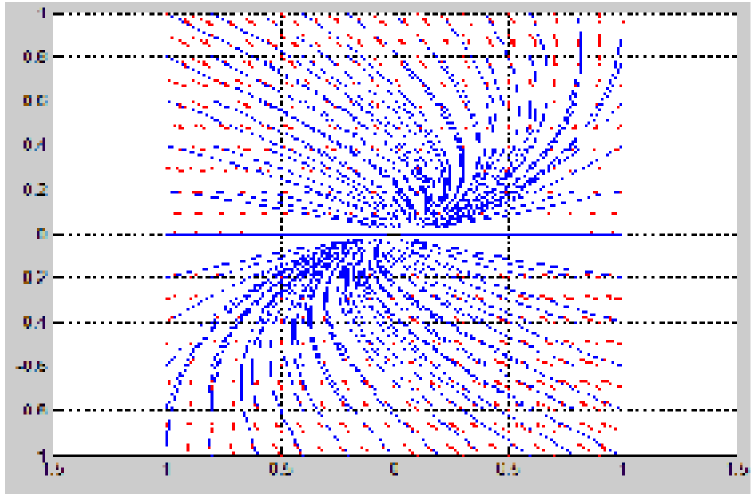


FIG. 2.9 – Nœud dégénéré stable

Exemple 2.2.10 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_2 \end{cases} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a une valeur propre double $\lambda = -1 < 0$ alors on parle d'un nœud dégénéré stable

– Dans le cas des valeurs propres identique, on obtient un nœud, soit stable $(\lambda < 0)$, soit instable si $(\lambda > 0)$

Exemple 2.2.11 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1' = 6x_1 + 5x_2 \\ x_2' = 6x_2 \end{cases} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 6 > 0$ (Double), alors on parle d'un nœud etoilé instable

2^{éme}cas

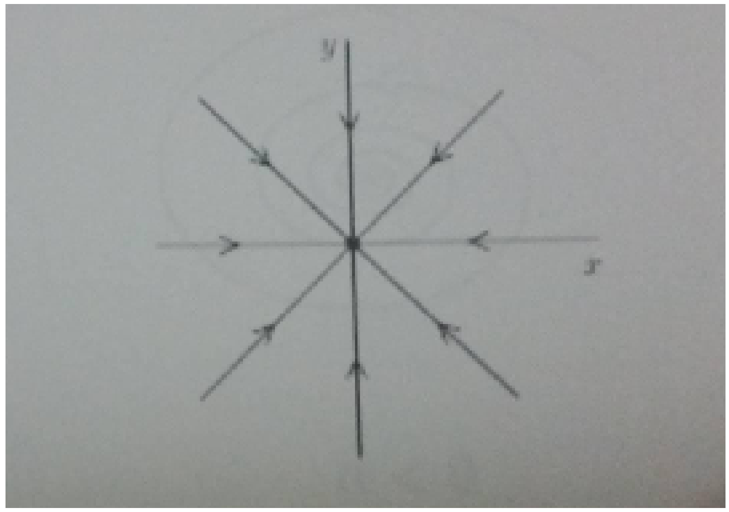


FIG. 2.10 – Nœud etoité stable

II- Si $\lambda_1$et λ_2 sont complexes : On pose :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha + i\beta \\ \lambda_2 = \alpha - i\beta \end{cases}$$

– Si $\alpha = 0$: les trajectoires sont des ellipses fermées avec période $T = \frac{2\pi}{\beta}$. Le point d'équilibre est dit un centre.

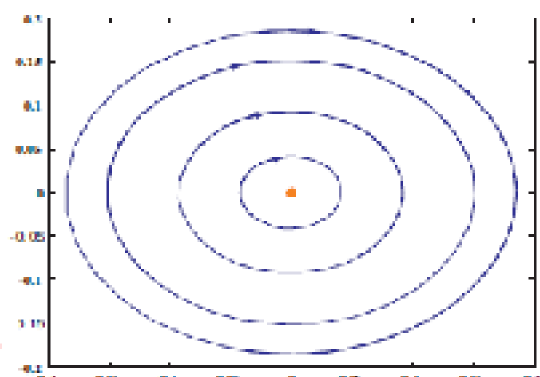


FIG. 2.11 – Centred

Exemple 2.2.12 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1^{'} = 2x_2 \\ x_2^{'} = -2x_2 \end{cases} \quad où\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2i$ et $\lambda_2 = -2i$ sont complexe et $\alpha = 0$, alors on parle d'un centre

– Si $\alpha < 0$: le système est asymptotiquement stable et les trajectoires convergent vers le point d'équilibre en suivant des spirales. Le point d'équilibre est dit foyer stable.

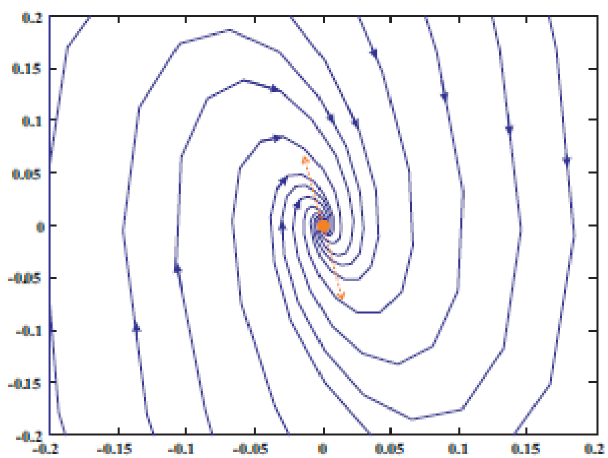


FIG. 2.12 – Foyer stable

Exemple 2.2.13 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1^{'} = -x_1 + 2x_2 \\ x_2^{'} = -2x_1 - x_2 \end{cases} \quad où\ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2i - 1$ et $\lambda_2 = -2i - 1$ sont complexe et $\alpha = -1 < 0$, alors on parle d'un foyer stable

– Si $\alpha > 0$: le système est instable et les trajectoires s'éloignent du point d'équilibre en suivant des spirales. Le point d'équilibre est dit foyer instable

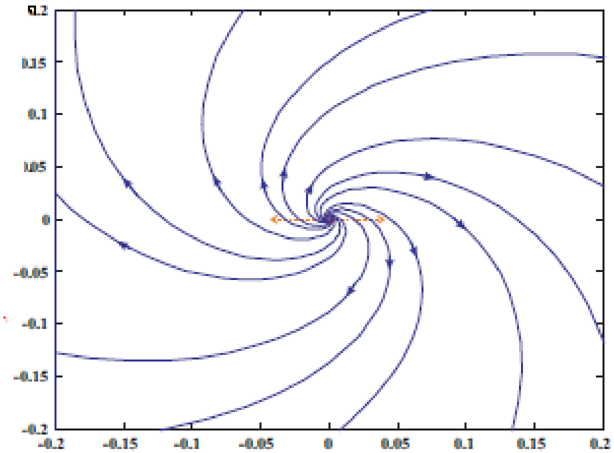


FIG. 2.13 – Foyer instable

Exemple 2.2.14 *Soit le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1^{'} = x_1 - 2x_2 \\ x_2^{'} = 2x_1 + 2x_2 \end{cases} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2i + 2$ et $\lambda_2 = -2i + 2$ sont complexe et $\alpha = 2 > 0$, alors on parle d'un foyer instable

Remarque 2.2.4 *Comme on ne peut pas toujours trouver des expressions faciles à manipuler de ces valeurs propres, on utilise le déterminent et la trace de la matrice A pour pouvoir prédire le comportement des systèmes au voisinage des points d'équilibre. On sait que : $det(A) = \lambda_1\lambda_2$ et $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$. L'équation caractéristique peut prendre donc la forme :*

$$P_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2 = x^2 - tr(A)x + \det(A) = 0$$

Il en suit que :$\lambda_{1,2} = \frac{tr(A) \pm ((tr(A)^2 - 4\det(A))^{\frac{1}{2}}}{2}$

- *Si $det(A) < 0$ alors on aura 2 valeurs propres réelles l'une positive et l'autre négative ce qui implique que le point d'équilibre est un point selle et donc instable*

– *Si* $det(A) > 0$ *mais* $tr(A) > 0$, *on distingue deux cas selon le signe du discriminent :*

i) Si $\Delta = (tr(A)^2 - 4\det(A)) > 0$ *donc la matrice* A *admet deux valeurs propres réelles positives d'où le point d'équilibre est un nœud instable*

ii) Si $\Delta < 0$, *la matrice* A *admet deux valeurs propres complexes conjuguées avec une partie réelle positive (car* $tr(A) > 0$*) donc le point d'équilibre est un foyer instable*

– *Si* $det(A) > 0$, *avec* $tr(A) < 0$, *on distingue aussi deux cas selon le signe du discriminent :*

i) Si $\Delta \geq 0$, *la matrice admet deux valeurs propres réelles négatives donc le point d'équilibre est un nœud stable.*

ii) Si $\Delta < 0$, *la matrice* A *admet deux valeurs propres complexes à partie réelle négative donc le point d'équilibre est un foyer stable.*

– *Si* $det(A) > 0$, *avec* $tr(A) = 0$, *le point d'équilibre est un centre. L'ensemble de ces cas peut être résumé par le graphique dans le domaine* $tr(A)$, $det(A)$ *où la parabole a pour équation* $(tr(A)^2 - 4\det(A))$

La stabilité en dimension n quelconque :Critère de Routh-Hurwitz

Le calcul du signe de la partie réelle des valeurs propres de A ne nécessite pas le calcul de toutes les valeurs propres, il est suffisant d'effectuer quelques tests sur les coefficients a_i du polynôme caractéristique. Un de ces tests est le test de **Routh Hurwitz** qui nous permet d'avoir des informations sur les valeurs propres sans les avoir déterminer explicitement et donc de déterminer la stabilité du système considéré.

Théorème 2.2.2 *Soit le système linéaire* $\frac{dX}{dt} = AX$ *avec* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *et soit le polynôme caractéristique associé :*

$$P_A(X) = det(A - XI) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n \text{ avec } a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$$

Considérons le tableau de Hurwitz qui est une matrice de taille $[n+2\,;\,E(\frac{n}{2})+1]$ *de la forme*

$$H = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ A_{n1} & A_{n1} & A_{n1} & \dots \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \frac{-\det\begin{pmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{pmatrix}}{a_{n-1}}\ ,\ A_{12} = \frac{-\det\begin{pmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-4} \end{pmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$A_{21} = \frac{-\det\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}}{A_{11}}, \dots, A_{ij} = \frac{-\det\begin{pmatrix} A_{i-2\ ,1} & A_{i-2\ ,\ j+1} \\ A_{i-1\ ,1} & A_{i-1\ ,\ j+1} \end{pmatrix}}{A_{i-1\ ,1}}, \forall i > 2$$

Condition nécessaire pour la stabilité du système :*Tous les coefficients du polynôme caractéristique ont le même signe.*

Condition suffisante pour la stabilité du système :*Tous les éléments de la première colonne du tableau de Routh ont le même signe*

Condition nécessaire et suffisante pour la stabilité du système : *Les coefficients du polynôme caractéristique et les éléments de la première colonne du tableau de Routh Hurwitz ou doivent avoir le même signe.*

2.3 Stabilité des systèmes différentiels non linéaire

Certaines méthodes visant à stabiliser les systèmes non linéaires sont basées sur l'utilisation de la linéarisation statique ou dynamique. Elles peuvent conduire à des résultats plus ou moins satisfaisants du point de vue pratique.

Cependant, ceux-ci ne s'adressent qu'à une classe relativement restreinte de systèmes physiques : ceux régis par des équations différentielles ordinaires non linéaires possédant certaines propriétés. La méthode de Lyapuov est une méthode temporelle indirecte qui permet l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires. Elle ne s'intéresse pas à la résolution des équations mais plutôt à l'étude de la stabilité des solutions et de leurs propriétés. L'avantage fondamental de l'approche de lyapunov réside dans le fait que cette approche est globale et permet dans de développer une étude de la stabilité sans pour autant calculer les solutions. Bien qu'elle reste confrontée à des problèmes de choix de fonction de Lyapunov, la méthode reste parfois l'unique outil disponible dans le cas de système complexe ou de grande dimension

Définition 2.3.1 *On considère le système autonome défini par*

$$\begin{cases} x' = F(x) \\ F(x_0) = 0 \end{cases} x, x_0 \in \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

où F est un champ de vecteur globalement lipchitzien sur $\mathbb{R}^n$. On désigne par $F_t(x)$ la solution de (2.2) *issue du point x à l'instant $t = 0$ soit*

$$\frac{dF_t(x)}{dt} \Big|_{t=0} = F(x) \text{ et } F_0(x) = x$$

Définition 2.3.2 *On dira que x_0 est un point d'équilibre localement attractif pour le système* (2.2) *s'il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 tel que $\forall x \in U$, $F_t(x)$ existe pour tout $t \geq 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F_t(x) = x_0$. Si $U = \mathbb{R}^n$, x_0 est globalement attractif.*

Définition 2.3.3 *On dira que x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable (resp. globalement asymptotiquement stable) s'il est stable et localement attractif (resp. stable et globalement attractif).*

2.3.1 Méthode de lyapunov (méthode indirecte)

la méthode indirecte de lyapunov consiste à étudier la stabilité du système non linéaire en utilisant son linéairisé peut dans certains cas, apporter une réponse au problème de stabilité locale. Le systéme (1.3) est linéairisé autour de P (en général $P = 0$), en utilisant un développement en série

$$x' = \frac{\partial f}{\partial x} \mid_{x=0} x + R(x)$$

Où $R(x)$ contient les termes en x d'ordre supérieur ou égale à 2. Le système linéarisé que l'on utilise est alors

$$x' = \frac{\partial f}{\partial x} \mid_{x=0} x = Ax$$

Soit $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ un champ de vecteur de classe C^2 sur U, et soit x_0 un zéro de f (point critique). On appelle linéairisé de $x' = f(x)$ au point x_0 l'équation différentielle linéaire $\varepsilon' = A\varepsilon$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \mid x_0 & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \mid x_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \mid x_0 & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \mid x_0 \end{pmatrix}$$

Si l'on fait un développement limité de f au voisinage de x_0. En générale, au voisinage de x_0, les solutions d'un système différentiel non linéaire $x' = f(x)$ ressemblent à celles de son linéairisé : $\varepsilon' = A\varepsilon$

Exemple 2.3.1 *Soit le système suivant*

$$\begin{cases} x' = x(2y - 1) \\ y' = y(2x - 1) \end{cases}$$

Les points d'équilibres sont : $p_1 = (0{,}0)$ *;* $p_2 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. *le linéarisé en* $(0{,}0)$ *est*

$$\varepsilon' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \varepsilon$$

Le linéarisé en $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ *est*

$$\varepsilon' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ & \end{pmatrix} \varepsilon$$

Théorème 2.3.1 ***(Produit scalaire adapté à un endomorphisme)*** *Soit* $E = \mathbb{R}^n$, g *un endomorphisme de* $L(\mathbb{R}^n)$ *et* P *son polynôme caractéristique.* P *se factorise en* $P = P_+ \cdot P_-$ *où* P_- *a toutes ses racines de parties réelles strictement négatives et* P_+ *a toutes ses racines de parties réelles positives ou nulles. On a la décomposition (lemme des noyaux) suivante :*

$$E = E_- \oplus E_+ \ \text{avec}\ E_- = ker(P_-(A)),\ E_+ = ker(P_+(A))$$

Alors il existe un produit scalaire $< \cdot,\cdot >$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *et* $\alpha > 0$ *tels que*

$$ker(P_-(A)) \perp ker(P_+(A))$$

$$\text{et}\ \ \forall\ x \in E_-, \quad < g(x),x > \ \ \leq \ \ -2\alpha < x,x >$$

$$\forall\ x \in E_+, \quad < g(x),x > \ \ \geq \ \ -2\alpha < x,x >$$

Théorème 2.3.2 ***(Stabilité en première approximation)*** *Soit le système*

$$x' = f(x)\ ,\ f \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) \tag{2.3}$$

et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *un équilibre. Si* x_0 *est un équilibre asymptotiquement stable du système linéarise* $x' = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)(x - x_0)$, *alors c'est un équilibre asymptotiquement stable de* (2.3).

Preuve. Quitte à considérer la fonction $\widetilde{f}(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$, on peut supposer que $x_0 = 0$ et poser $g = df(0)$. D'aprés (le théorème Produit scalaire adapté à un endomorphisme), on peut construire $< \cdot,\cdot >$ adapté à g, tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $< g(x),x > \leq -2\alpha < x,x >$, pour un certain $\alpha > 0$ (notons qu'ici $P_- = P$ de sorte que $ker\ P_-(g) = \mathbb{R}^n$). La fonction $V(y) = \frac{1}{2} < x, x > = \frac{1}{2} \parallel x \parallel^2$ est une fonction C^1 qui admet un minimum strict en 0. De plus, on a au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + df(0)x + o(y) = g(x) + o(x)$$

de sorte qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\parallel x \parallel \leq \varepsilon$, $< f(x) - g(x) > \leq \alpha \parallel x \parallel$. Finalement, pour x dans la boule de centre 0 et de rayon ε, on a :

$$\begin{aligned} dV(x)f(x) = & < x,f(x) > \\ = & < x,g(x) > + < x,f(x) - g(x) > \\ & \leq -2\alpha < x,x > + \parallel x \parallel + \parallel f(x) - g(x) \parallel \text{ (par Cauchy-Schwartz)} \\ & \leq -2\alpha \parallel x \parallel^2 + \alpha \parallel x \parallel^2 = -2\alpha V(x). \end{aligned}$$

Finalement, V est une fonction de Lyapunov et on peut conclure en utilisant le théorème de Lyapunov. ∎

Théorème 2.3.3 ***(Non-stabilité en première approximation)*** *Soit le système* (2.3) *et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un équilibre. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ a une valeur propre de partie réelle strictement positive. Alors x_0 n'est pas un équilibre stable de* (2.3)

Remarque 2.3.1 *On ne peut rien dire dans le cas où $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ a une valeur propre de partie* *réelle nulle, comme le montre l'exemple suivant :*

$$\begin{cases} x_1' &= x_2 \pm (x_1^2 + x_2^2)^2 x_1 \\ x_2' &= -x_1 \pm (x_1^2 + x_2^2)^2 x_2 \end{cases}$$

Le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, *dont les valeurs propres sont* $\pm i$. *Maintenant, en passant en coordonnées polaires* $x_1 = r(\theta)cos(\theta)$, $x_2 = r(\theta)sin(\theta)$, *il vient1*

$$x_1' = \dot{r}cos(\theta) - r\dot{\theta}sin(\theta) = rsin(\theta) \pm r^3 cos(\theta),\ x_2' = \dot{r}sin(\theta) + r\dot{\theta}cos(\theta) = -rcos(\theta) \pm r^3 sin(\theta)$$

d'où $\dot{\theta} = \mp 1$ *et* $\dot{r} = \pm r^3$. *L'équilibre est alors stable où instable suivant le signe choisi* $\pm$

Définition 2.3.4 *Soit* (2.3) *et* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Le système linéarisé en* x_0 *est le système d'équations différentielles linéarisé*

$$x' = df(x_0)(x_0 - x) + f(x_0)$$

C'est le système d'équations différentielles linéairisé obtenu en remplaçant $f(x)$ *par son développement de Taylor ou premier ordre en* x_0

Résultats principaux

Théorème 2.3.4 *Si le système linéarisé est asymptotiquement stable (toutes les valeurs propres de A sont dans le demi-plan complexe gauche) alors le point d'équilibre du système non-linéaire est asymptotiquement stable*

Théorème 2.3.5 *Si le système linéarisé est instable (au moins une des valeurs propres de A sont dans le demi-plan complexe droit) alors le point d'équilibre du système non-linéaire est instable*

Théorème 2.3.6 *Si le système linéarisé est limite de stabilité (toutes les valeurs propres* *de A sont dans le demi-plan complexe gauche et au moins une d'autre elles sur l'axe imaginaire) alors on ne peut rien conclure sur la stabilité du système non-linéaire*

Exemple 2.3.2 *Soit l'équation non linéaire :*

$$x' = ax + bx^4$$

Par linéarisation on obtient :

$$\Delta' x = x' = a\Delta x = ax$$

En appliquant la méthode indirecte on a :

– *Si $a > 0$ alors le système est instable*

– *Si $a < 0$ alors le système est asymptotiquement stable*

– *Si $a = 0$ alors conclusion ? Dans ce dernier nécessité d'utiliser une autre approche*

2.3.2 Seconde méthode de lyapunov (méthode direct)

La seconde méthode est plus difficile à mettre en œuvre mais, en contre-partie, et d'une portée beaucoup plus général. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée et appelées fonction de lyapunov.

Cas autonome

2.3.3 Fonctions de Lyapunov

La détermination de la fonctions de Lyapunov reste encore l'étape la plus complexe dans l'étude de la stabilité.

Définition 2.3.5 *Soit $V : U \to \mathbb{R}^n$ ayant des dérivées partielles sur U. On définit la* *dérivée totale* $\dot{V}$ *pour le système* (2.2) *par :*

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^i V}{\partial x_i(x)} f_i(x) \quad tel\ que\ f_i \in F,\ \forall\ i \in \mathbb{N}$$

Définition 2.3.6 *Une fonction* $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue sur un Voisinage* U *de* x_0*, définie positive et différentiable sur* $U - \{x_0\}$ *telle que :*

– $V(x_0) = 0$ *et* $V(x) > 0$ *si* $x \neq x_0$

– $\dot{V}(x_0) = F.V(x_0) \leq 0$,$\forall\ x \in U$ *où*

$$F.V(x) = \frac{d}{dt} V F_t(x) \mid_{t=0} = < \nabla F(x), F(x) >$$

est appelée fonction de Lyapounov large pour (2.2) *en* x_0*. Si de plus la fonction vérifie la condition :*

– $\dot{V}(x_0) < 0$, $\forall x \in U - \{x_0\}$ *alors* V *est appelée fonction de Lyapunov stricte pour* (2.2) *en* x_0*.*

Théorèmes de lyapunov

Définition 2.3.7 ***(Fonction radialement non bornée)*** *Une fonction* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est radialement non bornée si :*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} V(x) = +\infty$$

Théorème 2.3.7 ***(Théorème stabilité locale)*** *Soit* 0 *un point d'équilibre de* (1.3)*, s'il existe un voisinage* V *de* 0 *et la fonction* $v : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$*, continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :*

(i) v *soit définie positive*

(ii) La dérivée total v' *soit négative alors* 0 *est stable. De plus si la dérivée total* v' *est définie négative, alors* 0 *asymptotiqment stable*

Théorème 2.3.8 ***(Théorème stabilité globale)*** *Soit* 0 *un point d'équilibre de* (1.3)*, s'il existe un voisinage* V *de* 0 *et une fonction* $v : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :*

– $v(x)$ *est définie positive*

– $v^{'}(x)$ *est définie négative*

$$v(x) \underset{\|x\| \to \infty}{\longrightarrow} \infty \quad \textit{(est radialement non bornée)}$$

Alors le point d'équilibre $(P = 0)$ *est globalement asymptotiquement stable*

Théorème 2.3.9 ***(Théorèmé instabilité)*** *Soit* 0 *un point d'équilibre, s'il existe un voisinage* V *de* 0 *et une fonction*

$$W : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

continue, ayant des dérivées partielles continuées, telle que

– $\forall\ x \in V - \{0\},\ W(x) > W(0)$

– *La dérivée totale* W' *soit définie positive, alors* 0 *est instable*

Cas non autonome

Considérons les systèmes non autonomes décrits par

$$x' = f(t, x)\ ,\ x \in \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

La principale difficulté dans l'étude de tels systèmes est que les solutions dépendants de l'instant initial t_0

$$\| x(t) \| \ \leq\ k \| x(t) \| e^{-\alpha(t-t_0)}\ ;\ \forall t \geq t_0$$

Exemple 2.3.3 *Soit le système*

$$x'(t) = -\beta(t)x(t)$$

La solution s'écris :

$$x'(t) = x(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} \beta t \; dt}$$

– *Si* $\int_{t_0}^{+\infty} \beta t dt = +\infty$*, le système est asymptotiquement stable*

– *S'il existe une constante* T*, telle que :*

$$\int_{t_0}^{t+T} \beta(\mu) d\mu \geq \gamma$$

pour tout t*, alors il expontiellement stable*

Définition 2.3.8 ***(Fonction décrescente)*** *Une fonction* $V : J \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ *est décresente si :*

$$\lim_{\|x\| \to 0} V(x,t) = 0$$

uniformément en t*, c'est à dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \; \delta > 0; \forall \; x \in U, (\| \; x \; \| < \delta) \Longrightarrow (\forall \; t \in J, \;\; V(x,t) < \varepsilon)$$

théorème de stabilités La dérivée temporelle de $v(x,t)$ est :

$$v'(x,t) = \frac{\partial v}{\partial x} x' + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} f(x,t) + \frac{\partial v}{\partial t}$$

Théorème 2.3.10 ***(Stabilité uniforme)*** *Soit* 0 *un point d'équilibre de* (2.4)*, s'il existe un voisinage* V *de . et une fonction*

$$v : J \times V \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :

- v *est définie positive*
- v' *est semi-définie négative. Alors* 0 *est stable au sens de lyapunov. Si de plus* V *est décroissante, alors* 0 *est uniformément stable*

Théorème 2.3.11 ***(Stabilité asymptotique uniforme)*** *Soit* 0 *un point d'équilibre de* (2.4)*, s'il existe un voisinage* V *de* 0 *et une fonction*

$$v : J \times V \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :

- v *est définie positive*
- v' *est définie négative*
- v *est décroissante alors* 0 *est uniformément asymptotiquement stable*

Définition 2.3.9 ***(Fonction définie positive localement)*** *Une fonction scalaire dépendante du temps,* $V(x,t)$ *est localement (semi) définie positive si :*

- $V(0,t) = 0$
- *il existe une fonction scalaire invariante (semi) définie positive* V_0 *telle que* $\forall x \in \Omega, \forall t > t_0$*,* $V(x,t) \geq V_0(x)$

Définition 2.3.10 ***(Fonction définie positive globalement)*** *Une fonction scalaire est globalement définie positive si :*

- $V(0,t) = 0$
- *il existe une fonction scalaire invariante définie positive* V_0*telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall t > t_0,\ V(x,t) \geq V_0(x)$$

Définition 2.3.11 ***(Fonction définie négative)*** *Une fonction scalaire dépendante du temps,* $V(x,t)$ *est localement (semi)définie négative si :*

– $-V(x,t)$ *est localement (semi) définie positive.*

– *Autre concept nécessaire : les fonctions décroissantes*

Théorème 2.3.12 *Si dans un voisinage de Ω l'origine, il existe une fonction scalaire $V(x,t)$ avec des dérivées partielles continues telle que :*

– $V(x,t)$ *est définie positive*

– $V(x,t)$ *est semi définie négative, alors l'origine est stable au sens de Lyapunov.*

De plus si :

– $V(x,t)$ *est décroissante alors l'origine est uniformément stable.*

Si pour la seconde condition on vérifie

– $V(x,t)$ *est définie négative, alors l'origine est uniformément asymptotiquement stable*

Exemple 2.3.4 *On considère le système*

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - e^{-2t}x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$$

pour lequel on s'interroge sur la stabilité de l'origine. Soit la fonction de Lyapunov candidate

$$V(x,t) = x_1^2 + (1 + e^{-2t})x_2^2$$

– $V(x,t)$ *est définie positive par*

$$V_0(x) = x_1^2 + x_2^2$$

– $V(x,t)$ *est décroissante par*

$$V_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2$$

De plus, la dérivée de $V(x,t)$ pour le système vaut :

$$\dot{V}(x,t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

$$\iff \quad \dot{V}(x,t) = -2x_2^2e^{-2t} + 2x_1x_1' + 2(1+e^{-2t})x_2x_2' + 2(1+e^{-2t})x_2(x_1-x_2)$$

$$\iff \dot{V}(x,t) = -2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2(1+e^{-2t}))$$

ce qui montre que :

$$\dot{V}(x,t) \leq -2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$$

$$\iff \dot{V}(x,t) \leq -x_1^2 - (x_1-x_2)^2 - x_2^2$$

$$\iff \dot{V}(x,t) \leq 0$$

On en déduit alors que $\dot{V}$ *est définie négative, et que* 0 *est uniformément asymptotiquement stable*

Théorème 2.3.13 ***(Stabilité asymptotique uniforme globale)*** *Soit* 0 *un point d'équilibre de* (2.4)*, s'il existe un voisinage* V *de* 0 *et une fonction* $v : J \times V \longrightarrow \mathbb{R}_+$*, continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :*

– v *est définie positive*

– v' *est définie négative*

– v *est radialement non bornée. Alors* 0 *est globalement uniformément asymptotiquement stable*

Exemple 2.3.5 *Soit le système* ***(masse-ressort)***

$$x" + c(t)x' + k_0x = 0$$

$c(t)$ *peut être assimilé à un coefficient de frottement variable et penser que si* $c(t) >$ *constant* > 0*, l'origine sera asyptotiquement stable. Ceci n'est pas nécessairement vraie. En effet avec* $c(t) = 2 + e^t$ *et la condition initiale*

$$x(0) = 2a \text{ et } x'(0) = -a \text{ on a } x(t) = a(1+e^{-t}) \text{ et } x(\infty) = a$$

L'amortissement augmente tellement vite que le système s'immobilise en a. *En supposant que* $c(t) = (2+8t)$ *et* $k_0 = 5$, *on peut conclure que le système* $x" + (2+8t)x' + 5x = 0$ *est asymptotiquement stable*

2.3.4 Théorème inverse de lyapunov

Théorème 2.3.14 ***(Théorème inverse de stabilité uniforme)*** *On considère le système* (1.1) *avec* $f \in C^0(V_{t_0})$ *et* $f \in lip_y(V_{t_0})$, *il existe un voisinage* $V'_{t_0} \subset V_{t_0}$ *et une fonction de lyapunov associée au système :*

$$v : V'_{t_0} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

telle que :

– v *est décrescente*

– $v \in lip_{(t,y)}(V'_{t_0})$

Théorème 2.3.15 ***(Théorème inverse de stabilité uniforme asymptotique)*** *On considère le système* (2.4), *avec* $f \in C^0(V_{t_0})$ *et* $f \in lip_y(V_{t_0})$, *il existe un voisinage* $V'_{t_0} \subset V_{t_0}$ *et une fonction de lyapnov associée au système :*

$$v : V'_{t_0} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

telle que :

1. v *est décrescente*
2. $v \in lip_{(t,y)}(V'_{t_0})$
3. v' *est définie négative*

Théorème 2.3.16 ***(Premier théorème sur l'instabilité)*** *Si dans un voisinage de* Ω *l'origine il existe une fonction* $V(x,t)$ *continûment différentiable et décroissante telle que*

– $V(0,t) = 0$

– $V(x,t_0)$ *est peut prendre des valeurs positive (resp. négative) dans un voisinage arbitraire de* Ω

– V' *est définie positive (resp. négative) dans* Ω *alors l'origine est un point d'équilibre instable.*

Théorème 2.3.17 ***(Deuxième théorème sur l'instabilité)*** *Si dans un voisinage* Ω *de l'origine il existe une fonction scalaire* $V(x,t)$ *continûment différentiable et décroissante telle que :*

– $V(0{,}t) = 0$

– $V(x,t_0)$ *peut prendre des valeurs positives dans un voisinage arbitraire de* Ω*,*

– $V' - \lambda V(x,t) \geq 0$*,* $\forall t \geq t_0$ *et pour* $x \in \Omega$ *avec* λ *une constante strictement positive, alors l'origine est un point d'équilibre instable*

Exemple 2.3.6 *Soit le système :*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2 2sin^2(x_2) + 5x_1x_2^2\sin^2(x_1) \\ x_2' \ = 3x_1sin^2(x_2) + x_2 - 5x_1^2x_2\cos^2(x_1) \end{cases}$$

avec :

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

On peut montrer que $\dot{V}(x) = 2V(x) + 5x_1^2x_2^2$*. ce qui correspond à la condition* 3 *du théorème précédent. L'origine est donc un point d'équilibre instable.*

Théorème 2.3.18 ***(Troisième théorème sur l'instabilité (Cetaev))*** *Si dans un voisinage de l'origine il existe une fonction scalaire* $V(x,t)$ *continûment différentiable et décroissante et s'il existe une région* $\Omega_1 \subset \Omega$ *telles que*

– $V(x,t_0)$ *et* $V'(x,t_0)$ *sont définies positives sur* Ω_1

– *l'origine appartient à la frontière de* Ω_1

– *sur le frontière de* Ω_1 *on vérifie* $V(x,t) = 0, \ \forall t \geq t_0$, *alors l'origine est un point d'équilibre instable*

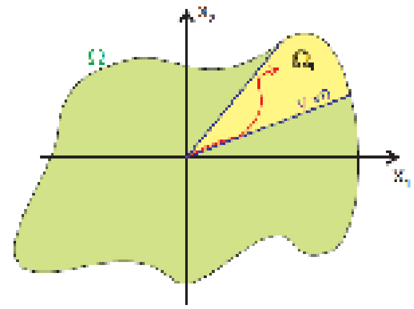


FIG. 2.14 – Interprétation géométrique

Cas systèmes linéaires On se donne l'équation d'état :

$$x' = Ax$$

et on cherche une fonction de lyapunov de forme quadratique :

$$V(x) = x^T P x$$

Le problème est donc de calculer la matrice P, sachant qu'elle doit être définie positive

Conclusion $\dot{V}$:

$$\dot{V} = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T P A x + x^T A^T P x = x^T (PA + A^T P) x$$

P est une matrice définie positive $\Rightarrow$ toutes ses valeurs propres sont strictement positives

Pour que le système soit stable, il suffit d'avoir :

$$-Q = (PA + A^T P)$$

avec Q définie positive. Le problème peut êtralors posé ainsie : Etant donnée Q définie positive , trouve la matrice P définie positive qui vérifie l'équation matricielle :

$$(PA + A^T P) = -Q$$

Le calcule de P peut se faire soit de manière directe en résolvant l'équation à $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues soit en utilisant la formule

$$P = \int_0^\infty e^{A^T \boldsymbol{t}} Q e^{A\boldsymbol{t}} dt$$

$$\exists\ \sigma < 0,\ \forall t \geq 0 \qquad \| e^{A^T\boldsymbol{t}} Q e^{A\boldsymbol{t}} \| \leq c \| Q \| e^{2\sigma \boldsymbol{t}}$$

En effet, si le système est stable, on peut écrire :

$$e^{A^T \boldsymbol{t}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'où :

$$Q = -\left[e^{A^T\boldsymbol{t}} Q\ e^{A\boldsymbol{t}} \right]_0^\infty = -\int_0^\infty d(e^{A^T\boldsymbol{t}} Q\ e^{A\boldsymbol{t}})$$

Il vient

$$-Q = A^T \int_0^\infty (e^{A^T\boldsymbol{t}} Q e^{A\boldsymbol{t}} dt) + \int_0^\infty (e^{A^T\boldsymbol{t}} Q e^{A\boldsymbol{t}}) A$$

En rapprochant ce dernier résultat de l'expression :

$$-Q\ = (PA + A^T P)$$

on obtient évidement la formule préconisée pour le calcul de P

2.4 Systèmes différentiels presques linéaires

On regarde les systèmes autonomes :

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{2.5}$$

Définition 2.4.1 *Ce système est dit presque linéaire si* 0 *est un point critique isolé, et s'il peut être écrit sous la forme*

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 + g_1(x_1, x_2) \\ x_2' = cx_1 + dx_2 + g_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{2.6}$$

avec :

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{g_1(x_1,x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} \frac{g_2(x_1,x_2)}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = 0$$

(I.e. $g_1(\overrightarrow{x}) = o(|\overrightarrow{x}|) = g_2(\overrightarrow{x})$ *au voisinage de* 0*) Et on appelle système différentiel linéaire associé le système différentiel linéaire :*

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 \\ x_2' = cx_1 + dx_2 \end{cases}$$

Exemple 2.4.1 *Le système différentiel autonome :*

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 + x_1x_2 \\ x_2' = -13x_1 - 3x_2 + x_1^2 \end{cases}$$

est presque linéaire. De même que le système prédateur proie :

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 - bx_1x_2 \\ x_2' = cx_1x_2 - kx_2^2 \end{cases}$$

Théorème 2.4.1 *On considère le système différentiel presque linéaire* (2.6) *avec* $ad-bc \neq 0$ (*le point critique* 0 *étant isolé*). *On suppose que* g_1 *et* g_2 *sont* C^1. *Et on considère les racines* λ_1 *et* λ_2 *du polynôme caractéristique du système différentiel linéaire associé. Alors les solutions ont le comportement suivant au voisinage de* $P = 0$ (*voisin du comportement correspondant au système linéaire associé*) *:*

1. P *est un nœud lorsque* λ_1 *et* λ_2 *sont réels de même signe* $(\lambda_1\lambda_2 > 0)$ *avec de plus* $\lambda_1 \neq \lambda_2$. *Lorsque* $\lambda_1 = \lambda_2$, P *est soit un nœud, soit un point spiral.*
2. P *est un point selle ssi* λ_1 *et* λ_2 *sont réels de signe opposé* $(\lambda_1\lambda_2 < 0)$
3. P *est un point spiral lorsque* $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ *est non réel avec partie réelle non nulle.*
4. *Lorsque* $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ *est un imaginaire pur,* P *est soit un centre, soit un point spiral.*

Théorème 2.4.2 ***(Stabilité : Théorème de Lyapunov)*** *Sous les hypothèses du théorème précédent, pour le système différentiel presque linéaire* (2.6) *:*

1. *Si* $Re(\lambda_1) < 0$ *et si* $Re(\lambda_2) < 0$, *alors* P *est asymptotiquement stable* (*applicable en particulier lorsque* λ_1 *et* λ_2 *sont réels*).
2. *Sinon, i.e.* $Re(\lambda_1) > 0$ *ou si* $Re(\lambda_2) > 0$, *alors* P *est instable*

Conclusion

Ce mémoire a pour cadre l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov c'est un des aspects qualitatifs les plus importants des systèmes différentiels est leur comportement asymptotique, c'est-à-dire le comportement des solutions lorsque le temps tend vers l'infini. Trois axes d'étude ont été développés.

Dans le premier axe, nous avons donné en détail les définitions et les propriétés et rassemblé tous les résultats connus sur les systèmes différentiels et nous avons données les résultats établis pour les systèmes linéaires et une classification des systèmes différentiels bidimensionnels. Dans le second axe nous avons données établis pour des systèmes différentiels non linéaires deux méthodes sont présentés la première concerne la comparaison avec le système linéarisé Cette méthode, malgré sa simplicité ne semble pas très efficace. En d'autres termes, la méthode de linéarisation est une méthode par approximation, elle n'est donc valide que localement autour du point d'équilibre concerné et ne peut certainement pas être utilisée pour en déduire un comportement global. De plus, les dynamiques d'un système non linéaire sont beaucoup plus riches que celles d'un système linéaire dans le sens où elles reflètent des comportements et des phénomènes purement linéaires. La deuxième concerne la fonction de Lyapunov. Le principal inconvénient de cette méthode est de ne pas disposer de guide pour le choix de la fonction de Lyapunov. Dans la plupart des applications, les fonctions considérées sont l'énergie totale du système. Un autre inconvénient de cette méthode, c'est qu'en donnant une telle fonction de Lyapunov, on doit examiner sa dérivée temporelle tout au long de la trajectoire pour montrer sa décroissance.

Bibliographie

[1] Leborgne.G, (2006), Notes du cours d'Équations aux Dérivées Partielles de l'ISIMA, première année

[2] Hmiche.H, (2011), Invertion à gauche des systèmes dynamiques hybrides choatiques, Mémoire doctorat, Université De Tizi-Ouzou

[3] Sylvie Benzoni-Gavage, (2010), Calcul différentiel et équations différentielles, Professeur à l'université Lyon 1

[4] Ben aichi.S, (2013), Notions sur la stabilité des systèmes différentiels, Université Mohamed Khaider, Biskra

[5] Fournier Daniele , (2007), Analyse des Systèmes non linéaires (méthode du plan de phase), Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

[6] Mahout.V , (2013), Théorie de Lyapunov pour les $\sum$ non linéaires non autonomes (quelques éléments)

[7] Mahout.V, (2013), Théorie de Lyapunov pour les $\sum$ non linéaires non autonomes (preuve de stabilité)

[8] Siar.N, (2016), La stabilité des systèmes dynamiques et la théorie de bifurcations : application au modèle de Goodwin, Mémoire Licence, Université de Ourgla

[9] Croce.G, (2013), Cours Equations différentielles ordinaires.Master Maths-Info à l'Université du Havre

[10] Basdevant.C, (2004), Notes de cours d'Analyse (équations différentielles), Université Paris-Nord