République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Hamidi Lynda

Titre :

Les espaces de Sobolev pour résoudre les problèmes variationnels

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Radjeh Fouzia**	UMKB	Président
Dr.	**SILABDI Nour-Eddine**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Soltani Sihame**	UMKB	Examinateur

Juin 2018

Dédicace

Je dédie ce modeste travail ainsi que mon diplôme :

À ma Mère pour tous ses sacrifices, son soutien et sa présence dans ma vie,

À mon défunt père qui était et qui est toujours mon destin dans la vie,

Merci pour votre amour, votre tendresse et vos prières tout au long de mes études,

À mon frère Ahmed-Nader qui est tout ma vie et mes soeurs Nada, Fella et Sa petite famille Aryam

À mes grands-parents,

À mes oncles Kamel, belkacem et Houcine,

À ma tante Samiha et ma cousine Amel,

À mon fiancé kheir-eddine qui m'a toujours encouragée tout au long de ce travail,

À toute la famille grand et petit,

À mes aimables coupines Nadjeh, Ahlem, Salima et a toute mes amis de l'université.

Lynda

REMERCIEMENTS

Je présente mes profonds de remerciments à :

Tout d'abord Allah qui ma donnée la force et la patience d'accomplir ce mémoire.

En second lieu, mon encadreur Dr "Silabdi Nour-Eddine", merci pour avoir accepté d'être
mon directeur de recherche, pour votre bienveillance, vos précieux conseils et votre aide.

Mes remerciments vont égalements aux membres de jury Mme "Radjeh Fouzia" et Mme "Soltani Sihame" d'avoir accepté d'évaluer ce modeste travail.

Ainsi qu'un tous ceux qui m'ont aidé de pris ou de loin, à tous ceux qui consacré une grande partie de leur temps.

Enfin, nous remercions toutes les enseignantes et tous les enseigants de département de Mathématique, qui ont veillé à nous former.

....

Table des matières

Introduction

Dans le cadre de résolution des équations aux dérivées partielles. En utilisant la formulation variationnelle, les espaces de Sobolev sont essentiels, pour montrer l'existence et l'unicité.

En particulier l'utilisation du théorème de LAX-MILGRAM.

On expose dans le premier chapitre la théorie des distributions et leurs propriétés. Puis on définit, dans le deuxième chapitre, les espaces de Sobolev et leurs propriétés en particulier l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.

Enfin, dans le troisième chapitre on prend la formulation variationnelle pour problème de Dirichlet et on utilise les espaces de Sobolev pour résoudre de ce problème.

Chapitre 1

L'espace L^2

On note $L^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur Ω. Une fonction f définie sur Ω à valeurs complexes est dite de carré intégrable si f est mesurable et $f^2 \epsilon\ L^1(\Omega)$. On définie alors la norme sur L^2 :

$$||f||_{L^2} = (\int_\Omega |f|^2)^{\frac{1}{2}},$$

L^2 est un espace vectoriel.

L'application de $L^2 \times L^2 \to \mathbb{C}$:

$$\langle f, g\rangle \to \int_\Omega f(x)\overline{g}(x)dx,$$

est un produit scalaire que l'on notera $\langle f, g\rangle_{L^2}$.

L'espace L^2 est complet, c'est un espace de HILBERT !

L'inégalité de MINKOWSKI est vérifiée :

$$||f+g||_{L^2} \leqslant ||f||_{L^2} + ||g||_{L^2}.$$

Si $f\ \epsilon\ L^2\,(\Omega)$ et $g\ \epsilon\ L^2\,(\Omega)$ alors $fg\ \epsilon\ L^1\,(\Omega)$ car l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ est vérifiée :

$$\int_\Omega |fg| \leqslant \left(\int_\Omega |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.1 Espace des fonctions tests $D(\Omega)$

Définition 1.1.1 *On définit le support d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(ou\ \mathbb{C})$ par :*

$$Supp\ f = adh\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}.$$

Définition 1.1.2 *On désigne par $D(\mathbb{R}^n)$, On tout simplement, D l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support borné*

$$D = \{\varphi \in \mathbb{C}^\infty : Supp\ f\ \ borné\}.$$

Cet ensemble s'appelle espace des fonctions tests.

Notons que D est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ (si $\varphi_1, \varphi_2 \in D$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors $\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2 \in D$) de dimension infinie.

Notation 1.1.1 *Si φ est une fonction de D et si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et un multi-indice, on pose :*

$$D^\alpha\varphi = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ...... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\right)\varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}.......\partial x_n^{\alpha_n}},$$

avec $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Définition 1.1.3 *On dit qu'une suite de fonctions $(\varphi_k) \in D$ converge dans D vers une fonction $\varphi \in D$ si :*

1. tous les supports des φ_k sont contenus dans un même compact $\mathbb{k}$.
2. $D^\alpha\varphi_k$ converge uniformément vers $D^\alpha\varphi$ sur $\mathbb{k}$. C'est-à-dire $\sup\limits_{x\in K} |D^\alpha\varphi_k(x) - D^\alpha\varphi(x)| \underset{k\to+N}{\longrightarrow} 0$.

1.2 Espace $D'(\Omega)$

Définition 1.2.1 *On appelle distribution T une fonctionnelle linéaire continue sur D.*

– fonctionnelle linéaire signifie : une application T de D dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) faisant correspondre à une fonction $\varphi \in D$, un nombre noté $\langle T, \varphi \rangle$ tel que :

pour touts $\varphi_1, \varphi_2 \in D$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a :

$$\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle T, \varphi_1 \rangle + \beta \langle T, \varphi_2 \rangle .$$

On dit aussi forme linéaire.

– continue signifie : si la suite (φ_k) converge dans D vers φ, alors $\langle T, \varphi_k \rangle$ converge au sens usuel vers $\langle T, \varphi \rangle$.

Autrement dit : $\varphi_k \xrightarrow{D} 0$ la suite $< T, \varphi_k > \xrightarrow{D} 0$.

Proposition 1.2.1 *Toute fonction $f(x)$ localement sommable définit une distribution T_f par :*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx, \qquad \varphi \in D.$$

Dans $\mathbb{R}^n$, toute fonction $f(x_1, ..., x_n)$ localement sommable définit une distribution T_f par la relation

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} ..... \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, ..., x_n)\varphi(x_1, ..., x_n)dx_1.....dx_n, \qquad \varphi \in D.$$

Nous désignons par $D'(\Omega)$ le dual topologique de $D(\Omega)$; plus précisément $D'(\Omega)$ désigne l'ensemble des formes linéaires $T : \varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle$ telles que $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $D(\Omega) \Longrightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$ dans $\mathbb{C}$.

$D'(\Omega)$ est appelé l'espace des distributions sur Ω.

Soit $a \in \Omega$. La forme linéaire $\varphi \longmapsto \Psi(a)$ $(\varphi \in D(\Omega))$ définit une distribution $\delta_{(a)}$ qui est appelée distribution (ou ici mesure) de Dirac au point a. Si $a = 0$ (origine) on note $\delta = \delta_{(0)}$.

Soit f une fonction mesurable définie sur Ω à valeurs réelles que l'on suppose localement sommable dans Ω. La forme linéaire :

$$\varphi \longmapsto \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \qquad \varphi \in D(\Omega)$$

définit une distribution T_f sur Ω.

Si $f = g$ presque partout sur Ω, on a alors $T_f = T_g$; réciproquement on peut démontrer que, si f et g sont deux fonctions mesurables localement sommables dans Ω, l'égalité $T_f = T_g$ entraîne $f = g$ p.p. sur Ω. Il est donc possible d'identifier la classe de fonctions localement sommables f avec la distribution correspondante T_f dans la suite nous ne distinguerons plus T_f de la classe de fonction f.

1.2.1 Dérivation des distributions

Définition et Propriétés

Soit f une fonction de classe C^1. En faisant une intégration par parties, on obtient immédiatement :

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\langle f, \varphi' \rangle, \qquad \varphi \in D.$$

Car $\varphi(\pm\infty) = 0$. On est donc conduit à la définition générale suivante.

Définition 1.2.2 *On appelle dérivées T' d'une distribution T, la fonctionnelle définie par la relation*

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle, \qquad \varphi \in D.$$

Proposition 1.2.2 *Toute distribution admet des dérivées de tout ordre qui sont aussi des distributions.*

Preuve. *Soient T une distribution et $\varphi \in D$. On a par définition :*

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle, \langle T'', \varphi \rangle = -\langle T', \varphi' \rangle = \langle T, \varphi'' \rangle, ..., \left\langle T^{(j)}, \varphi \right\rangle = (-1)^j \left\langle T, \varphi^{(j)} \right\rangle.$$

Où $\varphi', \varphi'', ..., \varphi^{(j)}$ *existent car* $\varphi \in C^\infty$. *Montrons maintenant que* $T^{(j)}$ *est une distribution. Elle est linéaire : soient* $\varphi_1, \varphi_2 \in D$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *on a :*

$$\left\langle T^{(j)}, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \right\rangle = \alpha \left\langle T^{(j)}, \varphi_1 \right\rangle + \beta \left\langle T^{(j)}, \varphi_2 \right\rangle.$$

Pour établir la continuité de $T^{(j)}$, *on suppose que la suite* (φ_k) *converge dans* D *vers* φ. *Alors, par définition,* $(\varphi_k^{(j)})$ *converge uniformément vers* $(\varphi^{(j)})$ *et par conséquent :*

$$\left\langle T^{(j)}, \varphi_k \right\rangle = (-1)^j \left\langle T, \varphi_k^{(j)} \right\rangle,$$

converge vers

$$\left\langle T^{(j)}, \varphi \right\rangle = (-1)^j \left\langle T, \varphi^{(j)} \right\rangle,$$

ce qui achéve la démonstration.

Proposition 1.2.3 *Soient* $T \in D'$ *et* $g \in C^\infty$, *on a :*

$$(gT)' = g'T + gT'.$$

■

Preuve. Soit g une fonction de classe C^∞ et $\varphi \in D$, et T une distribution. On a :

$$\langle gT', \varphi \rangle = \langle T', g\varphi \rangle = -\langle T, (g\varphi)' \rangle = -\langle T, g'\varphi + g\varphi' \rangle = -\langle g'T, \varphi \rangle - \langle gT, \varphi' \rangle.$$

Où

$$\langle gT', \varphi \rangle = -\langle g'T, \varphi \rangle + \langle (gT)', \varphi \rangle = \langle (gT)' - g'T, \varphi \rangle.$$

■

Dérivée de la fonction d'Heaviside

Rappelons que la fonction d'Heaviside est défini par :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a pour $\varphi \in D$,

$\langle H', \varphi \rangle = - \langle H, \varphi' \rangle = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$ (car $\varphi(+\infty) = 0$). par conséquent $H' = \delta$.

Par réitérations, on obtient :

$$H^{(m+1)} = \delta^{(m)}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Dérivée de la distribution de Dirac

On a

$$\langle \delta', \varphi \rangle = - \langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0).$$

En général, on a :

$$\left\langle \delta^{(m)}, \varphi \right\rangle = (-1)^m \varphi^{(m)}(0), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Extension au cas de plusieurs variables

Dans le cas de plusieurs variables, on définit la dérivée $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ d'une distribution T, par :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, i = 1, 2, ..., m \text{ et } m \in \mathbb{N}.$$

On a

$$\left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle.$$

Où $\varphi(x_1, x_2, ..., x_m) \in C^\infty$, donc $\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}$, et par conséquent plus généralement, on a :

$$\left\langle D^K T, \varphi \right\rangle = (-1)^{|k|} \left\langle T, D^K \varphi \right\rangle .$$

Où $k = (k_1, k_2, ..., k_m) \in \mathbb{N}^m$ avec $|k| = k_1 + k_2 + ... + k_m$, et D^K désigne l'opérateur

$$D^K = \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1}} . \frac{\partial^{k_2}}{\partial x_2^{k_2}} ..... \frac{\partial^{k_m}}{\partial x_m^{k_m}} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} + \partial x_2^{k_2} + \partial x_m^{k_m}} .$$

1.2.2 Convergence des distributions

Définition 1.2.3 *a) On dit qu'une suite de distributions (T_k) converge dans D' vers une distributions T si pour tout $\varphi \in D$, la suite numérique $\langle T_k, \varphi \rangle$ converge dans $\mathbb{C}$ vers le nombre $\langle T, \varphi \rangle$.*

b) On dit qu'une série de distributions $\sum T_k$ converge dans D' et a pour somme la distribution T, si pour tout $\varphi \in D$, la série numérique $\sum \langle T_k, \varphi \rangle$ converge dans $\mathbb{C}$ et a pour somme le nombre $\langle T, \varphi \rangle$. Il s'agit de la convergence simple (dans l'espace des distributions D').

Notation 1.2.1 *On écrit parfois $T_k \overset{D'}{\to} T$ (resp.$\sum T_k \overset{D'}{\to} T$) pour dire que (T_k) (resp.$\sum T_k$) converge dans D' vers une distributions T.*

Proposition 1.2.4 *soit $(T_k(x))$ une suite de fonctions localement sommables et supposons qu'elle converge uniformément vers une fonctions $f(x)$. Alors la fonctions $f(x)$ est localement sommable et la suite de fonctions (T_k) associées aux fonctions $f_k(x)$ converge vers la distribution f associée à $f(x)$.*

Preuve. *On a*

$$| \langle f_k, \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle | = | \int_{-\infty}^{+\infty} (f_k(x) - f(x))\varphi(x)dx| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_k(x) - f(x)||\varphi(x)|dx$$
$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_k(x) - f(x)|.(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|dx).$$

Comme

$\lim_{k\to\infty}(\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_k(x)-f(x)|)=0$, *(converge uniforme) et que* $\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|dx$ *est finie* (φ *est à support borné), alors* $\langle f_k,\varphi\rangle$ *converge vers* $\langle f,\varphi\rangle$ *la fonction* $f(x)$ *est évidemment localement sommable ; il suffit de remarquer que :*

$$\int_K |f(x)|dx \leq \int_K |f_k(x)|dx + \int_K |f_k(x)-f(x)|dx,$$

où K *est un compact.* ■

Proposition 1.2.5 *a) Si une suite de distribution* (T_k) *converge vers une distribution* T*, alors les distribution dérivées* (T_k') *converge vers* T'.

b) Toute série de distributions convergente, est dérivable terme à terme.

Preuve. Il suffit de démontrer (a). On a :

$$\lim_{k\to\infty}\langle T_k',\varphi\rangle = -\lim_{k\to\infty}\langle T_k,\varphi'\rangle = -\langle T,\varphi'\rangle = \langle T',\varphi\rangle\,,$$

d'où $\lim_{k\to\infty} T_k' = T'$. ■

1.2.3 Convolution des distributions

Soit f et g deux fonctions de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. On a, pour tout $\varphi\in D(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle f*g,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}(f*g)(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\varphi(x)dtdx.$$

En pose $u=t$, $v=x-t$, on obtient :

$$\langle f*g,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(v)\varphi(u+v)dudv,$$

ce qui nous conduit à écrire cette expression sous la forme

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f \otimes g, \varphi(u+v) \rangle, \quad \varphi \in D.$$

Où $f \otimes g$ le produit tensoriel de f et g.

Définition 1.2.4 *On définit le produite de convolution de deux distributions S et T par :*

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x+y) \rangle \quad \varphi \in D.$$

Où $S_x \otimes T_y$ le produit tensoriel de S et T.

Le produite de convolution $S * T$ aura un sens si $Supp\varphi \cap (SuppS \cap SuppT)$ est borné.

1.2.4 Distributions tempéréés et transformation de Fourier

Transformation de Fourier dans S

Définition 1.2.5 *L'espace de schwartz des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide est défini par :*

$S = \left\{ \varphi \in C^\infty : \forall m, n \in \mathbb{N}, \ \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m \varphi^{(n)}(x)| < \infty \right\}.$
Autrement dit,
$S = \left\{ \varphi \in C^\infty : \forall m, n \in \mathbb{N}, \ \lim_{|x| \to \infty} |x^m \varphi^{(n)}(x)| = 0 \right\}.$
On a pour toute fonction $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la fonction, $\hat{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \varphi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Où

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad \varphi \in S.$$

Cette fonction vérifie :

1. $\hat{\varphi}$ est continue.

2. $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} |\hat{\varphi}(\xi)| = 0$.

3. $\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi(\xi)| < \infty$.

Remarque 1.2.1 *De même, on définit la transformation de Fourier (conjugué) $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$, on pose :*

$\left\langle \overline{\mathcal{F}}T, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \right\rangle$, pour tout $\varphi \in S$ et $T \in S'$ avec $\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\varphi(x)dx, \xi \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$. Par ai-lleurs, si $\varphi \in S$ et $T \in S'$, alors $\left\langle \overline{\mathcal{F}}T, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \right\rangle = \left\langle T, \overline{\mathcal{F}\overline{\varphi}} \right\rangle = \overline{\left\langle \overline{T}, \mathcal{F}\overline{\varphi} \right\rangle} = \overline{\left\langle \mathcal{F}\overline{T}, \overline{\varphi} \right\rangle} = \left\langle \overline{\mathcal{F}\overline{T}}, \varphi \right\rangle$, d'où $\overline{\mathcal{F}}T = \overline{\mathcal{F}(\overline{T})}$.

Définition 1.2.6 *On appelle distribution tempérée, toute fonctionnelle linéaire continue définie sur S et à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

Les distributions tempérées forment un espace vectoriel que l'on note S'.

Proposition 1.2.6 *Si T est une distribution tempérée, alors sa dérivée T' est aussi tempérée et on a :*

$\mathcal{F}(T)' = i\xi\mathcal{F}(T)$, c'est-à-dire $\widehat{T'} = i\xi\widehat{T}$.

Plus généralement, pour la dérivée d'ordre n, on a :

$\mathcal{F}(T)^{(n)} = (i\xi)^n\mathcal{F}(T)$, c'est-à-dire $\widehat{T^n} = (i\xi)^n\widehat{T}$.

Preuve. En effet, par hypothèse $\varphi \in S$, donc $\varphi' \in S$ et on a :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}(T)', \varphi \rangle &= \langle T', \mathcal{F}\varphi \rangle \\
&= \langle T, -(\mathcal{F}\varphi)' \rangle \\
&= \langle T, \mathcal{F}(i\xi\varphi) \rangle \\
&= \langle \mathcal{F}(T), i\xi\varphi \rangle \\
&= \langle i\xi\mathcal{F}(T), \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{F}(T)' = i\xi\mathcal{F}(T)$.

Produit d'une distribution par une fonction de classe C^∞. En répétant le processus ci-dessus, on obtient :

$(\mathcal{F}(T))^{(n)} = (i\xi)^n\mathcal{F}(T)$, ce qui achéve la démonstration. ■

Chapitre 2

les espaces de Sobolev

2.1 l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$

Théorème 2.1.1 *L'espace vectoriel C_c^∞ des fonctions est dense dans $L^2(\Omega)$ pour la norme $||.||_{L^2(\Omega)}$.*

Corollaire 2.1.1 *Si $f \in L^2(\Omega)$ vérifie :*

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \int_0^1 \varphi(x) f(x) dx = 0.$$

Alors $f = 0$ presque partout.

Définition 2.1.1 *Pour un entier $m \geq 0$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est défini par :*

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tel que, } \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m,\ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \right\},$$

où la dérivée partielle $\partial^\alpha v$ est à prendre au sens faible.

On introduit sur H^m le produit scalaire.

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx,$$

et de la norme $||u||_{H^m} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

2.1.1 l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$,elle s'identifie à une distribution sur Ω encors noté v, et on peut donc définir ses dériviées $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$, en tant que distribution sur Ω.En générale $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ n'appartient pas à l'éspace $L^2(\Omega)$, on introduit alors la définition suivant :

Définition 2.1.2 *On appelle espace de Sobolev d'ordre* 1 *sur* Ω, *l'éspace*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega),\ 1 \leq i \leq n \right\},$$

on munit $H^1(\Omega)$ *du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle_{(1,\Omega)} = \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx,$$

et on note

$$||v||_{(1,\Omega)} = \langle v, v \rangle_{(1,\Omega)}^{\frac{1}{2}}$$

la norme corréspondante

Notons maintenant la propriété fondamentale de l'éspace $H^1(\Omega)$ qui motive son introduction.

2.1.2 l'espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 2.1.3 *On appelle* $H_0^1(\Omega)$ *la ferméture de* $C_c^\infty(\Omega)$ *dans l'éspace* $H^1(\Omega)$ *(muni de la norme* $||.||_{H^1(\Omega)}$*) en d'autres termes.*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega),\ \exists (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega) \text{ telle que } \lim_{n \to \infty} ||v_n - v|| = 0 \right\}.$$

Cette espace est un sous espace fermé de l'éspace $H^1(\Omega)$ c'est donc un espace de Hilbert pour le produit $(.,.)_{H^1(\Omega)}$. En fait, si l'ouvert Ω est borné dans au moins une des directions de l'éspace). On peut définir un autre produit scalaire plus simple sur cet espace.

2.2 Espaces $L_s^2(\mathbb{R}^n)$

Soit s un nombre réel (de signe quelconque).

Définition 2.2.1 *On désigne par $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des (classe de) fonction f mesurables et telles que* $\int\limits_{R^n} |f(\xi)|(1+|\xi|^2)^s d\xi < \infty$.

L'ensemble $L_s^2(\mathbb{R}^n)$ évidement un sous-espace vectoriel des fonctions. On munira cet espace vectoriel du produit scalaire suivant :

$$\langle f \backslash g \rangle_{L_s^2} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)g(\xi)(1+|\xi|^2)^s d\xi,$$

et de la norme préhilbertienne associée.

2.3 Espaces $H^s(\mathbb{R}^n)$

Dans ce paragraphe s est un nombre réel.

Une distribution tempérée est dite élément de $H^s(\mathbb{R}^n)$ si son image de Fourier est un élément de $L_s^2(\mathbb{R}^n)$.

Autrement dit,

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^n), \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi < \infty \right\}.$$

On munira $H^s(\mathbb{R}^n)$ du produit scalaire suivant :

$$(u\backslash v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi)(1+|\xi|^2)^s d\xi,$$

et de la norme préhilbertienne associée

$$||u||^2_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi.$$

2.4 Traces et formules de Green

En dimension $d \geq 2$, les fonctions de $H^1(\Omega)$ peuvent ne pas être continues. En particulier, on sait que celles-ci sont seulement définies presque partout sur Ω. et sur le bord $\partial\Omega$ d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ qui un ensemble de mesure nulle, il n'est donc pas clair de pouvoir définir la valeur d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur $\partial\Omega$. Pour cela, on introduit l'application trace.

Définition 2.4.1 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. L'application trace γ_0 est l'application linéaire définie de $H^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ par $\gamma_0 v = v \mid \partial\Omega$.*

L'application trace considèrée est définie sur $H^1(\Omega) \cap C(\Omega)$, car on va chercher à étendre cette application à $H^1(\Omega)$ tout entier. Considèrer l'application trace sur $C(\Omega)$ ne serait pas suffisant car il ne s'agit pas d'un sous-espace de $H^1(\Omega)$.

Remarque 2.4.1 *Formule de Green :*

Soit $u \in H^1(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ $\quad \Gamma = \partial\Omega \in C^2$,

– La formule de Green :

$$\int_\Omega \triangle u.v dx = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 v).(\gamma_0 u) d\Gamma.$$

2.5 théorème de Poincaré

Théorème 2.5.1 *Si Ω est borné. Alors, il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$. La norme $||u||_{H^1}$ est équivalente à la norme $||\nabla u||_{L^2}$ c'est à dire :*

$$c_1||u||_{H^1} \leq ||\nabla u||_{L^2} \leq c_2||u||_{H^1}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Chapitre 3

Application des espaces de Sobolev pour résoudre les problèmes variationnels

3.1 Convergence dans les espaces de Sobolev

Du point de vue de l'analyse fonctionnelle, les notions précédentes de convergence prennent ainsi un sens complètement différent suivant l'espace de hilbert dans lequel on se place. A titre d'exemple, on aura, si $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui converge vers u_∞.

• $u_n \to u_\infty$ faiblement dans $L^2(\Omega)$ signifie que :

$$\forall v \,\epsilon\, L^2(\Omega), \quad \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n(x)v(x)dx = \int_\Omega u_\infty(x)v(x).$$

• $u_n \to u_\infty$ faiblement dans $H^1(\Omega)$ signifie que :

$$\forall v \,\epsilon\, H^1(\Omega), \quad \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega u_n(x)v(x)+\nabla u_n(x)\cdot\nabla v(x)dx = \int_\Omega u_\infty(x)v(x)+\nabla u_\infty(x)\cdot\nabla v(x)dx.$$

Dit de manière équivalente, on a alors $u_n \to u_\infty$ faiblement dans $L^2(\Omega)$ et $\nabla u_n \to \nabla u_\infty$

faiblement dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

• $u_n \to u_\infty$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ signifie que :

$$\forall v \in H_0^1, \ \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \nabla u_n(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega \nabla u_\infty(x) \nabla v(x)dx.$$

De ma même façon que précédement il est équivalent de dire que $\nabla u_n \to \nabla u_\infty$ faiblement dans $L^2(\Omega, \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

3.2 Formulation variationnelle de problème elliptiques

3.2.1 Le problème de Dirichlet

On apppelle problème de Dirichlet une équation de Laplace avec conditions aux limites de type Dirichlet. Pour tout Ω ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\Gamma := \partial\Omega$, le problème de Dirichlet s'énonce de la façon suivante : Déterminer une fonction u dans un certain espace fonctionnel V telle que :

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{dans } \Gamma. \end{cases}$$

Où f est une fonction donnée dans un certain espace fonctionnel H.

Proposition 3.2.1 *soit $f \in L^2(\Omega)$, alors on a équivalence :*

1. Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que $- \triangle u = f$ dans $D'(\Omega)$.
2. Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Dire que les deux formulations sont équivalentes est équivaut à dire que si u est solution.

3.3 Solutions faibles pour le problème de Dirichlet

3.3.1 Équation de Laplace

On s'intéresse au problème de Dirichlet pour le laplacien $f = -\triangle u$ avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Définition 3.3.1 *Une fonction u est dite solution faible ssi $u \in H_0^1$ et $f = -\triangle u$ au sens D'.*

En passant aux distributions et en utilisant les propriétés des crochets, on obtient que si u est une solution faible alors pour tout $\varphi \in D(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi.$$

Par densité, on peut même prendre $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Ainsi, être solution faible est équivalent à vérifier la formulation variationnelle (on a montré une implication, l'autre se fait en remontant les calculs),

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv.$$

le problème variationnel est donnée par :

1. d'un espace de Hilbert V,
2. d'une forme bilinéaire continue a,
3. d'une forme linéaire continue L,

et sa résolution consiste à rechercher la solution de $u \in V$ telle que $a(u, v) = L(v), \forall v \in V$.

Théorème 3.3.1 (**Lax – Milgram**)

Soit V un espace de Hilbert et soit :

– $a : V \times V \to \mathbb{R}$. une forme bilinéaire continue :

$$|a(u, v)| \leq C||u||_V.||v||_V, \qquad \forall u, v \in V$$

– $L : V \to \mathbb{R}$. une forme linéaire continue :

$$|L(v)| \leq C||v||_V, \quad \forall v \in V$$

– a coercive sur V :

$$\exists C > 0, \ a(u,u) \geq C||u||_V^2.$$

Alors le probléme variationnel $a(u,v) = L(v)$, $\forall u, v \in V$ admet une solution unique $u \in V$.

3.4 Appliction du théorème de Lax-Milgram dans H_0^1

On applique le théorème de Lax-Milgram avec :

– $V = H_0^1(\Omega)$,

– $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx$

$$|a(u,v) \leq ||\nabla u||_{L^2}||\nabla v||_{L^2} \leq ||u||_{H^1}||v||_{H^1}.$$

– $L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx$

$$|L(v)| \leq ||f||_{L^2}||v||_{L^2} \leq ||f||_{L^2}||v||_{H^1}.$$

Il est clair que la forme bilinéaire $a(u,v)$ est continue ainsi que la forme linéaire L. Vérifions que $a(u,v)$ est coercive C'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Poincaré puisque l'inégalité :

$$||\nabla u||_{L^2} \geq C||u||_{H^1}.$$

entraîne bien que :

$$a(u,u) = ||\nabla u||_{L^2}^2 \geq C||u||_{H^1}^2.$$

Donc, il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ et unique telle que :

$$a(u, v) = L(v).$$

Conclusion

La construction des espaces de Sobolev est basée sur la théorie des distributions en particulier les distributions régulières de $L^2(\Omega)$ ce qui fait d'eux des espaces de Hilbert bien adaptés pour résoudre les problèmes variationnels en appliquant le théorème de LAX-MILGRAM.

Bibliographie

[1] BONY J. M , Cours d'analyse.Théorie des distributions et analyse de Fourier, Éditions de l'École Polytechnique,Palaiseau (2001).

[2] HADAMARD,J ,Sur le principe de Dirichlet, Bull. de la S. M. F.,tome 34, $135-138$ (1906).

[3] Lesfari Ahmed, Distributions,Analyse de Fourier et transformation de Laplace, www.edition-ellipses.fr ISBN $978-2-7298-76296$ ellipses edition Markcting S.A 2012.

[4] Mohammed El Amrani, Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, www.edition-ellipses.fr.ellipses edition Markcting S.A 2008 aoùt.

[5] S. Boldo, F. Faissole, V. Martin, and M. Mayero. A Coq Formal Proof of the Lax-Milgram theorem. In $6th\ Conference\ on\ Certified$ Pr$ograms\ and$ Proof, Paris, 2017.

[6] Vokhan khoan, Distributions, Analyse de Fourier et opérateur aux dérivées partielles.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréVariations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous

D	espace des fonctions tests
D'	espace des distributions sur Ω.
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$, $\xrightarrow{\mathcal{D}'}$	convergence en loi, convergence en distributions.
$\delta_{(a)}$	distribution de Dirac.
$\sum T_k$	une série de distributions.
L^1	espace des fonctions intégrables.
D^α	dérivation d'ordre α.
$\mathcal{F}$, $\overline{\mathcal{F}}$	transformation de Fourier, transformation de Fourier conjugué.
C_c^∞	l'ensemble des fonctions infiniment dérivables à support compact.
C^1	les dérivées d'ordre 1 sont continues.
H^1	espace de Sobolev d'ordre 1.
$L_s^2(\mathbb{R}^n)$	l'ensemble des fonctions mesurables.