République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTE des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Guesraya Sabrina

Titre :

Principe du maximum pour les EDSs de type champ-moyen et application

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**CHIGHOUB Farid**	U. Biskra	Président
Dr.	**LAKHDARI Imad-Eddine**	U. Biskra	Encadreur
Dr.	**GHOUL Abdelhak**	U. Biskra	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents

Qui veillent sans cesse sur moi avec leurs prières et leurs recommandations. Que Dieu le tout puissant les protège et leur réserve une longue et meilleure vie.

Mes très chers frères et sœurs

Mes chères amies

Mes collègues de la promotion sans exception.

REMERCIEMENTS

Au seuil de ce mémoire, je remercie **ALLAH** tout puissant de me donner la patience, la santé et le courage pour finir ce travail.

Je remercie mon encadreur **Dr.LAKHDARI Imad-Eddine**,d'avoir accepté de diriger ce projet et pour sa disponibilité.tout au long de la réalisation de ce mémoire pour ses encouragements, et ses précieux conseils.

Mes remerciements les plus distingués sont adressés aux membres du jury **Dr.CHIGHOUB Farid** et **Dr.GHOUL Abdelhak** qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir accepter d'évaluer ce modeste travail.

Enfin, je adresse mes plus sincères remerciments à tous mes proches et amis, qui nous ont toujours encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Introduction

Dans ce travail, on considère un problème de contrôle stochastique de type champ-moyen, qui consiste a minimiser une fonction de coût donnée par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left(\int_0^T h\left(t, x_t, \mathbb{E}\varphi\left(x_t\right), u_t\right) dt + g\left(x_T, \mathbb{E}\chi\left(x_T\right)\right)\right),$$

où x_t est une solution en t d'un systeme gouverné par l'équation différentielle stochastique (EDS) de type champ-moyen de la forme suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b\left(t, x_t, \mathbb{E}\Psi\left(x_t\right), u_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t, \mathbb{E}\Phi\left(x_t\right), u_t\right) dB_t, \\ \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où b, σ,Ψ et Φ sont des fonctions déterministes et B_t un mouvement brownien.

Notre objectif est d'établir des conditions nécéssaires et suffisantes d'optimalité sous la forme de principe du maximum stochastique de Pontryagin. Le system considéré dans ce travail est de type champ-moyen dans lequel les coefficients dépendent, de manière non linéaire, sur le processus de l'état x_t avec sa loi de probabilité (esperance $\mathbb{E}(x)$). En particulier, nous supposons le domaine de contrôle est nécessairement convexe. Cette étude est basé sur le travail de Andersson, Djehiche [2] *(A maximum principle for sdes of mean-field type, Applied Mathematics & Optimization 63 (2011), no. 3, 341-356.).*

Nous présentons dans ce travail trois chapitres, le premier chapitre est introductif et permet d'introduire les outils essentiels pour le deuxieme et le troisième chapitres, ces deux dérniers, contient la contribution essentielle de notre travail.

La suite de ce travail est organisée de la maniére suivante :

Dans le premier chapitre, nous commencons par présenter les résultats principaux du calcul stochastique, puis nous donnons les classes des contrôles stochastiques de façons générales.

Le deuxième chapitre contient la contribution essentielle de ce travail. Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de principe du maximum stochastique où le syteme différentiel est gouverné par des **EDSs** de type champ-moyen. Pour cela, on suppose que la fonction coût $J(u)$, où u est un contrôle admissible, est différentiable et accepte un minimum en $\widehat{u}$ qu'on appelera contrôle optimale, $J(\widehat{u}) = \min \{J(u), \ u \in U : convexe\}$, puis on perturbe le contrôle $\widehat{u}$ sur un intervalle de longueur θ où on obtient un contrôle u^θ qu'on appelera perturbation convexe de $\widehat{u}$, en remarquant ici que u^θ est un contrôle admissible, est $\mathcal{F}_t$ adapté. L'intérêt de la perturbation du contrôle optimal $\widehat{u}$ est d'introduire un contrôle u^θ sur laquelle nous pourrons dériver la fonction $J\left(u^\theta\right)$. Le domaine de contrôle admissible est supposé convexe. Les conditions nécéssaires vérifiées par le contrôle $\widehat{u}$ appelera conditions nécéssaire d'optimalité. Ce resultat a été établi par Andersson, Djehiche [2] *(A maximum principle for sdes of mean-field type, Applied Mathematics & Optimization 63 (2011), no. 3, 341-356).* Notons que les étapes d'étude suivies dans ce chapitre sont similaires à celles de Bensoussan [4]. *("Lectures on stochastic control," Nonlinear filtering and stochastic control, Springer, 1982, pp. 1-62).*

Dans le dernier chapitre, nous appliquons le principe maximum stochastique au problème de sélection de portefeuille moyenne variance.

Chapitre 1

Rappels sur le calcul stochastique

Le but de ce chapitre est consacré à donner des définitions de base et des résultats principaux pour les utiliser aux prochains chapitres.

1.1 Processus stochastiques

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé filtré.*

Définition 1.1 (Processus stochastique) *Soit T un ensemble. On appelle processus stochastique sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \beta(\mathbb{R}^d))$; pour tout $t \in T$, X_t soit une variable aléatoire.*

Remarque 1.1 *Les fonctions $t \curvearrowright X_t(\omega)$ sont appelées les trajectoires du processus stochastique X_t.*

Définition 1.2 (Filtration) *On appelle **filtration** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$, une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ .i.e $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, \forall s \leq t$.*

Remarque 1.2 *Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est satisfait les conditions habituelles si :*

i) Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$.

ii) La filtration est continue à droite i.e. $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t} \mathcal{F}_s \quad \forall t$.

La famille croissante de sous tribus $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ s'appelle **la filtration naturelle** du processus stochastique X. Mais $\mathcal{G}_0$ ne contient pas nécessairement les ensembles négligeables $(\mathcal{N})$, c'est pour cela on introduit la filtration naturelle augmentée de X définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{N} \cup \mathcal{G}_t)$. Lorsque nous parlerons de filtration naturelle, il s'agira toujours de la filtration naturelle augmentée.

Définition 1.3 (Processus adapté) *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in T}$ *est adapté par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si* $\forall t \geq 0, X_t \in \mathcal{F}_t$ *i.e.* X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable pour tout* t.

Définition 1.4 (Modification d'un processus, Processus indistinguables) *Soient* $(X_t)_{t\geq 0}$ *et* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *deux processus stochastiques définis sur même espace* $(\Omega,\ \mathcal{F}, \mathbb{P})$

i) X est une modification (ou une version) de Y si : pour tout $t \geq 0$, les variables X_t et Y_t sont égales

$$\mathbb{P} - p.s. \forall t \ \ P(X_t = Y_t) = 1.$$

ii) X et Y sont indistinguables si $\mathbb{P} - p.s$, les trajectoires de X et Y sont les mêmes i.e.

$$P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

Définition 1.5 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est progressivement mesurable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, *si l'application* $(s, \omega) \longrightarrow X_s(\omega)$ *de* $[0, t] \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $\beta([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $\beta(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 1.3 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On note aussi que si* X *est processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable.*

Proposition 1.1 *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou à gauche), alors* X_t *est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

Définition 1.6 *Les variables aléatoires $X_t - X_s, 0 \leq s \leq t$, sont appelées les* ***accroissements*** *du processus stochastique (X_t).*

i) Processus à accroissement indépendants :

$$(X_t - X_s) \perp \mathcal{F}_t^X = \sigma(X_r\ , 0 \leq r \leq s), \quad \forall 0 \leq s \leq t.$$

ii) Processus à accroissement stationnaires :

$$X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0, \quad \forall 0 \leq s \leq t.$$

Définition 1.7 *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est gaussien ssi toute combinaison linéaire de ses marginales $\alpha_1 X_{t_1} + ... + \alpha_n X_{t_n}$ suit une loi gaussienne (pour tout $n \in \mathbb{N}, t_1, ...t_n \in T$ et $\alpha_1 ... \alpha_n \in \mathbb{R}$).*

1.2 Mouvement Brownien

Définition 1.8 *On appelle Mouvement Brownien un processus stochastique $(B_t)_{t \geq 0}$ à valeurs réelles tel que :*

i) Continuité $\mathbb{P} - p.s$; la fonction $s \longrightarrow B_s(\omega)$ est une fonction continue.

ii) Indépendance des accroissements : si $0 \leq s \leq t, B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ et de loi gaussienne centrée de variance $t - s$.

iii) Stationnarité des accroissements : si $0 \leq s \leq t$, la loi de $B_t - B_s$ est identique à celle de $B_{t-s} - B_0 = B_{t-s}$.

On dit qu'un mouvement brownien par rapport à x si $B_0 = x$.

Définition 1.9 *Un mouvement brownien est dit* ***standard*** *si $B_0 = 0$ $\mathbb{P} - p.s$, $\mathbb{E}[B_t] = 0$ et $\mathbb{E}[B_t^2] = t$.*

Dans la suite si on parlera de mouvement brownien sans précision, il s'agira d'un mouvement brownien standard.

Proposition 1.2 *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien standard, alors* B_t *est un processus gaussien i.e. pour tout* n *et tous* $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 ..... \leq t_n, (B_{t_1}, ...B_{t_n})$ *est un vecteur gaussien.*

Proposition 1.3 *Soit* B *un mouvement brownien Standard, on a :*

1. $\{B_{t+T} - B_T\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\sigma(B_u, u \leq T)$ pour tout $T > 0$.
2. $(-B)$ est aussi un mouvement Brownien.
3. Pour tout $c > 0, \{cB_{\frac{t}{c^2}}\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.
4. Le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tB_{\frac{1}{t}}$ est un mouvement brownien.

Proposition 1.4 *Soit* B *un mouvement brownien on a :*

1. $\forall t$, $\mathbb{P} - p.s$, B_t n'est pas différentiable en aucun point t.
2. B_t n'est pas à variation finie en aucun point t.

1.3 Martingales

Définition 1.10 *Un processus* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est dit martingale si :*

i) Pour tout $t \geq 0, X_t$ est $\mathcal{F}_t-$ mesurable.

ii) Pour tout $t \geq 0, X_t$ est intégrable i.e. $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$.

iii) Pour tout $\forall t \geq s \geq 0,\ \ \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s.\ \mathbb{P} - p.s.$

On définit de manière similaire une sous-martingale si **iii**) *est remplacé par*

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s\ \mathbb{P} -\ p.s.$$

Et sur-martingale si **iii**) est remplacé par

$$(\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s)\ \mathbb{P} - p.s,\ \ \forall t \geq s \geq 0.$$

Proposition 1.5 *Le mouvement brownien standard* $(B_t, t \geq 0)$ *est une martingale par rapport à sa filtration naturelle* $\mathcal{F}_t^W = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$.

Proposition 1.6 *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien. Les processus suivants sont des martingales par rapport à* $(\mathcal{F}_t^W)$ *:*

i) $M_t = B_t^2 - t$,

ii) $N_t = \exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right)$.

Théorème 1.1 (Burkholder-Davis-Gundy."BDG") *Soit* $p \in]0, \infty[$ *. Il existe deux constantes* c_p *et* C_p *telles que, pour toute martingale continue* X*, nul en* 0.

$$c_p \mathbb{E}[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}].$$

Remarque 1.4 *En particulier, si* $T > 0$,

$$c_p \mathbb{E}[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}].$$

1.4 Calcul d'Itô

B est un mouvement Browenien.

Définition 1.11 (Processus d'Itô) *On appelle processus d'Itô, un processus* X *à valeurs réelles tel que :*

$$\forall 0 \leq t \leq T, \qquad X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s, \quad \mathbb{P} - p.s,$$

où X_0 *est* $\mathcal{F}_0-$*mesurable,* b *et* σ *sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions*

$$\int_0^t |b_s|\, ds < \infty \quad et \quad \int_0^t \|\sigma_s\|^2\, ds < \infty.$$

Le coefficient b *est le drift ou la dérivée,* σ *est le coefficient de diffusion.*

Théorème 1.2 (Formule d'Itô) *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, à dérivées bornées, on a*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s)dX_s + \int_0^t f'_s(s, X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\sigma_s^2 ds,$$

ce qui l'on note

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= [f'_t(t, X_t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t)\sigma_t^2]dt + f'_x(t, X_t)dX_t \\ &= f'_t(t, X_t)dt + f'_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t)d\langle X\rangle_t. \end{aligned}$$

Proposition 1.7 *La formule d'Itô montre que*

$$d[X_1X_2](t) = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + \sigma_1(t)\sigma_2(t)dt.$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par parties. La quantité $\sigma_1(t)\sigma_2(t)$ correspond au crochet de X_1, X_2 noté $\langle X_1, X_2\rangle$ est défini comme le processus à variation fini

$$\langle X_1, X_2\rangle = \int_0^t \sigma_1(s)\sigma_2(s)ds.$$

1.5 Equations différentielles stochastiques(EDS)

Définition 1.12 *Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds \ + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s,$$

ou sous une forme

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Le coefficient b s'appelle le drifft et la matrice σ s'appelle la matrice de diffusion.

L'inconnu est le processus X. Le problème est, comme une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution.

Définition 1.13 (Solution d'EDS) *Une solution (forte) de l'EDS est un processus continu tel que :*

1. X est progressivement mesurable ;
2. $\mathbb{P}-p.s.$ $\int_0^t \{|b(s,X_s)|\} + \|\sigma(s,X_s)\|^2 \, ds \ < \infty$; où $\|\sigma\| = trace(\sigma\sigma^*)$;
3. $\mathbb{P}-p.s$, on a :

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds \ + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s, 0 \leq t \leq T.$$

Lemme 1.1 (de Gronwall) *Soit* $g : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction vérifiant*

$$\forall t \in [0,T] \quad 0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)ds,$$

pour une constante $\beta \geq 0$ *et pour une fonction* $\alpha : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *intégrable par rapport à la mesure de Lebèsgue. On a alors*

$$\forall t \in [0,T] \quad 0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s)e^{\beta(t-s)}ds.$$

L'intérêt est notamment que g n'apparaît qu'une seule fois dans la nouvelle inéquation

en particulier, si α est une fonction constante, on trouve

$$\forall t \in [0,T], \quad g(t) \leq \alpha e^{\beta t},$$

et si $\alpha = 0$, on a $g = 0$.

1.6 Classes des contrôles

1.6.1 Contrôle admissible

On appelle contrôle admissible tout processus u_t où $t \in [0, T]$ mésurable et $\mathcal{F}_t-$adapté à valeur dans un borélien $\mathbb{A}$ de $\mathbb{R}^n$. Notons par U l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

$$U = \{u : [0, T] \times \Omega \to A, \text{tel que } u \text{ est mésurable et } \mathcal{F}_t\text{-adapté}\}.$$

1.6.2 Contrôle optimal

Le problème de contrôle optimal consiste à minimiser une fonction coût $J(u)$ sur un ensemble de contrôle admissible U. On dit que le contrôle $\widehat{u}$ est optimal si $J(\widehat{u}) \leq J(u)$ $\forall u \in U$.

1.6.3 Contrôle feed-back

Soit u_t un contrôle $\mathcal{F}_t$ adapté, et soit $\{\mathcal{F}_t^X\}$ la filtration naturelle engendrée par le pocessus X. On dit que u_t est Feed-back contrôle si u_t est aussi adapté par rappot la filtration $\{\mathcal{F}_t^X\}$. On dit aussi qu'un contrôle u est feed-back si et seulement si u dépend de X.

1.7 Quelques inégalités

Définition 1.14 *Une fonction $f : (\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est dite lipschitzienne s'il existe $K \geq 0$ telle que :*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K |x - y| \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.8 *Soient p et q deux nombres conjugués $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ avec p,q $\in \,]1, \infty[$, $X \in L^p$ et $Y \in L^q$. Alors $X\ Y \in L^1$ et*

$$\|XY\|_1 \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

Remarque 1.5 *pour $p = q = 2$ on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\mathbb{E}\left[|XY|\right] \leq \left[\mathbb{E}\left[|X|^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[|Y|^2\right]^{\frac{1}{2}}\right].$$

Proposition 1.9 (Inégalité de Jensen) *Soit X une variable aléatoire de L^1, soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe . Alors on a :*

$$\varphi\left(\mathbb{E}\left(X/G\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\varphi\left(X\right)/G\right).$$

Chapitre 2

Principe du maximum stochastique

Dans ce chapitre, on va établir les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalité pour les EDSs de type champ-moyen. La méthode de démonstration basée sur le principe d'optimisation convexe.

2.1 Formulation du problème

Soit T un nombre réel strictement positif fixé et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un éspace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles, $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est un Mouvement Brownien définie sur cet éspace. Nous supposons que $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtration naturelle de B augmentée par les ensembles $\mathbb{P}$-nulle de $\mathcal{F}$. L'espace d'action, U est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de $\mathbb{R}$, et U est la Classe de processus mesurables, $\mathcal{F}_t$ adaptés et carrés intégrables $u : [0, T] \times \Omega \to U$. Pour tout $u \in U$.

On considère l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dx_t = b\left(t, x_t, \mathbb{E}\Psi\left(x_t\right), u_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t, \mathbb{E}\Phi\left(x_t\right), u_t\right) dB_t, \\ x\left(0\right) = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où

$$b : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}, \qquad \Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}, \qquad \Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

La fonctionne de coût est donnée par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left(\int_0^T h(t, x_t, \mathbb{E}\varphi(x_t), u_t)\, dt + g(x_T, \mathbb{E}\chi(x_T))\right), \tag{2.2}$$

où

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$h : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}, \qquad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Nous supposons ce qui suit

$(\mathbf{H}_1)$ Les coefficient Ψ, Φ, χ et φ sont continument différentiable et g est continument différentiable par rapport à (x, y) et b, σ, h sont continument différentiable par rapport à (x, y, v).

$(\mathbf{H}_2)$ Tous les dérivées sont lipschitziennes et bornées.

$(\mathbf{H}_3)$ La fonction g est convexe en (x, y).

$(\mathbf{H}_4)$ L'hamiltonien est convexe en (x, y, v).

$(\mathbf{H}_5)$ Les fonctions Ψ, Φ, φ et χ sont convexes.

$(\mathbf{H}_6)$ Les fonctions b_y, σ_y, h_y et g_y sont non-négatives.

x désigne la variable d'état, y la « valeur d'esperance » et v la variable du contrôle.

Sous l'hypothèses $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2)$, l'EDS (2.1) admet une solution unique.

Le problème de contrôle optimal est de minimiser le fonction $J(\cdot)$ sur le contrôle U. Le contrôle qui résout ce problème est appelé optimal.

Nous notons pour tout processus φ_t,

$$|\varphi|_T^{*,2} = \sup_{t \in [0,T]} |\varphi_t|^2 .$$

et par b_x, b_y, b_v les dérivées de b par rapport à la trajectoire d'état, la valeur d'esperance et la variable de contrôle, respectivement, et de même pour les autres fonctions. Enfin, nous notons par $\widehat{x}_t$ et $\widehat{u}_t$ la trajectoire et le contrôle optimaux, respectivement.

2.2 Conditions nécessaires d'optimalité

Dans cette section, nous énoncons les conditions nécessaires d'optimalité sous la forme d'un principe du maximum, on peut utiliser la méthode de perturbations convexes du contrôle optimal.

2.2.1 Développement de Taylor

Soit x_t^θ la trajectoire correspondante à la perturbation suivante :

$$u_t^\theta = \widehat{u}_t + \theta \upsilon_t, \qquad \upsilon_t \in U.$$

On note par

$$\begin{aligned}
\widehat{b}(t) &= b\left(t, \widehat{x}_t, \mathbb{E}\widehat{\Psi}(t), \widehat{u}_t\right), \\
\widehat{\Psi}(t) &= \Psi(\widehat{x}_t),
\end{aligned}$$

et de même pour les autres fonctions et leurs dérivés.

L'objectif de cette section est de déterminer la dérivée de Gateaux du coût fonctionnelle en termes de développement de Taylor.

Lemme 2.1 *Soit*

$$\begin{cases}
dz_t = \left(\widehat{b}_x(t) z_t + \widehat{b}_y(t) \mathbb{E}\left(\widehat{\Psi}_x(t) z_t\right) + \widehat{b}_v(t) \upsilon_t\right) dt \\
\qquad + \left(\widehat{\sigma}_x(t) z_t + \widehat{\sigma}_y(t) \mathbb{E}\left(\widehat{\Phi}_t(t) z_t\right) + \widehat{\sigma}_v(t) \upsilon_t\right) dB_t, \\
z_0 = 0.
\end{cases} \tag{2.3}$$

Alors,

$$\lim_{\theta \to 0} \mathbb{E} \left| \frac{x_t^\theta - \widehat{x}_t}{\theta} - z_t \right|_T^{*,2} = 0.$$

Preuve. *Puisque les coefficients de (2.3) sont bornés et d'aprés la proposition (2.2) dans [10], il existe une solution unique telle que*

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0,T]} \mid z_t \mid^p \right) < \infty. \qquad \forall p \in \mathbb{N}_+. \tag{2.4}$$

On pose $y_t^\theta = \frac{x_t^\theta - \widehat{x}_t}{\theta} - z_t$ *et d'aprés (2.4) il est également clair que*

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0,T]} \mid y_t^\theta \mid^p \right) < \infty \qquad \forall p \in \mathbb{N}_+. \tag{2.5}$$

Nous avons $y_0^\theta = 0$ *et* y_t^θ *satisfait l'EDS suivante*

$$\begin{aligned} dy_t^\theta = & \frac{1}{\theta} \left(b \left(\widehat{x}_t + \theta \left(y_t^\theta + z_t \right), \mathbb{E}\Psi \left(\widehat{x}_t + \theta \left(y_t^\theta + z_t \right) \right), \widehat{u}_t + \theta \upsilon_t \right) - \widehat{b}\left(t\right) \right) dt \\ & - \left(\widehat{b}_x \left(t\right) z_t + \widehat{b}_y \left(t\right) \mathbb{E} \left(\widehat{\Psi}_x \left(t\right) z_t \right) + \widehat{b}_\upsilon \left(t\right) \upsilon_t \right) dt \\ & + \frac{1}{\theta} \left(\sigma \left(\widehat{x}_t + \theta \left(y_t^\theta + z_t \right), \mathbb{E}\Phi \left(\widehat{x}_t + \theta \left(y_t^\theta + z_t \right) \right), \widehat{u}_t + \theta \upsilon_t \right) - \widehat{\sigma}\left(t\right) \right) dB_t \\ & - \left(\widehat{\sigma}_x \left(t\right) z_t + \widehat{\sigma}_y \left(t\right) \mathbb{E} \left(\widehat{\Phi}_x \left(t\right) z_t \right) + \widehat{\sigma}_\upsilon \left(t\right) \upsilon_t \right) dB_t. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Notant que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} b \left(\cdot, \mathbb{E} \left(\Psi \left(\widehat{x}_t + \lambda\theta \left(y_t^\theta + z_t \right) \right) \right), \cdot \right) \\ & \quad = b_y \left(\cdot, \mathbb{E} \left(\Psi \left(\widehat{x}_t + \lambda\theta \left(y_t^\theta + z_t \right) \right) \right), \cdot \right) \mathbb{E} \left(\Psi_x \left(\widehat{x}_t + \lambda\theta \left(y_t^\theta + z_t \right) \right) \left(y_t^\theta + z_t \right) \right) \theta. \end{aligned}$$

D'aprés [4], on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\left(b\left(\widehat{x}_t+\theta\left(y_t^\theta+z_t\right),\mathbb{E}\Psi\left(\widehat{x}_t+\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right),\widehat{u}_t+\theta\upsilon_t\right)-\widehat{b}\left(t\right)\right)dt\\
&=\int_0^1 b_x\left(\widehat{x}_t+\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right),\mathbb{E}\Psi\left(\widehat{x}_t+\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right),\widehat{u}_t+\lambda\theta\upsilon_t\right)\left(y_t^\theta+z_t\right)d\lambda\\
&+\int_0^1 b_y\left(\widehat{x}_t+\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right),\mathbb{E}\Psi\left(\widehat{x}_t+\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right),\widehat{u}_t+\lambda\theta\upsilon_t\right)\\
&\quad .\mathbb{E}\left(\Psi_x\left(\widehat{x}_t+\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right)\left(y_t^\theta+z_t\right)\right)d\lambda\\
&+\int_0^1 b_\upsilon\left(\widehat{x}_t+\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right),\mathbb{E}\Psi\left(\widehat{x}_t+\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right),\widehat{u}_t+\lambda\theta\upsilon_t\right)\upsilon_t d\lambda.
\end{aligned}\tag{2.7}$$

On note par $x_t^{\lambda,\theta}=\widehat{x}_t+\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)$ *et* $u_t^{\lambda,\theta}=\widehat{u}_t+\lambda\theta\upsilon_t$ *nous remplacons (*2.7*) dans (*2.6*) on trouve*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\left(b\left(\widehat{x}_t+\theta\left(y_t^\theta+z_t\right),\mathbb{E}\Psi\left(\widehat{x}_t+\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right),\widehat{u}_t+\theta\upsilon_t\right)-\widehat{b}\left(t\right)\right)\\
&-\left(\widehat{b}_x\left(t\right)z_t+\widehat{b}_y\left(t\right)\mathbb{E}\left(\widehat{\Psi}_x\left(t\right)z_t\right)+\widehat{b}_\upsilon\left(t\right)\upsilon_t\right)\\
&=\int_0^1 b_x\left(x_t^{\lambda,\theta},\mathbb{E}\Psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right),u_t^{\lambda,\theta}\right)y_t^\theta d\lambda\\
&+\int_0^1 b_y\left(x_t^{\lambda,\theta},\mathbb{E}\Psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right),u_t^{\lambda,\theta}\right)\mathbb{E}\left(\Psi_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right)y_t^\theta\right)d\lambda\\
&+\int_0^1\left(b_x\left(x_t^{\lambda,\theta},\mathbb{E}\Psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right),u_t^{\lambda,\theta}\right)-\widehat{b}_x\left(t\right)\right)z_t d\lambda\\
&+\int_0^1\left(b_y\left(x_t^{\lambda,\theta},\mathbb{E}\Psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right),u_t^{\lambda,\theta}\right)\mathbb{E}\left(\Psi_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right)z_t\right)-\widehat{b}_y\left(t\right)\mathbb{E}\left(\widehat{\Psi}_x\left(t\right)z_t\right)\right)d\lambda\\
&+\int_0^1\left(b_\upsilon\left(x_t^{\lambda,\theta},\mathbb{E}\Psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right),u_t^{\lambda,\theta}\right)-\widehat{b}_\upsilon\left(t\right)\right)\upsilon_t d\lambda.
\end{aligned}\tag{2.8}$$

Les trois derniers termes tend vers 0 dans $L^2\left(\Omega\times[0,T]\right)$ *quand* $\theta\to 0$. *Pour plus de détail,* *nous réécrivons l'avant dernier terme ci-dessus*

$$\begin{aligned}
I_t &:= \int_0^1 \left(b_y\left(x_t^{\lambda,\theta}, \mathbb{E}\Psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right) - b_y\left(\widehat{x}_t, \mathbb{E}\Psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right)\right) \mathbb{E}\left(\Psi_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right) z_t\right) d\lambda \\
&+ \int_0^1 \left(b_y\left(\widehat{x}_t, \mathbb{E}\Psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right) - b_y\left(\widehat{x}_t, \mathbb{E}\Psi\left(\widehat{x}_t\right), u_t^{\lambda,\theta}\right)\right) \mathbb{E}\left(\Psi_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right) z_t\right) d\lambda \\
&+ \int_0^1 \left(b_y\left(\widehat{x}_t, \mathbb{E}\Psi\left(\widehat{x}_t\right), u_t^{\lambda,\theta}\right) - \widehat{b}_y(t)\right) \mathbb{E}\left(\Psi_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right) z_t\right) d\lambda \\
&+ \widehat{b}_y(t) \int_0^1 \left(\mathbb{E}\left(\Psi_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right) z_t\right) - \mathbb{E}\left(\widehat{\Psi}_x(t)\, z_t\right)\right) d\lambda.
\end{aligned}$$

En utilisant la continuité et la limite de Lipschitz des fonctions ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons l'estimation suivante de la norme $L^2(\Omega \times [0,T])$ de l'expression ci-dessus ($K > 0$ est une constante).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^T \mid I_t \mid^2 dt \leq K &\left\{ \left(\int_0^T \int_0^1 \mathbb{E} \mid \lambda\theta\left(y_t^\theta + z_t\right) \mid^4 d\lambda dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \mathbb{E} \mid z_t \mid^4 dt\right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\left. + \left(\int_0^T \int_0^1 \mathbb{E} \mid \lambda\theta\upsilon_t \mid^4 d\lambda dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \mathbb{E} \mid z_t \mid^4 dt\right)^{\frac{1}{2}} \right\},
\end{aligned}$$

qui converge vers 0 quand $\theta \to 0$ puisque les valeurs d'esperance sont finies. Des estimations similaires pour le troisième et le cinquième terme dans (2.8) montrent que ces termes convergent également vers 0 dans $L^2(\Omega \times [0,T])$. Maintenant, on écrit la partie de diffusion en (2.6) de la même manière et en utilisant l'inégalité Burkholder-Davis-Gundy, nous avons par la limite de la fonctions et l'inégalité de Jensen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \mid y^\theta \mid_T^{*,2} &\leq K\left(\int_0^T \mathbb{E} \mid y^\theta \mid_t^{*,2} dt + \int_0^T \sup_{s\in[0,t]} \mid \mathbb{E}\left(y_s^\theta\right) \mid^2 dt\right) + \rho^\theta \\
&\leq K \int_0^T \mathbb{E} \mid y^\theta \mid_t^{*,2} dt + \rho^\theta,
\end{aligned}$$

où $K > 0$ est une constante et $\rho^\theta \to 0$ comme $\theta \to 0$. On applique le lemme de Gronwall on obtient le résultat. ■

Lemme 2.2 *La dérivée de Gateaux de la fonction de coût est donnée par*

$$\frac{d}{d\theta}J\left(\widehat{u}+\theta\upsilon\right)\Big|_{\theta=0}=\mathbb{E}\left(\int_0^T\left(\widehat{h}_x\left(t\right)z_t+\widehat{h}_y\left(t\right)\mathbb{E}\left(\widehat{\varphi}_x\left(t\right)z_t\right)+\widehat{h}_\upsilon\left(t\right)\upsilon_t\right)dt\right)$$
$$+\mathbb{E}\left(\widehat{g}_x\left(T\right)z_T+\widehat{g}_y\left(T\right)\mathbb{E}\left(\chi\left(T\right)z_T\right)\right).$$

Preuve. Par la définition de la dérivée de Gateaux, et en utilisant la notation $g\left(x_T\right)=g\left(x_T,E\left(\chi\left(x_T\right)\right)\right),$ on a

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}\left(g\left(x_T^\theta\right)\right)\Big|_{\theta=0}\\
&=\lim_{\theta\to0}\mathbb{E}\left(\frac{g\left(x_T^\theta\right)-g\left(\widehat{x}_T\right)}{\theta}\right)\\
&=\lim_{\theta\to0}\mathbb{E}\int_0^1g_x\left(\widehat{x}_T+\lambda\left(x_T^\theta-\widehat{x}_T\right)\right)\frac{x_T^\theta-\widehat{x}_T}{\theta}d\lambda\\
&+\mathbb{E}\int_0^1g_y\left(\widehat{x}_T+\lambda\left(x_T^\theta-\widehat{x}_T\right)\right)\mathbb{E}\left(\chi_x\left(\widehat{x}_T+\lambda\left(x_T^\theta-\widehat{x}_T\right)\right)\frac{x_T^\theta-\widehat{x}_T}{\theta}\right)d\lambda\\
&=\mathbb{E}\left(\widehat{g}_x\left(T\right)z_T+\widehat{g}_y\left(T\right)\mathbb{E}\left(\widehat{\chi}_x\left(T\right)z_T\right)\right).
\end{aligned}$$

De la même façon on peut le montrer

$$\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}\left(\int_0^Th\left(x_t^\theta,u_t^\theta\right)dt\right)\Big|_{\theta=0}=\mathbb{E}\left(\int_0^T\left(\widehat{h}_x\left(t\right)z_t+\widehat{h}_y\left(t\right)\mathbb{E}\left(\widehat{\varphi}_x\left(t\right)z_t\right)+\widehat{h}_\upsilon\left(t\right)\upsilon_t\right)dt\right).$$

D'après les définitions de la fonction de coût et du contrôle perturbé, nous obtenons la preuve de ce lemme. ■

2.2.2 Dualité

On définit l'équation adjointe

$$\begin{cases}
d\widehat{p}_t=-\left(\widehat{b}_x\left(t\right)\widehat{p}_t+\widehat{\sigma}_x\left(t\right)\widehat{q}_t+\widehat{h}_x\left(t\right)\right)dt+\widehat{q}_tdB_t\\
\qquad\qquad-\left(\mathbb{E}\left(\widehat{b}_y\left(t\right)\widehat{p}_t\right)\widehat{\Psi}_x\left(t\right)+\mathbb{E}\left(\widehat{\sigma}_y\widehat{q}_t\right)\widehat{\Phi}_x\left(t\right)+\mathbb{E}\left(\widehat{h}_y\left(t\right)\right)\widehat{\varphi}_x\left(t\right)\right)dt,\\
\widehat{p}_T=\widehat{g}_x\left(T\right)+\mathbb{E}\left(\widehat{g}_y\left(T\right)\right)\widehat{\chi}_x\left(T\right).
\end{cases}\tag{2.9}$$

Cette équation se réduit à la forme standart lorsque les coefficients ne dépendent pas explicitement sur la loi marginale de la diffusion.

Sous les hypothèses $(\mathbf{H}_1)-(\mathbf{H}_2)$, l'équation (2.9) est une EDSR linéaire de champ-moyen avec des coefficients bornés, elle admet une solution adaptée unique telle que

$$\mathbb{E} \mid \widehat{p} \mid_T^{*,2} + \mathbb{E} \int_0^T \mid \widehat{q}_t \mid^2 dt < +\infty. \tag{2.10}$$

Lemme 2.3

$$\mathbb{E}\left(\widehat{p}_T z_T\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(\widehat{p}_t \widehat{b}_\upsilon(t)\,\upsilon_t - z_t \widehat{h}_x(t) - z_t \mathbb{E}\left(\widehat{h}_y(t)\right)\widehat{\varphi}_x(t) + \widehat{q}_t \widehat{\sigma}_\upsilon(t)\,\upsilon_t\right) dt\right).$$

Preuve. *D'aprés (2.3) et (2.9) , on appliquant la formule d'intégration par parties à $\widehat{p}_t z_t$,*

$$\begin{aligned}\widehat{p}_t z_t = \int_0^T & \Big(\widehat{p}_t \widehat{b}_x(t)\, z_t + \widehat{p}_t \widehat{b}_y(t)\,\mathbb{E}\left(\Psi_x(t)\, z_t\right) + \widehat{p}_t \widehat{b}_\upsilon(t)\,\upsilon_t - z_t \widehat{b}_x(t)\,\widehat{p}_t \\ & - z_t \mathbb{E}\left(\widehat{b}_y(t)\,\widehat{p}_t\right)\widehat{\Psi}_x(t) - z_t \widehat{\sigma}_x(t)\,\widehat{q}_t - z_t \mathbb{E}\left(\widehat{\sigma}_y(t)\,\widehat{q}_t\right)\widehat{\Phi}_x(t) - z_t \widehat{h}_x(t) \\ & - z_t \mathbb{E}\left(\widehat{h}_y(t)\right)\widehat{\varphi}_x(t) + \widehat{q}_t \widehat{\sigma}_x(t)\, z_t + \widehat{q}_t \widehat{\sigma}_y(T)\,\mathbb{E}\left(\widehat{\Phi}_t(t)\, z_t\right) + \widehat{q}_t \widehat{\sigma}_\upsilon(t)\,\upsilon_t\Big)\, dt + M_t,\end{aligned}$$

où M_t est un martingale esperance égale zéro . En prenant esperance on obtient

$$\mathbb{E}\left(\widehat{p}_T z_T\right) = \mathbb{E}\int_0^T \left(\widehat{p}_t \widehat{b}_\upsilon(t)\,\upsilon_t - z_t \widehat{h}_x(t) - z_t \mathbb{E}\left(\widehat{h}_y(t)\right)\widehat{\varphi}_x(t) + \widehat{q}_t \widehat{\sigma}_\upsilon(t)\,\upsilon_t\right) dt,$$

d'ou le résultat cherché. ■

Nous définissons le Hamiltonien habituel par

$$H(t,x,\mu,u,p,q) = h\left(t,x,\int \varphi d\mu, \mu\right) + b\left(t,x,\int \Psi d\mu, u\right) p + \sigma\left(t,x,\int \Phi d\mu, u\right) q.$$

Pour faciliter la notation, chaque fois que x est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est μ, nous utiliser la notation suivante pour l'Hamiltonien.

$$H(t,x,\mu,u,p,q) := h\left(t,x,\mathbb{E}\left(\varphi(x)\right),u\right) + b\left(t,x,\mathbb{E}\left(\Psi(x)\right),u\right) p + \sigma\left(t,x,\mathbb{E}\left(\Phi(x)\right),u\right) q.$$

Combinant Lemme 2.3 avec Lemme 2.2 et puisque

$$\mathbb{E}\left(\widehat{p}_T z_T\right) = \mathbb{E}\left(\widehat{g}_x\left(T\right) z_T + \widehat{g}_y\left(T\right) \mathbb{E}\left(\widehat{\chi}_x\left(T\right) z_T\right)\right).$$

Nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 2.1 *La dérivée de Gateaux de la fonction du coût peut être exprimée en terme de l'hamiltonien H de la façon suivante*

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} J\left(\widehat{u}+\theta \upsilon\right)\Big|_{\theta=0} &= \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(\widehat{h}_\upsilon\left(t\right)\upsilon_t + \widehat{p}_t \widehat{b}_\upsilon\left(t\right)\upsilon_t + \widehat{q}_t \widehat{\sigma}_\upsilon\left(t\right)\upsilon_t\right) dt\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^T \frac{d}{d\upsilon} H\left(t, \widehat{x}_t, \widehat{u}_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t\right)\upsilon_t dt\right).\end{aligned}$$

2.2.3 Résultat Principal

Comme U est convexe, on peut choisir la perturbation

$$u_t^\theta = \widehat{u}_t + \theta\left(\upsilon_t - \widehat{u}_t\right) \in U \text{ pour } \theta \in \left[0,1\right].$$

Ainsi, puisque $\widehat{u}$ est optimal, nous avons l'inégalité

$$\frac{d}{d\theta} J\left(\widehat{u}+\theta\left(\upsilon - \widehat{u}\right)\right)\Big|_{\theta=0} = E\left(\int_0^T \frac{d}{d\upsilon} H\left(t, \widehat{x}_t, \widehat{u}_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t\right)\left(\upsilon_t - \widehat{u}_t\right) dt\right) \geq 0.$$

Comme dans [4] , nous pouvons réduire cela à

$$\frac{d}{d\upsilon} H\left(t, \widehat{x}_t, \widehat{u}_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t\right)\left(\upsilon_t - \widehat{u}_t\right) \geq 0,$$

c.-à-d. pour tous $\upsilon \in U$. nous résumons ceci avec le résultat principal de cette section.

Théorème 2.1 *Sous hypothèses* $(\mathbf{H}_1)-(\mathbf{H}_2)$, *si $\widehat{u}_t$ est un contrôle optimal et $\widehat{x}_t$ la trajectoire correspondante , alors il existe une pair processus adapté $\left(\widehat{p}_t, \widehat{q}_t\right)$ qui satisfait (2.9) et (2.10)* *telle que*

$$\frac{d}{d\upsilon}H\left(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t,\widehat{p}_t,\widehat{q}_t\right)\left(\upsilon_t-\widehat{u}_t\right)\geq 0,\qquad \mathbb{P}-p.s, pour\ tout\ t\in\left[0,T\right]. \tag{2.11}$$

Remarque 2.1 *Nous notons que si nous supposons que les fonctions $b,\sigma,h,g,\varphi,\Psi,\chi$ et Φ sont seulement Lipschitz continu, Théorème 2.1 est toujours vérifie, mais sur un espace probabilité étendue, en utilisant des dérivés distributifs et la propriété bouleau-Hirsch Flow (voir par exemple.[7]).*

2.3 Conditions suffisantes d'optimalité

Dans cette section, nous énoncons les conditions suffisante d'optimalité, avec les mêmes notations que celles du section précédent.

Théorème 2.2 *Supposons que les conditions $(\mathbf{H}_1)-(\mathbf{H}_6)$ sont satisfaites et soit $\widehat{u}\in U$, avec $\widehat{x}_t$ la trajectoire correspondante à $\widehat{u}$, et telle qu'il existe une solution $\widehat{p}_t,\widehat{q}_t$ à l'équation adjointe (2.9) si*

$$H\left(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t,\widehat{p}_t,\widehat{q}_t\right)=\inf_{\upsilon\in U}H\left(t,\widehat{x}_t,\upsilon,\widehat{p}_t,\widehat{q}_t\right)\qquad \mathbb{P}-p.s,\forall t\in\left[0,T\right], \tag{2.12}$$

alors $\widehat{u}$ est un controle optimal.

Remarque 2.2 *Sous l'hypothèse $(\mathbf{H}_4)$, les conditions (2.11) et (2.12) sont équivalentes.*

Preuve. Supposons $b\left(t\right)=b\left(t,x_t,\mathbb{E}\left(\Psi\left(x_t\right)\right),u_t\right)$ et de même pour les autres fonctions. De plus, nous désignons $H\left(t\right)=H\left(t,x_t,u_t,\widehat{p}_t,\widehat{q}_t\right)$ et $\widehat{H}\left(t\right)=H\left(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t,\widehat{p}_t,\widehat{q}_t\right)$ D'aprés g et χ sont convexes et $g_y\geq 0$,on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\widehat{g}-g\right)&\leq\mathbb{E}\left(\widehat{g}_x\left(T\right)\left(\widehat{x}_T-x_T\right)+\widehat{g}_y\left(T\right)\mathbb{E}\left(\widehat{\chi}\left(T\right)-\chi\left(T\right)\right)\right)\\&\leq\mathbb{E}\left(\widehat{g}_x\left(T\right)\left(\widehat{x}_T-x_T\right)+\widehat{g}_y\left(T\right)\mathbb{E}\left(\widehat{\chi}_x\left(T\right).\left(\widehat{x}_T-x_T\right)\right)\right)\\&=\mathbb{E}\left(\widehat{p}_T\left(\widehat{x}_T-x_T\right)\right).\end{aligned}$$

En utilisant la formule d'intégration par partie, on obtient en prenant les espérances

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\widehat{p}_T\left(\widehat{x}_T - x_T\right)\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(\widehat{x}_t - x_t\right) d\widehat{p}_t + \int_0^T \widehat{p}_t d\left(\widehat{x}_t - x_t\right) + \int_0^T \widehat{q}_t\left(\widehat{\sigma}\left(t\right) - \sigma\left(t\right)\right) dt\right)\\
&= -\mathbb{E}\int_0^T \left(\widehat{x}_t - x_t\right)\left(\widehat{b}_x\left(t\right)\widehat{p}_t + \mathbb{E}\left(\widehat{b}_y\left(t\right)\widehat{p}_t\right)\right)\widehat{\Psi}_x\left(t\right) + \widehat{\sigma}_x\left(t\right)\widehat{q}_t\\
&\quad + \mathbb{E}\left(\widehat{\sigma}_y\left(t\right)\widehat{q}_t\right)\widehat{\Phi}_x\left(t\right) + \widehat{h}_x\left(t\right) + \mathbb{E}\left(\widehat{h}_y\left(t\right)\right)\widehat{\varphi}_x\left(t\right) dt\\
&\quad + \mathbb{E}\int_0^T \widehat{p}_t\left(\widehat{b}\left(t\right) - b\left(t\right)\right) dt + \mathbb{E}\int_0^T \widehat{q}_t\left(\widehat{\sigma}\left(t\right) - \sigma\left(t\right)\right) dt\\
&= -\mathbb{E}\int_0^T \left(\widehat{x}_t - x_t\right)\left(\widehat{b}_x\left(t\right)\widehat{p}_t + \mathbb{E}\left(\widehat{b}_y\left(t\right)\widehat{p}_t\right)\widehat{\Psi}_x\left(t\right) + \widehat{\sigma}_x\left(t\right)\widehat{q}_t\right.\\
&\quad \left. + \mathbb{E}\left(\widehat{\sigma}_y\left(t\right)\widehat{q}_t\right)\widehat{\Phi}_x\left(t\right) + \widehat{h}_x\left(t\right) + \mathbb{E}\left(\widehat{h}_y\left(t\right)\right)\widehat{\varphi}_x\left(t\right)\right) dt\\
&\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left(\widehat{H}\left(t\right) - H\left(t\right)\right) dt - \mathbb{E}\int_0^T \left(\widehat{h}\left(t\right) - h\left(t\right)\right) dt,
\end{aligned}$$

où, dans la dernière étape, nous avons utilisé la définition de l'Hamiltonian H. Ensuite, nous dirévons l'hamiltonien et on utilisons la convexité des fonctions pour obtenir pour tous $t \in [0.T]$, $\mathbb{P} - p.s$,

$$\begin{aligned}
&\widehat{H}\left(t\right) - H\left(t\right)\\
&\quad \leq \widehat{H}_x\left(t\right)\left(\widehat{x}_t - x_t\right) + \widehat{h}_y\left(t\right) E\left(\widehat{\varphi}\left(t\right) - \varphi\left(t\right)\right) + \widehat{b}_y\left(t\right) E\left(\widehat{\Psi}\left(t\right) - \Psi\left(t\right)\right)\widehat{p}_t\\
&\qquad + \widehat{\sigma}_y\left(t\right) E\left(\widehat{\Phi}\left(t\right) - \Phi\left(t\right)\right)\widehat{q}_t + \widehat{H}_u\left(t\right)\left(\widehat{u}_t - u_t\right)\\
&\quad \leq \widehat{H}_x\left(t\right)\left(\widehat{x}_t - x_t\right) + \widehat{h}_y\left(t\right) E\left(\widehat{\varphi}_x\left(t\right)\left(\widehat{x}_t - x_t\right)\right) + \widehat{b}_y\left(t\right) E\left(\widehat{\Psi}_x\left(t\right)\left(\widehat{x}_t - x_t\right)\right)\widehat{p}_t\\
&\qquad + \widehat{\sigma}_y\left(t\right) E\left(\widehat{\Phi}_x\left(t\right)\left(\widehat{x}_t - x_t\right)\right)\widehat{q}_t + \widehat{H}_u\left(t\right)\left(\widehat{u}_t - u_t\right)\\
&\quad \leq \widehat{H}_x\left(t\right)\left(\widehat{x}_t - x_t\right) + \widehat{h}_y\left(t\right) E\left(\widehat{\varphi}_x\left(t\right)\left(\widehat{x}_t - x_t\right)\right) + \widehat{b}_y\left(t\right) E\left(\widehat{\Psi}_x\left(t\right)\left(\widehat{x}_t - x_t\right)\right)\widehat{p}_t\\
&\qquad + \widehat{\sigma}_y\left(t\right) E\left(\widehat{\Phi}_x\left(t\right)\left(\widehat{x}_t - x_t\right)\right)\widehat{q}_t,
\end{aligned}$$

où dans la dernière étape nous avons utilisé que $\widehat{H}_u(\widehat{u}_t - u_t) \leq 0$ en raison de la condition nécessaire (2.12) en ajoutant les inégalités ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
&J(\widehat{u}) - J(u) \\
&\quad = \mathbb{E}\int_0^T \left(\widehat{h}(t) - h(t)\right) dt + \mathbb{E}\left(\widehat{g}(T) - g(T)\right) \\
&\quad \leq \mathbb{E}\int_0^T \left(\widehat{H}(t) - H(t)\right) dt - \mathbb{E}\int_0^T (\widehat{x}_t - x_t)\left(\widehat{b}_x(t)\widehat{p}_t + \mathbb{E}\left(\widehat{b}_y(t)\widehat{p}_t\right)\widehat{\Psi}_x(t)\right. \\
&\qquad \left. + \widehat{\sigma}_x(t)\widehat{q}_t + \mathbb{E}\left(\widehat{\sigma}_y(t)\widehat{q}_t\right)\widehat{\Phi}_x(t) + \widehat{h}_x(t) + \mathbb{E}\left(\widehat{h}_y(t)\right)\widehat{\varphi}_x(t)\right) dt \\
&\quad = \mathbb{E}\int_0^T \left(\widehat{H}(t) - H(t)\right) dt - \mathbb{E}\int_0^T (\widehat{x}_t - x_t)\left(\widehat{H}_x(t) + \mathbb{E}\left(\widehat{b}_y(t)\widehat{p}_t\right)\widehat{\Psi}_x(t)\right. \\
&\qquad \left. + \mathbb{E}\left(\widehat{\sigma}_y(t)\widehat{q}_t(t)\right)\widehat{\Phi}_x(t) + \mathbb{E}\left(\widehat{h}_y(t)\right)\widehat{\varphi}_x(t)\right) dt \leq 0,
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\widehat{u}$ est un contrôle optimal. ∎

Chapitre 3

Problème de sélection de portefeuille moyen variance

Dans ce chapitre nous utilisons le principe du maximum pour résoudre le problème de sélection de portefeuille moyenne variance.

Nous considérons un marché avec un actif risqué et un compte bancaire sans risque. Le prix de l'actif sans risque S_t^0 et le prix de actif risqué S_t^1 à temps $t \in [0, T]$ évolue selon l'équation

$$\begin{cases} dS_t^0 = \rho_t S_t^0 dt, \\ dS_t^1 = \alpha_t S_t^1 dt + \sigma_t S_t^1 dB_t, \end{cases}$$

où $\alpha_t, \sigma_t, \rho_t$ sont des fonctions déterministes bornées. Si u_t désigne le montant d'argent investi dans l'actif risqué à l'instant t, on peut écrire la valeur x_t d'un portefeuille autofinancé composé des actifs à risqué et sans risque, comme suit :

$$\begin{cases} dx_t = (\rho_t x_t + (\alpha_t - \rho_t) u_t) dt + \sigma_t u_t dB_t, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Une version largement discutée du problème du portefeuille moyen variance consiste à trouver un contrôle admissible u qui minimise la variance

$$Var(x_T) = \mathbb{E}\left(x_T^2\right) - \left(\mathbb{E}x_T\right)^2,$$

à condition que

$$\mathbb{E}(x_T) = a,$$

où a est un nombre réel donné.

Le coût fonctionnel, à minimiser, est donné par

$$J(u) = \frac{\gamma}{2} Var(x_T) - \mathbb{E}(x_T). \tag{3.2}$$

En le récrivant comme

$$J(u) = \mathbb{E}\left(\frac{\gamma}{2} x_T^2 - x_T\right) - \frac{\gamma}{2}(\mathbb{E}(x_T))^2,$$

nous voyons qu'il s'agit d'un coût fonctionnel de la forme (2.2) . Comme indiqué par exemple [5] , cela devient un problème de contrôle incohérent dans le temps.

Nous commençons par écrire l'hamiltonien pour ce système

$$H(t, x, \mu, u, p, q) = (\rho_t x + (\alpha_t - \rho_t) u) p + \sigma_t u q.$$

Par conséquent, l'équation adjointe (2.9) devient

$$\begin{cases} dp_t = -\rho_t p_t dt + q_t dB_t, \\ p_T = \gamma (x_T - \mu_T) - 1, \end{cases} \tag{3.3}$$

où $\mu_t = \mathbb{E}(x_t)$

En regardant l'état terminal de p_t , nous cherchons la solution $(p_t; q_t)$ de (3.3) . Nous essayons un processus p_t de la forme suivante

$$p_t = A_t (x_t - \mu_t) - C_t, \quad \forall t \in [0, T] \ , \tag{3.4}$$

où A_t et C_t sont des fonctions déterministes avec $A_T = \gamma$ et $C_T = 1$. Notant que de (3.1) , nous avons

$$d\mu_t = (\rho_t \mu_t + (\alpha_t - \rho_t) E(u_t))\, dt, \tag{3.5}$$

Appliquons la formule d'Itô à p_t ,on obtient

$$\begin{aligned} dp_t = &\left(A_t (\rho_t (x_t - \mu_t) + (\alpha_t - \rho_t)(u_t - E(u_t))) + A_t^{'} (x_t - \mu_t) - C_t^{'} \right) dt \\ &+ A_t \sigma_t u_t dB_t, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $A_t^{'}$ et $C_t^{'}$ désignent les dérivés par rapport à t.

En comparant les coefficients avec (3.3) , on obtient

$$\begin{aligned} &A_t (\rho_t (x_t - \mu_t) + (\alpha_t - \rho_t)(u_t - E(u_t))) + A_t^{'} (x_t - \mu_t) - C_t^{'} \\ &\quad = \rho_t A_t (x_t - \mu_t) + \rho_t C_t, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$q_t = A_t \sigma_t u_t. \tag{3.8}$$

Puisque H est une fonction linéaire en u, les conditions (2.11) et (2.12) sont équivalentes, nous considérons la première condition d'ordre pour minimiser l'Hamiltonian on obtient

$$(\alpha_t - \rho_t) p_t + \sigma_t q_t = 0.$$

Insérer (3.8) dans cette dernière expression , alors le contrôle est de la forme feed-back suivante

$$\widehat{u}_t = \frac{(\alpha_t - \rho_t)}{\sigma_t^2} (\widehat{x}_t - \widehat{\mu}_t) - \frac{(\alpha_t - \rho_t)}{\sigma_t^2 A_t} C_t, \tag{3.9}$$

qui est carré intégrable , de plus $\widehat{x}_t$ est la valeur d'esperance de $\widehat{u}_t$ est

$$E(\widehat{u}_t) = \frac{(\rho_t - \alpha_t) C_t}{\sigma_t^2 A_t}. \tag{3.10}$$

Donc, en insérant (3.10) dans (3.7), on obtient

$$\widehat{u}_t = \frac{1}{A_t\left(\rho_t - \alpha_t\right)}\left(\left(2\rho_t A_t + A_t^{'}\right)\left(\widehat{x}_t - \widehat{\mu}_t\right) - C_t^{'} - \left(\rho_t + \frac{\left(\alpha_t - \rho_t\right)^2}{\sigma_t^2}\right) C_t\right). \tag{3.11}$$

Identifier (3.9) et (3.11) comme deux régressions égales sur $(\widehat{x}_t - \widehat{\mu}_t)$, nous pouvons comparer les coefficients pour obtenir les équations suivantes pour A_t et C_t.

$$\begin{cases} \left(\rho_t - \alpha_t\right)^2 A_t - \left(2\rho_t A_t + A_t^{'}\right)\sigma_t^2 = 0, & A_T = \gamma, \\ \rho_t C_t + C_t^{'} = 0, & C_T = 1. \end{cases}$$

Alors, les solutions à ces équations sont :

$$\begin{cases} A_t = \gamma e^{\int_t^T (2\rho_s - \Lambda_s) ds}, \\ C_t = e^{\int_t^T \rho_s ds}, \end{cases}$$

où

$$\Lambda_t = \frac{\left(\rho_t - \alpha_t\right)^2}{\sigma_t^2}.$$

Par conséquent, a partie de (3.9) , le contrôle optimal est donné par

$$\begin{aligned} \widehat{u}_t &= \frac{\alpha_t - \rho_t}{\sigma_t^2}\left(C_t A_t^{-1} - \left(\widehat{x}_t - \widehat{\mu}_t\right)\right) \\ &= \frac{\alpha_t - \rho_t}{\sigma_t^2}\left(\frac{1}{\gamma} e^{\int_t^T (\Lambda_s - \rho_s) ds} - \left(\widehat{x}_t - \widehat{\mu}_t\right)\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Avec valeur d'esperance

$$\mathbb{E}\left(\widehat{u}_t\right) = \frac{\alpha_t - \rho_t}{\sigma_t^2}\frac{1}{\gamma} e^{\int_t^T (\Lambda_s - \rho_s) ds}. \tag{3.13}$$

Donc, en insérant (3.13) dans (3.5) , on obtient $\widehat{\mu}_t$.

$$d\widehat{\mu}_t = \left(\rho_t \widehat{\mu}_t + \frac{1}{\gamma}\Lambda_t e^{\int_t^T (\Lambda_s - \rho_s) ds}\right) dt, \qquad \widehat{\mu}_0 = x_0. \tag{3.14}$$

La solution de (3.14) est

$$\widehat{\mu}_t = x_0 e^{\int_0^t \rho_s ds} + \frac{1}{\gamma} e^{\int_t^T (\Lambda_s - \rho_s) ds} \left(e^{\int_0^t \Lambda_s ds} - 1 \right). \tag{3.15}$$

Enfin, en insérant (3.15) dans (3.12), nous obtenons la solution du problème de sélection de portefeuille moyen variance (3.2) , quand x_t observer (3.1) , donné de la forme feed-back suivante

$$\widehat{u}\left(t, \widehat{x}_t\right) = \frac{\alpha_t - \rho_t}{\sigma_t^2} \left(x_0 e^{\int_0^t \rho_s ds} + \frac{1}{\gamma} e^{\int_0^T \Lambda_s ds - \int_t^T \rho_s ds} - \widehat{x}_t \right),$$

qui est identique au contrôle optimal trouvé dans [15].

Bibliographie

[1] N. Ahmed and X. Ding, Controlled mckean-vlasov equations, Communications in Applied Analysis 5 (2001), no. 2, 183-206.

[2] D. Andersson and B. Djehiche, A maximum principle for sdes of mean-field type, Applied Mathematics & Optimization 63 (2011), no. 3, 341-356.

[3] S. Basak and G. Chabakauri, Dynamic mean-variance asset allocation, The Review of Financial Studies 23 (2010), no. 8, 2970-3016.

[4] A. Bensoussan, "Lectures on stochastic control," Nonlinear filtering and stochastic control, Springer, 1982, pp. 1-62.

[5] T. Bjork and A. Murgoci, A general theory of markovian time inconsistent stochastic control problems, Available at SSRN 1694759 (2010).

[6] R. Buckdahn, B. Djehiche, J. Li and S. Peng, Mean-field backward stochastic differential equations : A limit approach, The Annals of Probability 37 (2009), no. 4, 1524-1565.

[7] F. Chighoub, B. Djehiche and B. Mezerdi, The stochastic maximum principle in optimal control of degenerate diffusions with non-smooth coefficients, Random Operators and Stochastic Equations 17 (2009), no. 1, 37-54.

[8] N. C. Framstad, B. Øksendal and A. Sulem, Sufficient stochastic maximum principle for the optimal control of jump diffusions and applications to finance, Journal of Optimization Theory and Applications 121 (2004), no. 1, 77-98.

[9] M. Huang, R. P. Malhamé and P. E. Caines, Large population stochastic dynamic games : Closed-loop mckean-vlasov systems and the nash certainty equivalence principle, Communications in Information & Systems 6 (2006), no. 3, 221-252.

[10] B. Jourdain, S. Méléard and W. Woyczynski, Nonlinear sdes driven by l\'evy processes and related pdes, arXiv preprint arXiv :0707.2723 (2007).

[11] L. V. Kantorovich and G. S. Rubinstein, On a space of completely additive functions, Vestnik Leningrad. Univ 13 (1958), no. 7, 52-59.

[12] J.-M. Lasry and P.-L. Lions, Mean field games, Japanese journal of mathematics 2 (2007), no. 1, 229-260.

[13] A.-S. Sznitman, "Topics in propagation of chaos," Ecole d'été de probabilités de saint-flour xix—1989, Springer, 1991, pp. 165-251.

[14] J. Yong and X. Y. Zhou, Stochastic controls : Hamiltonian systems and hjb equations, vol. 43, Springer Science & Business Media, 1999.

[15] X. Y. Zhou and D. Li, Continuous-time mean-variance portfolio selection : A stochastic lq framework, Applied Mathematics and Optimization 42 (2000), no. 1, 19-33.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	Filtration.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré.
B_t	Movement Brwonien.
$\mathcal{N}$	L'ensemble des négligeable.
EDS	Èquation différentielle stochastique.
$EDSR$	Èquation différentielle stochastique retrogrede.
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension d.
$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
$\mathbb{E}$	L'espérance par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$.
$J(\cdot)$	La fonction de coût à minimiser.
$\mathbb{A}$	Un borélien de $\mathbb{R}^d$.
U	Ensemble des contrôles admissibles.
$\widehat{u}$	Contrôle optimal.
u_t^θ	Contrôle perturbé.
$H(t, x, \mu, u, p, q)$	Hamiltonien.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$.
$\mathbb{P} - p.s$	presque surement pour la mesure de probabilité p.