République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **probabilité**

Par

Hattab Nassima

Titre :

Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour l'EDSR linéaire

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Berrouis Nassima**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Boughrara Saliha**	UMKB	Examinateur
Dr.	**Abba abdelmadjid**	UMKB	Examinateur

juin 2018

Dédicace

Avant tout propos, je tiens à rendre gràce à **ALLAH** qui ma guidé sur la bonne voie.

Je dédie ce modeste travail :

A mes trés chèrs parents

Il n' ya pas de dédicace assez éloquente pour exprimer ce que vous méritez rien dans le monde ne vaut l'effort de consoler mes frères et de fournir tout ce que nous voulons et vos appels contamment, Dieu vous préserve et vous donne la santé, la long vie et le bonheur.

A mes frères et soeurs : Abd assalem, Zine addine, Wassila, Chahd.

A tous ma famille surtous" Noor, Djouhra, Slima, Souad, Soumia"

A mes amies" Baya, Soumia, Rawnag, Kenza, Amira, Anouar"

A tous mes amies en l'éducation" Hassna, Firyal, Zaineb, Nouara, Hanan"

A tous mes collègue de la promotion 2018

Et à tout ce qui enseigné moi au long de ma vie scolaire.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord Dieu le tous puissant, qui ma donné la patience et la force pour accomplir ce travail.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur **BERROUIS NASSIMA,** pour ces conseils, sa grande disponsabilité et sa générosité avec la quelle elle m'a fait partager ces travaux, ses idées et ses intuitions.

Je remercie également les membres du Jury ; **Dr. ABBA ABDELMADJID et Dr. Boughrara Saliha** pour accepté d'évalure et de juger ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Mes remerciements s'adressent également à tous les enseignants du département de mathématique, afin nous aider dans notre parcours d'étude, tout au long de ces annés.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenus et encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction

La théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) a connu un formidable développement à partir des années 1990. Les EDSR linéaires ont été introduites par J.M Bismut en 1973, dans un article concernant le contrôle optimal stochastique et la version probabiliste du principe du maximum de pontryagin. E.Pardoux et S.Peng sont les premiers à établir l'existence et l'unicité de la solution d'une EDSR.
On s'intéresse à un problème de contrôle stochastique, où le système est gouvernés par une équation différentielle stochastique rétrograde linéaire de la forme :

$$y_t = \xi + \int_t^T \{a_s y_s + b_s z_s + c_s u_s\} \, ds - \int_t^T z_s dW_s,$$

L'objectif du problème de contrôle stochastique est de minimiser une fonction coût de la forme :

$$J(u) = E\left[g(y_0) + \int_0^T h(t, y_t, z_t, u_t) dt\right],$$

Dans ce travail on va établir les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalité pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires.

Le plan de travail est comme suit :

Chapitre 1 :calcul stochastique

Dans ce chapitre, on va présenter les résultats de calcul stochastique dont nous aurons besoin dans la suite de ce mémoire, en donnant les définitions et les propriétés des processus continues ainsi que leurs résultats principaux qui nous permettre de définir d'intégrale stochastique et la formule d'Itô.

Chapitre 2 : les équations différentielles stochastiques rétrogrades

Dans ce chapitre nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR, ce résultat est du à E.Pardoux et S.Peng [5] et c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) dans le cas où le générateur est lipschitizien en (y, z), puis on donne la définition de l'EDSR linéaire.

Chapitre 3 : les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

Dans ce chapitre, on va établir les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalité pour les EDSR linéaires. La méthode de démonstration basée sur le principe d'optimisation convexe.

Chapitre 1

Calcul stochastique

Le calcul stochastique est une extension du calcul différentiel et intégrale classique dans laquelle les processus à temps continus remplaçant les fonctions et les martingales jouent le rôle des constantes.
Le but de ce premier chapitre est d'éxposer les notions de base utilisées le long de ce mémoire.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 *Soit T un ensemble. On appelle processus stochastique sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$; pour tout $t \in T$, X_t soit une variable aléatoire.*

Remarque 1.1.1 *On peut voir un processus comme une fonction qui à $w \in \Omega$ associe une fonction de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$, $t \longmapsto X_t(w)$, appelée trajectoire du processus.*

Notation 1.1.1 *La variable $(w, t) \longmapsto X_t(w)$ sera notée X_t et le processus sera notée X où $(X_t)_{t\in T}$.*

Définition 1.1.2 *On dit que le processus est à trajectoires continues (où est continu) si les applications $t \longmapsto X_t(w)$ sont continues pour presque tout w.*

Définition 1.1.3 *Un processus est dit càd-làg (continu à droite, limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.*

Définition 1.1.4 *Un processus X est dit mesurable si l'application :*

$$\mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$(t, w) \longrightarrow X_t(w),$$

est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1.5 *Soient X et Y deux processus. On dit que*

- X est modification de Y si, pour tout $t \geq 0$, les variables X_t et Y_t sont égales P-p.s

$$\forall t \geq 0, P(X_t = Y_t) = 1.$$

- X et Y sont indistinguable si, P-p.s, les trajectoires de X et Y sont les mêmes c-à-d

$$P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

Remarque 1.1.2 *La notion d'indistinguabilité est plus forte que la notion de modification. Notons que si X est une modification de Y et si X et Y sont à trajectoire continues à droite où à gauche alors X et Y sont indistinguables.*

1.2 Espérance conditionnelle

Soit $X \in L^1(\Omega, P)$ et $\mathcal{G}$ sous tribu de $\mathcal{F}$. On définit l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$, l'unique variable aléatoire $E(X|\mathcal{G})$ $\mathcal{G}-$mesurable sur Ω telle que

$$\int_B X dp = \int_B E(X|\mathcal{G}) dp, \quad \forall B \in \mathcal{G}$$

1.2.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle

soient $X, Y \in L^1(\Omega, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, presque sûrement on a :

1. Linéarité : si $X, Y \in L^1(\Omega, P), \forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$ alors :

$$E(\lambda X + \mu Y|\mathcal{G}) = \lambda E(X|\mathcal{G}) + \mu E(Y|\mathcal{G}).$$

2. Monotonie : si $X, Y \in L^1(\Omega, P)$ alors :

$$X \geq Y \Longrightarrow E(X|\mathcal{G}) \geq E(Y|\mathcal{G})$$

en particulier

$$X \geq 0 \Longrightarrow E(X|\mathcal{G}) \geq 0$$

3. Si X est $\mathcal{G}$-mesurable alors :

$$E(X|\mathcal{G}) = X$$

4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, si Y est $\mathcal{G}$-mesurable alors :

$$E(XY|\mathcal{G}) = Y \ E(X|\mathcal{G})$$

en particulier

$$E[E(X|\mathcal{G})Y|\mathcal{G}] = E(X|\mathcal{G}).E(Y|\mathcal{G})$$

5. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$ alors :

$$E(X|\mathcal{G}) = E(X).$$

6. Si $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ alors

$$E[E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1] = E(X|\mathcal{G}_1).$$

1.3 Filtration

Définition 1.3.1 *On appelle filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *de* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$*, c-à-d* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \forall s \leq t$.

Remarque 1.3.1 *Si* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *est une filtration sur un espace de probabilité de* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. On dit que de* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ *est un espace filtré.*

Définition 1.3.2 *On dit qu'une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *est continue à droite si*

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s, \forall 0 \leq s \leq t.$$

Remarque 1.3.2 *Un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *muni d'une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *est satisfait les conditions habituelles si :*

1. Les ensembles négligeables sont dans tous les $\mathcal{F}_t$ *au sens où* $P(A) = 0$*,* $A \in \mathcal{F}_0$*.*

2. La filtration est continue à droite i.e. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s, 0 \leq s \leq t$*.*

La famille croissante de sous tribus $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ *s'appelle la filtration naturelle du processus stochastique* X*. Mais* $\mathcal{G}_0$ *ne contient pas nécessairement les ensembles négligeables* $(\mathcal{N})$*, c'est pour cela on introduit la filtration naturelle augmentée de* X *définie par* $\mathcal{F}_t^X = \sigma(\mathcal{N} \cup \mathcal{G}_t)$*. Lorsque nous parlerons de filtration naturelle, il s'agira toujours de la filtration naturelle augmentée.*

Définition 1.3.3 *Un processus* X *est dit adapté par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si, pour tout* t*, la variable aléatoire* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Remarque 1.3.3 *Un processus* X *est évidement adapté par rapport à sa filtration naturelle* $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\geq 0}$*.*

Définition 1.3.4 *Un processus* X *est progressivement mesurable par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si* *l'application*

$$([0,t] \times \Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$(s,w) \longrightarrow X_s(w),$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 1.3.1 *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (où à gauche), alors X est mesurable et X est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

Définition 1.3.5 *Un processus $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit à variation bornée sur $[0,T]$ si*

$$\sup_{t_i} \sum_{i=1}^{n-1} \left| X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right| < k.$$

Définition 1.3.6 *Un processus $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit à variation finie sur $[0,T]$ si*

$$\sup_{t_i} \sum_{i=1}^{n-1} \left| X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right| < \infty.$$

Définition 1.3.7 *Les variables aléatoires $X_t - X_s, 0 \leq s \leq t$ sont appelées les accroissements du processus stochastique X, on dit que :*

- *Processus à accroissement indépendants si*

$$(X_t - X_s) \perp \mathcal{F}_s^X = \sigma(X_r, 0 \leq r \leq s), \ \forall\ 0 \leq s \leq t.$$

- *Processus à accroissement stationnaire si*

$$X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0, \ \forall\ 0 \leq s \leq t.$$

1.4 Martingale

On se donne un espace de probabilité muni d'une filtration $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$.

Définition 1.4.1 *Un processus X à valeurs réelles est une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-martingale si*

- *pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable ($\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adapté),*
- *pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable i.e. $E[|X_t|] < \infty$,*
- *pour tout $0 \leq s \leq t$, $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$.*

Définition 1.4.2 *Un processus X à valeurs réelles est une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sur-martingale (respectivement $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sous-martingale) si*

- *pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable ($\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adapté),*
- *pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable i.e. $E[|X_t|] < \infty$,*
- *pour tout $0 \leq s \leq t$, $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s$. (respectivement $E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s$).*

Remarque 1.4.1 *Toute martingale X vérifie :*

$$\forall t \leq T,\ E[X_t] = E[X_0].$$

Définition 1.4.3 *Soit τ une variable aléatoire à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}_+$. τ est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-temps d'arrêt si, pour tout t,*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall 0 \leq t < \infty.$$

1.5 Mouvement Brownien

On se donne un espace de probabilité muni d'une filtration $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$.

Définition 1.5.1 *Un Mouvement Brownien (MB) de dimension d, $\{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < +\infty\}$ est la donnée d'un processus mesurable W à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et d'une filtration, tels que W est adapté à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, est continu, et vérifie :*

- *$W_0 = 0$ P-p.s,*

• *pour* $0 \leq s \leq t$, W *est à accroissement indépendant :* $W_t - W_s$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s$,

• *pour* $0 \leq s \leq t$, *les accroissements sont stationnaires :* $W_t - W_s$ *et de loi gaussienne centrée, de matrice de covariance* $\sqrt{t-s}I_d$, *où* I_d *désigne la matrice identité de dimension* d.

Définition 1.5.2 *On appelle Mouvement Brownien standard (MB) un processus stochastique* W *à valeurs réelles tel que :*

• *P-p.s.* $t \longmapsto W_t(x)$ *est continue,*

• *pour* $0 \leq s \leq t$, W *est à accroissement indépendant :* $W_t - W_s$ *est indépendant de* $\mathcal{F}_s^W = \sigma(W_u, u \leq s)$ *et de loi gaussienne centrée de variance* $t - s$,

• $W_0 = 0$, *P-p.s.*

Remarque 1.5.1 *D'aprés la définition,* W_t *est une v.a réelle de loi* $\mathcal{N}(0,t)$, *donc de densité* $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right)$.

Théorème 1.5.1 ***(Théorème de Lévy)*** *Soit* X_t *un processus stochastique à trajectoires continues, adapté à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *et tel que :*

i) X_t *est une martingale par rapport à* $(\mathcal{F}_t)$ *;*

ii) $(X_t^2 - t)$ *est une martingale par rapport à* $(\mathcal{F}_t)$ *;*

alors X_t *est un mouvement brownien.*

Théorème 1.5.2 ***(Théorème d'arrêt)*** *Soit* (X_t) *est une martingale continue par rapport à* $(\mathcal{F}_t)$ *et* T_1, T_2 *deux temps d'arrêts tels que* $0 \leq T_1(w) \leq T_2(w) \leq K < \infty, \forall w \in \Omega$. *Alors*

$$E(X_{T_2}|\mathcal{F}_{T_1}) = X_{T_1}.\ P\text{-}p.s,$$

et donc

$$E(X_{T_2}) = E(X_{T_1}),$$

En particulier si $0 \leq T(w) \leq K$, $\forall w \in \Omega$, *alors*

$$E(X_T) = E(X_0).$$

Le théorème est encore valide pour une sous-martingale et une sur-martingale (avec les inégalités correspondantes).

Théorème 1.5.3 ***(Théorème d'arrêt de Doob)*** *Si X est une martingale et si σ et τ sont deux temps d'arrêt bornés tels que*

$$\sigma \leq \tau, \quad E[X_\tau|\mathcal{F}_\sigma] = X_\sigma \quad P\text{-}p.s.$$

Théorème 1.5.4 ***(Burkholder-Davis-Gundy "BDG").*** *Soit $p > 0$ un réel. Il existe deux constantes c_p et C_p telles que, pour toute martingale continue X, nulle en 0,*

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

Remarque 1.5.2 *En particulier, si $T > 0$,*

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Théorème 1.5.5 ***(Théorème de représentation des martingales) :*** *Soient $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$, et X_t une martingale $\mathcal{F}_t$-adaptée. Alors, il existe un processus adapté H_s tel que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dW_s, \;\; P\text{-}p.s.$$

1.6 Intégrale stochastique

on veut donner un sens à la variable aléatoire :

$$\int_0^T \theta_s dW_s,$$

lorsque l'on intégrale une fonction g par rapport à une fonction f dérivable, si g est régulière, on définit son intégrale comme :

$$\int_0^T g(s)df(s) = \int_0^T g(s)f'(s)ds,$$

Si jamais f n'est pas à dérivable mais simplement à variation bornée, on s'en sort encore en définissant l'intégrale par :

$$\int_0^T g(s)df(s) = \lim_{\pi_n \mapsto 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)(f(t_{i+1}) - f(t_i)).$$

L'intégrale alors définie s'appelle intégrale de Stieljes.

Nous allons donc construire l'intégrale stochastique sur l'ensemble $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0,T]) = \left\{(\theta_t)_{0 \leqslant t \leqslant T},\ \text{processus CADLAG } \mathcal{F}\text{-adapté tq } E\left[\left(\int_0^T \theta_s^2 ds\right)\right] < \infty\right\}.$

Définition 1.6.1 *un processus $(\theta_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ est appelé processus élémentaire s' il existe une subdivision $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant ... \leqslant t_n = T$ et un processus discret $(\theta_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ tel que tout θ_i est $\mathcal{F}_{t_i}$-adapté et dans $L^2(\Omega)$ tel que :*

$$\theta_t(w) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(w) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(t).$$

on note ε l'ensemble des processus élémentaires qui est un espace de $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega,\ [0,T])$.

Définition 1.6.2 *L'intégrale stochastique entre 0 et $t \leq T$ d'un processus élémentaire $\theta \in \varepsilon$ est la variable aléatoire définie par :*

$$\int_0^t \theta_s dW_s = \sum_{i=0}^{k} \theta_i \left(W_{t_{i+1}} - W_t\right) + \theta_i \left(W_t - W_{t_k}\right) \quad \textit{sur} \quad]t_k,\ t_{k+1}],$$

Soit

$$\int_0^t \theta_s dW_s = \sum_{i=0}^{n} \theta_i (W_{t \wedge t_{i+1}} - W_{t \wedge t_i}).$$

on associe donc à $\theta \in \varepsilon$ le processus $\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right)_{0 \leq t \leq T}$.

Définition 1.6.3 ***(Processus d'Itô)*** *On appelle processus d'Itô, un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$\forall 0 \leq t \leq T, \qquad X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \ \ P\text{-}p.s$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions

$$\int_0^t |b_s| ds < \infty \quad \text{ et } \quad \int_0^t \|\sigma_s\|^2 ds < \infty.$$

Le coefficient b est le drift où la dérivée, σ est le coefficient de diffusion.

Théorème 1.6.1 (formule d'Itô) *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, à dérivées bornées, on a*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \int_0^t f'_s(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) \sigma_s^2 ds,$$

ce qui l'on note

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \left[f'_t(t, X_t) + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t) \sigma_t^2 \right] dt + f'_x(t, X_t) dX_t \\ &= f'_t(t, X_t) dt + f'_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t) dX_t. \end{aligned}$$

Théorème 1.6.2 *La formule d'Itô montre que*

$$d[X_1 X_2](t) = X_1(t) dX_2(t) + X_2(t) dX_1(t) + \sigma_1(t) \sigma_2(t) dt,$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par parties. La quantité $\sigma_1(t)\sigma_2(t)$ correspond au crochet de X_1, X_2 noté $\langle X_1, X_2 \rangle$ est défini comme le processus à variation fini

$$\langle X_1, X_2 \rangle = \int_0^t \sigma_1(s) \sigma_2(s) ds.$$

Définition 1.6.4 *la formule d'Itô où encore le lemme d'Itô, est l'un des principaux résultats de la théorie du calcul stochastique. Cette formule offre un moyen de manipuler le M.B où les solutions d'EDS.*

1.7 Equation différentielle stochastique (EDS)

Définition 1.7.1 *une équation différentielle stochastique est une équation de la forme :*

$$X_t = x + \int_0^x b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s,$$

Où sous la forme

$$\begin{cases} dX_t = & b(t, x_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = & x \end{cases} . \tag{1.1}$$

Le coefficient b s'appelle le drift et la matrice $\sigma\sigma^t$ s'appelle la matrice de diffusion.

L'inconnu est le processus X. le problème est comme une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines condition sur les coefficients, l'équation différentielle à une unique solution.

Définition 1.7.2 *une solution (forte) de l'EDS 1.1 est un processus continu tel que :*

1- X est progressivement mesurable ;

2- P-p.s : $\int_0^t \{|b(s, X_s)\} + ||\sigma(s, X_s)||^2 ds < \infty$ où $\|\sigma\| = trace(\sigma\sigma^*)$;

3- P-p.s on a : $X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$, $0 \leq t \leq T$.

On note : S^2 l'espace des processus X_t progressivement mesurables tel que $E\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right] < \infty$, muni de la norme $||x|| = E\left[\left(\sup\limits_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty$.

S_c^2 ={ le sous espace de S^2 formé des processus continus.}

Théorème 1.7.1 *On suppose que :*

a) les fonctions b et σ sont continues.

b) Il existe K tel que pour tout $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$:

i) $|b(t,x) - b(t,y)| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K\,|x-y|$ (condition de lipschitz)

ii) $|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq K(1+|x|)$ (condition de croissance)

iii) $E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2 < \infty\right]$

Alors l'EDS possède une unique solution, cette solution appartient à S^2.

Lemme 1.7.1 ***(Lemme Gronwall)*** *Soit $g : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant*

$$\forall t \in [0,T], \qquad 0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)ds,$$

pour une constante $\beta \geq 0$ et pour une fonction $\alpha : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable par rapport à la mesure de Lebèsgue. On a alors

$$\forall t \in [0,T], \qquad 0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s)e^{\beta(t-s)}ds,$$

L'intérêt est notamment que g n'apparaît qu'une seule fois dans la nouvelle inéquation en particulier, si α est une fonction constante, on trouve

$$\forall t \in [0,T], \qquad g(t) \leq \alpha e^{\beta t},$$

et si $\alpha = 0$, on a $g = 0$.

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades

2.1 Vocabulaire et notations

2.1.1 Présentation du problème

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \sigma \geq 0, P)$, un espace probabilisé filtré et ξ une variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$, où T désigne un temps terminal.

On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \frac{-dY_t}{dt} = & f(Y_t) \quad , \ t \in [0, T], \\ Y_T = & \xi \end{cases}$$

en imposant que, pour tout instant t, Y_t ne dépend pas du futur après t c'est-à-dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f \equiv 0$, le condidat naturel est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe.

La meilleure approximation-disons dans L^2-adaptée est la martingale $Y_t = E(\xi | \mathcal{F}_t)$, si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que

$$Y_t = E(\xi/\mathcal{F}_t) = E(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s = \xi - \int_t^T Z_s dW_s,$$

où de façon équivalente

$$\begin{cases} -dY_t = & -Z_t dW_t; \quad t \in [0,T] \\ Y_T = & \xi \end{cases}$$

On voit donc apparaitre sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparait, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f dépendre du processus Z ; l'équation devient alors

$$\begin{cases} -dY_t & = & f \quad (t, Y_t, Z_t) \quad dt - Z_t dW_t, \quad t \in [0,T], \\ Y_T & = & \xi \end{cases}$$

où de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad t \in [0,T]. \tag{2.1}$$

2.1.2 Notations

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet et W un mouvement brownien (MB) d-dimensionnel sur cet espace. On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du (MB) W. On travaillera avec deux espaces de processus :

-On note $S^2(\mathbb{R}^k)$ l'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :

$$||Y||_{S^2}^2 = E\left\{\underset{0\le t\le T}{Sup}|Y_t|^2\right\} < \infty,$$

et $S_c^2(\mathbb{R}^k)$ le sous espace formé par le processus continus.

- En suite $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ celui formé par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tel que :

$$||Z||_{M^2}^2 = E\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right] < \infty,$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}, ||z||^2 = trace(zz^*)$. $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

$\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ seront souvent omis ; les espaces S^2, S_c^2 et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons B^2 l'espace de Banach $S_c^2(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Dans tous ce chapitre, ainsi que dans le suivant, nous donnons une application aléatoire f définie sur $[0,T]\times\ \Omega\times\ \mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ à valeur dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$,

le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\le t\le T}$ est progressivement mesurable. Nous considérons également une variable aléatoire ξ, mesurable par rapport $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

La fonction f s'appelle le générateur et ξ la condition terminale.

Définition 2.1.1 *une solution de l'EDSR 2.1 est un couple de processus* $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\le t\le T}$ *vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$;
2. P-p.s ;

$$\int_0^T \left\{f(r,Y_r,Z_r) + ||z_r||^2\right\} dr < \infty;$$

3.P-p.s , on a :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \le t < T.$$

Remarque 2.1.1 *Il est important de retenir les deux points suivants : tout d'abord, les intégrales de l'équation 2.1 étant bien définies, Y est une semi-martingale continue, ensuite, comme le processus Y est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe.*

Avant de donner un premier théorème d'existence et d'unicité, nous allons montrer, que sous une hypothèse relativement faible sur le générateur f, le processus Y appartient à S^2.

Proposition 2.1.1 *ils existent deux constantes positives C et K et supposons qu'il existe un processus $\{f(t,y,z)\}_{0\le t\le T}$, positif appartenant à $M^2(\mathbb{R}^k)$ tels que :*

$$\forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, \qquad |f(t,y,z)| \le f_t + C|y| + K||z||.$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\le t\le T}$ est une solution de l'EDSR 2.1 telle que $Z \in M^2$ alors Y appartient à S_c^2.

Proof. *on a, pour tout $t \in [0,T]$,*

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_0^t Z_r dW_r,$$

On utilise l'hypothèse sur f,

$$|Y_t| \le |Y_0| + \int_0^T (f_r + K||Z_r||)dr + \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t Z_r dW_r\right| + C\int_0^t |Y_r|dr.$$

On pose

$$\lambda = |Y_0| + \int_0^T (f_r + K||Z_r||)dr + \underset{0\le t\le T}{Sup}\left|\int_0^t Z_r dW_r\right|,$$

Aussi on a

$$|Y_t| \leq \lambda + C\int_0^t |Y_r|dr.$$

Y étant est un processus continu, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité

$$|Y_t| \leq \lambda \exp(Ct),$$

Alors

$$\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t| \leq \lambda \exp(CT),$$

λ est une variable aléatoire de carré intégrable, puisque par l'hypothèse, Z appartient à M^2 et donc, d'aprés l'inégalité de Doob, on a

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Z_r dW_r\right|^2\right] \leq 4\sup_{0\leq t\leq T} E\left[\int_0^t ||Z_r||^2 dr\right],$$

Ce qui signfie que le troisième terme de λ est de carré intégrable. Il est la même pour$\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$ et Y_0 car il est déterministe alors de carré intégrable. Ceci montre que Y appartient à S^2.

■

Nous finissons par le résultat d'intégrabilité qui nous servira à plusieurs reprise.

Proposition 2.1.2 *soient $Y \in S^2(\mathbb{R}^k)$ et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$, alors*

$$\left\{\int_0^t y_s Z_s dW_s, \qquad t\in[0,T]\right\}$$

est une martingale uniformément intégrable.

Proof. Les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (BDG) donnent :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r Z_r dW_r\right|\right] \leq C.E\left[\left(\int_0^T |Y_r|^2||Z_r||^2 dr)\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\leq C.E \quad \left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|.\left(\int_0^T ||Z_r||^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

Et par suite en appliquant l'inégalité

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

On obtient

$$E\ \left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^T Y_r Z_r dW_r\right|\right]\ \leq C'\ \left(E\ \left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right] + E\ \left[\int_0^T ||Z_r||^2 dr\right]\right).$$

Le deuxième membre de cette inégalité est fini, et donc on aura :

$$E\ \left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_r Z_r dW_r\right|\right] < \infty,$$

D'où le résultat. ■

2.2 Existence et unicité des solutions

En 1990, E.Pardoux et S.Peng ont démontré l'éxistence et l'unicité des solutions de l'EDSR 2.1 dans le cas où le générateur f est lipschitzien par rapport aux deux variables y et z. On rappèle la dernière fois que f est définie sur $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ à valeur dans $\mathbb{R}^k$, telle que, pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,y,z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. Nous considérons également ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$-mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^k$.

Voici les hypothèses sous lesquelles nous travailler.

(**L**) Il existe une constante λ telle que P-p.s,

1.Condition de lipschitz en (y, z) : pour tout $t, y, y\prime, z, z\prime$,

$$|f(t, y, z) - f(t, y\prime, z\prime)| \leq \lambda(|y - y'| + ||z - z'||);$$

2.Condition d'intégrabilité :

$$E[|\xi|^2 + \int_0^T |f(r, 0, 0)|^2 dr] < \infty.$$

On commence par un cas trés simple, celui où f ne dépend ni de y ni de z i.e. On se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ dans $M^2(\mathbb{R}^k)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leq t \leq T \tag{2.2}$$

Lemme 2.2.1 *soient $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$ l'EDSR 2.2 possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.*

Proof. *supposons dans un premier temps que (Y, Z) soit une solution vérifiant $Z \in M^2$. Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement,*

$$Y_t = E\left(\xi + \int_t^T F_r dr | \mathcal{F}_t\right).$$

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que, d'aprés le théorème de Fubini, comme F est progressivement mesurable,

$$\int_0^t F_r dr,$$

est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,T]}$; en fait dans S_c^2 puisque F est de carré *intégrable. On a alors, pour tout* $t \in [0,T]$,

$$Y_t = E\left(\xi + \int_0^T F_r dr|\mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_r dr = X_t - \int_0^t F_r dr,$$

X *est une martingale brownienne ; via le théorème de représentation des martingales browniennes on construit un processus* Z *appartenant à* M^2 *tel que*

$$Y_t = X_t - \int_0^t F_r dr = X_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr.$$

On vérifie facilement que (Y,Z) *ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée puisque comme* $Y_T = \xi$,

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= X_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - \left(X_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr\right) \\ &= \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r. \end{aligned}$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in M^2$. ■

Théorème 2.2.1 *Pardoux-peng90. Sous l'hypothèse (**L**), l'EDSR 2.1 possède une unique solution* (Y,Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Proof. *on utilise un argument de point fixe dans l'espace de Banach* B^2 *des solutions* (Y,Z). *En construisant une application* Ψ *de* B^2 *dans lui même, de sorte que* (Y,Z) *est solution de l'EDSR 2.1 si et seulement si* (Y,Z) *c'est un point fixe de* Ψ. *Pour* (U,V) *élément de* B^2, *on définit* $(Y,Z) = \Psi(U,V)$ *comme étant la solution de l'EDSR :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,U_r,V_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \le t \le T.$$

Remarquons que cette dernière EDSR possède une unique solution qui est dans B^2. *En* *effet, on pose :* $F_r = f(r, U_r, V_r)$. *Ce processus appartient à* M^2 *car,* f *étant Lipschitz,*

$$|F_r| \leq |f(r,0,0)| + \lambda|U_r| + \lambda||V_r||,$$

et ces trois dernières processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le lemme 2.2.1 pour obtenir une solution unique (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$. (Y, Z) *appartient à* B^2 *: l'intégrabilité de* Z *est obtenue par construction et d'aprés le proposition 2.1.1 ,* Y *appartient à* S_c^2. *L'application* Ψ *de* B^2 *dans lui-même est donc bien définie.*
Soient (U, V) *et* $(U\prime, V\prime)$ *deux éléments de* B^2 *et* $(Y, Z) = \Psi(U, V)$, $(Y\prime, Z\prime) = \Psi(U\prime, V\prime)$.
Notons $y = Y - Y\prime$ *et* $z = Z - Z\prime$ *. on a*

$$y_T = 0 \quad et \quad dy_t = -\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t')\}dt + z_t dW_t.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t}|y_t|^2$ *pour obtenir*

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t}|y_t|^2) &= \alpha e^{\alpha t}|y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t} y_t.\{f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t')\}dt \\ &+ 2e^{\alpha t} y_t.z_t dW_t + e^{\alpha t}||z_t||^2 dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t *et* T*, on obtient*

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr &= \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha|y_r|^2 + 2y_r.\{f(t, U_r, V_r) - f(t, U_r', V_r')\})dr \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r, \end{aligned}$$

et, comme f *est lipschitz, il vient, notant* u *et* v *pour* $U - U'$ *et* $V - V'$ *respectivement,*

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr &\leq \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha|y_r|^2 + 2\lambda|y_r| \; |u_r| + 2\lambda|y_r| \; \|v_r\|)dr \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r. \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0,$ *on a*

$$2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2,$$

et donc, l'inégalité précédente donne

$$e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr \leq \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha + \frac{2\lambda^2}{\varepsilon}\right)|y_r|^2 dr - \int_t^T 2e^{\alpha r} y_r z_r dW_r$$
$$+ \varepsilon \int_t^T e^{\alpha r}(|u_r|^2 + ||v_r||^2)dr,$$

et prenant $\alpha = \frac{2\lambda^2}{\varepsilon}$ *on a, notant*

$$R_\varepsilon = \varepsilon \int_0^T e^{\alpha r}(|u_r|^2 + ||v_r||^2)dr,$$

$$\forall t \in [0,T], \qquad e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr \leq R_\varepsilon - 2\int_t^T e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r. \tag{2.3}$$

D' après le lemme 2.1.2 , la martingale

$$\left\{\int_0^T e^{\alpha r} y_r z_r dW_r\right\}_{t\in[0,T]}$$

est en réalité une martingale nulle en 0 *car* Y, Y' *appartiennent à* S^2 *et* Z, Z' *appartiennent à* M^2.

En prenant l'espérance, il vient que pour $t = 0$:

$$E\left[\int_0^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr\right] \leq E[R_\varepsilon]. \tag{2.4}$$

Revenant à l'inégalité 2.3, les inégalités BDG fournissent avec C *universelle,*

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] &\leq E[R_\varepsilon] + C.E\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha}|y_r|^2||z_r||^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq E[R_\varepsilon] + C.E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}}|y_t|\left(\int_0^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right], \end{aligned}$$

Puis, comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] \leq E\left[R_\varepsilon\right] + \frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] + \frac{C^2}{2}E\left[\int_0^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr\right].$$

Prenant en considération l'inégalité 2.4, on obtient finalement

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr\right] \leq (3+C^2)E[R_\varepsilon],$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr\right] \leq \varepsilon(3+C^2)(1\vee T)E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|u_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}||v_r||^2 dr\right].$$

Prenons ε *tel que* $\varepsilon(3+C^2)(1\vee T) = \frac{1}{2}$, *de sorte que l'application* Ψ *est alors une contraction stricte de* B^2 *dans lui-même si on le munit de la norme*

$$||(U,V)||_\alpha = E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|U_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha t}.||V_r||^2 dr\right]^{\frac{1}{2}},$$

qui en fait un espace de Banach – cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$.

Ψ *possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR 2.1 dans* B^2. ■

Remarque 2.2.1 *A partir de maintenant et sans plus insister, l'expression « la solution de l'EDSR » signifiera la solution de l'EDSR vérifiant* $Z \in M^2$.

2.3 Le rôle de Z

Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_r dW_r$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

Proposition 2.3.1 *soit (Y, Z) la solution de l'EDSR 2.1 et soit τ un temps d'arrêt majorée par T.*

On suppose, autre l'hypothèse (**L**), que ξ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et que $f(t, y, z) = 0$ dés que $t \geqslant \tau$.

Alors $Y_t = Y_{t\wedge\tau}$ et $Z_t = 0$ si $t \leq \tau$.

Proof. on a, P-p.s

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, 0 \leq t \leq T.$$

Et donc, pour $t = \tau$ comme $f(t, y, z) = 0$ dés que $t \geqslant \tau$,

$$Y_\tau = \xi + \int_\tau^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r dW_r = \xi - \int_\tau^T Z_r dW_r.$$

Il vient alors $Y_\tau = E(\tau/\mathcal{F}_\tau) = \xi$ et par suite $\int_\tau^T Z_r dW_r = 0$ d'où l'on tire que

$$E\left[\left(\int_\tau^T Z_r dW_r\right)^2\right] = E\left[\int_\tau^T ||Z_r||^2 dr\right] = 0,$$

et finalement que $Z_r.1_{r\geqslant\tau} = 0$.

Il s'en suit immédiatement que, si $t \geqslant \tau$, $Y_t = Y_\tau$ puisque par l'hypothèse,

$$Y_\tau = Y_t + \int_\tau^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r dW_r = Y_t \neq 0.$$

ce qui termine la preuve. ■

2.4 EDSR linéaires

Dans ce paragraphe nous étudions le cas particulier des EDSR linéaires

pour lesquelles nous allons donner une formule plus où moins explicite.

On se place dans le cas $k = 1$; Y est donc réel et Z est une matrice de taille $1 \times d$ c'est à dire un vecteur ligne de dimension d.

Proposition 2.4.1 *Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, progressivement mesurable et borné. Soient $\{c_t\}_{t\in[0,T]}$ un élément de $M^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$–mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles.*

L'EDSR linéaire

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{a_r Y_r + Z_r b_r + c_r\} dr - \int_t^T Z_r dW_r,$$

possède une unique solution qui vérifie :

$$\forall t \in [0,T], \qquad Y_t = \Gamma_t^{-1} E\left(\xi \Gamma_T + \int_t^T c_r \Gamma_r dr | \mathcal{F}_t\right),$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Gamma_t = \exp\left\{\int_0^t b_r dW_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2 dr + \int_0^t a_r dr\right\}.$$

Proof. Commençons par remarquer que le processus Γ vérifie

$$d\Gamma_t = \Gamma_t(a_t dt + b_t dW_t) \qquad , \Gamma_0 = 1.$$

D'autre part, comme b est borné, l'inégalité de Doob montre que Γ appartient à S^2.

De plus, les hypothèses de cette proposition assure l'existence d'une unique solution (Y,Z) à l'EDSR linéaire ; il suffit de poser $f(t,y,z) = a_t y + z b_t + c_t$ et de vérifier que $(\mathbf{L})$ est satisfaite. Y appartient à S^2 par la Proposition 2.1.1.

La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} d\Gamma_t Y_t &= \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\langle \Gamma, Y\rangle_t \\ &= -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dW_t + \Gamma_t Y_t b_t dW_t, \end{aligned}$$

ce qui montre que le processus $\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr$ est une martingale locale qui est en fait une martingale car $c \in M^2$ et Γ, Y sont dans S^2. Par suite,

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr = E\left(\Gamma_T Y_T + \int_0^t c_r \Gamma_r dr | \mathcal{F}_t\right),$$

ce qui donne la formule annoncée. ■

Chapitre 3

conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

3.1 Formulation du problème et hypothèses

Soient T un réel strictement positif, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituells, $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien de dimension r, et U un sous ensemble convexe et compact de $\mathbb{R}^K$.

On suppose que $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} = \sigma(W(s),\ 0 \le s \le t)$ est la filtration naturelle du mouvement brownien.

Définition 3.1.1 *On appelle contrôle admissible tout processus $v = (v(t)_{0\le t\le T})$ progressivement mesurable à valeurs dans U de $\mathbb{R}^K$.*

On note par U_{ad} l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

pour tout $v \in U_{ad}$ on considère le problème du contrôle optimal gouvernés par l'EDSR Linéaire

$$y_t = \xi + \int_t^T \{a_s y_s + b_s z_s + c_s u_s\}\, ds - \int_t^T z_s dW_s, \tag{3.1}$$

où ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurable telle que

$$E[|\xi|^2] < \infty,$$

Soient a, b et c sont bornées et progressivement mesurables par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$.
Soit maintenant la fonction de coût définit par

$$J(v) = E[g(y_0) + \int_0^T h(t, y_t, z_t, v_t)dt]; \tag{3.2}$$

où

$$h : \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K\times d} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g : \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R},$$

sont des fonctions mesurables donnée.
Le problème de contrôle optimal est de minimiser le coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles U_{ad}.

Définition 3.1.2 *Un contrôle admissible u est dit optimal si*

$$J(u) = \inf_{v\in U_{ad}} J(v). \tag{3.3}$$

Au cours de ce chapitre, on suppose que :
(A_1) $U \subseteq \mathbb{R}^K$ est convexe et compact.
(A_2) h et g sont continues et convexes.
(A_3) h et g sont continuement dérivables en leurs variables avec des dérivées continues et bornées.

3.2 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

Dans ce paragraphe, nous donnons les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalité, sous l'hypothèse de convexité du domaine de contrôle U, dans ce cas, en utilisant la méthode de perturbation convexe du contrôle optimal. On pertube le contrôle optimal u, de la manière suivante

$$u_t^\varepsilon = u_t + \varepsilon(v_t - u_t), \qquad v \in U_{ad} \quad \text{où} \quad \varepsilon > 0$$

On note ici que u^ε est un contrôle pertubé et $(y_t^\varepsilon, z_t^\varepsilon)$ la solution de l'équation 3.1 contrôlée par u^ε.

D'aprés l'optimalité de u

$$0 \leq J(u^\varepsilon) - J(u).$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(J(u^\varepsilon) - J(u) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(J(u + \varepsilon (v - u)) - J(u) \right) \\ &= \langle J'(u), v - u \rangle . \end{aligned}$$

3.2.1 Le principe d'optimisation convexe

Pour établir les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité en utilisant le principe d'optimisation convexe donner par le théorème suivant

Théorème 3.2.1 *Soit E un espace de Banach réflixif, $\mathcal{D}$ est un sous-ensemble convexe, fermé non vide de E et $\mathcal{J}$ est une fonction définie de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, convexe, semi-continue inférieurement et gateaux-différetiable de différentielle $\mathcal{J}\,'$, continu alors, on a*

$$x^* \text{ minimise } \mathcal{J} \Longleftrightarrow \langle \mathcal{J}'(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \ \forall x \in \mathcal{D}.$$

Comme l'ensemble des contrôles U est convexe et J est convexe en u, continu et Gateaux-différentiable de différentielle J' continu, on peut appliquer le principe d'optimisation convexe pour obtenir

$$(u \text{ minimise } J) \Longleftrightarrow \langle J'(u), v-u\rangle \geq 0 \quad , \forall v \in U_{ad}.$$

Commençons par calcul la dérivée de Gateaux de J au point u et de direction $(v-u)$, nous avons la formule

$$\begin{aligned}\langle J'(u), v-u\rangle &= E(g_y(y_0^u)(y_0^v - y_0^u)) \qquad (3.4)\\ &+ E\int_0^T (h(t, y_t^u, z_t^u, u_t)(y_t^v - y_t^u) - h_z(t, y_t^u, z_t^u, u_t)(z_t^v - z_t^u))dt \\ &+ E\int_0^T h_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t)(v_t - u_t)dt. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Théorème 3.2.2 ***(conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité)***
Soit u un contrôle admissible et $(y^u,\ z^u)$ la solution 3.1 associé à u. Alors u est optimal si et seulement s'il existe un unique processus adapté Q, solution de l'équation suivante (appelée équation adjointe)

$$\left\{\begin{array}{ll} dQ_t^v = & H_y(t, y_t^v, z_t^v, v_t, Q_t^v)dt \quad + H_z(t, y_t^v, z_t^v, v_t, Q_t^v)dW_t \\ Q_0^v = & g_y(y_0^v), \end{array}\right. , \qquad (3.6)$$

tel que

$$H_u(t, y_t^v, z_t^v, v_t, Q_t^v)(v_t - u_t) \geqslant 0, \qquad \forall v \in U, \quad P.p.s. \qquad (3.7)$$

Où la fonction de Hamilton est définit comme suit

$$H(t, y_t, z_t, Q_t, v_t) = h(t, y_t, z_t, v_t) + \langle Q_t, a_t y_t + z_t b_t + c_t v_t\rangle. \qquad (3.8)$$

Proof. On peut écrire 3.7 comme suit

$$\begin{cases} dQ_t^v = \{h_y(t, y_t^v, z_t^v, v_t) + a_t Q_t^v\}dt + \{h_z(t, y_t^v, z_t^v, v_t) + b_t Q_t^v\}dW_t \\ Q_0^v = g_y(y_0^v). \end{cases},$$

Par la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned} d(Q_t^u y_t^u) &= -(Q_t^u a_t y_t^u + Q_t^u z_t^u b_t + Q_t^u c_t u_t)dt + Q_t^u z_t^u dW_t \\ &+ \{y_t^u h_y(t, y_t^u, z_t^u, u_t) + y_t^u a_t Q_t^u\}dt \\ &+ \{y_t^u h_z(t, y_t^u, z_t^u, u_t) + y_t^u b_t Q_t^u\}dW_t \\ &+ \{z_t^u h_z(t, y_t^u, z_t^u, u_t) + z_t^u b_t Q_t^u\}dt, \end{aligned} \tag{3.9}$$

Par conséquent

$$E(Q_0^u y_0^u) = E(Q_T^u y_T^u) + E\int_0^T (Q_t^u c_t u_t - y_t^u h_y(t, y_t^u, z_t^u, u_t) - z_t^u h_z(t, y_t^u, z_t^u, u_t))dt, \tag{3.10}$$

Et puisque $Q_0^u = g_y(y_0^u)$ et $y_T^u = \xi$, alors 3.10 devient

$$E(g_y(y_0^u)y_0^u) = E(Q_T^u \xi) + E\int_0^T \{Q_t^u c_t u_t - y_t^u h_y(t, y_t^u, z_t^u, u_t) - z_t^u h_z(t, y_t^u, z_t^u, u_t)\}dt, \tag{3.11}$$

par le mème argument nous obtenons

$$E(g_y(y_0^u)y_0^v) = E(Q_T^u \xi) + E\int_0^T \{Q_t^u c_t v_t - y_t^v h_y(t, y_t^u, z_t^u, u_t) - z_t^v h_z(t, y_t^u, z_t^u, u_t)\}dt. \tag{3.12}$$

De 3.12, 3.11 et 3.4, nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle J'(u), v-u\rangle &= E\int_0^T (Q_t^u c_t v_t - y_t^v h_y(t, y_t^u, z_t^u, u_t) - z_t^v h_z(t, y_t^u, z_t^u, u_t))dt \\ &- E\int_0^T (Q_T^u c_t u_t - y_t^u h_y(t, y_t^u, z_t^u, u_t) - z_t^u h_z(t, y_t^u, z_t^u, u_t))dt \\ &+ E\int_0^T (h_y(t, y_t^u, z_t^u, u_t)(y_t^v - y_t^u) + h_z(t, y_t^u, z_t^u, u_t)(z_t^v - z_t^u))dt \\ &+ E\int_0^T h_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t)(v_t - u_t))dt.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\langle J'(u), v-u\rangle &= E\int_0^T Q_t^u c_t(v_t - u_t)dt - E\int_0^T h_y(t, y_t^u, z_t^u, u_t)(y_t^v - y_t^u)dt \\ &- E\int_0^T h_z(t, y_t^u, z_t^u, u_t)(z_t^v - z_t^u)dt \\ &+ E\int_0^T \{h_y(t, y_t^u, z_t^u, u_t)(y_t^v - y_t^u) + h_z(t, y_t^u, z_t^u, u_t)(z_t^v - z_t^u)\}dt \\ &+ E\int_0^T h_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t)(v_t - u_t)dt,\end{aligned}$$

On a

$$\langle J'(u), v-u\rangle = E\int_0^T Q_t^u c_t(v_t - u_t)dt + E\int_0^T h_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t)(v_t - u_t)dt. \tag{3.13}$$

D'autre part, de 3.13 on a

$$E\int_0^T H_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t, Q_t^u)(v_t - u_t)dt = E\int_0^T Q_t^u c_t(v_t - u_t)dt + E\int_0^T h_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t)(v_t - u_t)dt, \tag{3.14}$$

et de **??**, 3.13 et 3.14, on obtient

$$(u \text{ minimise } J) \iff E\int_0^T H_u(t, y_t^u, z_t^u, Q_t^u, u_t)(v_t - u_t)dt \geqslant 0;\ \forall v \in U. \tag{3.15}$$

Cela implique que

$$E[H_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t, Q_t^u).(v_t - u_t)] \geqslant 0, \quad dt - P.p.s$$

Maintenant, soit F est élément arbitraire de σ-algèbre $\mathcal{F}_t$, et on pose que

$$\pi_t = v_t 1_F + u_t 1_{\Omega - F}.$$

Il n'est pas difficile de voir que π est un élément de U.

On appliquant l'inégalité ci-dessus avec π, nous obtenons

$$E[1_F H_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t, Q_t^u)(v_t - u_t)] \geqslant 0, \ \forall F \in G_t.$$

Ce qui implique cela

$$E[H_u(t, y_t^u, z_t^u, u_t, Q_t^u).(v_t - u_t)|\mathcal{F}_t] \geqslant 0.$$

■

Bibliographie

[1] I. Ekeland and R. Temam, Analyse convex et problème variationnel, Dunod 1974.

[2] J. M. Bismut, "Conjugate Convex Functions in Optimal Stochastic Control", J. Math.Anal. Appl., 1973, 44, 384-404.

[3] J. Yong, X. Y. Zhou, Stochastic controls, Hamiltonian Systems and HJB equations, vol 43, Springer, New York 1999.

[4] Pardoux ,E.andpeng , S .1990 :adapted solution of a backword differential equation "Systemes Control letter v 14 ,pp-61.

[5] Philippe B (mass 2001) :Equations différentielles Stochastique Rétrogrades université de Savoie Mont Bla

[6] W. Xu, Stochastic Maximum Principale for Optimal Control Problem of Forward and Backward, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 37 (1995), pp. 172-1785.

Annexe B : Abréviation

Les différentes abréviations et notations utilisées dans ce mémoire sont expliquées ces dessous

EDS	Equations différentielles stochastiques.
$EDSR$	Equations différentielles stochastiques rétrogrades.
$(\Omega, \mathcal{F}, p)$	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, p)$	Espace de probabilité filtré.
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension d.
$\mathbb{R}^{d\times d}$	Ensemble des matrices réelles $d \times d$.
E	Espérance par rapport à la probabilité p.
$J(.)$	Fonction de coût.
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	Filtration.
$H(t, y_t, z_t, Q_t, v_t)$	Hamiltonien.
$B(\mathbb{R}^d)$	La tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
S^2	L'espace vectoriel formé des processus Y progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.
S^2_c	Le sous formé par les processus continus.
B^2	L'espace de Banach.
$\langle . \; , \; . \rangle$	Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$.
$s \wedge t$	$\min(s, t)$
W_t	Mouvement brownien.
$P - p.s$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité p.