République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Probabilités**

Par

**CHOUIA Khaoula**

Titre :

# Sur le principe du maximum stochastique de type champ moyen

Membres du Comité d'Examen :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dr. | TABET Moufida | UMKB | Encadreur |
| Dr. | LAKHDARI Imad Eddine | UMKB | Président |
| Dr. | KORICHI Fatiha | UMKB | Examinateur |

Juin 2019

## Dédicace

Je prie mon Dieu Tout-puissant d'accepter ce travail humble et de le faire dans l'équilibre de nos bonnes actions

Je dédie ce travail à...

la mémoire de mon chèr père «**MOHAMED LAID**» que son âme repose en paix, rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de ses sacrifices.

Ma chère mère «**DJAMILA**», Que Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur. Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que tu mérites pour tous les sacrifices que tu n'as cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte. Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour.

Mes chèrs frères «**KHALED & AHMED**» et leurs femmes «**FATIMA & MAYADA**»,

mes chères soeurs «**AMEL & OUMAIMA**»,

mon chèr neveu «**MOHAMED LAID**».

Je vous dédie ce travail avec tous mes voeux de bonheur, de santé et de réussite.

Tous les membres de ma famille «**CHOUIA**» petits et grands veuillez trouver dans ce modeste travail l'expression de mon affection.

Mes amies et mes collègues de travail.

Tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Que Dieu les sauve tous.

# REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord et avant tout **"Dieu"** qui m'a donné le courage et la force et la patience pour finir ce travail.

Je tiens a remercie mon encadreur **«Dr. TABET Moufida»**, pour ses conseils qui m'ont été d'une grande utilité au cours de l'élaboration de mon mémoire.

Je remercie aussi les membres du jury : **«Dr. LAKHDARI Imad Eddine»** et **«Dr. KORICHI Fatiha»**, qui ont bien voulu lire et évaluer le contenu de mon travail et d'être présent le jour de sa présentation.

Je voudrais également remercie **«Dr. LAKHDARI Imad Eddine»,** merci d'avoir pris le temps de m'aider et de m'avoir accompagné dans la maîtrise de mon travail, merci pour votre gentillesse, votre soutien, votre patience et votre aide dans les moments les plus difficiles.

Je désire aussi remercier les professeurs du département mathématique à **l'université de Mohamed Khider Biskra**, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.

Je ne peux pas oublier également de remercie tous les personnes qui nous ont encouragés de près ou de loin pendant la réalisation de ce travail.

# Table des matières

# Introduction

Notre objectif dans ce travail est d'étudier le principe du maximum stochastique de type champ moyen, on s'intéresse au principe de maximum des conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalités, cette méthode basée sur la minimisation de la fonction de coût sur un ensemble des contrôles.

Le plan de ce travail se compose de 3 chapitres :

## $\ggg$ Chapitre 1. Rappels de processus stochastique

Dans ce chapitre, on va présenter les définitions et les propriétés des processus continues qui sont destinés à fournir des outils de base ( processus stochastique, martingale, quelques inégalités, mouvement brownien, calcul d'Itô, ...etc.) que nous aurons besoin dans la suite de ce travail.

## $\ggg$ Chapitre 2. Equations différentielles stochastiques

Dans ce chapitre, on va présenter la théorie générale et la notation des équations différentielles stochastiques, aprés ça on va prouver le théorème d'existence et d'unicité de solution pour les équations différentielles stochastiques.

## $\ggg$ Chapitre 3. Principe du maximum stochastique de type champ moyen

Dans ce chapitre, on va étudier le principe du maximum stochastique de type champ moyen c-à-d on va donner les caractérisations nécessaires et suffisantes du contrôle optimale.

Un problème de contrôle consiste à minimiser une fonction de coût donnée par :

$$J(u) = E\left(\int_0^T h\left(t, x_t, E\varphi(x_t), u_t\right) dt + g\left(x_T, E\chi(x_T)\right)\right),$$

où $x_t$ est une solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b\left(t, x_t, E\psi(x_t)\,, u_t\right)dt + \sigma\left(t, x_t, E\phi(x_t), u_t\right) dB_t, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

La méthode de démonstration qui est suivie dans cette étude est basée sur le principe d'optimisation convexe.

# Chapitre 1

# Rappels de processus stochastique

## 1.1 Géneralités sur le processus stochastique

### 1.1.1 Processus stochastique

**Définition 1.1.1** *Un processus stochastique est une famille $Y = \{Y_t, t \in I\}$ de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité.*

∘ *Si $I = \{0, 1, 2, ...\}$, on parle de processus en temps discret.*

∘ *Si l'ensemble $I = \mathbb{R}^+$ ou $I = \mathbb{R}$, on parle de processus en temps continu.*

### 1.1.2 Filtration

**Définition 1.1.2** *Une filtration $(F_t)_{t \geq 0}$ sur un espace de probabilité de $(\Omega, F, P)$ une famille croissante de sous tribus de $F$ c-à-d $F_t \subset F_s$ pour tout $t \leq s$.*

**Remarque 1.1.1** *Un espace de probabilité $(\Omega, F, P)$ muni d'une filtration $(F_t)_{t \in I}$ est satisfait les conditions habituelles si :*

- *Les ensembles négligeables sont contenus dans $F_0$.*
- *La filtration est continue à droite au sens où $F_t = \bigcap_{s>t} F_s$.*
- *une filtration $G$ est dite plus grosse que $F$ si $F_t \subset G_t, \forall t$.*

### 1.1.3 Martingale

**Définition 1.1.3** *On dit que le processus $M_t$ est martingale si :*

○ $\forall t \geq 0,\ M_t$ *est mesurable.*

○ $\forall t \geq 0,\ M_t$ *est intégrable* $\left(E\left(|M_t|\right) \leq \infty\right)$.

○ $\forall 0 \leq s \leq t,\ E\left(M_t \diagup F_s\right) = M_s$.

***Proposition 1.1.1*** *Soit $M$ une $(F_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-martingale de carré intégrable $\left(E\left[M_t^2\right] < \infty \text{ pour tout } t\right)$, alors pour $s \leq t$, on a :*

$$E\left[\left(M_t - M_s\right)^2 \diagup F_s\right] = E\left[\left(M_t^2 - M_s^2\right) \diagup F_s\right].$$

***Proposition 1.1.2*** *Si $M$ est une martingale $E\left[M_t\right] = E\left[M_0\right], \forall t$.*

***Définition 1.1.4*** *Une famille de variable aléatoire $M = \left\{M_t, t \in \mathbb{R}^+\right\}$ est une surmartingale (resp.sousmartingale) par rapport à la filtration $(F_t)$ si :*

○ $\forall t \geq 0,\ M$ *est* $(F_t)_{t\geq 0}$*-mesurable.*

○ $\forall t \geq 0,\ M_t$ *est intégrable* $\left(E\left(|M_t|\right) \leq \infty\right)$.

○ $\forall 0 \leq s \leq t,\ E\left(M_t \diagup F_s\right) \leq M_s \ \left(resp. E\left(M_t \diagup F_s\right) \geq M_s\right)$.

### 1.1.4 Quelques inégalités

#### 1) Inégalité de Jensen

Soit $g$ une fonction continue de $[0,1]$ dans $]a,b[$ (*avec* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$) et $\varphi$ une fonction convexe de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$. Alors,

$$\varphi\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right) \leq \int_0^1 \varphi\left(g(x)\right)dx.$$

**2) Inégalité de Lipschitz**

Une fonction $f : R \rightarrow R$ est dite (globalement) lipschitzienne s'il existe $K \geq 0$ telle que :

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y| \qquad \forall x, y \in R.$$

**3) Inégalité de Hölder**

Soient $p$ et $q$ deux chiffres conjugués $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ avec $1 < p, q < \infty$.

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires où $XY$ est intégrable alors :

$$E[XY] \leq (E[X^p])^{\frac{1}{p}} (E[Y^q])^{\frac{1}{q}}.$$

**4) Inégalité de Cauchy-schwarz**

L'inégalité de Hölder pour $p = q = 2$ telle que :

$$E[XY] \leq \left(E\left[X^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \left(E\left[Y^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**5)Inégalité de Gronwall**

Si $f \geq 0$ et $g$ sont des fonctions continues qui vérifient :

$$\forall t \geq t_0 \qquad g(t) \leq k + \int_{t_0}^{t} f(s)g(s)ds,$$

où $k$ est une constante, alors :

$$\forall t \geq t_0 \qquad g(t) \leq k \exp\left(\int_{t_0}^{t} f(s)ds\right).$$

**6)Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy**

Pour toute $1 \leq p < \infty$, il existe des constantes positives $c_p, C_p$, telle que, pour toute les martingales locales $x$ avec $x_0 = 0$, et temps d'arrêt $\tau$, l'inégalité suivante est vraie

$$c_p E\left[(x)_\tau^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[(x_\tau^*)^p\right] \leq C_p E\left[(x)_\tau^{\frac{p}{2}}\right].$$

De plus, pour les martingales locales continues, cette déclaration s'applique à tous $0 < p < \infty$.

**7)Inégalité de Doob**

Soit $(X_n)$ une martingale bornée dans $L^2$. Alors $X^* = \sup_n |X_n|$ est dans $L^2$ et de plus

$$\|X^*\| \leq 2\sup_n \|X_n\|_2 .$$

## 1.2 Mouvement brownien

### 1.2.1 Définitions du mouvement brownien

**Définition 1.2.1** *On dit que le processus $W_t$ est mouvement brownien standard si :*

∘ $W_0 = 0$.

∘ $\forall s \leq t$, $(W_t - W_s) \sim N(0, t-s)$.

∘ $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2$, *les variables* $(W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_1} - W_{t_0})$ *sont indépendantes.*

**Définition 1.2.2** *Le processus $X_t = x + \mu t + \sigma W_t$ est s'appelle encore mouvement brownien si :*

∘ $X_0 = x$.

∘ $\forall s \leq t$, $(X_t - X_s) \sim N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$.

∘ $X_t$ *est un processus à accroissement indépendant.*

## 1.3 Calcul d'Itô

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, F, P)$, un mouvement brownien $W_t$ sur cet espace. On désigne par $\{F_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de mouvement brownien.

### 1.3.1 Processus d'Itô

**Définition 1.3.1** *On appelle processus d'Itô, un processus stochastique $X_t$ sur $(\Omega, F, P)$ de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, w)\, ds + \int_0^t \nu(s, w)\, dB_s, \ \forall t \in [0, T].$$

*avec :* ∘ *$X_0$ est $F_0-$mesurable.*

∘ *$\mu(t)$ et $\nu(t)$ sont $F_t-$adaptés.*

### 1.3.2 Formule d'Itô

**Définition 1.3.2** *Soit $f$ est une fonction de classe $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, alors la formule d'Itô s'écrit :*

$$d(f(t, X_t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\, d \prec X, X \succ_t .$$

# Chapitre 2

# Equations différentielles stochastiques

## 2.1 Introduction

Le but des équations différentielles stochastique est de fournir un modèle mathématique pour une équation différentielle turbulente en raison du bruit aléatoire. Allons de modèle d'équation différentielle ordinaire :

$$dX_t = b\left(X_t\right) dt.$$

Cette équation est utilisée pour d'écrire l'évolution d'un système physique. Si on considère les perturbations aléatoires, on ajoute une déclaration de bruit, qui sera sous la forme $\sigma dB_t$, où $B_t$ désigne un mouvement brownien et $\sigma$ est pour l'instant une constante qui correspond à l'intensité du bruit. On atteint une équation différentielle "stochastique" du modèle :

$$dX_t = b\left(X_t\right) dt + \sigma\left(X_t\right) dB_t.$$

On généralise encore un peu en autorisant $b$ et $\sigma$ à dépendre du temps $t$, et en se plaçant dans un cadre vectoriel. Cela conduit à l'équation suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

## 2.2 Définitions et notations

**Définition 2.2.1** *Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme :*

$$X_t = x + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s, \qquad \forall t \in [0, T].$$

*Ou sous une forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{2.1}$$

*Où* $\{B_t, t \geq 0\}$ *est un mouvement brownien, le coefficient* $b\left(t, X_t\right)$ *de* $dt$ *est applé dérive et le coefficient* $\sigma\left(t, X_t\right)$ *de* $dB_t$ *est appelé terme de diffusion.*

**Définition 2.2.2** *Une solution (forte) de l'équation différentielle stochastique* (2.1) *est un processus continu telle que :*

- $X$ *est progressivement mesurable.*
- $\int_0^t \left\{\left|b\left(s, X_s\right)\right| + \left|\sigma\left(s, X_s\right)\right|^2\right\} ds \prec \infty,$
- *On a* $t \in [0, T]$ *:*

$$X_t = x + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s.$$

**Définition 2.2.3** *On dit que l'équation* (2.1) *admet une solution unique, si pour chaque deux solutions* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ *et* $Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$ *(avec le même Mouvement Brownien et le même point initial) on a :*

$$P\left\{\sup_{0\leq t\leq T} \left|X_t - Y_t\right| > \varepsilon\right\} = 0,$$

*c'est à dire, elles sont égales p.s.,i.e.*

$$P\left(X_t = Y_t, \forall t \in [0,T]\right) = 1.$$

## 2.3 Existence et unicité

Nous allons établir le résultat classique d'Itô par le théorème suivant :

**Théorème 2.3.1** *Soient $b$ et $\sigma$ deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante $K$ telle que, pour tout $t \in [0,T], x, y \in R^n$ :*

1. Condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps :

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|,$$

2. croissance linéaire :

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|),$$

3.

$$E[|x|^2] < \infty.$$

Alors l'équation différentielle stochastique (2.1) possède une unique solution (à l'indistinguabilité près).

**Preuve.** Notons par $S^2$ l'espace de banach constitué des processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ progressivement mesurables, telle que

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2 < \infty\right),$$

muni de la norme

$$\|X\| := E\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

On note par $S_c^2$ le sous espace de $S^2$ formé par des processus continus.

Pour $X \in S_c^2$, posons, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Phi(X)_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Le processus $\Phi(X)$ est bien définit et est continu si $X \in S_c^2$.

Si $X$ et $Y$ sont deux éléments de $S_c^2$, comme $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on a, pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$,

$$\begin{aligned}|\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t|^2 \leq\ & 2 \sup_{0 \leq t \leq u} \left| \int_0^t \left(b(s, X_s) - b(s, Y_s)\right) ds \right|^2 \\ & + 2 \sup_{0 \leq t \leq u} \left| \int_0^t \left(\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)\right) dB_s \right|^2.\end{aligned}$$

Ce implique que :

$$\begin{aligned}E\left[\sup_{0 \leq t \leq u} |\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t|^2\right] \leq\ & 2E\left[\left(\int_0^u |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|\, ds\right)^2\right] \\ & + 8E\left[\int_0^u |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)|^2\, ds\right].\end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majoration

$$\begin{aligned}E\left[\sup_{0 \leq t \leq u} |\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t|^2\right] \leq\ & 2TE\left[\int_0^u |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|^2\, ds\right] \\ & + 8E\left[\int_0^u |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)|^2\, ds\right].\end{aligned}$$

Comme les fonctions $b$ et $\sigma$ sont Lipschitz en espace, on obtient, pour tout $u \in [0,T]$,

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq u} |\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t|^2\right] \leq 2K^2(T+4)E\left[\int_0^u \sup_{0 \leq t \leq s} |X_t - Y_t|^2 ds\right]. \tag{2.2}$$

De plus, notant 0 le processus nul, on a, comme $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$,

$$|\Phi(0)_t|^2 \leq 3\,|x|^2 + 3 \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t b(s,0)ds\right|^2 + 3 \sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \sigma(s,0)dB_s\right|^2,$$

en utilisant l'inégalité de Doob et la croissance linéaire de $b$ et $\sigma$,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Phi(0)_t|^2\right] \leq 3\left(E\left[|x|^2\right] + K^2T^2 + 4K^2T\right) < \infty. \tag{2.3}$$

Les estimations (2.2) et (2.3) montrent alors que le processus $\Phi(X) \in S_c^2$ dès que $X \in S_c^2$. On définit alors par récurrence la suite de processus $(X^n)_{n\geq 0}$ de $S_c^2$ en posant

$$X_0 = 0, \text{ et, } X^{n+1} = \Phi(X^n), \text{ pour } n \geq 0.$$

On obtient très facilement à l'aide de la formule (2.2), pour tout $n \geq 0$, notant $C$ à la place de $2K^2(T+4)$,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] \leq \frac{C^nT^n}{n!} E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^1\right|^2\right],$$

ce qui signifie que

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] \leq D\frac{C^nT^n}{n!},$$

avec $D$ le majorant de $E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^1|^2\right]$.

Il résulte de cette dernière inégalité que

$$\sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|\right\|_{L^1} \leq \sum_{n\geq 0}\left\|\sup_{0\leq t\leq T}\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|\right\|_{L^2} \leq \sqrt{D}\sum_{n\geq 0}\frac{(CT)^{n/2}}{\sqrt{n!}} < \infty.$$

Ainsi, la série $\sum_n \sup_t \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|$ converge P–p.s. et donc, P–p.s., $X^n$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus $X$ continu.

De plus $X \in S_c^2$ puisque la convergence a lieu dans $S^2$.

On vérifie très facilement que $X$ est solution de l'équation différentielle stochastique (2.1) en passant à la limite dans la définition $X^{n+1} = \Phi(X^n)$.

Si $X$ et $Y$ sont deux solutions de l'équation différentielle stochastique (2.1) dans $S_c^2$ alors $X = \Phi(X)$ et $Y = \Phi(Y)$.

L'inégalité (2.2) donne alors, pour tout $u \in [0, T]$,

$$E\left[\sup_{0\le t\le u} |X_t - Y_t|^2\right] \le 2K^2(T+4)\int_0^u E\left[\sup_{0\le t\le s} |X_t - Y_t|^2\right] ds.$$

D'aprés le lemme de Gronwall montre que

$$E\left[\sup_{0\le t\le T} |X_t - Y_t|^2\right] < 0e^{CT} = 0,$$

ce qui prouve que $X$ et $Y$ sont indistinguables.

Pour montrer l'unicité des solutions de (2.1), nous devons montrer que toute solution appartient à $S_c^2$ c'est à dire, comme toute solution est continue par définition, appartient à $S^2$.

Pour cela, considérons le temps d'arrêt

$$\tau_n = inf\{t \in [0, T], |X_t| > n\},$$

avec la convention $inf\ \emptyset\ = +\infty$. Si $u \in [0, t]$, on a

$$\begin{aligned} |X_{u\wedge\tau_n}|^2 \le 3\Bigg(|x|^2 &+ \sup_{0\le u\le t}\left|\int_0^{u\wedge\tau_n} b(s, X_s)ds\right|^2 \\ &+ \sup_{0\le u\le t}\left|\int_0^{u\wedge\tau_n} \sigma(s, X_s)dB_s\right|^2\Bigg). \end{aligned}$$

Il vient alors,

$$E\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n}|X_u|^2\right]\leq 3\Bigg(E\left[|x|^2\right]+E\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau_n}|b(s,X_s)|\,ds\right)^2\right] \\ +4E\left[\int_0^{t\wedge\tau_n}|\sigma(s,X_s)|^2\,ds\right]\Bigg),$$

et utilisant la croissance linéaire de $b$ et $\sigma$, on obtient :

$$E\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n}|X_u|^2\right]\leq 3\Big(E\left[|x|^2\right]+2K^2T^2+8K^2T \\ +(2K^2T+8K^2)\int_0^t E\left[\sup_{0\leq u\leq s\wedge\tau_n}|X_u|^2\right]ds\Big).$$

On obtient, en appliquant le lemme de Gronwall, à la fonction $t\to E\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n}|X_u|^2\right]$

$$E\left[\sup_{0\leq u\leq T\wedge\tau_n}|X_u|^2\right]\leq 3\left(E\left[|x|^2\right]+2K^2T^2+8K^2T\right)exp\{3(2K^2T+8K^2)T\},$$

et le lemme de Fatou donne

$$E\left[\sup_{0\leq u\leq T}|X_u|^2\right]\leq 3\left(E\left[|x|^2\right]+2K^2T^2+8K^2T\right)exp\{3(2K^2T+8K^2)T\}<\infty.$$

Ceci implique l'unicité des solutions de l'équation différentielle stochastique (2.1).

Cette remarque termine la preuve. ■

# Chapitre 3

# Principe du maximum stochastique de type champ moyen

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudié le principe du maximum dans le cas où le systéme est gouverné par une équation différentielle stochastique de type champ moyen. Autrement dit, les coefficients de ce type d'équation dépend de la loi d'équation différentielle stochastique ainsi que de processus d'état et du contrôle.

## 3.2 Formulation du problème

Soit $T > 0$ un horizon temporel fixé et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité filtré satisfaisant les conditions habituelles, dans lequel un mouvement brownien standard $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est défini.

Nous supposons que $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtration naturelle de $B$ augmentée par $P$-null ensembles de $\mathcal{F}$.

L'espace d'action, $U$, est un sous ensemble non vide $\mathbb{R}$, et $\mathcal{U}$ est l'ensemble de tout les processus mesurables, $F_t$ adapté et de carré intégrables $u : [0, T] \times \Omega \longrightarrow U$.

Pour tout $u \in \mathcal{U}$, on considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b\left(t, x_t, E\psi(x_t), u_t\right)dt + \sigma\left(t, x_t, E\phi(x_t), u_t\right)dB_t, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où :

$$b : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

sont des fonctions données.

Le problème du contrôle optimale est de minimiser sur $\mathcal{U}$ la fonction du coût $J$ donnée par :

$$J(u) = E\left(\int_0^T h\left(t, x_t, E\varphi(x_t), u_t\right)dt + g\left(x_T, E\chi(x_T)\right)\right), \tag{3.2}$$

où :

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$h : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

sont des fonctions données.

Au long de ce chapitre on suppose les hypothèses suivantes, où $x$ représente la "variable d'état", $y$ la "valeur attendue" et $v$ la "variable de contrôle".

Hypothèses (A.1)

▶ Les fonctions $\psi, \phi, \chi$ et $\varphi$ sont continûement différentiables.

▶ $g$ est continuellement différentiables par rapport à $(x, y)$.

▶ Les fonctions $b, \sigma, h$ sont continûement différentiables par rapport à $(x, y, v)$.

Hypothèses (A.2)

▶ Tous les dérivées de $b, \sigma, h, g,\ \psi, \phi, \chi$ et $\varphi$ sont lipschitiziennes et bornées.

Nous notons pour tout processus $\gamma_t$,

$$|\gamma|_T^{*,2} = \sup_{t\in[0,T]} |\gamma_t|^2 .$$

Pour faciliter la notation, on note par $b_x, b_y, b_v$ la dérivée de $b$ par rapport à la "trajectoire d'état", "valeur attendue" et à la "variable de contrôle", respectivement, et de même pour les autres fonctions.

Enfin, nous notons par $\widehat{x}_t$ et $\widehat{u}_t$ la "trajectoire optimale" et le "contrôle optimal", respectivement.

## 3.3 Conditions nécessaires à l'optimalité

Dans cette section, par la méthode de perturbation convexe du contrôle optimale nous décrivons les conditions nécessaires d'optimalité sous forme de principe du maximum. Pour cela on perturbé le contrôle optimale par la manière suivante :

$$u_t^\theta = \widehat{u}_t + \theta v_t, \qquad v_t \in U.$$

On note ici que $u_t^\theta$ est un contrôle admissible et $x_t^\theta$ désigne la trajectoire d'état correspondante à la perturbation $u_t^\theta$.

Dans la suite on note par :

$$\widehat{b}(t) = b\left(t, \widehat{x}_t, E\widehat{\psi}\left(t\right), \widehat{u}_t\right),$$
$$\widehat{\psi}(t) = \psi(\widehat{x}_t),$$

et de même pour les autres fonctions et leurs dérivées.

Pour établir ces conditons, nous introduisons l'équation adjointe suivante :

$$\begin{cases} d\widehat{p}_t = -\left(\widehat{b}_x\left(t\right)\widehat{p}_t + \widehat{\sigma}_x\left(t\right)\widehat{q}_t + \widehat{h}_x\left(t\right)\right)dt + \widehat{q}_t dB_t \\ \qquad\qquad -\left(E\left(\widehat{b}_y\left(t\right)\widehat{p}_t\right)\widehat{\psi}_x\left(t\right) + E\left(\widehat{\sigma}_y\left(t\right)\widehat{q}_t\right)\widehat{\phi}_x\left(t\right) + E\left(\widehat{h}_y\left(t\right)\right)\widehat{\varphi}_x\left(t\right)\right)dt, \\ \widehat{p}_T = \widehat{g}_x\left(T\right) + E\left(\widehat{g}_y\left(T\right)\right)\widehat{\chi}_x\left(T\right). \end{cases} \tag{3.3}$$

Et le Hamiltonien $H$ est défini par :

$$H\left(t, x_t, E\varphi\left(x_t\right), u_t, p, q\right) = h\left(t, x_t, E\left(\varphi\left(x_t\right)\right), u_t\right) + b\left(t, x_t, E\left(\psi\left(x_t\right)\right), u_t\right)p + \sigma\left(t, x_t, E\left(\phi\left(x_t\right)\right), u_t\right)q.$$

Puisque les conditions nécessaires d'optimalité sont données en terme de l'hamiltonien $H$, on a besoin d'exprimer la dérivée de Gâteaux de la fonction du coût en fonction de l'hamiltonien $H$, c'est l'objet de ce corollaire.

Sous les hypothéses sous dessous, il s'agit d'un type d'équation différentielle stochastique rétrograde linéaire de type champ moyen avec coefficients bornés, elle admet une unique solution telle que :

$$E\left|\widehat{p}_t\right|_T^{*,2} + E\int_0^T \left|\widehat{q}_t\right|^2 dt < +\infty.$$

Les conditions nécessaires d'optimalité vérifié par le contrôle optimal $\widehat{u}_t$ est donné par le théorème suivant :

**Théorème 3.3.1** *Sous les hypothéses (A.1)-(A.2) et si $\widehat{u}_t$ est un contrôle optimal avec la* *trajectoire d'état $\widehat{x}_t$, il existe alors une paire $(\widehat{p}_t, \widehat{q}_t)$ de processus adaptés qui satisfait (3.3) tels que*

$$\frac{d}{dv} H\left(t, \widehat{x}_t, \widehat{u}_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t\right)\left(v_t - \widehat{u}_t\right) \geq 0, \text{ pour tout } t \in [0, T]. \tag{3.4}$$

Pour démontrer ce théorème, nous avons les lemmes suivants :

**Lemme 3.3.1** *Soit*

$$\begin{cases} dz_t = \left(\widehat{b}_x(t) z_t + \widehat{b}_y(t) E\left(\widehat{\psi}_x(t) z_t\right) + \widehat{b}_v(t) v_t\right) dt \\ \qquad + \left(\widehat{\sigma}_x z_t + \widehat{\sigma}_y(t) E\left(\widehat{\phi}_x(t) z_t\right) + \widehat{\sigma}_v(t) v_t\right) dB_t, \\ z_0 = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

*Soient $x^\theta(\cdot)$ et $\widehat{x}(\cdot)$ les solutions de l'équation (3.1) correspondantes à $u^\theta(\cdot)$ et $\widehat{u}(\cdot)$ respectivement, alors on a*

$$\lim_{\theta \longrightarrow 0} E\left|\frac{x_t^\theta - \widehat{x}_t}{\theta} - z_t\right|_T^{*,2} = 0. \tag{3.6}$$

**Preuve.** Comme les coefficients de (3.5) sont bornés, qu'il existe une solution unique telle que

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} |z_t|^p\right) < \infty,$$

pour toute $p \in \mathbb{N}_+$.

Dans la suite on pose $y_t^\theta = \dfrac{x_t^\theta - \widehat{x}_t}{\theta} - z_t$, alors $x_t^\theta = \widehat{x}_t + \theta\left(y_t^\theta + z_t\right)$, $y_0^\theta = 0$ et $y_t^\theta$ satisfait l'équation différentielle stochastique suivante

$$dy_t^\theta = \frac{1}{\theta}\left[dx_t^\theta - d\widehat{x}_t\right] - dz_t,$$

alors

$$\begin{aligned} dy_t^\theta \;=\; & \frac{1}{\theta}\left(b\left(x_t^\theta, E\psi\left(x_t^\theta\right), u_t^\theta\right) - \widehat{b}(t)\right) dt \\ & - \left(\widehat{b}_x(t) z_t + \widehat{b}_y(t) E\left(\widehat{\psi}_x(t) z_t\right) + \widehat{b}_v(t) v_t\right) dt \\ & + \frac{1}{\theta}\left(\sigma\left(x_t^\theta, E\phi\left(x_t^\theta\right), u_t^\theta\right) - \widehat{\sigma}(t)\right) dB_t \\ & - \left(\widehat{\sigma}_x(t) z_t + \widehat{\sigma}_y(t) E\left(\widehat{\phi}_x(t) z_t\right) + \widehat{\sigma}_v(t) v_t\right) dB_t, \end{aligned} \tag{3.7}$$

c.à.d

$$
\begin{aligned}
dy_t^\theta \;=\;& \frac{1}{\theta}\Big(b\left(\widehat{x}_t+\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right), E\psi(\widehat{x}_t+\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)), \widehat{u}_t+\theta v_t\big)-\widehat{b}\left(t\right)\Big)\,dt \\
&-\left(\widehat{b}_x\left(t\right)z_t+\widehat{b}_y\left(t\right)E\left(\widehat{\psi}_x\left(t\right)z_t\right)+\widehat{b}_v\left(t\right)v_t\right)dt \\
&+\frac{1}{\theta}\left(\sigma\left(\widehat{x}_t+\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right), E\phi\left(\widehat{x}_t+\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right), \widehat{u}_t+\theta v_t\big)-\widehat{\sigma}\left(t\right)\right)dB_t \\
&-\left(\widehat{\sigma}_x\left(t\right)z_t+\widehat{\sigma}_y\left(t\right)E\left(\widehat{\phi}_x\left(t\right)z_t\right)+\widehat{\sigma}_v\left(t\right)v_t\right)dB_t.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Par la formule du développement de Taylor d'ordre 1 avec reste intégral, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\left(b\left(x_t^{\lambda,\theta}, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right)-\widehat{b}\left(t\right)\right) \\
&=\int_0^1 b_x\left(x_t^{\lambda,\theta}, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right)\left(y_t^\theta+z_t\right)d\lambda \\
&\quad+\int_0^1 b_y\left(x_t^{\lambda,\theta}, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right)E(\psi_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right)\left(y_t^\theta+z_t\right))d\lambda \\
&\quad+\int_0^1 b_v\left(x_t^{\lambda,\theta}, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right)v_t d\lambda,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\left(\sigma\left(x_t^{\lambda,\theta}, E\phi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right)-\widehat{\sigma}\left(t\right)\right) \\
&=\int_0^1 \sigma_x\left(x_t^{\lambda,\theta}, E\phi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right)\left(y_t^\theta+z_t\right)d\lambda \\
&\quad+\int_0^1 \sigma_y\left(x_t^{\lambda,\theta}, E\phi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right)E(\phi_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right)\left(y_t^\theta+z_t\right))d\lambda \\
&\quad+\int_0^1 \sigma_v\left(x_t^{\lambda,\theta}, E\phi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right)v_t d\lambda.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

avec que $x_t^{\lambda,\theta}=\widehat{x}_t+\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)$ et $u_t^{\lambda,\theta}=\widehat{u}_t+\lambda\theta v_t$.

Nous remplaçons (3.9) et (3.10) dans (3.7) , on trouve

$$\begin{aligned} y_T^\theta = & \int_0^T \left[ \int_0^1 b_x \left( x_t^{\lambda,\theta}, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta} \right) y_t^\theta d\lambda \right. \\ & \left. + \int_0^1 b_y \left( x_t^{\lambda,\theta}, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta} \right) E\left( \psi_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right) y_t^\theta \right) d\lambda \right] dt \\ & + \int_0^T \left[ \int_0^1 \sigma_x \left( x_t^{\lambda,\theta}, E\phi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta} \right) y_t^\theta d\lambda \right. \\ & \left. + \int_0^1 \sigma_y \left( x_t^{\lambda,\theta}, E\phi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta} \right) E\left( \phi_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right) y_t^\theta \right) d\lambda \right] dB_t \\ & + \int_0^T \mu_1^\theta(t)\, dt + \int_0^T \mu_2^\theta(t)\, dB_t. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Avec

$$\begin{aligned} \mu_1^\theta(t) = & \int_0^1 \left( b_x\left( x_t^{\lambda,\theta}, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta} \right) - \widehat{b}_x(t) \right) z_t d\lambda \\ & + \int_0^1 \left( b_y\left( x_t^{\lambda,\theta}, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta} \right) E\left( \psi_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right) z_t \right) - \widehat{b}_y(t)\, E\left( \widehat{\psi}_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right) z_t \right) \right) d\lambda \\ & + \int_0^1 \left( b_v\left( x_t^{\lambda,\theta}, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta} \right) - \widehat{b}_v(t) \right) v_t d\lambda, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mu_2^\theta(t) = & \int_0^1 \left( \sigma_x\left( x_t^{\lambda,\theta}, E\phi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta} \right) - \widehat{\sigma}_x(t) \right) z_t d\lambda \\ & + \int_0^1 \left( \sigma_y\left( x_t^{\lambda,\theta}, E\phi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta} \right) E\left( \phi_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right) z_t \right) - \widehat{\sigma}_y(t)\, E\left( \widehat{\phi}_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right) z_t \right) \right) d\lambda \\ & + \int_0^1 \left( \sigma_v\left( x_t^{\lambda,\theta}, E\phi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta} \right) - \widehat{\sigma}_v(t) \right) v_t d\lambda. \end{aligned}$$

Comme les dérivées $b_x, b_y, \sigma_x, \sigma_y$ sont bornées, on a

$$\begin{aligned}
\left|y_T^\theta\right|^2 \leq k &\left[\left|\int_0^T y_s^\theta ds\right|^2 + \left|\int_0^T E\left(y_s^\theta\right) ds\right|^2\right] \\
&+ k\left[\left|\int_0^T y_s^\theta dB_s\right|^2 + \left|\int_0^T E\left(y_s^\theta\right) dB_s\right|^2\right] \\
&+ k\left[\left|\int_0^T \mu_1^\theta(t)\, dt\right|^2 + \left|\int_0^T \mu_2^\theta(t)\, dB_t\right|^2\right],
\end{aligned} \tag{3.12}$$

où $k > 0$. Par l'inégalité de Cauchy Schwarz on obtient

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|y_t^\theta\right|^2\right] \leq k &\left[E\left(\int_0^T \sup_{0\leq s\leq t}\left|y_s^\theta\right|^2 dt\right) + E\left(\int_0^T \sup_{0\leq s\leq t}\left(E\left|y_s^\theta\right|\right)^2 dt\right)\right] \\
&+ k\left[E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t y_s^\theta dB_s\right|^2\right) + E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t E\left(y_s^\theta\right) dB_s\right|^2\right)\right] \\
&+ kE\int_0^T \left|\mu_1^\theta(t)\right|^2 dt + kE\left|\int_0^T \mu_2^\theta(t)\, dB_t\right|^2.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

En suite par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy on a

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|y_t^\theta\right|^2\right] \leq k &\left[E\left(\int_0^T \sup_{0\leq s\leq t}\left|y_s^\theta\right|^2 dt\right) + E\left(\int_0^T \sup_{0\leq s\leq t}\left(E\left|y_s^\theta\right|\right)^2 dt\right)\right] \\
&+ C\left[E\int_0^T \left|\mu_1^\theta(t)\right|^2 dt + E\int_0^T \left|\mu_2^\theta(t)\right|^2 dt\right].
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Dans la suite on va montrer que $\mu_1^\theta(t), \mu_2^\theta(t) \to 0$ quand $\theta \to 0$ dans $L^2(\Omega \times [0,T])$. On pose

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \int_0^1 \left(b_x\left(x_t^{\lambda,\theta}, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right) - \widehat{b}_x(t)\right) z_t d\lambda, \\
I_2(t) &= \int_0^1 \left(b_y\left(x_t^{\lambda,\theta}, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right) E\left(\psi_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right) z_t\right) - \widehat{b}_y(t)\, E\left(\widehat{\psi}_x\left(x_t^{\lambda,\theta}\right) z_t\right)\right) d\lambda, \\
I_3(t) &= \int_0^1 \left(b_v\left(x_t^{\lambda,\theta}, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right) - \widehat{b}_v(t)\right) v_t d\lambda.
\end{aligned}$$

On a premièrement

$$
\begin{aligned}
I_1(t) = & \int_0^1 \left[ b_x\left(x_t^{\lambda,\theta}, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right) - b_x\left(\widehat{x}_t, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right)\right] z_t d\lambda \\
& + \int_0^1 \left[ b_x\left(\widehat{x}_t, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right) - b_x\left(\widehat{x}_t, E\psi\left(\widehat{x}_t\right), u_t^{\lambda,\theta}\right)\right] z_t d\lambda \\
& + \int_0^1 \left[ b_x\left(\widehat{x}_t, E\psi\left(\widehat{x}_t\right), u_t^{\lambda,\theta}\right) - b_x\left(\widehat{x}_t, E\psi\left(\widehat{x}_t\right), \widehat{u}_t\right)\right] z_t d\lambda.
\end{aligned}
$$

Comme $(a+b+c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$, alors

$$
\begin{aligned}
& E\int_0^T \left|I_1(t)\right|^2 dt \qquad (3.15) \\
& \leq 3E\int_0^T \left[\int_0^1 \left|\left(b_x\left(x_t^{\lambda,\theta}, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right) - b_x\left(\widehat{x}_t, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right)\right) z_t\right| d\lambda\right]^2 dt \\
& \quad + 3E\int_0^T \left[\int_0^1 \left|\left(b_x\left(\widehat{x}_t, E\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right), u_t^{\lambda,\theta}\right) - b_x\left(\widehat{x}_t, E\psi\left(\widehat{x}_t\right), u_t^{\lambda,\theta}\right)\right) z_t\right| d\lambda\right]^2 dt \\
& \quad + 3E\int_0^T \left[\int_0^1 \left|\left(b_x\left(\widehat{x}_t, E\psi\left(\widehat{x}_t\right), u_t^{\lambda,\theta}\right) - b_x\left(\widehat{x}_t, E\psi\left(\widehat{x}_t\right), \widehat{u}_t\right)\right) z_t\right| d\lambda\right]^2 dt.
\end{aligned}
$$

Puisque $b_x$ est lipschitizienne, (3.15) devient

$$
\begin{aligned}
& E\int_0^T \left|I_1(t)\right|^2 dt \\
& \leq 3k_1 E\int_0^T \left[\int_0^1 \left|\lambda\theta\left(y_t^\theta + z_t\right)\right| \left|z_t\right| d\lambda\right]^2 dt \\
& \quad + 3k_2 E\int_0^T \left[\int_0^1 \left(E\left|\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right) - \psi\left(\widehat{x}_t\right)\right|\right) \left|z_t\right| d\lambda\right]^2 dt \\
& \quad + 3k_3 E\int_0^T \left[\int_0^1 \left|\lambda\theta v_t\right| \left|z_t\right| d\lambda\right]^2 dt.
\end{aligned}
$$

Et comme $\left|\psi\left(x_t^{\lambda,\theta}\right)-\psi\left(\widehat{x}_t\right)\right|\leq c\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|$, on a alors

$$\begin{aligned}
&E\int_0^T\left|I_1\left(t\right)\right|^2dt\\
&\leq 3k_1E\int_0^T\left[\int_0^1\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|\left|z_t\right|d\lambda\right]^2dt\\
&\quad+3k_2c^2E\int_0^T\left[\int_0^1\left(E\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|\right)\left|z_t\right|d\lambda\right]^2dt\\
&\quad+3k_3E\int_0^T\left[\int_0^1\left|\lambda\theta v_t\right|\left|z_t\right|d\lambda\right]^2dt.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz on trouve

$$\begin{aligned}
&E\int_0^T\left|I_1\left(t\right)\right|^2dt\\
&\leq 3k_1E\int_0^T\left[\left(\int_0^1\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|^2d\lambda\right)\left(\int_0^1\left|z_t\right|^2d\lambda\right)\right]dt\\
&\quad+3k_2c^2E\int_0^T\left[\left(\int_0^1\left(E\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|\right)^2d\lambda\right)\left(\int_0^1\left|z_t\right|^2d\lambda\right)\right]dt\\
&\quad+3k_3E\int_0^T\left[\left(\int_0^1\left|\lambda\theta v_t\right|^2d\lambda\right)\left(\int_0^1\left|z_t\right|^2d\lambda\right)\right]dt.
\end{aligned}$$

Nous appliquons l'inégalité de Cauchy Schwarz une deuxième fois, il vient

$$\begin{aligned}
&E\int_0^T\left|I_1\left(t\right)\right|^2dt\\
&\leq 3k_1\left[E\int_0^T\left(\int_0^1\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|^2d\lambda\right)^2dt\right]^{\frac{1}{2}}\left[E\int_0^T\left(\int_0^1\left|z_t\right|^2d\lambda\right)^2dt\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+3k_2c^2\left[E\int_0^T\left(\int_0^1\left(E\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|\right)^2d\lambda\right)^2dt\right]^{\frac{1}{2}}\left[E\int_0^T\left(\int_0^1\left|z_t\right|^2d\lambda\right)^2dt\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+3k_3\left[E\int_0^T\left(\int_0^1\left|\lambda\theta v_t\right|^2d\lambda\right)^2dt\right]^{\frac{1}{2}}\left[E\int_0^T\left(\int_0^1\left|z_t\right|^2d\lambda\right)^2dt\right]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

ainsi que

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^T |I_1(t)|^2 dt \\
&\leq 3k_1\left[E\int_0^T\left(\int_0^1 \left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|^4 d\lambda\right)dt\right]^{\frac{1}{2}}\left[E\int_0^T\left(\int_0^1 |z_t|^4 d\lambda\right)dt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad+3k_2c^2\left[E\int_0^T\left(\int_0^1 \left(E\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|\right)^4 d\lambda\right)dt\right]^{\frac{1}{2}}\left[E\int_0^T\left(\int_0^1 |z_t|^4 d\lambda\right)dt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad+3k_3\left[E\int_0^T\left(\int_0^1 |\lambda\theta v_t|^4 d\lambda\right)dt\right]^{\frac{1}{2}}\left[E\int_0^T\left(\int_0^1 |z_t|^4 d\lambda\right)dt\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Finalement, nous arrivons à

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^T |I_1(t)|^2 dt \\
&\leq 3k_1\left[\int_0^T\left(\int_0^1 E\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|^4 d\lambda\right)dt\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^T\left(\int_0^1 E|z_t|^4 d\lambda\right)dt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad+3k_2c^2\left[\int_0^T\left(\int_0^1 E\left\{\left(E\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|\right)^4\right\} d\lambda\right)dt\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^T\left(\int_0^1 E|z_t|^4 d\lambda\right)dt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad+3k_3\left[\int_0^T\left(\int_0^1 E|\lambda\theta v_t|^4 d\lambda\right)dt\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^T\left(\int_0^1 E|z_t|^4 d\lambda\right)dt\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Par l'inégalité de Hölder pour $p=4$, on a

$$
\left(E\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|\right)^4 \leq E\left(\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|^4\right),
$$

en prenant l'espérance, alors

$$
\begin{aligned}
E\left\{\left(E\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|\right)^4\right\} &\leq E\left\{E\left(\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|^4\right)\right\} \\
&= E\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta+z_t\right)\right|^4.
\end{aligned}
$$

Alors (3.16) devient sous cette forme

$$E\int_0^T |I_1(t)|^2 dt \leq K\left[\int_0^T \left(\int_0^1 E\left|\lambda\theta\left(y_t^\theta + z_t\right)\right|^4 d\lambda\right) dt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^T \left(\int_0^1 E|z_t|^4 d\lambda\right) dt\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$+ 3k_3\left[\int_0^T \left(\int_0^1 E|\lambda\theta v_t|^4 d\lambda\right) dt\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^T \left(\int_0^1 E|z_t|^4 d\lambda\right) dt\right]^{\frac{1}{2}},$$

avec $K = 3k_1 + 3k_2c^2$. D'où, lorsque $\theta \to 0$, $E\int_0^T |I_1(t)|^2 dt \to 0$.

De la même manière, on peut montrer que $E\int_0^T |I_2(t)|^2 dt \to 0$ et $E\int_0^T |I_3(t)|^2 dt \to 0$ lorsque $\theta \to 0$. Aussi, par la même méthode on peut montrer que $\mu_2^\theta(t) \to 0$ lorsque $\theta \to 0$ dans $L^2(\Omega \times [0,T])$.

La fonction $x \to x^2$ est convexe, alors par l'inégalité de Jensen, on a cette estimation

$$E\left|y_t^\theta\right|_T^{*,2} \leq CE\int_0^T \left|\mu^\theta(t)\right|^2 dt + 2k\left(\int_0^T E\left|y_s^\theta\right|_t^{*,2} dt\right),$$

avec $\mu^\theta(t) = \mu_1^\theta(t) + \mu_2^\theta(t), \forall t \in [0,T]$.

Maintenant, nous appliquons le lemme de Gronwall, on obtient

$$E\left|y_t^\theta\right|_T^{*,2} \leq C\exp(2kT)\, E\int_0^T \left|\mu^\theta(t)\right|^2 dt.$$

On a $E\int_0^T \left|\mu^\theta(t)\right|^2 dt \to 0$ lorsque $\theta \to 0$, d'où le résultat cherché. ■

**Lemme 3.3.2** *Soient $\hat{p}(\cdot)$ la solution de (3.3) et $z(\cdot)$ la solution de (3.5), respectivement, on a*

$$E(\widehat{p}_T z_T) = E\left[\int_0^T \left(\widehat{p}_t \widehat{b}_v(t) v_t - z_t \widehat{h}_x(t) - z_t E\left(\widehat{h}_y(t)\right)\widehat{\varphi}_x(t) + \widehat{q}_t \widehat{\sigma}_v(t) v_t\right) dt\right].$$

**Preuve.** Par (3.3) et (3.5), en appliquant la formule d'intégration par parties à $\widehat{p}_t z_t$ on a

$$d[\widehat{p}_t z_t] = \widehat{p}_t dz_t + z_t d\widehat{p}_t + d \prec \widehat{p}_t, z_t \succ,$$

on trouve

$$
\begin{aligned}
\widehat{p}_T z_T &= \int_0^T \widehat{p}_t dz_t + \int_0^T z_t d\widehat{p}_t + \int_0^T d \prec \widehat{p}_t, z_t \succ \\
&= \int_0^T \widehat{p}_t \Big[ \Big( \widehat{b}_x(t) z_t + \widehat{b}_y(t) E\Big(\widehat{\psi}_x(t) z_t\Big) + \widehat{b}_v(t) v_t \Big) dt \\
&\quad + \Big( \widehat{\sigma}_x z_t + \widehat{\sigma}_y(t) E\Big(\widehat{\phi}_x(t) z_t\Big) + \widehat{\sigma}_v(t) v_t \Big) dB_t \Big] \\
&\quad + \int_0^T z_t \Big[ - \Big( \widehat{b}_x(t) \widehat{p}_t + \widehat{\sigma}_x(t) \widehat{q}_t + \widehat{h}_x(t) \Big) dt + \widehat{q}_t dB_t \\
&\quad - \Big( E\Big(\widehat{b}_y(t) \widehat{p}_t\Big) \widehat{\psi}_x(t) + E\left(\widehat{\sigma}_y(t) \widehat{q}_t\right) \widehat{\phi}_x(t) + E\Big(\widehat{h}_y(t)\Big) \widehat{\varphi}_x(t) \Big) dt \Big] \\
&\quad + \int_0^T \widehat{q}_t \Big( \widehat{\sigma}_x z_t + \widehat{\sigma}_y(t) E\Big(\widehat{\phi}_x(t) z_t\Big) + \widehat{\sigma}_v(t) v_t \Big) dt,
\end{aligned}
$$

nous prenons l'espérance, il vient

$$
E\left(\widehat{p}_T z_T\right) = E\left[ \int_0^T \Big( \widehat{p}_t \widehat{b}_v(t) v_t - z_t \widehat{h}_x(t) - z_t E\Big(\widehat{h}_y(t)\Big) \widehat{\varphi}_x(t) + \widehat{q}_t \widehat{\sigma}_v(t) v_t \Big) dt \right].
$$

D'où le résultat cherché. ■

**Lemme 3.3.3** *La dérivée de Gâteaux de la fonction du coût est donnée par*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta} J\left(\widehat{u}_t + \theta v_t\right) |_{\theta=0} = E \Big[ \int_0^T & \Big( \widehat{h}_x(t) z_t + \widehat{h}_y(t) E\left(\widehat{\varphi}_x(t) z_t\right) + \widehat{h}_v(t) v_t \Big) dt \\
& + \widehat{g}_x(T) z_T + \widehat{g}_y(T) E\left(\widehat{\chi}_x(T) z_T\right) \Big].
\end{aligned}
$$

**Preuve.** Par la définition de la dérivée de Gâteaux, et en utilisant la notation

$$
g\left(x_T\right) = g\left(x_T, E\left(\chi\left(x_T\right)\right)\right),
$$

on a

$$
\frac{d}{d\theta} J\left(\widehat{u}_t + \theta v_t\right) |_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta} E\left[ \int_0^T h\left(x_t^\theta, E\left(\varphi\left(x_t^\theta\right)\right), u_t^\theta\right) dt \right] |_{\theta=0} + \frac{d}{d\theta} E\left[ g\left(x_T^\theta\right) \right] |_{\theta=0} . \tag{3.17}
$$

D'une part

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}E\left[\int_0^T h\left(x_t^\theta, E\left(\varphi\left(x_t^\theta\right)\right), u_t^\theta\right)dt\right]|_{\theta=0} &= \lim_{\theta\to 0}E\left[\int_0^T\left(\int_0^1 h_x\left(\widehat{x}_t+\lambda\left(x_t^\theta-\widehat{x}_t\right)\right)\frac{x_t^\theta-\widehat{x}_t}{\theta}d\lambda\right)dt\right] \\
&\quad + E\left[\int_0^T (\int_0^1 h_y\left(\widehat{x}_t+\lambda\left(x_t^\theta-\widehat{x}_t\right)\right)\right. \\
&\qquad \left. E\left(\varphi_x\left(\widehat{x}_t+\lambda\left(x_t^\theta-\widehat{x}_t\right)\right)\frac{x_t^\theta-\widehat{x}_t}{\theta}\right)d\lambda)dt\right] \\
&\quad + E\left[\int_0^T\left(\int_0^1 h_v\left(\widehat{u}_t+\lambda\theta v_t\right)v_t d\lambda\right)dt\right], \\
&= E\left[\int_0^T\left(\widehat{h}_x(t)\, z_t+\widehat{h}_y(t)\, E\left(\widehat{\varphi}_x(t)\, z_t\right)+\widehat{h}_v(t)\, v_t\right)dt\right].
\end{aligned}$$

Par l'approximation (3.6) on a

$$\frac{d}{d\theta}E\left[\int_0^T h\left(x_t^\theta, E\left(\varphi\left(x_t^\theta\right)\right), u_t^\theta\right)dt\right]|_{\theta=0} = E\left[\int_0^T\left(\widehat{h}_x(t)\, z_t+\widehat{h}_y(t)\, E\left(\widehat{\varphi}_x(t)\, z_t\right)+\widehat{h}_v(t)\, v_t\right)dt\right]. \tag{3.18}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}E\left[g\left(x_T^\theta\right)\right]|_{\theta=0} &= \lim_{\theta\to 0}E\left[\frac{g\left(x_T^\theta\right)-g\left(\widehat{x}_T\right)}{\theta}\right], \\
&= \lim_{\theta\to 0}E\left[\int_0^1 g_x\left(\widehat{x}_T+\lambda\left(x_T^\theta-\widehat{x}_T\right)\right)\frac{x_T^\theta-\widehat{x}_T}{\theta}d\lambda\right] \\
&\quad + \lim_{\theta\to 0}E\left[\int_0^1 g_y\left(\widehat{x}_T+\lambda\left(x_T^\theta-\widehat{x}_T\right)\right)E\left(\chi_x\left(\widehat{x}_T+\lambda\left(x_T^\theta-\widehat{x}_T\right)\right)\frac{x_T^\theta-\widehat{x}_T}{\theta}\right)d\lambda\right].
\end{aligned}$$

Par l'approximation (3.6) on a

$$\frac{d}{d\theta}E\left[g\left(x_T^\theta\right)\right]|_{\theta=0} = E\left[\widehat{g}_x(T)\, z_T+\widehat{g}_y(T)\, E\left(\widehat{\chi}_x(T)\, z_T\right)\right]. \tag{3.19}$$

Nous remplaçons (3.18) et (3.19) dans (3.17) on obtient le résultat cherché. ■

**Corollaire 3.3.1** *La dérivée de Gateaux de la fonction de coût peut être exprimée en* *fonction du Hamiltonien $H$ de la manière suivante.*

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}J\left(\widehat{u}_t+\theta v_t\right)|_{\theta=0}&=E\left[\int_0^T\left(\widehat{h}_v\left(t\right)v_t+\widehat{p}_t\widehat{b}_v\left(t\right)v_t+\widehat{q}_t\widehat{\sigma}_v\left(t\right)v_t\right)dt\right]\\&=E\left[\int_0^T\frac{d}{dv}H\left(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t,\widehat{p}_t,\widehat{q}_t\right)v_tdt\right].\end{aligned}$$

**Preuve.** D'aprés le lemme 3.3.3 on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}J\left(\widehat{u}_t+\theta v_t\right)|_{\theta=0}=\int_0^T&\left[E\left(\widehat{h}_x\left(t\right)z_t\right)+E\left(\widehat{h}_y\left(t\right)\right)E\left(\widehat{\varphi}_x\left(t\right)z_t\right)\right.\\&\left.+E\left(\widehat{h}_v\left(t\right)v_t\right)\right]dt+E\left[\widehat{g}_x\left(T\right)z_T+\widehat{g}_y\left(T\right)E\left(\widehat{\chi}_x\left(T\right)z_T\right)\right].\end{aligned}\tag{3.20}$$

Et par le lemme 3.3.2 on a

$$E\left(\widehat{h}_y\left(t\right)\right)E\left(\widehat{\varphi}_x\left(t\right)z_t\right)=E\left[\int_0^T\left(\widehat{p}_t\widehat{b}_v\left(t\right)v_t-z_t\widehat{h}_x\left(t\right)+\widehat{q}_t\widehat{\sigma}_v\left(t\right)v_t\right)dt\right]-E\left(\widehat{p}_Tz_T\right).\tag{3.21}$$

Nous remplaçons (3.21) dans (3.20) on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}J\left(\widehat{u}_t+\theta v_t\right)|_{\theta=0}=E&\left[\int_0^T\left(\widehat{h}_v\left(t\right)v_t+\widehat{p}_t\widehat{b}_v\left(t\right)v_t+\widehat{q}_t\widehat{\sigma}_v\left(t\right)v_t\right)dt\right]\\&+E\left(\widehat{g}_x\left(T\right)z_T+\widehat{g}_y\left(T\right)E\left(\widehat{\chi}_x\left(T\right)z_T\right)\right)-E\left(\widehat{p}_Tz_T\right).\end{aligned}$$

Remarquant que par la condition terminale de l'équation (3.3) on a

$$E\left[\widehat{p}_Tz_T\right]=E\left[\widehat{g}_x\left(T\right)z_T+\widehat{g}_y\left(T\right)E\left(\widehat{\chi}_x\left(T\right)z_T\right)\right],$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}J\left(\widehat{u}_t+\theta v_t\right)|_{\theta=0}&=E\left[\int_0^T\left(\widehat{h}_v\left(t\right)v_t+\widehat{p}_t\widehat{b}_v\left(t\right)v_t+\widehat{q}_t\widehat{\sigma}_v\left(t\right)v_t\right)dt\right]\\&=E\left[\int_0^T\frac{d}{dv}H\left(t,\widehat{x}_t,\widehat{u}_t,\widehat{p}_t,\widehat{q}_t\right)v_tdt\right].\end{aligned}$$

■

**Resultat principale**

Puisque $U$ est convexe, on peut choisir la perturbation

$$u_t^\theta = \widehat{u}_t + \theta\left(v_t - \widehat{u}_t\right) \in U,$$

pour $0 \leq \theta \leq 1$. Ainsi, puisque $\widehat{u}_t$ est optimal, nous avons l'inégalité

$$\frac{d}{d\theta} J\left(\widehat{u}_t + \theta\left(v_t - \widehat{u}_t\right)\right) |_{\theta=0} = E\left(\int_0^T \frac{d}{dv} H\left(t, \widehat{x}_t, \widehat{u}_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t\right)\left(v_t - \widehat{u}_t\right) dt\right) \geq 0.$$

Nous pouvons réduire cela à

$$\frac{d}{dv} H\left(t, \widehat{x}_t, \widehat{u}_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t\right)\left(v_t - \widehat{u}_t\right) \geq 0,$$

pour tout $v_t \in U$. Nous résumons cela avec le résultat principale de cette section.

## 3.4 Conditions suffisantes pour l'optimalité

Dans cette section, nous énonçons les conditions suffisantes d'optimalité, pour cela nous ajoutons les hypothéses suivantes.

- (A.3) La fonction $g$ est convexe dans $(x, y)$.
- (A.4) L'hamiltonien est convexe dans $(x, y, v)$.
- (A.5) Les fonctions $\psi, \phi, \varphi, \chi$ sont convexes.
- (A.6) Les fonctions $b_y, \sigma_y, h_y$ et $g_y$ sont non négatives.

**Théorème 3.4.1** *Supposons que les conditions (A.1)-(A.6) sont satisfaites et que donne $\widehat{u} \in U$, avec la trajectoire d'état $\widehat{x}_t$ et qu'il existe des solutions $\widehat{p}_t, \widehat{q}_t$ à l'équation adjointe* (3.3). *Puis, si*

$$H\left(t, \widehat{x}_t, \widehat{u}_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t\right) = \inf_{v \in U}\left(t, \widehat{x}_t, v_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t\right), \tag{3.22}$$

pour tout $t \in [0,T]$ , $\widehat{u}$ est un contrôle optimale.

**Preuve.** Soit $u(\cdot) \in U$, on considère la différence

$$J(\widehat{u}) - J(u) = E\left[\int_0^T \left(\widehat{h}(t) - h(t)\right) dt\right] + E\left[\widehat{g}(T) - g(T)\right]. \tag{3.23}$$

Nous introduisons la notation abrégée $b(t) = b(t, x_t, E(\psi(x_t)), u_t)$ et de même pour les autres fonctions. Les fonctions $\widehat{b}(t), \widehat{\psi}(t)$ etc..., nous notons $H(t) = H(t, x_t, u_t, p_t, q_t)$ et $\widehat{H}(t) = H(t, \widehat{x}_t, \widehat{u}_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t)$.

Puisque $g$ et $\chi$ sont convexes et que $g_y \geq 0$, cela signifie que

$$\begin{aligned} E\left[\widehat{g}(T) - g(T)\right] &\leq E\left(\widehat{g}_x(T)(\widehat{x}_T - x_T) + \widehat{g}_y(T) E\left(\widehat{\chi}(T) - \chi(T)\right)\right) \\ &\leq E\left(\widehat{g}_x(T)(\widehat{x}_T - x_T) + \widehat{g}_y(T) E\left[\widehat{\chi}_x(T)(\widehat{x}_T - x_T)\right]\right) \\ &= E\left(\widehat{p}_T(\widehat{x}_T - x_T)\right). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Nous intégrons de 0 à $T$, puis nous prenons l'espérance des deux membres il vient

$$\begin{aligned} E\left[\widehat{p}_T(\widehat{x}_T - x_T)\right] &= E\left[\int_0^T (\widehat{x}_t - x_t) d\widehat{p}_t + \int_0^T \widehat{p}_t d(\widehat{x}_t - x_t)\right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \widehat{q}_t(\widehat{\sigma}(t) - \sigma(t)) dt\right], \\ &= -E\left[\int_0^T (\widehat{x}_t - x_t)\left(\widehat{b}_x(t)\widehat{p}_t + E\left(\widehat{b}_y(t)\widehat{p}_t\right)\widehat{\psi}_x(t) + \widehat{\sigma}_x(t)\widehat{q}_t\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + E\left(\widehat{\sigma}_y(t)\widehat{q}_t\right)\widehat{\phi}_x(t) + \widehat{h}_x(t) + E\left(\widehat{h}_y(t)\right)\widehat{\varphi}_x(t)\right) dt\right] \\ &\quad + E\left[\int_0^T \widehat{p}_t\left(\widehat{b}(t) - b(t)\right) dt + E\int_0^T \widehat{q}_t(\widehat{\sigma}(t) - \sigma(t)) dt\right], \\ &= -E\left[\int_0^T (\widehat{x}_t - x_t)\left(\widehat{b}_x(t)\widehat{p}_t + E\left(\widehat{b}_y(t)\widehat{p}_t\right)\widehat{\psi}_x(t) + \widehat{\sigma}_x(t)\widehat{q}_t\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + E\left(\widehat{\sigma}_y(t)\widehat{q}_t\right)\widehat{\phi}_x(t) + \widehat{h}_x(t) + E\left(\widehat{h}_y(t)\right)\widehat{\varphi}_x(t)\right) dt\right] \\ &\quad + E\left[\int_0^T \left(\widehat{H}(t) - H(t)\right) dt - E\int_0^T \left(\widehat{h}(t) - h(t)\right) dt\right]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Par la définition de l'hamiltonien $H$ on a

$$
\begin{aligned}
& E\left[\int_0^T \left\{\widehat{p}_t \left(\widehat{b}(t)-b(t)\right)+\widehat{q}_t \left(\widehat{\sigma}\left(t\right)-\sigma\left(t\right)\right)\right\} dt\right] \\
& = E\left[\int_0^T \left(\widehat{H}\left(t\right)-H\left(t\right)\right) dt\right]-E\left[\int_0^T \left(\widehat{h}(t)-h(t)\right) dt\right],
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

nous remplaçons (3.26) dans (3.25) on obtient

$$
\begin{aligned}
& E\left[\widehat{p}_T \left(\widehat{x}_T-x_T\right)\right] \\
& =-E\left[\int_0^T \left(\widehat{x}_t-x_t\right)\left(\widehat{b}_x(t)\widehat{p}_t+E\left(\widehat{b}_y(t)\widehat{p}_t\right)\widehat{\psi}_x\left(t\right)+\widehat{\sigma}_x\left(t\right)\widehat{q}_t\right.\right. \\
& \quad \left.\left.+E\left(\widehat{\sigma}_y\left(t\right)\widehat{q}_t\right)\widehat{\phi}_x(t)+\widehat{h}_x(t)+E\left(\widehat{h}_y(t)\right)\widehat{\varphi}_x(t)\right) dt\right] \\
& \quad + E\left[\int_0^T \left(\widehat{H}\left(t\right)-H\left(t\right)\right) dt\right]-E\left[\int_0^T \left(\widehat{h}(t)-h(t)\right) dt\right],
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

nous remplaçons (3.24) et (3.27) dans (3.23) on trouve

$$
\begin{aligned}
J\left(\widehat{u}\right)-J\left(u\right) \leq & -\int_0^T \left[E\left(\left(\widehat{x}_t-x_t\right)\widehat{H}_x\left(t\right)\right)+E\left(\left(\widehat{x}_t-x_t\right)\widehat{\psi}_x\left(t\right)\right)E\left(\widehat{b}_y(t)\widehat{p}_t\right)\right. \\
& + E\left(\left(\widehat{x}_t-x_t\right)\widehat{\phi}_x(t)\right)E\left(\widehat{\sigma}_y\left(t\right)\widehat{q}_t\right) \\
& \left.+E\left(\left(\widehat{x}_t-x_t\right)\widehat{\varphi}_x(t)\right)E\left(\widehat{h}_y(t)\right)\right] dt \\
& + E\left[\int_0^T \left(\widehat{H}\left(t\right)-H\left(t\right)\right) dt\right],
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

et puisque H,$\varphi$,$\psi$ et $\phi$ sont convexes alors

$$
\begin{aligned}
E\left[\int_0^T \left(\widehat{H}(t) - H(t)\right) dt\right] \leq E\Bigg[\int_0^T \Big( & (\widehat{x}_t - x_t)\, \widehat{H}_x(t) \\
& + E\left((\widehat{x}_t - x_t)\, \widehat{\psi}_x(t)\right) \widehat{b}_y(t)\widehat{p}_t \\
& + E\left((\widehat{x}_t - x_t)\, \widehat{\phi}_x(t)\right) \widehat{\sigma}_y(t)\, \widehat{q}_t \\
& + E\left((\widehat{x}_t - x_t)\, \widehat{\varphi}_x(t)\right) \widehat{h}_y(t) \\
& + \widehat{H}_u(t)\,(\widehat{u}_t - u_t)\Big)\Bigg] dt.
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

Où dans la dernière étape nous avons utilisé cette $\widehat{H}_u(\widehat{u}_t - u_t) \leq 0$ en raison de la condition minimale (3.22). La combinaison des inégalités ci-dessus nous donne.

Alors (3.29) devient

$$
\begin{aligned}
E\left[\int_0^T \left(\widehat{H}(t) - H(t)\right) dt\right] \leq \int_0^T \Big[ & E\left((\widehat{x}_t - x_t)\, \widehat{H}_x(t)\right) \\
& + E\left((\widehat{x}_t - x_t)\, \widehat{\psi}_x(t)\right) E\left(\widehat{b}_y(t)\widehat{p}_t\right) \\
& + E\left((\widehat{x}_t - x_t)\, \widehat{\phi}_x(t)\right) E\left(\widehat{\sigma}_y(t)\, \widehat{q}_t\right) \\
& + E\left((\widehat{x}_t - x_t)\, \widehat{\varphi}_x(t)\right) E\left(\widehat{h}_y(t)\right)\Big] dt,
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

remplaçant l'inégalité (3.30) dans (3.28) on obtient

$$
J(\widehat{u}) - J(u) \leq 0,
$$

et donc, $\widehat{u}$ est un contrôle optimal. ■

# Conclusion

Dans ce mémoire on a établi les conditions nécessaires et les conditions suffisantes pour l'optimalité en contrôle optimal par des équations différentielles stochastiques de type champ moyen. La méthode de démonstration est basée sur le principe d'optimalisation convexe on utilisant une perturbation convexe.

# Bibliographie

[1] D.Andersson : (2010), principe du maximum stochastique de type champ moyen.

[2] P.Briand : (2001), Équations différentielles stochastiques rétrogrades.

[3] J.B.Monique : (2006), Cours de calcul stochastique.

[4] T.Moufida : (2013), Introduction aux équations différentielles stochastiques.

[5] B.Nour El Houda : (2015), Mouvement brownien et calcul stochastique.

# Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

| | |
|---|---|
| $\mathbb{Y}_t$ | Processus stochastique. |
| $(F_t)_{t\geq 0}$ | Filtration. |
| $M_t$ | Martingale. |
| $(\Omega, F, P)$ | Espace de probabilité. |
| $W_t$ | Mouvement Brownien. |
| $U$ | Ensemble de contrôles admissibles. |
| $J(\cdot)$ | Fonction de coût. |
| $u$ | Contrôle admissible. |
| $\widehat{u}$ | Contrôle optimal. |
| $u^\theta$ | Contrôle perturbé. |
| $H(t, x_t, E\varphi(x_t), u_t, p, q)$ | Hamiltonien. |
| $(\widehat{p}, \widehat{q})$ | Processus adjointes. |
| inf | Inférieur. |
| sup | Supérieur. |
| lim | Limite. |

# Résumé

Dans ce travail, nous intéressons aux conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités en contrôle optimal stochastique pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastique de type champ-moyen. De plus, la fonction du coût est aussi de type champ-moyen.

Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour ses systèmes seront établies sous la forme de principe du maximum par les techniques de perturbation convexe.



**Mots-clés : Equations différentielle stochastiques de type champ moyen, équations adjointes, contrôle optimal, le principe d'optimisation convexe.**



# Abstract

In this work, we investigate the necessary and sufficient conditions of optimal stochastic control optimality for systems governed by stochastic differential equations of field-mean type. In addition, the cost function is also of the mean-field type.

The necessary and sufficient conditions of optimality for its systems will be established in the form of maximum principle by convex disturbance techniques.



**Key-words : Mean-field type stochastic differential equations, adjoint equations, optimal control, the principle of convex optimization.**



# ملخص

في هذا العمل، نتحقق من الشروط الضرورية والكافية لتحقيق الأمثلية المثلى للتحكم العشوائي للأنظمة التي تحكمها معادلات تفاضلية عشوائية من نوع متوسط المجال. بالإضافة إلى ذلك، وظيفة التكلفة هي أيضًا من النوع المتوسط في الحقل.

سيتم وضع الشروط اللازمة والكافية من الأمثلية لأنظمتها في شكل مبدأ أقصى من خلال تقنيات اضطراب محدب.



**الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية عشوائية من نوع الحقل المتوسط، معادلات مجاورة، تحكم مثالي، مبدأ التحسين المحدب.**