

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Analyse**

Par

**YAGOUB Asma**

Titre :

**Etude de l'équation de la chaleur**

Membres du Comité d'Examen :

Dr. <b>MENACER Tidjani</b>	UMKB	Président
Dr. <b>DAKHIA Ghania</b>	UMKB	Encadreur
Dr. <b>KASSI Fatma</b>	UMKB	Examineur

Juin 2018

## *Dédicace*

Avant tout, merci Allah de m'avoir donné la force et la volonté de terminer ce modeste travail. Je dédie ce mémoire

À mes chers parents << Ma mère Dalila >> et << Mon père Abdellali >>, aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont ils ne cessent de me combler. Que dieu leur procure bonne santé et long vie.

À Mes chères sœurs <<Wafa>> et <<bouthaina>>, avec votre soutien et votre amour, j'ai terminé mes études.

À mes chers frère.

À toute ma famille <<YAGOUB >>.

À <<Mes tantes>> et mes <<Mes oncles>>.

À tous <<Mes cousins>> et <<Mes cousines>>.

À mes très chers amis : <<Manel, Merzaka, Nardjes, Sonia, Bissa, Zineb, Asma, Fadhila, Nour >>.

**YAGOUB Asma**

## **REMERCIEMENTS**

Tout d'abord, je tiens à remercier "**Allah**" le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné l'aide, le courage et la patience d'accomplir ce travail.

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur M<sup>me</sup> << **DAKHIA Gania** >>, D.r à l'université de Biskra, pour ses précieux conseils, sa disponibilité, sa compétence et son aide durant toute la période du travail.

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury, Mr << **TIDJANI Menacer** >>, D.r à l'université de Biskra et M<sup>me</sup> << **KASSI Fatma** >>, D.r à l'université de Biskra, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail, et de l'enrichir par leurs propositions.

Et je présente tous mes aux enseignants du département de Mathématique de l'université de Mohamed Khider, Biskra.

J'adresse mes plus sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études supérieures, mes aimables amies, mes collègues d'étude.

Enfin, je tiens à remercier tout particulièrement **mes parents** et **Mes sœurs** qui m'ont toujours encouragé, soutenu et qui étaient toujours à mes côtés. Merci à tous et à toute.

# Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	ii
Liste des figures	v
Introduction	1
<b>1 Rappel sur l'analyse de Fourier</b>	<b>3</b>
1.1 Séries de Fourier . . . . .	3
1.1.1 Le cadre de l'espace $L^2_P(0, a)$ : . . . . .	5
1.1.2 L'idée d'approximation . . . . .	5
1.1.3 Inégalité de Bessel . . . . .	6
1.1.4 Convergence de l'approximation . . . . .	7
1.1.5 Egalité de Parseval . . . . .	8
1.2 Convergence ponctuelle de la série de Fourier . . . . .	10
1.3 Convergence uniforme de la série de Fourier . . . . .	11
1.4 Transformation de Fourier . . . . .	12
1.4.1 La Transformarion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	13
1.4.2 La transformation de Fourier dans $L^2$ . . . . .	13
<b>2 Résolution de quelques problèmes liés à l'équation de la chaleur</b>	<b>15</b>

2.1	Equation de la chaleur à une dimension . . . . .	15
2.2	Description physique . . . . .	17
2.3	Résolution du problème de Cauchy (condition initiale périodique) : . . . .	19
2.4	Résolution de l'équation de la chaleur avec condition au bord périodique : .	24
2.5	Résolution du problème de Dirichlet : . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Problème inverse de conduction de la chaleur</b>	<b>34</b>
3.1	Le problème direct . . . . .	35
3.1.1	Opérateur direct (stabilité) . . . . .	37
3.2	Le problème inverse . . . . .	38
3.2.1	Énoncé du problème . . . . .	38
3.2.2	La régularisation du problème inverse . . . . .	40
	<b>Conclusion</b>	<b>44</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>45</b>

# Table des figures

1.1	$f_1(x) = \frac{4}{\pi} \sin x$ . . . . .	7
1.2	$f_3(x) = \frac{4}{\pi} (\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x)$ . . . . .	7
1.3	$f_5(x) = \frac{4}{\pi} (\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x)$ . . . . .	8
2.1	Problème de Cauchy . . . . .	19

# Introduction

En mathématiques et en physique théorique, **l'équation de la chaleur** est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique, introduite initialement en 1807 par **Joseph Fourier**, après des expériences sur la propagation de la chaleur, suivies par la modélisation de l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier, permettant une grande amélioration à la modélisation mathématique des phénomènes, en particulier pour les fondements de la thermodynamique, et qui ont entraîné aussi des travaux mathématiques très importants pour les rendre rigoureuses, véritable révolution à la fois physique et mathématique, sur plus d'un siècle.

Cette équation est très présente en physique sous le nom générique d'équation de diffusion. On la retrouve dans la diffusion de charge électrique dans un conducteur, dans le transfert radiatif, etc.

Dans notre mémoire, on s'intéresse à l'étude de l'équation de la chaleur en dimension une suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \text{ où } c > 0 \text{ et } t > 0.$$

Accompagnée d'une condition initiale et des conditions aux limites. Plus précisément, on étudie la question d'existence et d'unicité de la solution. Notre travail est organisé comme suit :

- **Dans le premier chapitre**, on donne quelques rappels sur l'analyse de Fourier.
- **Dans le deuxième chapitre**, on présente l'explication mathématique et physique

de l'équation de la chaleur, on étudie l'existence et l'unicité de trois problèmes concernant cette équation. Dans le premier problème, on prend  $x \in \mathbb{R}$  et une condition initiale (pour  $t = 0$ ) périodique (problème de Cauchy). Dans le deuxième problème, on prend  $x > 0$  et une condition au bord ( $x = 0$ ) périodique. Finalement pour le troisième problème,  $x \in [0, \pi]$  et nous avons les deux types de conditions : condition initiale et conditions au bord de Dirichlet. Cette étude est basée sur la représentation de la solution en série de Fourier.

- **Dans le troisième chapitre** on présente un problème inverse de conduction de la chaleur où on considère  $x \in [0, 1]$ , et on détermine la température en  $x = 1$  à partir de la température et le flux sur  $x = 0$ . On le résout par la méthode de **régularisation de Fourier**.



# Chapitre 1

## Rappel sur l'analyse de Fourier

Dans ce chapitre, on va donner un rappel sur les principaux résultats sur l'**analyse de Fourier** dont nous avons besoin, en donnant les définitions et les propriétés des **séries de Fourier**, et de **transformation de Fourier**. Pour plus de détails voir [4].

### 1.1 Séries de Fourier

**Définition 1.1.1** Une fonction  $f$  est dite *périodique de période  $a$  (nombre réel strictement positif)* si

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t + a) = f(t).$$

**Définition 1.1.2** Si  $f(x)$  est une fonction périodique de période  $a$ , intégrable et continue sauf peut être dans un nombre fini de points de l'intervalle  $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ , alors la **série de Fourier** de  $f(x)$  est donnée sur sa forme trigonométrique par :

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi n}{a} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{a} x \right), \quad (1.1)$$

avec

$$a_n = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) \cos \frac{2\pi nx}{a} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$a_0 = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) \sin \frac{2\pi nx}{a} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

et la forme complexe de la série de Fourier de  $f(x)$  est

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n x}{a}},$$

où

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \quad (n \geq 0).$$

On a aussi les formules inverses :

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i b_n) \end{cases} \quad (n \geq 0) \quad (1.2)$$

et

$$c_n = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{a}} dx. \quad (1.3)$$

Et on a les propriétés :

- $f$  paire  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, c_{-n} = c_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} b_n = 0$ ,
- $f$  impaire  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, c_{-n} = -c_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} a_n = 0$ .

### 1.1.1 Le cadre de l'espace $L_p^2(0, a)$ :

Introduisons l'espace vectoriel complexe :

$$L_p^2(0, a) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ est de période } a \text{ et } \int_0^a |f(t)|^2 dt < +\infty\}.$$

On le munit du produit scalaire :

$$(f.g) = \int_0^a f(t)\overline{g(t)}dt$$

et de la norme associée

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f.f)} = \left(\int_0^a |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

### 1.1.2 L'idée d'approximation

On peut tenter par trouver des coefficients  $x_n$  qui minimise

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^N x_n e_n \right\|_2$$

pour un entier fixé  $N$ , où  $e_n(x) = e^{\frac{2i\pi nx}{a}}$ .

D'autre terme, on veut trouver l'élément de meilleure approximation  $f_N$  de  $f$  dans sous-espace  $\mathcal{F}_N$  (l'espace des polynômes trigonométriques) de  $L_p^2(0, a)$ .

Pour tenter de résoudre le problème d'approximation ainsi posé, cherchons à évaluer la distance de  $f$  à un polynôme trigonométrique quelconque :

$$p = \sum_{n=-N}^N x_n e_n.$$

On a

$$\|f - p\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2 \operatorname{Re}(f, p) + \|p\|_2^2.$$

Or on sait que, d'après l'égalité de Parseval

$$\|p\|_2^2 = a \sum_{n=-N}^N |x_n|^2 \text{ et } (f, p) = \sum_{n=-N}^N \overline{x_n}(f, e_n).$$

Si l'on pose

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{a}(f, e_n),$$

il vient

$$\|f - p\|_2^2 = \|f\|_2^2 + a \sum_{n=-N}^N (|c_n - x_n|^2 + |c_n|^2). \quad (1.4)$$

En minimisant  $\|f - p\|_2^2$ , on trouve que le minimum est atteint lorsque  $c_n = x_n$  pour tout  $n = -N, \dots, 0, \dots, N$ , et pour cette valeur seulement.

En conclusion, la meilleure approximation  $f_N$  existe et est unique, c'est

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e_n(x).$$

Pour  $x_n = c_n$  l'égalité (1.6) s'écrit

$$\|f\|_2^2 = \|f - p\|_2^2 + a \sum_{n=-N}^N |c_n|^2. \quad (1.5)$$

### 1.1.3 Inégalité de Bessel

C'est le nom qu'on donne à ce que l'on déduit de (1.5) :

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \leq \frac{1}{a} \int_0^a |f(x)|^2 dx.$$

### 1.1.4 Convergence de l'approximation

On peut se demander ce que devient  $f_N$  quand  $N \rightarrow +\infty$ . Voici un exemple :

Soit  $a = 2\pi$  et

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ -1 & \text{si } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

On obtient pour  $N = 1, 3, 5$  les approximations suivantes en regroupant les exponentielles pour obtenir des sinus

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{4}{\pi} \sin x, \\ f_3(x) &= \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right), \\ f_5(x) &= \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \right). \end{aligned}$$

Du point de vue graphique, on obtient les courbes suivantes :

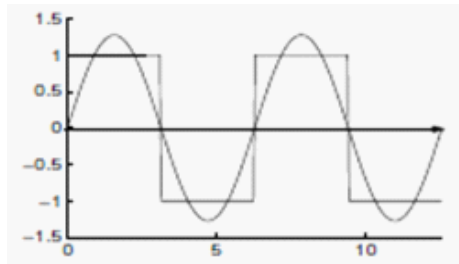


FIG. 1.1 -  $f_1(x) = \frac{4}{\pi} \sin x$

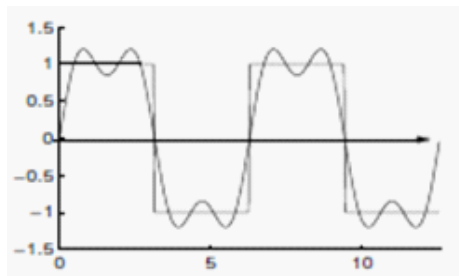


FIG. 1.2 -  $f_3(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right)$

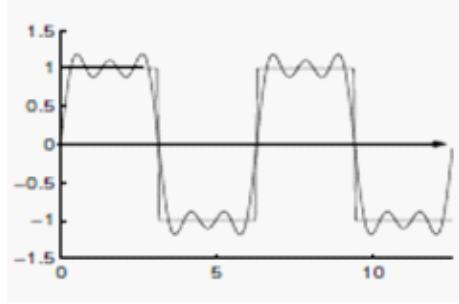


FIG. 1.3 –  $f_5(x) = \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x)$

Il semble bien, sur cet exemple, que  $f_N$  se rapproche de  $f$  quand  $N$  augmente.

On a le très important résultat général cité dans le théorème suivant :

**Théorème 1.1.1** *Si  $f \in L^2_P(0, a)$ , la meilleure approximation  $f_N$  de  $f$ , dans  $\mathcal{F}_N$*

$$f_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{\frac{2i\pi n x}{a}}$$

*tend vers  $f$  dans  $L^2_P(0, a)$  quand  $N \rightarrow +\infty$ . Autrement dit :*

$$\int_0^a |f(x) - f_N(x)|^2 dx \rightarrow 0, \text{ quand } N \rightarrow +\infty.$$

**Preuve.** voir [4]. ■

### 1.1.5 Égalité de Parseval

Pour  $H$  un espace de Hilbert, et  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée. On appelle l'égalité de Parseval, la relation donnée par :

$$\forall x \in H, \|x\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |(x, e_k)|^2.$$

En particulier pour  $H = L^2_p(0, a)$  et  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (e^{2i\pi k x/a})_{k \in \mathbb{Z}}$ , on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |C_n|^2 = \frac{1}{a} \int_0^a |f(x)|^2 dx.$$

Si on utilise le développement en sinus et cosinus (1.1) on obtient à partir des formules (1.2)

$$\frac{1}{4} |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{a} \int_0^a |f(x)|^2 dx$$

**Théorème 1.1.2 (DE RIEMANN-LEBESGUE)** Soit  $(a, b)$  un intervalle borné et  $f$  est une fonction intégrable sur  $(a, b)$ , alors l'intégrale

$$I_n = \int_a^b f(x) e^{2i\pi n x} dx,$$

tend vers 0 quand  $|n| \rightarrow +\infty$

**Preuve.** Elle s'établit facilement lorsque  $f$  est continûment dérivable sur  $[a, b]$ , à l'aide d'une intégration par parties :

$$I_n = \frac{1}{2i\pi n} [f(x) e^{2i\pi n x}]_a^b - \frac{1}{2i\pi n} \int_a^b f'(x) e^{2i\pi n x} dx$$

d'où la majoration :

$$|I_n| \leq \frac{1}{2\pi |n|} (|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(x)| dx)$$

quantité qui tend bien vers 0 quand  $|n| \rightarrow +\infty$ . On utilise ensuite une propriété de densité, admettant provisoirement que l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur  $[a, b]$  est dense dans  $L^1(a, b)$ , c'est-à-dire quel que  $\varepsilon > 0$ , il existe  $g_\varepsilon \in C^1([a, b])$  telle que

$$\int_a^b |f(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On en déduit :

$$|I_n| \leq \int_a^b |f(x) - g_\varepsilon| dx + \left| \int_a^b g_\varepsilon(x) e^{2i\pi nx} dx \right|$$

Il existe  $N > 0$  tel que la dernière intégrale soit majorée par  $\frac{\varepsilon}{2}$  dès que  $|n| \geq N$ . On obtient alors

$$|n| \geq N \rightarrow |I_n| \leq \varepsilon.$$

■

- Si  $f \in L_p^2(0, a)$ ,  $c_n(f) \rightarrow 0$ , quand  $|n| \rightarrow +\infty$ , d'après l'inégalité de Bessel.
- Si  $f \in L_p^1(0, a)$ ,  $c_n(f) \rightarrow 0$ , quand  $|n| \rightarrow +\infty$ , d'après le théorème de Riemann-Lebesgue.

## 1.2 Convergence ponctuelle de la série de Fourier

Dans le théorème (1.1.1) la convergence en moyenne quadratique de la série de Fourier de  $f$  vers  $f$  ne donne aucune information sur sa convergence ponctuelle. Pour celle-ci, on a besoin d'hypothèses supplémentaires sur la fonction.

On définit les limites  $f(t+)$  et  $f(t-)$  comme suit :

$$\begin{cases} f(t+) = \lim \{f(t+h), h > 0, h \rightarrow 0\} \\ f(t-) = \lim \{f(t-h), h > 0, h \rightarrow 0\} \end{cases}$$

alors on a le théorème suivant :

**Théorème 1.2.1** (de Dirichlet) Soit  $f \in L_p^1(0, a)$ . Si en un point  $t_0$  les limites  $f(t_0+)$  et  $f(t_0-)$  existent de même que les dérivées à droite et à gauche en  $t_0$ , alors

$$f_N(t_0) \rightarrow \frac{1}{2}(f(t_0+) + f(t_0-)), \text{ quand } N \rightarrow +\infty$$

(donc  $f_N(t_0) \rightarrow f(t_0)$  si en outre  $f$  est continue en  $t_0$ ).



**Preuve.** Pour la démonstration de ce théorème voir [4]. ■

### 1.3 Convergence uniforme de la série de Fourier

**Définition 1.3.1** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction à valeurs complexes. On dit que  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$  si elle est continue sur  $[a, b]$  sauf en un nombre fini (éventuellement nul) de points, en lesquels elle admet une limite finie à droite et à gauche.

**Théorème 1.3.1** Si la fonction  $f$  de période  $a$ , est continue sur  $\mathbb{R}$  et si elle admet sur  $[0, a]$  une dérivée, sauf éventuellement en un nombre fini de points, si de plus  $f'$  est continue par morceaux alors :

- i) La série de Fourier de  $f'$  s'obtient en dérivant terme à terme celle de  $f$ .
- ii) Les coefficients de Fourier de  $f$  vérifient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n(f)| < +\infty$$

- iii) La série de Fourier de  $f$  converge normalement (donc uniformément) sur  $\mathbb{R}$  vers  $f$ .

**Preuve.** voir [4]. ■

**Corollaire 1.3.1** Soit  $f \in L_p^2(0, a)$  dont les coefficients de fourier vérifient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n(f)| < +\infty.$$

Alors  $f$  est continue et la série de Fourier de  $f$  converge normalement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

A partir de la convergence ponctuelle et de la convergence uniforme de la série de Fourier, on déduit la proposition suivante :

**Proposition 1.3.1** *Soit  $f$  est une fonction de période  $a$ , localement intégrable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .*

1. *En tout point où  $f$  est dérivable la série de Fourier de  $f$  converge.*
2. *Si  $f$  est de classe  $C^1$ , la série de Fourier de  $f$  converge normalement et donc uniformément sur  $R$  et sa somme est  $f$ .*
3. *Si  $f$  est de classe  $C^1$ , pour tout  $n$  dans  $Z^*$*

$$c_n(f') = \frac{2i\pi n}{a} c_n(f)$$

4. *Si  $f$  est de classe  $C^k$ , alors les suites  $(n^k c_n(f))_n$  et  $(n^k c_{-n}(f))_n$  tendent vers zéro quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , la suite  $(n^k c_{-n}(f))_n$  est de carré sommable .*

## 1.4 Transformation de Fourier

La transformation de Fourier est un outil fondamental de l'analyse. Elle est utilisée dans des domaines très divers : l'étude des équations aux dérivées partielles en physique, l'analyse des signaux et l'automatique. Elle permet d'écrire une fonction sommable ainsi que certaines distributions comme une superposition des fonctions exponentielles complexes. Une propriété fondamentale de la transformation de Fourier est le fait qu'elle transforme les dérivations par rapport à une variable  $x$  en multiplications par la variable duale  $\omega$ . Ainsi, les équations différentielles (à coefficients constants) se ramènent à des équations algébriques et les équations aux dérivées partielles à des équations différentielles ou même algébriques.

### 1.4.1 La Transformarion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

**Définition 1.4.1** Soit la fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , on appelle **transformée de Fourier**, de  $f$  la fonction :

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx, \omega \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

**Remarque 1.4.1** Il est bien clair que  $\hat{f}$  est bien définie quand  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , puisque l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{(-i\omega x)} dx, \omega \in \mathbb{R}$$

est absolument convergente.

**Théorème 1.4.1** (Riemann-lebesgue) Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\hat{f}$  est continue et tend vers 0 à l'infini, et vérifie

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1},$$

l'application  $\mathcal{F} : L^1 \rightarrow L^\infty$  est appelée la transformation de Fourier.

**Définition 1.4.2** Soit  $\hat{f} \in L^1$ , alors on peut définir la **transformation inverse de Fourier** par :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\pi x} d\omega, x \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

### 1.4.2 La transformation de Fourier dans $L^2$

On va décrire la transformée de Fourier sur  $L^2(\mathbb{R})$ . La situation est dans un certain sens très simple : la transformée de Fourier est une bijection de  $L^2(\mathbb{R})$  sur  $L^2(\mathbb{R})$ , vue sous un autre angle elle est très compliquée : la formule

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)e^{-i\omega x} d\omega$$

qui définit la transformée de Fourier pour  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , fait intervenir une intégrale en générallement divergente si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Par contre si  $\alpha > 0$  et  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , alors la fonction  $t \rightarrow f(t)e^{-\alpha|t|}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Alors on peut donner la définition de la transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} e^{-\alpha|x|} dx$$

cette limite existe presque partout.

**Théorème 1.4.2 (Parseval)** *L'application  $f \rightarrow \hat{f}$  est une isométrie bijective de  $L^2(\mathbb{R})$  sur lui même, d'inverse  $\hat{f} \rightarrow f$ . Autrement dit :*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

*Ce théorème est prouvé dans [12].*

La relation entre la transformation de Fourier et la convolution est donnée par le théorème suivante :

**Théorème 1.4.3** *Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  alors :*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g).$$

# Chapitre 2

## Résolution de quelques problèmes liés à l'équation de la chaleur

Dans ce chapitre, nous présentons quelques problèmes liés à l'équation de la chaleur : avec condition initiale périodique, condition au bord périodique et condition de Dirichlet. On étudie la question d'existence et d'unicité de la solution via sa représentation en série de Fourier.

### 2.1 Equation de la chaleur à une dimension

L'équation de la chaleur en une dimension d'espace est donnée par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

où  $c > 0$  est une constante donnée,  $u$  est une fonction inconnue réelle de deux variables réelles  $x$  et  $t$ . Cette fonction  $u = u(x, t)$  représente la température dans un conducteur de dimension un. La valeur de  $u(x, t)$  dépend du temps  $t \geq 0$  et de la position  $x$ .

L'équation de la chaleur est l'exemple le plus simple d'équation parabolique : en effet, si

on applique l'opérateur de la chaleur aux fonctions

$$u : (x, t) \rightarrow \exp(\lambda t + \mu x)$$

on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = (\lambda - c\mu^2) \exp(\lambda t + \mu x) = 0$$

c'est-à-dire  $\lambda = c\mu^2$  qui représente une parabole.

En général les équations aux dérivées partielles sont classées en trois catégories : elliptique, hyperbolique et parabolique.

Par exemple, si on écrit une équation différentielle partielle linéaire du second ordre sous la forme :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial t} + Fu = 0,$$

les coefficients peuvent être des fonctions de  $x$  et  $t$ , alors elle est classée comme suit :

1. Elliptique : si  $B^2 - 4AC < 0$ , l'exemple typique de cette famille, l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0,$$

2. Hyperbolique : si  $B^2 - 4AC > 0$ , par exemple l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0,$$

3. Parabolique : si  $B^2 - 4AC = 0$ , comme **l'équation de la chaleur** :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0.$$

## 2.2 Description physique

Dans une tige (ou barre) de métal à température non uniforme, la chaleur (énergie thermique) est transférée des régions de température plus élevées aux régions de plus bas.

Trois principes physiques sont utilisés ici :

- 1) L'énergie thermique d'un corps ayant des propriétés uniformes :

Pour calculer la quantité d'énergie thermique transférée ( $Q$ ) dans le cas d'un corps il faut multiplier la masse du corps ( $m$ ) par sa capacité thermique massique ( $c$ ) et par la variation de température entre la température initiale et finale du corps  $\Delta T$  soit :

$$Q = mc\Delta T$$

$Q$  représente alors le transfert d'énergie thermique du corps considéré. Dans le système international d'unités, la capacité thermique massique s'exprime en joules par kilogramme-kelvin ( $j/(kg.k)$ ), la masse du corps s'exprime en kilogramme, la variation de température s'exprime en kelvin ( $k$ ).

- 2) Loi de Fourier du transfert de chaleur : taux de transfert de chaleur proportionnel au gradient de température négatif.

$$\frac{\text{taux de transfert de chaleur}}{\text{région}} = -k_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1)$$

où  $k_0$  est la conductivité thermique .

Dans le système international d'unités, la conductivité thermique  $k_0$  est exprimée en watt par mètre-kelvin, ( $w.m^{-1}.k^{-1}$ ) .

En d'autres termes, la chaleur est transférée des zones de hautes températures à basses températures.

- 3) Conservation d'énergie : Considérons une tige uniforme de longueur  $L$  à température non uniforme située sur l'axe des  $x$  de  $x = 0$  à  $x = L$ . Par tige uniforme, on

entend la densité  $\rho$ , la chaleur spécifique  $c$ , la conductivité thermique  $k_0$ , et la section transversale  $A$  sont tous constants.

Supposons que les côtés de la tige sont isolés et que seules les extrémités peuvent être exposées. Supposons également qu'il n'y a pas de source de chaleur dans la tige.

Considérons une tranche mince arbitraire de la barre de largeur  $\Delta x$  entre  $x$  et  $x + \Delta x$ . La tranche est si mince que la température à travers la tranche est  $u(x, t)$ .

$$\text{Énergie thermique du segment} = c \times \rho A \Delta x \times u = c \rho A \Delta x u(x, t)$$

Par la conservation de l'énergie

$$\begin{aligned} \text{changement d'énergie} & \quad \text{apport de chaleur} & \quad \text{chaleur dégagée par} \\ \text{thermique du segment} & = \text{de la frontière gauche} & - \text{la frontière droite} \\ \text{dans le temps } \Delta t & & \end{aligned}$$

De la loi de Fourier (2.1)

$$c \rho A \Delta x u(x, t + \Delta t) - c \rho A \Delta x u(x, t) = \Delta t A \left( -k_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x - \Delta t A \left( -k_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x}$$

et par suite :

$$\frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = \frac{K_0}{c \rho} \left( \frac{(\frac{\partial u}{\partial x})_{x+\Delta x} - (\frac{\partial u}{\partial x})_x}{\Delta x} \right)$$

Rappelons que  $\rho, c, A, k_0$  sont des constantes.

Pour  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ , on obtient **l'équation de la chaleur**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

où

$$k = \frac{K_0}{c \rho} \tag{2.3}$$



est appelé la diffusivité thermique, unités  $[k] = L^2/T$ . Puisque la tranche a été choisie arbitrairement, l'équation de la chaleur 2.2 s'applique tout au long de la tige.

## 2.3 Résolution du problème de Cauchy (condition initiale périodique) :

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Qui s'appelle **problème de Cauchy**.

La fonction  $f$  détermine la température au temps  $t = 0$ .

La signification physique de ce problème est que de la connaissance de la température à l'instant de départ ( $t = 0$ ), nous en déduisons l'évolution de la température sur un anneau circulaire. C'est-à-dire nous pouvons grâce au problème (2.4), nous intéresser à la température dans un conducteur circulaire de longueur  $2\pi$  qui est équivalent au cas où nous avons une température  $u(x, t)$  de période  $2\pi$  en  $x \in \mathbb{R}$  (voir la FIG 2.1).

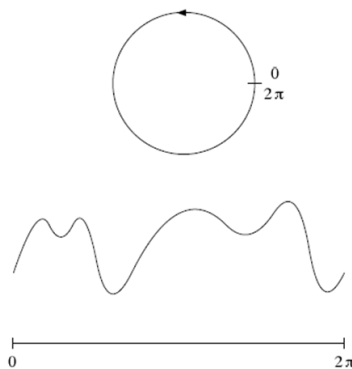


FIG. 2.1 – Problème de Cauchy

le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (2.4) est le suivant :

**Théorème 2.3.1** *Soient  $c$  une constante strictement positive et  $f$  une fonction continue  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ .*

*Alors il existe un unique  $u(x, t)$ ,  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  satisfaisant :*

1.  $u(x, t)$  est  $2\pi$ -périodique en  $x$ ,  $\forall t > 0$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  existent comme fonctions continues sur  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ .
2.  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ ,  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
3.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t) - f(x)| = 0$ .

**Preuve.** Nous commençons par supposer qu'il existe une fonction  $u(x, t)$  satisfaisant les conditions mentionnées dans le théorème pour  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Nous explicitons ensuite  $u(x, t)$  puis nous montrons que  $u(x, t)$  trouvé satisfait les conditions du théorème (2.3.1). comme  $u(x, t)$  converge uniformément vers  $f(x)$  quand  $t$  tend vers zéro.

on notant la série de Fourier de  $u(x, t)$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(t) \exp(inx)$$

et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \exp(inx)$$

la série de fourier de  $f$  on trouve que  $C_n(t)$  tend vers

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \exp(-iny) dy$$

quand  $t$  tend vers zéro  $\forall n$ .

comme

$$C_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, t) \exp(-inx) dx,$$

en utilisant l'équation de la chaleur, deux intégrations par parties et le fait que  $u$  est  $2\pi$ -périodique en  $x$  :

$$\begin{aligned}
 C'_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \exp(-inx) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \exp(-inx) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \left[ c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \exp(-inx) \right]_0^{2\pi} + cin \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \exp(-inx) dx \right) \\
 &= \frac{cin}{2\pi} \left( [\exp(-inx)u(x, t)]_0^{2\pi} + in \int_0^{2\pi} u(x, t) \exp(-inx) dx \right) \\
 &= \frac{-n^2c}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, t) \exp(-inx) dx \\
 &= -n^2c C_n(t)
 \end{aligned}$$

nous obtenons donc que  $C_n(t)$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$C'_n(t) = -n^2c C_n(t)$$

que nous résolvons

$$C_n(t) = C_n(t_0) \exp(-cn^2(t - t_0)), t \geq t_0 > 0$$

comme  $C_n(t_0)$  tend vers  $c_n(f)$  quand  $t_0$  tend vers zéro , nous trouvons

$$C_n(t) = c_n(f) \exp(-cn^2t), t > 0$$

Ainsi

$$u(x, t) = \sum_n c_n(f) \exp(-cn^2t) \exp(inx), t > 0, x \in R,$$

vérifie l'équation de la chaleur d'où le 2) du théorème (2.3.1).

puis

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_n \exp(in(x-y)) \exp(-cn^2t) \right] f(y) dy \\ &= p_t * f(x, t) \\ &= \int_0^{2\pi} p_t(x-y) f(y) dy, \quad t > 0, \quad x \in R. \end{aligned}$$

Où

$$p_t(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \exp(inx) \exp(-cn^2t), \quad t > 0.$$

pour démontrer le 3) du théorème (2.3.1), nous allons écrire  $u(x, t)$  d'une autre manière mais pour cela écrivons d'abord  $p_t$  d'une autre manière .

Si :

$$g(x) = \exp(-\alpha x^2)$$

où  $\alpha > 0$  est une constante donnée alors la transformastion de fourier de  $g$  est :

$$\hat{g}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha}\right)$$

**Lemme 2.3.1** *Si  $g$  est mesurable sur  $R$ , si  $g'$  est continue telle que*

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} g'(x + 2\pi n)$$

*converge uniformément sur  $[0, 2\pi]$ , si*

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} g(x_0 + 2\pi n)$$

*converge en au moins un point  $x_0$  alors*

$$\sum_n g(x - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \hat{g}(n) \exp(inx)$$

*a lieu uniformément sur  $R$ .*

On applique ce lemme avec la fonction  $g$  où  $\alpha = \frac{1}{4ct}$ ,  $t > 0$ ,  $c > 0$  d'où

$$p_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi ct}} \sum_n \exp\left(-\frac{1}{4ct}(x - 2\pi n)^2\right).$$

En utilisant deux changements de variable et le fait que  $f$  est  $2\pi$  périodique, nous trouvons :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} \int_R \exp\left(-\frac{y^2}{4ct}\right) f(x + y) dy.$$

Posons  $\beta = \frac{1}{\sqrt{4ct}} > 0$ . Comme  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_R \beta \exp(-\beta^2 y^2) dy = 1$ , on écrit

$$u(x, t) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_R \beta \exp(-\beta^2 y^2) [f(x + y) - f(x)] dy.$$

**Lemme 2.3.2** *la fonction  $K_\beta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \beta \exp(-\beta^2 x^2)$  est une approximation de l'identité.*

**Preuve.** La fonction  $K_\beta(x)$  vérifie trois propriétés demandées :

1.  $K_\beta(x) \geq 0$ ,
2.  $\int_R K_\beta(x) dx = 1$ ,
3.  $\int_{|x| \geq x_0} K_\beta(x) dx$  tend vers zéro quand  $\beta$  tend vers l'infini  $\forall x_0 > 0$  par convergence dominée.

pour montrer que  $u(x, t)$  converge uniformément vers  $f(x)$  quand  $t$  tend vers zéro, c'est-à-dire quand  $\beta$  tend vers l'infini, on utilise le fait que  $f$  est continue et le 3) du lemme c'est-à-dire pour  $\varepsilon > 0$  donné

$$\exists y_0 > 0, \forall y, |y| \leq y_0, |f(x + y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in R$$

et

$$\exists \beta_0, \int_{|y| \geq y_0} K_\beta(y) dy \leq \frac{\varepsilon}{4 \|f\|_\infty}, \quad \forall \beta \geq \beta_0.$$

■ ■

## 2.4 Résolution de l'équation de la chaleur avec condition au bord périodique :

On considère maintenant le problème de la chaleur avec condition au bord périodique :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = f(t), & t > 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

le résultat d'existence et d'unicité d'une solution périodique est fourni par le théorème suivant :

**Théorème 2.4.1** *Soient  $c$  une constante strictement positive et  $f$  une fonction continue  $2\pi$ -périodique sur  $R^+$ .*

Alors, il existe une unique  $u(x, t)$ ,  $t > 0$ ,  $x \in R^+$  satisfaisant :

1. la température  $u(x, t)$  à la profondeur  $x > 0$  est  $2\pi$ -périodique en temps ( donc la fonction  $u$  garde la propriété de  $2\pi$  périodicité en temps de la fonction  $f$  ),  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  existent comme fonctions continues sur  $\{(x, t), x \in R^+, t \in R^+\}$
2. L'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad t > 0, x > 0$$

3. La fonction  $u$  converge uniformément par rapport à  $t$  vers  $f$  quand  $x$  tend vers zéro :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sup_{t > 0} |u(x, t) - f(t)| = 0$$

cette fonction  $f$  détermine la température en  $x = 0$ .

**Preuve.** Nous commençons par supposer qu'il existe une fonction  $u(x, t)$  satisfaisant les conditions mentionnées dans le théorème pour  $t > 0$ , et  $x > 0$ . Nous explicitons ensuite  $u(x, t)$  puis nous montrons que le  $u(x, t)$  trouvé satisfait les conditions du théorème, ce qui établit aussi l'unicité.

### Première étape

Notons

$$S_u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(x) \exp(int)$$

la série de Fourier en temps de  $u(x, t)$  où

$$c_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, t) \exp(-int) dt$$

et

$$S_f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \exp(int)$$

la série de Fourier de  $f$  où

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \exp(-iny) dy.$$

D'après la propriété 1). du théorème (2.4.1), la série de Fourier de  $u(x, t)$  converge uniformément vers  $u(x, t)$  pour tout  $x$ . D'après la propriété 3 du théorème (2.4.1), la fonction  $u(x, t)$  converge vers  $f(t)$  quand  $x$  tend vers zéro (la convergence est uniforme par rapport à  $t$ ) donc  $c_n(x)$  tend vers  $c_n(f)$  quand  $x$  tend vers zéro pour tout  $n$ . En utilisant l'équation de la chaleur, une intégration par parties et le fait que  $u$  est  $2\pi$ -périodique en temps :

$$c'_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \exp(-int) dt$$

$$\begin{aligned}
 c_n''(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \exp(-int) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi c} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \exp(-int) dt \\
 &= [u(x, t) \exp(-int)]_0^{2\pi} + \frac{in}{c} \int_0^{2\pi} u(x, t) \exp(-int) dt
 \end{aligned}$$

nous obtenons que  $c_n(x)$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned}
 c_n''(x) &= \frac{in}{c} c_n(x) \\
 &=: \lambda_n^2 c_n(x),
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 \lambda_n &= -\alpha_n x - i\alpha_n x, n > 0, \\
 &= -\alpha_n x + i\alpha_n x, n \leq 0,
 \end{aligned}$$

et

$$\alpha_n = \sqrt{|n|}/2c$$

Nous résolvons cette équation différentielle :

$$c_n(x) = A_n(x_0) \exp(\lambda_n(x - x_0)) + B_n(x_0) \exp(-\lambda_n(x - x_0)),$$

pour tout  $x \geq x_0 > 0$ , où  $x_0$  est fixé , avec

$$A_n(x_0) + B_n(x_0) = c_n(x_0).$$

Nous faisons le choix  $A_n(x_0) = 0$ , ceci correspond à l'hypothèse raisonnable que  $u(x, t)$  est bornée

$$|u(x, t)| \leq M, \forall t > 0, \forall x > 0$$



donc

$$c_n(x) = c_n(x_0) \exp(-\lambda_n(x - x_0)), x \geq x_0 > 0.$$

Comme  $C_n(x_0)$  tend vers  $c_n(f)$  quand  $x_0$  tend vers zéro, nous trouvons  $c_n(x) = c_n(f) \exp(-\lambda_n x), x > 0$ .

**Deuxième étape** La formule explicite de  $u(x, t)$  est donnée par

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_n c_n(x) \exp(int) \\ &= \sum_n c_n(f) \exp(-\alpha_n x) \exp(int \pm i\alpha_n x), \end{aligned}$$

où  $\alpha_n = \sqrt{\frac{|n|}{2c}}$  avec un signe  $-$  pour  $n > 0$  et un signe  $+$  pour  $n \leq 0$ .

**Troisième étape** D'après cette formule, nous vérifions que  $u(x, t)$  satisfait la propriété 1 du théorème (2.4.1) et l'équation de la chaleur c'est-à-dire la propriété 2 du théorème (2.4.1). Il reste à démontrer la propriété 3 du théorème (2.4.1), c'est-à-dire que  $u(x, t)$  converge uniformément vers  $f(t)$  quand  $x$  tend vers zéro. Or

$$\begin{aligned} u(x, t) - f(t) &= \sum_n c_n(f) \exp(int) [\exp(-\alpha_n x \pm i\alpha_n x) - 1] \\ &= \sum_n c_n(f) \exp(int) [\exp(-\alpha_n x \pm i\alpha_n x) - \exp(0)]. \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} h(t) &= \exp(-t\alpha_n x \pm it\alpha_n x) \text{ pour } t \in [0, 1] \text{ alors,} \\ h'(t) &= -(\alpha_n x \pm i\alpha_n x) \exp(-t\alpha_n x \pm it\alpha_n x) \text{ et} \\ |h'(t)| &\leq \alpha_n x \sqrt{2} \exp(-t\alpha_n x) \\ &\leq \alpha_n x \sqrt{2} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 |u(x, t) - f(t)| &= \left| \sum_n c_n(f) \exp(int) (h(1) - h(0)) \right| \\
 &\leq \sum_n |c_n(f)| |h(1) - h(0)| \\
 &\leq \sum_n |c_n(f)| \sup_{t \in [0,1]} |h'(t)| \\
 &\leq \sum_n |c_n(f)| \alpha_n x \sqrt{2} \\
 &\leq (x/\sqrt{c}) \sum_n |c_n(f)| \sqrt{|n|} \frac{|n|^{\frac{3}{2}}}{|n|^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

soit grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|u(x, t) - f(t)| \leq \frac{x}{\sqrt{c}} \left( \sum_n |n|^3 |c_n(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_n \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

mais si on suppose  $f$  de classe  $C^3$ , alors  $|n|^3 c_n(f)$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , c'est-à-dire pour  $n$  assez grand  $|c_n(f)| \leq \frac{1}{n^3}$ . si  $f$  est seulement de classe  $C^2$ , alors  $f''$  appartient à  $L^2$  et  $\sum_n n^4 |c_n(f)|^2$  est finie. Donc les deux séries du terme de droite de la dernière inégalité convergent ce qui donne

$$|u(x, t) - f(t)| \leq \text{constante } x$$

qui tend vers zéro quand  $x$  tend vers zéro.

■

Nous avons donc des formules explicites pour les solutions des problème (2.4) et (2.5).

– pour le problème (2.4)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_n c_n(f) \exp(-cn^2t) \exp(inx), t > 0, x \in R \\ &= \int_0^{2\pi} p_t(x - y) f(y) dy, t > 0, x \in R \end{aligned}$$

où  $p_t(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \exp(inx) \exp(-cn^2t), t > 0$

– Pour le problème (2.5) :

$$u(x, t) = \sum_n c_n(f) \exp(-\alpha_n x) \exp(int \pm i\alpha_n x)$$

**Remarque 2.4.1** dans les deux problèmes (2.4) et (2.5), la solution  $u$  est de classe  $C^\infty$  pour  $x$  et  $t$  ce qui montre que l'équation de la chaleur a un effet fortement régularisant sur la donnée  $f$ .

## 2.5 Résolution du problème de Dirichlet :

On s'intéresse ici à la température d'une barre de longueur  $\pi$ , maintenue à ses extrémités à la température 0. Cette température est une fonction  $u : \Delta = [0, \pi] \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $\Delta$  telle que  $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  existent et sont continues sur  $\Delta$  vérifiant :

$$\begin{cases} \forall (x, t) \in \Delta, \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \\ \forall t \in [0, +\infty[, u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ \forall x \in [0, \pi], u(x, 0) = f(x). \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^1$ , telle que  $f(0) = f(\pi) = 0$ .  $f$  donne la température de la barre à l'instant  $t = 0$ .

**Théorème 2.5.1** *Le problème (2.6) admet une solution unique donnée par :*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \exp(-n^2 t) \sin nx \quad \text{pour tout } (x, t) \in \Delta$$

avec

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(y) \sin(ny) dy, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

**Preuve.** Soient  $u$  convenant au problème et  $t \in [0, +\infty[$ . On prolonge  $u(\cdot, t)$  à  $\mathbb{R}$  en une application  $g_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $2\pi$ -périodique impaire telle que :

$$\forall x \in [0, \pi], g_t(x) = u(x, t).$$

Il est clair alors que  $g_t$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Puisque  $g_t$  est  $2\pi$ -périodique et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$  d'après le théorème de Dirchlet la série de Fourier de  $g_t$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  et a pour somme  $g_t$ .

Comme  $g_t$  est impaire, les coefficients de Fourier  $a_n(t)$  de  $g_t$  sont nuls, et pour tout  $n \geq 1$ ,

$$b_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g_t(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) \sin(nx) dx,$$

soit  $n \geq 1$  considérons

$$U_n : \begin{array}{l} \Delta \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \rightarrow u(x, t) \sin(nx) \end{array}$$

on a :

-  $U_n$  est continue sur  $\Delta$ .

-  $\frac{\partial U_n}{\partial t} : (x, t) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sin(nx)$  existe et est continue sur  $\Delta$ .

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, il en résulte que

$$b_n : \begin{array}{l} [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow b_n(t) \end{array}$$

est continue sur  $]0, +\infty[$  de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et pour  $t \in ]0, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} b'_n(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \sin(nx) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) n \cos(nx) dx \right) \\ &= -\frac{2n}{\pi} \left( [u(x, t) \cos(nx)]_0^\pi + \int_0^\pi u(x, t) n \sin(nx) dx \right) \\ &= -\frac{2n^2}{\pi} \int_0^\pi u(x, t) \sin(nx) dx = -n^2 b_n(t) \end{aligned}$$

Par résolution d'une équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constant et sans second membre on obtient

$$\forall t \in [0, +\infty[ , b_n(t) = \exp(-n^2 t) b_n(0)$$

Et :

$$b_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x, 0) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$$

D'où en notant pour  $n \in \mathbb{N}^*$

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx$$

on a bien :

$$\forall (x, t) \in \Delta, u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \exp(-nt^2) \sin(nx)$$

Réciproquement considérons, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'application

$$U_n : \begin{array}{l} \Delta \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \rightarrow b_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \end{array}$$

où :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(y) \sin(ny) dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g_0(y) \sin(ny) dy$$

- Comme  $\forall n \geq 1, \forall (x, t) \in \Delta, |u_n(x, t)| \leq |b_n|$ , et que  $\sum_{n \geq 1} |b_n|$  converge (puisque  $g_0$  est  $2\pi$ -périodique, continue et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ ), la série de fonction  $\sum u_n$  converge normalement, donc uniformément sur  $\Delta$ , donc sa somme, notée  $u$  est continue sur  $\Delta$ .

- Soit  $\alpha \in ]0, +\infty[$  pour chaque  $n \geq 1, \frac{\partial u_n}{\partial t}, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$  existent et sont continues sur  $\Delta$ , et pour tout  $n \geq 1$  et  $(x, t) \in \Delta$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) \right| = \left| -n^2 b_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \right| \leq n^2 |b_n| e^{-n^2 \alpha} \\ \left| \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, t) \right| = \left| n b_n e^{-n^2 t} \cos(nx) \right| \leq n |b_n| e^{-n^2 \alpha} \\ \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) \right| = \left| -n^2 b_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \right| \leq n^2 |b_n| e^{-n^2 \alpha} \end{array} \right.$$

Donc les séries d'applications  $\sum \frac{\partial u_n}{\partial t}, \sum \frac{\partial u_n}{\partial x}, \sum \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$  sont normalement, donc uniformément convergentes sur  $\Delta$ .

Il en résulte, d'après le théorème, que  $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x},$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  existent et sont continues sur  $\Delta$ , et que, pour tout  $(x, t) \in \Delta$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2 b_n e^{-n^2 t} \sin(nx) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

Enfin

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in ]0, +\infty[, u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ \forall t \in ]0, \pi[, u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) = f(x) \end{array} \right.$$

Finalement la température du point de la barre, d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ , est donnée par :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

où pour tout  $n \geq 1$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \sin(ny) dy.$$

■

# Chapitre 3

## Problème inverse de conduction de la chaleur

Le **problème inverse** est une situation dans laquelle on tente de déterminer les causes d'un phénomène à partir des effets. ainsi, ce problème est l'inverse de problème dit direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues. dans un problème inverse, on peut voir des même effets proviennent de plusieurs causes (pas d'unicité de la solution). On rencontre souvent des difficultés d'existence et de stabilité de la solution. dans ces cas, on peut dire que le problème inverse est **mal posé**.

Et un problème est dit **bien posé**, si les trois conditions ci-dessous sont satisfaites :

1. La solution du problème existe pour toute donnée.
2. La solution du problème est unique.
3. La solution dépend continûment des données (stabilité de la solution).

Donc, si l'une des trois condition précédente n'est pas satisfaite, on dit le problème est mal posé.



Dans ce chapitre nous exposons un problème modèle pour l'équation latérale de la chaleur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(1, t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(x, t) = 0, \quad t < 0. \end{array} \right.$$

où on détermine, la température sur une partie inaccessible de la frontière en  $x = 1$  à partir de la température et le flux sur l'autre partie de la frontière  $x = 0$ . C'est un problème de Cauchy qui est mal-posé, on peut le considérer comme un problème inverse associé à un problème direct qui est bien-posé. On propose une méthode de **régularisation de Fourier**.

### 3.1 Le problème direct

On va résoudre le problème direct de manière exacte (à l'aide d'une intégrale convergente).

On considère le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } f(t), \text{ trouver } g(t) = u(0, t) \text{ tel que :} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}. \\ u(1, t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

On cherche la transformée de Fourier par rapport au **temps** de  $u$ , si  $\hat{u}(x, \omega) = \mathcal{F}(u)$ , alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\omega \hat{u}(x, \omega) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}(x, \omega), \quad x \in [0, 1], \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (1) \\ \hat{u}(1, \omega) = \hat{f}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (2) \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(0, \omega) = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (3) \end{array} \right.$$

L'expression (1) est une équation différentielle d'ordre 2,

$$i\omega\hat{u}(x, \omega) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}(x, \omega) \iff i\omega\hat{u}(x, \omega) - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2}(x, \omega) = 0.$$

Le polynôme caractéristique est :

$$i\omega - p^2 = 0 \implies p = \pm\sqrt{i\omega},$$

alors, la solution  $\hat{u}(x, \omega)$  est donnée par :

$$\hat{u}(x, \omega) = A \exp(\sqrt{i\omega}x) + B \exp(-\sqrt{i\omega}x) \quad (3.2)$$

où  $\sqrt{i\omega}$  définie par :

$$\sqrt{i\omega} = \begin{cases} (1+i)\sqrt{\frac{|\omega|}{2}}, & \text{si } \omega \geq 0, \\ (1-i)\sqrt{\frac{|\omega|}{2}}, & \text{si } \omega < 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Il est facile de voir que :

$$\left| \cosh(\sqrt{i\omega}) \right| \leq \left| \exp\left(\sqrt{\frac{|\omega|}{2}}\right) \right|. \quad (3.4)$$

La dérivée de (3.2) par rapport à  $x$  est :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(x, \omega) = \sqrt{i\omega}A \exp(\sqrt{i\omega}x) - \sqrt{i\omega}B \exp(-\sqrt{i\omega}x). \quad (3.5)$$

Des conditions (2) et (3), on obtient :

$$\hat{u}(x, \omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{\cosh(\sqrt{i\omega})} \cosh(x\sqrt{i\omega}), \quad x \in [0, 1], \omega \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

par la transformée de Fourier inverse et le théorème de Fubini, on a :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\omega(t-s)] \frac{\cosh(x\sqrt{i\omega})}{\cosh(\sqrt{i\omega})} d\omega \right\} f(s) ds. \quad (3.7)$$

Si on pose

$$K(x, t - s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\omega(t - s)] \frac{\cosh(x\sqrt{i\omega})}{\cosh(\sqrt{i\omega})} d\omega,$$

la solution du problème (3.1) est donnée par la convolution :

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, t - s) f(s) ds. \quad (3.8)$$

### 3.1.1 Opérateur direct (stabilité)

D'après l'équation (3.6), on a :

$$\hat{g}(\omega) = \hat{u}(0, \omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{\cosh(\sqrt{i\omega})}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

Soit l'opérateur

$$\hat{A} : L^2(\mathbb{R}_\omega) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_\omega), \text{ tel que :}$$

$$\hat{g} = \hat{A}\hat{f}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{\cosh(\sqrt{i\omega})}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

On définit l'opérateur

$$A : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \text{ par :}$$

$$g = Af(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_g(t - s) f(s) ds, \quad (3.11)$$

où  $K_g(t - s) = K(0, t - s)$ , tel que :

$$K_g(t - s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\omega(t - s)] \frac{1}{\cosh(\sqrt{i\omega})} d\omega.$$

D'après les équations (3.10),(3.11) et **l'identité de Parseval**, on a :

$$\begin{aligned} \|Af\|_{L^2} &= \left\| \hat{A}\hat{f} \right\|_{L^2} = \left\| \frac{1}{\cosh(\sqrt{i\omega})} \hat{f}(\omega) \right\|_{L^2} \\ &\leq \max_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\cosh(\sqrt{i\omega})} \right| \left\| \hat{f}(\omega) \right\|_{L^2} \\ &\leq M \left\| \hat{f} \right\|_{L^2}, \end{aligned}$$

alors, l'opérateur  $A$  est borné, de plus  $\|A\|_{L^2} \leq \max_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{\cosh(\sqrt{i\omega})} \right| \leq 1$ .

Par conséquent, le problème direct (3.1) est bien posé.

## 3.2 Le problème inverse

### 3.2.1 Énoncé du problème

Maintenant, on définit l'opérateur inverse

$\hat{B} = \hat{A}^{-1} : D(\hat{B}) = R(\hat{A}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ , par:

$$\hat{f}(\omega) = \hat{B}\hat{g}(\omega) = \hat{g}(\omega) \cosh(\sqrt{i\omega}), \quad (3.12)$$

tel que  $D(\hat{B}) = \{ \hat{g} \in L^2(\mathbb{R}) / \cosh \sqrt{i\omega} \hat{g}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}) \}$ .

**Remarque 3.2.1** *On remarque que :*

$$H = \{ g(t) \in L^2(\mathbb{R}) / \hat{g}(\omega) \varrho(\omega) \in L^2(\mathbb{R}) \subset D(\hat{B}),$$

pour  $\varrho(\omega) = \exp(\beta\sqrt{|\omega|})$ ,  $\beta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ .

Par la transformée de Fourier inverse, on obtient :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\cosh \sqrt{i\omega} \hat{g}(\omega)] \exp(i\omega t) d\omega. \quad (3.13)$$

Le solution correspondant à la donnée perturbée  $g^\delta$  est déterminé par :

$$\hat{f}^\delta(\omega) = \hat{g}^\delta(\omega) \cosh(\sqrt{i\omega}). \quad (3.14)$$

Par **TFI**, on obtient :

$$f^\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\cosh \sqrt{i\omega} \hat{g}^\delta(\omega)] \exp(i\omega t) d\omega. \quad (3.15)$$

Considérons la suite  $\hat{g}_n(\omega) = \hat{g}(\omega) + \frac{1}{n} \chi_{[n, n+1]}(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Le résultat correspondant a la suite  $\hat{g}_n(\omega)$  est la suite  $\hat{f}_n(\omega)$ .

Comme :  $|\cosh(\sqrt{i\omega})| = (\sinh^2 \sqrt{|\omega|/2} + \cos^2 \sqrt{|\omega|/2})^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$ , si  $|\omega| \rightarrow \infty$ .

Alors

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \|\hat{f} - \hat{f}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{n^2} \int_n^{n+1} |\cosh \sqrt{i\omega}|^2 d\omega \\ &\geq \frac{1}{n^2} \int_n^{n+1} \sinh^2 \sqrt{\frac{\omega}{2}} d\omega \end{aligned}$$

d'ou

$$\|f - f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \frac{1}{2n} \exp \sqrt{\frac{n}{2}} \rightarrow +\infty$$

pour  $n \rightarrow +\infty$ .

Donc, l'opérateur inverse  $B$  est non borné (l'équation  $Af = g$  est mal posée).

**Remarque 3.2.2** *On remarque que le problème inverse est équivalent au **problème de***

*Cauchy* suivan :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } g(t), \text{ trouver } f(t) = u(1, t) \text{ tel que :} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad x \in [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}. \\ u(0, t) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}. \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

### 3.2.2 La régularisation du problème inverse

Dans cette section nous considérons comment stabiliser l'équation de la chaleur latérale (3.12) par une méthode de régularisation (la régularisation de Fourier), qui consiste à éliminer toutes les hautes fréquences dans l'intégrale de Fourier, nous considérons seulement l'ensemble  $|\omega| \leq \omega_m$ , où  $\omega_m$  est un constant positif. Soit  $\chi_m$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $[-\omega_m, \omega_m]$ . Alors pour n'importe quelle donnée perturbée  $g^\delta$ , ( $\delta \leq \frac{1}{2}$ ), vérifie :

$$\|g - g^\delta\| \leq \delta. \quad (3.17)$$

On obtient une solution approximative régularisée :

$$f_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\cosh \sqrt{i\omega} \hat{g}(\omega) \chi_m] \exp(i\omega t) d\omega, \quad (3.18)$$

est une solution approximative régularisée perturbée :

$$f_m^\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\cosh \sqrt{i\omega} \hat{g}^\delta(\omega) \chi_m] \exp(i\omega t) d\omega, \quad (3.19)$$

c'est-à-dire :

$$\hat{f}_m(\omega) = \cosh \sqrt{i\omega} \hat{g}(\omega) \chi_m, \quad (3.20)$$

et

$$\hat{f}_m^\delta(\omega) = \cosh \sqrt{i\omega} \hat{g}^\delta(\omega) \chi_m. \quad (3.21)$$

D'après l'identité de Parseval et les formules (3.4) (3.12) (3.13) (3.14) (3.17) (3.19) (3.21),

on a :

$$\begin{aligned} \|f - f_m^\delta\| &= \|\hat{f} - \hat{f}_m^\delta\| \\ &\leq \|\hat{f} - \hat{f}_m\| + \|\hat{f}_m - \hat{f}_m^\delta\|, \text{ ou } \hat{f}_m = \cosh \sqrt{i\omega} \hat{g}(\omega) \chi_m. \\ &\leq \left\| \cosh(\sqrt{i\omega})(\hat{g}(\omega) - \hat{g}(\omega) \chi_m) \right\| + \left\| \cosh(\sqrt{i\omega})(\hat{g}^\delta(\omega) - \hat{g}(\omega)) \chi_m \right\| \\ &\leq \left[ \int_{|\omega| \geq \omega_m} \left| \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) \hat{g}(\omega) \right|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} + \left[ \int_{|\omega| \leq \omega_m} \left| \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) (\hat{g}^\delta(\omega) - \hat{g}(\omega)) \right|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \underbrace{\left[ \int_{|\omega| \geq \omega_m} \left| \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) \hat{g}(\omega) \right|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}}}_{\varepsilon_1(\omega_m, \delta)} + \delta \underbrace{\left[ \int_{|\omega| \leq \omega_m} \left| \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) \right|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}}}_{\varepsilon_2(\omega_m, \delta)} \end{aligned}$$

Estimation de  $\varepsilon_1(\omega_m, \delta)$  :

En raison de  $h(\omega) = \exp(\sqrt{2\omega}) \hat{g}(\omega) \in L^2_\rho(\mathbb{R})$ , alors :

$$\int_{|\omega| \geq \omega_m} \left| \hat{g}(\omega) \exp(\sqrt{2\omega}) \right|^2 d\omega \leq E, \text{ avec } E > 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1(\omega_m, \delta) &= \left( \int_{|\omega| \geq \omega_m} \left| \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) \hat{g}(\omega) \right|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left( \int_{|\omega| \geq \omega_m} \left| \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) \frac{1}{\exp(\sqrt{2\omega})} \right|^2 \left| \hat{g}(\omega) \exp(\sqrt{2\omega}) \right|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= E \left( -2 \int_{\omega_m}^{+\infty} \exp[-\sqrt{2\omega}] d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 2E(\exp(-\sqrt{2\omega_m}) \sqrt{2\omega_m})^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Nous allons choisir  $\omega_m = \omega_m(\delta)$ , tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1(\omega_m, \delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0, \\ \text{et} \\ \omega_m(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} +\infty. \end{array} \right.$$

Si on pose :

$$\exp(\sqrt{2\omega_m}) = \frac{E}{\delta} \Rightarrow \omega_m = \frac{1}{2} \left[ \log\left(\frac{E}{\delta}\right) \right]^2. \quad (3.22)$$

Donc :

$$\varepsilon_1(\omega_m, \delta) \leq 2 \left( E \delta \log\left(\frac{E}{\delta}\right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.23)$$



Examinons le terme  $\varepsilon_2(\omega_m, \delta)$  :

$$\begin{aligned}\varepsilon_2(\omega_m, \delta) &= \delta \left( \int_{|\omega| \leq \omega_m} \left| \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) \right|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \delta \left( 2 \int_0^{\omega_m} \exp(\sqrt{2\omega}) d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\sqrt{2}\delta \left( \sqrt{2\omega_m} \exp(\sqrt{2\omega_m}) \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

D'après l'équation (3.22), on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon_2(\omega_m, \delta) &\leq 2\sqrt{2}\delta \left( \frac{E}{\delta} \log\left(\frac{E}{\delta}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\sqrt{2} \left( \delta E \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Combinant (3.23) et (3.24), on obtient.

$$\|f - f_m^\delta\| \leq [2 + 2\sqrt{2}] \left( \delta E \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Théorème 3.2.1** *Soit  $f$  la solution exacte donnée par (3.13) et  $f_m^\delta$  la solution régularisée, donnée par (3.19).*

*Si  $g \in G_{\varrho, E} = \{g(t) \in L^2(\mathbb{R}) / \|\hat{g}(\omega) \exp(\sqrt{2\omega})\|_{L^2} \leq E, \text{ avec } E > 0\}$ , et vérifier la condition (3.17).*

*Si on choisi  $\omega_m = \frac{1}{2} \log\left(\frac{E}{2}\right)^2$ , on a l'estimation d'erreur suivante :*

$$\|f - f_m^\delta\| \leq C \left( \delta E \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \right)^{\frac{1}{2}},$$

où  $C = 2 + 2\sqrt{2}$ .

# Conclusion

On a présenté l'étude de l'équation de la chaleur par la méthode des séries de Fourier. Avec une condition initiale périodique ou condition au bord périodique, on a démontré l'existence d'une seule solution périodique.

Il s'agit ici d'une démarche inductive : On cherche, dans un premier temps, à deviner l'expression de la solution.

Dans un deuxième temps, on démontre que la fonction trouvée est bien une solution du problème considéré.

Pour le problème de Dirichlet où  $x \in [0, \pi]$ , on considère le prolongement de  $u(x, t)$  à une fonction  $g_t(x)$  impaire et  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ . Ensuite, on utilise l'analyse de Fourier. Dans ces problèmes, la solution est de classe  $C^\infty$  ce qui montre que l'équation de la chaleur a un effet fortement régularisant sur les données.

On est souvent rencontré le problème de déterminer la température sur une partie inaccessible et le flux sur l'autre partie. C'est un problème mal-posé, que l'on peut considérer comme un inverse d'un problème direct qui est bien posé. On a présenté une méthode de régularisation. L'outil de base de cette méthode est la transformation de Fourier.

# Bibliographie

- [1] Benoist-Gueutal, P. (1994). Mathématiques pour la physique. vol. 2, séries de Fourier, transformations de Fourier et de Laplace, distributions.
- [2] Boussahi, I. (2015). Mémoire : Quelques Méthodes De Régularisation Pour Un Problème Inverse De Conduction De La Chaleur du diplom de master. Université Badji Mokhtar, Annaba.
- [3] Cottet-Emard, F. (2006). Analyse 2 : Calcul différentiel, intégrales multiples, séries de Fourier (Vol. 2). De Boeck Supérieur.
- [4] Gasquet, C., & Witomski, P. (2000). Analyse de Fourier et applications : filtrage, calcul numérique, ondelettes. Dunod.
- [5] Gisclon, M. (1998). A propos de l'équation de la chaleur et de l'analyse de Fourier. Le journal de maths des élèves, 1(4), 190-197.
- [6] J. C Santamarina and D. Fratta, (2015) discrete signals ans inverse problemes, John wiley & Sons.
- [7] Kern.M. Problèmes inverse, Mines ParisTech. S1923, 2011-2012.
- [8] Matthew J. Hancock, (2006) , The 1-D Heat Equation, Linear Partial Differential Equations.
- [9] Monier, J. M. (2013). Analyse MP. Dunod.
- [10] Reinhard, H. (1987). Equations aux dérivées partielles. Dunod.
- [11] Richard Eon, (2013-2014). Sur les transformées de Fourier et quelques applications, Université de Rennes 1 .

- [12] Rudin, W,(1998), Analyse réelle et complexe, Dunod, paris.
- [13] SPIEGEL, Murray R.(1980) Analyse de Fourier et application aux problèmes de valeurs aux limites.

