République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par

Hamza Meriem

Titre :

Sur l'estimation basée sur les Trimmed L-moments

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Touba Sonia**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Cherfaoui Mouloud**	UMKB	Président
Dr.	**Brahimi Brahim**	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

À celle qui m'a transmis la vie, l'amour, le courage, à toi chère Maman "Hamza Zakia " toutes mes joies, mon amour et ma reconnaissance.

À mon Père " Ouanoughi" pour l'éducation qu'il m'a prodigué avec tous les moyens et au prix de toutes les sacrifices qu'il a consentis à mon égard et à mes études depuis mon enfance.

À mon cher frère Mohammed el Mahdi

À mes chères soeurs Latifa, Nassima, Soumia, Warda, Selma.

À mes neveux

À mes beaux-frères

À tous ma famille

À mes amies.

REMERCIEMENTS

Nous remercions le Dieu pour le courage, la patience et la volonté qui nous ont été utiles tout au long de notre parcours.

Nous tenons à remercier l'encadreur "Amel chine" et "Touba Sonia" pour la proposition du thème, l'encadrement de ce travail, pour ses précieux conseils et orientations.

Nous remercions également Mr BENATIA Fatah pour ses remarques pertinentes qui nous ont permis de mieux structurer notre travail et de mieux le décrire.

Nous remercions également les membres du jury pour avoir accepté d'examiner et d'évaluer notre travail.

Nos sincères remerciements s'adressent enfin à tous ceux qui nous ont soutenus de près ou de loin.

Table des matières

Liste des tableaux

Introduction

Les L-moments ont été largement utilisé au cours des 20 dernières années dans l'inférence statistique .**EL Amir et Seheult** (**2003**)[4] ont introduit des variantes sur les L-moment obtenues par des transformations sur l'échantillon en éliminant les valeurs extrêmes .Ces variantes sont appelées TL-moments (trimmed L-moments), les L-moments et les TL-moments sont des mesures analogues au moments classiques, leurs présentation sont basées sur la statistique d'ordre . ils sont utilisés pour caractériser les différentes distributions de probabilité et comme méthode d'estimation des paramètres dans le cas où les méthodes d'estimation classiques ne sont pas valable, ces mesures sont développées par **Hosking en** (**1990**)[6], et permettent de représentés les mesures de position, d'échelle, d'asymétrie et de kurtosis en fonction aussi bien des estimateurs des L-moments que ceux des TL-moments.

Parmi les avantages théoriques des L-moments on a :

- Pour que les distributions de probabilité des L-moments soient significatives, la seule exigence est que la distribution ait une moyenne finie.**(J.R.M.Hosking,1990)**.
- Pour que les erreurs standards des L-moments soient finies, la seule exigence est que la distribution ait une variance finie.

Les TL-moment de distribution de probabilité peut exister même si le L-moment ou le moment classique de la distribution de probabilité n'existe pas, comme par exemple la distribution de Cauchy.

Les L-moments et les TL-moments sont utilisés dans beaucoup de domaines tels que : Hydrologie, Ingénierie et Météorologie. . . etc.

Ce mémoire est constitué de trois parties essentielles :

- Dans **le premier Chapitre** et après quelques rappels essentiels en probabilité et statistiques, nous avons présentés les définitions et les propriétés des L-moments qui sont définis comme des combinaisons linéaires des moments de statistiques d'ordre.

- **Chapitre 2 :** Dans cette partie du mémoire, nous allons détaillés les définitions des Trimmed L-moments leurs propriétés respectives, leurs estimateurs et surtout l'utilisation de leur estimateurs par le calcul des paramètres de position et d'échelle ainsi que les TL-skewness et les TL-kurtosis et leurs comparaisons aux paramètres classiques.
- **Chapitre 3 :** Nous appliquerons la méthode des trimmed L-moments et L-moments pour estimer les paramètres de loi Pareto généralisée et loi de Cauchy.

Chapitre 1

L-moments

La statistique d'ordre joue un rôle important dans la théorie des L-moments.

L'idée des L-moments, est apparue progressivement dans différents travaux sur les combinaisons linéaires de statistique d'ordre **(Sillitto(1969) ;Davide(1968)).** Grace aux travaux de **Hosking(1990) ; Davide(2003)** la méthode des L-moments présente plusieurs avantages .Nous commençons dans ce chapitre par donner définition de la statistique d'ordre aussi que leur loi, la définition de L-moments, ses propriétés de base, un exemple et l'estimateurs des L-moments.

1.1 Statistique d'ordre

Définition 1.1 (Statistique d'ordre)

Soit $X_1, ..., X_n$ un échantillon de n variables aléatoires $(v.a)$, indépendantes et identiquements distribuées$(i.i.d)$,on appelle statistique d'ordre noté : $X_{1;n}, ..., X_{n,n}$ les variables aléatoires ordonnées [1] en sens croissant :

$$X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq ...... \leq X_{n,n}.$$

Remarque 1.1

·La plus petite statistique d'ordre $X_{1,n} := \min\limits_{1 \leq i \leq n} (X_i)$.

·La plus grande statistique d'ordre $X_{n,n} := \max\limits_{1 \leq i \leq n} (X_i)$.

·La $i-$*ième statistique d'ordre dans un échantillon de taille* n*, est donc* $X_{i,n}$ *ou* $i = 1, ...n$.

Théorème 1.1

Soit $(X_1, X_2, .., X_n)$*une suite de (v,a) i,i,d On note la fonction de répartition de* X *par :-* $F_X(x) = P(X \leq x)$*,et la densité par* $f_X(x)$*, et soit* $X_{1:n}, ..., X_{n:n}$ *les statistiques d'ordre associées.*

·La loi de la statistique d'ordre $X_{n,n}$*est donnée par la fonction de répartition* $F_{X_{n,n}}$*,et la fonction de densité* $f_{X_{n,n}}$*,qui sont définies par :*

$$F_{X_{n,n}}(x) = (F(x))^n, \forall x \in \mathbb{R},$$
$$f_{X_{n;n}}(x) = nf(x)(F(x))^{n-1}.$$

·La loi de la statistique d'ordre $X_{1,n}$ *est donnée par la fonction de répartition* $F_{X_{1,n}}$ *et la fonction de densité* $f_{X_{1,n}}$*qui sont définies par :*

$$F_{X_{1,n}}(x) = 1 - (1 - F(x))^n, \forall x \in \mathbb{R},$$
$$f_{X_{1;n}}(x) = nf(x)(1 - F(x))^{n-1}.$$

Remarque 1.2

·Les statistiques d'ordres du minimum et maximum $X_{1,n}$ *et* $X_{n,n}$ *sont dépendantes avec deux lois différentes.*

·Les $X_{1,n}$ *et* $X_{n,n}$ *jouent un grand rôle dans l'étude des valeurs extrêmes.*

1.1.1 Loi de la i-ème statistique d'orde

Pour tout $1 \leq i \leq n$ la loi de la statistique d'ordre $X_{i,n}$ est donnée par :

la fonction de répartition :

$$F_{X_{i,n}}(x) = \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{n} (F(x))^k (1 - F(x))^{n-k}, \tag{1.1}$$

et sa densité :

$$f_{X_{i,n}}(x) = n\binom{n-i}{i} f(x)(F(x))^{i-1}(1-F(x))^{n-i}.$$

Remarque 1.3
Ona : $\binom{k}{n} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

1.1.2 Moments des statistiques d'ordres

Définition 1.2

Soit $X_{i:n}$ la i-ième statistique d'ordre associée à l'échantillion, de taille n, de densité de probabilité $f(x)$ et de fonction de répartition $F(x)$ continue avec la fonction de quantile $Q\,(u) = F_X^{-1}\,(u)$, le $k-$ième moments de la $i-$ième statistique d'ordre est définie par :

$$\begin{aligned} E(X_{i:n}^k) = u_{i:n}^k &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_{X_{i:n}}(x)dx \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-1)!}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \left\{F(x)\right\}^{i-1}\left\{1-F(x)\right\}^{n-i} f(x)dx. \end{aligned} \quad (1.2)$$

d'une autre façon :

$$E(X_{i:n}^k) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\int_0^1 Q(u)^k u^{i-1}(1-u)^{n-i}du. \quad (1.3)$$

1.2 L-moments : Définitions et propriétés

Les L-moments, noté λ_r considéré comme des mesures alternatives aux moments centraux classiques $\mu_r = E(X-\mu)^r$, $\forall r \geq 1$, avec $\mu = E(X)$.([10])

Définition 1.3 (L-moments)

Soit $X_1, \ldots\ldots, X_n$ *un échantillon de taille* n *d'une distribution continue* $F_X(x)$ *avec la fonction de quantile* $Q(u) = F_X^{-1}(u)$ *, et soit* $X_{1:r} \leq \ldots \leq X_{r:r}$ *les statistiques d'ordres associées a cet échantillon pour* $r \geq 1$*. Alors le r-iéme L-moments* λ_r *est donné par :*

$$\lambda_r = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k \binom{r-1}{k} E(X_{r-k:r}), \forall r \geq 1, \tag{1.4}$$

telle que $E(X_{r-k:r})$ *présente l'éspérance de la statistique d'ordre.*

En particulier, pour $r = 1, 2, 3, 4,$ *nous obtenons les premiers L-moments qui sont donnés par :*

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \mathbb{E}(X_{1:1}), \\
\lambda_2 &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_{2:2} - X_{1:2}), \\
\lambda_3 &= \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_{3:3} - 2X_{2:3} + X_{1:3}), \\
\lambda_4 &= \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4}).
\end{aligned}$$

Nous notons que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *et* λ_4 *sont les mesures de position, d'échelle, de Skewness et de Kurtosis analogue aux moments classiques .*

1.2.1 L-correlation, L-skewness et L-kurtosis

Les proportions des L-moments (ratio L-moments) sont des rapports entre les L-moments et les λ_1 et λ_2 a pour but de définir les caractéristiques de la distribution([13]), elle sont définie par :

$$\tau_r = \frac{\lambda_r}{\lambda_2}, r \neq 2. \tag{1.5}$$

Telle que :

·Le rapport entre le premier L-moments λ_1 et le second L-moments λ_2 présente la mesure de L- variation, défini par :

$$L - CV = \lambda_2/\lambda_1. \tag{1.6}$$

$\cdot L-skewness$: C'est le rapport entre le 3 ème L -moments et le second L-moments, c'est la mesure de l'asymétrie donnée par :

$$\tau_3 = \lambda_3/\lambda_2, \tag{1.7}$$

$\cdot L-kurtosis$: C'est le rapport entre le 4 ème L-moments et le second L-moments ,c'est la mesure de l 'aplatissement donnée par :

$$\tau_4 = \lambda_4/\lambda_2, \tag{1.8}$$

1.2.2 Représentation de L-moment en terme de polynômes orthogonaux

Les L-moments peuvent être écrite en fonction de polynômes de Legendre déplacé P_r^*,qui sont définies par :

$$P_r^*(u) = \sum_{k=0}^{r} p_{r,k}^* u^k = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r+k} \binom{r}{k} \binom{r+k}{k} u^k, \tag{1.9}$$

tel que r un entier positif.pour $r = 0, 1, 2$ et 3,nous avons :

$$\begin{aligned}
P_0^*(u) &= 1, \\
P_1^*(u) &= (2u-1), \\
P_2^*(u) &= (6u^2 - 6u + 1), \\
P_3^*(u) &= (20u^3 - 30u^2 + 12u - 1),
\end{aligned}$$

Alors les λ_r reécrire comme suit :

$$\lambda_r = \int_0^1 Q(u) P_{r-1}^*(u) du, \qquad r = 1, 2, ..., \tag{1.10}$$

et les premiers L-moments donc données comme ci :

$$\lambda_1 = \int_0^1 Q(u)du,$$
$$\lambda_2 = \int_0^1 (2u-1)Q(u)du,$$
$$\lambda_3 = \int_0^1 (6u^2-6u+1)Q(u)du,$$
$$\lambda_4 = \int_0^1 (20u^3-30u^2+12u-1)Q(u)du.$$

1.2.3 Represetation de L-Moments en Terme de Moments de Probabilités Pondérés

Les moments de probabilité pondérés (Probabilité Weighted Moments), notés PWM est introduit par **Greenwood et al.**(**1979**)**.**[**5**]

Définition 1.4 (Les Moments de Probabilité Pondérés)
Soit X *une v.a de distribution continue. Alors les moments de probabilité pondérés* $M_{l,j,k}$ *est défini par :*

$$M_{l,j,k} = E\left[X^l F^j (1-F)^k\right] = \int_0^1 Q(u)^l u^j (1-u)^k du, \tag{1.11}$$

où : F *et* $Q(u)$ *présentent les fonctions de répartition et de quantile de la variable* X, *telle que* $Q(u) = F_X^{-1}(u); l, j$ *et* k *sont des réels.*
Pour des cas particuliers de j *et* k *nous obtenons les quantités suivantes :*
1· *Pour* $j = k = 0$ *et* l *entier positif :*

$$M_{1,0,0} = E\left[X^l\right] = \int_0^1 Q_X(u)^l du,$$

qui sont les moments classiques d'ordre l *par rapport à l'origine.*

2-Pour $j = 0$ *et* l, k *sont des entiers positifs ou* $k = 0$ *et* j, l *sont des entiers positifs :*

$$M_{l,0,k} = E[X^l(1-F)^k] = \int_0^1 Q(u)^l(1-u)^k du, \tag{1.12}$$

$$M_{l,j,0} = E[X^l F^j] = \int_0^1 Q(u)^l u^j du. \tag{1.13}$$

Ces deux quantités sont les plus utilisés en pratique et pour calculer les L-moments. La procédure d'estimation basée sur $M_{l,0,k}$ *et* $M_{l,j,0}$ *est développé par :* ***Landweher et al* (1979) *;Hosking et al* (1985)**.

Les L-moments considérés comme des combinaisons linéaires de PWM $(M_{l,0,k}, M_{l,j,0})$ *pour* $l = 1;$ *c'est à dire :*

$$\lambda_{r+1} = \sum_{k=0}^{r} (-1)^r \, p^*_{r,j} a_k = \sum_{j=0}^{r} p^*_{r,j} B_j. \tag{1.14}$$

où les coefficients $p^*_{r,k}$ *sont les mêmes coefficients de polynôme de Legendre déplacé (1.9) et on a :*

$$a_k = M_{1,0,k} \text{ et } B_j = M_{1,j,0}$$

En particulier, les quatre premiers L-moments sont données par :

$$\lambda_1 = a_0 = B_0,$$

$$\lambda_2 = a_0 - 2a_1 = 2B_1 - B_0,$$

$$\lambda_3 = a_0 - 6a_1 + 6a_2 = 6B_2 - 6B_1 + B_0,$$

$$\lambda_4 = a_0 - 12a_1 + 30a_2 - 20a_3 = 20B_3 - 30B_2 + 12B_1 - B_0.$$

1.2.4 Représentation de L-moment en terme de covariance et L-statistique

Solon l'orthogonalité de polynome de legendre et posant $P_0 \approxeq 0$ implique une nouvelle représentation de L -moments en terme de covariance, d'où :

$$\lambda_r = \begin{cases} E(X), k = 1, \\ cov(X, P_{r-1}(F(x)), k \geq 2. \end{cases} \tag{1.15}$$

Et les quatre premiers L-moment sont donnés par :

$$\lambda_1 = E(X),$$

$$\lambda_2 = Cov(X, 2F(X) - 1),$$

$$\lambda_3 = Cov(X, 6F^2(X) - 6F(X) + 1),$$

$$\lambda_4 = Cov(X, 20F^3(X) - 30F^2(X) + 12F(X) - 1).$$

Les L-moments aussi peuvent être écrite en terme de L-statistique,comme suit :

$$\lambda_r = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} w_{i:n}^{(k)} E(X_{i:n}), \tag{1.16}$$

où

$$w_{i:n}^{(k)} = \sum_{j=0}^{\min\{r-1,k-1\}} (-1)^{k-1-j} \binom{k-1}{j} \binom{k-1+j}{j} \binom{n-1}{j}^{-1} \binom{r-1}{j}.$$

Remarque 1.4

On remarque que les L-moments peuvent êtres écrits comme des combinaisons linéaires en terme des moments de la statistiques d'ordre, en termes de polynômes orthogonaux, en terme de moments de probabilités pondérés et en terme de covariance et L-statistique.

1.2.5 Propriétés de base des L-moments

Les L-moments λ_1 et λ_2, le $L-CV$ et les proportions des L-moments τ_3 et τ_4 sont les quantités les plus utiles pour résumer les distributions de probabilité. Leur plus importantes propriétés ([7]) sont les suivantes :

- **Existence** : Si la moyenne de la distribution existe, alors tous les L-moments existent.
- **Unicité** : Si la moyenne de la distribution existe, alors les L-moments définissent la distribution de manière unique.

Exemple 1.1

Le tableau suivant présente les valeurs de la fonction quantile $Q(u)$, les L-moments λ_r, et ses rapports τ_r, pour quelques distributions :

Distribution	Paramètres	Quantile	L-moments	Rapport des L-moments
Uniforme	α, β	$\alpha + (\beta - \alpha)\mu$	$\lambda_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\lambda_2 = \frac{\beta-\alpha}{6}$	$\tau_3 = 0$, $\tau_4 = 0$
Normale	μ, σ	$\mu + \sigma Q^{-1}(u)$	$\lambda_1 = \mu$, $\lambda_2 = \pi^{-1}\sigma$	$\tau_3 = 0$, $\tau_4 = 0.1226$
Exponentielle	α	$-\frac{1}{\alpha}\log(1-u)$	$\lambda_1 = \frac{1}{\alpha}$, $\lambda_2 = \frac{\alpha}{2}$	$\tau_3 = \frac{1}{3}$, $\tau_4 = \frac{1}{6}$

TAB. 1.1 – L-moments, ses rapports et quantiles des paramètres pour quelques distributions de probabilité

Comme :

Distribution exponentielle avec moyenne 1 :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1/2, \\ \tau_3 = 1/3, \\ \tau_4 = 1/6. \end{cases}$$

Distribution uniforme sur [0,1] :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1/2, \\ \lambda_2 = 1/6, \\ \tau_3 = 0, \\ \tau_4 = 0. \end{cases}$$

Distribution normale avec moyenne 0 et variance 1 :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 1/\sqrt{\pi}, \\ \tau_3 = 0, \\ \tau_4 \approx 0,123. \end{cases}$$

1.2.6 Estimation des L-moments

Les L-moments ont été définies pour une distribution de probabilité, mais généralement (dans la pratique) ils sont estimés à partir d'un échantillon fini. L'estimation par les L-moments est basée sur la même approche que celle des moments classique, c-à-d que :

$$L - \text{moments empiriques} = L - \text{moments théoriques}.$$

soit $(X_{1:n}, X_{2:n}, ...X_{n:n})$ un échantillon ordonné, alors les L-moments empiriques peuvent être obtenus à partir de l'estimateur suivant :

$$b_j = \frac{1}{n}\binom{n-1}{j}^{-1}\sum_{i=j+1}^{n}\binom{i-1}{j}X_{(i,n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=j+1}^{n}\frac{(i-1)(i-2)...(i-r)}{(n-1)(n-2)...(n-r)}X_{i:n}. \tag{1.17}$$

où les coefficients b_j sont les estimateurs sans biais de PWM B_j..

alors les éstimateurs de L-moments, notés l_r sont exprimés en terme de statistique d'ordre , d'où les L-moments l_r sont développés par **Hosking** (**1985**) dérivé de l'estimation de PWM sous la forme suivant :

$$l_{r+1} = \sum_{k=0}^{r} P^*_{r,k} b_k, \qquad r = 0, 1, ..., n-1, \tag{1.18}$$

où pour $r = 0, 1, 2, 3$ on a les estimateurs de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 :

$$l_1 = b_0,$$

$$l_2 = 2b_1 - b_0,$$

$$l_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0,$$

$$l_4 = 20b_3 - 30b_2 + 12b_1 - b_0.$$

ainsi que les estimateurs de τ_3, τ_4 et $L - CV$:

$$t_3 = l_3/l_2, \tag{1.19}$$

$$t_4 = l_4/l_2, \tag{1.20}$$

$$t_2 = l_2/l_1. \tag{1.21}$$

Chapitre 2

Trimmed L-moments

Présentées comme des mesures alternatives aux L-moments les Trimmed L-moments sont obtenus en donnant les poids égaux à zéro pour les observations extrêmes de l'échantillon, et ceci aprés avoir augmenté sa taille de $t_1 + t_2$ valeurs, tout cela pour travailler avec un échantillon toujours de taille n, ces L-moments tronqués ont étés proposés pour la première fois par **Elamir et Seheult** (**2003**), la preuve de leur existence et l'unicité a été établis par la suite par **Hosking**(**2007**). Nous allons donc présentés dans ce chapitre les définitions aussi bien des TL-moments, ainsi que les paramètres associés tels que le TL-skewness et le TL-kurtosis. Leur représentation en fonction en termes de polynômes de Jacobi ainsi que leurs propriétés théoriques. Un exemple et l'estimateur des TL-moments clôturera ce chapitre.

2.1 Trimmed L-moments d'une population

Définition 2.1 (Trimmed L-moments d'une population)

Soit $X_1, \ldots.., X_r$ un échantillon de r variables aléatoires (i i d) de loi $F_X(x)$ continue, avec une fonction quantile $Q_X(u) = F_X^{-1}(u)$, et soit $X_{1:r} \leq \ldots \leq X_{r:r}$ les statistiques d'ordres associées à cet échantillon, alors le $r-$ième trimmed L-moments (TL-moments) de la variable aléatoire X noté par $\lambda_r^{(t_1,t_2)}$ est définie comme suit :

$$\lambda_r^{(t_1,t_2)} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\binom{r-1}{k}\mathbb{E}(X_{r+t_1-k:r+t_1+t_2}), \text{ avec } r = 1, 2, 3 \ldots \text{et } t_1, t_2 \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

certainement, les $\lambda_r^{(t_1,t_2)}$ sont obtenues par la remplacement de $\mathbb{E}(X_{r-k:r})$ dans l'expression (1.4) par $\mathbb{E}(X_{r+t_1-k:r+t_1+t_2})$ dans l'expression (2.1), d'où la taille de l'échantillon est augmenté de r à $r+t_1+t_2$, telque t_1 la plus petite valeur, et t_2 la plus grande valeur de l'échantillon. Ce qui nous permet d'écrire (2.1) en terme de la fonction de quantile, de la manière suivante :

$$\lambda_r^{(t_1,t_2)} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k \frac{(r-1)!(r+t_1+t_2)!}{rk!(r-k-1)!(r+t_1-k-1)!(t_2+k)!}\int_0^1 Q(u)u^{r+t_1-k-1}(1-u)^{t_2+k}du. \tag{2.2}$$

Alors les premiers TL-moments pour $t_1 = 0$ et $t_2 = 1$ sont :

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{(0,1)} &= 2\int_0^1 Q(u)u(1-u)du,\\
\lambda_2^{(0,1)} &= \frac{3}{2}\int_0^1 Q(u)(4u-3u^2-1)du,\\
\lambda_3^{(0,1)} &= \frac{4}{3}\int_0^1 Q(u)(-10u^3+18u^2-9u+1)du,\\
\lambda_4^{(0,1)} &= \frac{15}{2}\int_0^1 Q(u)u(1-u)(-35u^4+80u^3-60u^2+16u-1)du.
\end{aligned}$$

2.1.1 Cas particuliers des trimmed L-moments

- Pour $t_1 = t_2 = 0$, Les $\lambda_r^{(t_1 t_2)}$ réduit aux λ_r (L-moments classiques).
- Pour $t_1 = t_2 = t$ les $\lambda_r^{(t)}$ sont données par :

$$\lambda_r^{(t)} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\binom{r-1}{k}\mathbb{E}(X_{r+t-k:r+2t}),\ \text{pour } r = 1,2,..., \tag{2.3}$$

Et en terme de fontion de quantile :

$$\lambda_r^{(t)} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\binom{r-1}{k}\frac{(r+2t)!}{(r+t-k-1)!(t+k)!}\int_0^1 Q(u)u^{r+t-k-1}(1-u)^{t+k}du,\ \text{pour } r = 1,2,3,...$$

Alors, pour $r = 1, 2, 3, 4$, lorsque $t = 1$, les $\lambda_r^{(t)}$ sont données par :

$$\lambda_1^{(1)} = \mathbb{E}(X_{2:3}) = 6\int_0^1 Q(u)u(1-u)du,$$

$$\lambda_2^{(1)} = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_{3:4} - X_{2:4}) = 6\int_0^1 Q(u)u(1-u)(2u-1)du,$$

$$\lambda_3^{(1)} = \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_{4:5} - 2X_{3:5} + X_{2:5}) = \frac{20}{3}\int_0^1 Q(u)u(1-u)(5u^2-5u+1)du,$$

$$\lambda_4^{(1)} = \frac{1}{4}\mathbb{E}(X_{5,6} - 3X_{4:6} + 3X_{3:6} - X_{2:6}) = \frac{15}{2}\int_0^1 Q(u)u(1-u)(14u^3-21u^2+9u-1)du.$$

avec : $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}$, $\lambda_3^{(3)}, \lambda_4^{(4)}$ sont les mesures de population de position, d'échelle, d'assymétrie "skewness" et d'aplatissement "kurtosis" qui sont analogues aux L-moments classiques.

2.1.2 TL-Skewness et TL-Kurtosis

Les TL-Skewness et TL-Kurtosis sont définis par :

$$\tau_3^{(t_1,t_2)} = \frac{\lambda_3^{(t_1,t_2)}}{\lambda_2^{(t_1,t_2)}}, \quad (2.4)$$

$$\tau_4^{(t_1,t_2)} = \frac{\lambda_4^{(t_1,t_2)}}{\lambda_2^{(t_1,t_2)}}. \quad (2.5)$$

ils jouent le même rôle que le L-Skewness et L-Kurtosis.

2.1.3 Representation de TL-moments en terme de polynômes de Jacobi

Les polynômes de Jacobi sont des polynômes orthogonaux sur [0,1]. Elles sont définies par :

$$P_r^{*(t_1,t_2)}(u) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{r+t_1}{j}\binom{r+t_2}{r-j}u^j(1-u)^{r-j}, \quad (2.6)$$

Pour $r = 0, 1, 2, 3$ et $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, on trouve :

$$\begin{aligned}
P_0^{*(0,1)}(u) &= 1, \\
P_1^{*(0,1)}(u) &= (2 - 3u), \\
P_2^{*(0,1)}(u) &= 10u^2 - 12u + 3, \\
P_3^{*(0,1)}(u) &= -35u^3 + 60u^2 - 30u + 4.
\end{aligned}$$

Une nouvelle représentation de TL-moments en terme de $P_r^{*(t_1,t_2)}$, en utilisant la fonction de quantile Q(u), cette représentation est introduite par **Hosking(2007)** comme suit :

$$\begin{aligned}
\lambda_r^{(t_1,t_2)} &= \frac{(r-1)!(r+t_1+t_2)!}{r(r+t_1-1)!(r+t_2-1)!}\int_0^1 Q(u)u^{t_1}(1-u)^{t_2}P_{r-1}^{*(t_2,t_1)}(u)du. \qquad (2.7)\\
&= \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\frac{(r-1)!(r+t_1+t_2)!}{rk!(r-k-1)!(r+t_1-k-1)!(t_2+k)!}\int_0^1 Q(u)u^{r+t_1-k-1}(1-u)^{t_2+k}du.
\end{aligned}$$

En utilisant cette représentation, les premiers TL-moments pour $t_1 = 0$ et $t_2 = 1$ sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{(0,1)} &= 2\int_0^1 Q(u)(1-u)du, \\
\lambda_2^{(0,1)} &= (3/2)\int_0^1 Q(u)(4u - 3u^2 - 1)du, \\
\lambda_3^{(0,1)} &= (4/3)\int_0^1 Q(u)(-10u^3 + 18u^2 - 9u + 1)du, \\
\lambda_4^{(0,1)} &= (5/4)\int_0^1 Q(u)(-35u^4 + 80u^3 - 60u^2 + 16u - 1)du.
\end{aligned}$$

2.1.4 Relation de réccurrence

La relation entre les TL-moments qui sont en fonction des polynômes de Jacobi et ses différents degrés de troncature se traduit par une relation de réccurence, donc parmi les propriétés de polynômes de Jacobi, la propriété de récurence utilisé pour les polynômes de Jacobi déplacé, donnée par :

$$(2r+t_1+t_2-1)(1-u)P_r^{*(t_2,t_1)}(u) = (r+t_2)P_r^{*(t_2-1,t_1)}(u) - (r+1)P_r^{*(t_2-1,t_1)}(u),$$
$$(2r+t_1+t_2-1)uP_r^{*(t_2,t_1)}(u) = (r+t_1)P_r^{*(t_2,t_1-1)}(u) + (r+1)P_r^{*(t_2,t_1-1)}(u).$$

En remplaçant ces formules dans (2.7), nous obtenous les formules suivantes :

$$(2r+t_1+t_2-1)\lambda_r^{(t_1,t_2)} = (r+t_1+t_2)\lambda_r^{(t_1,t_2-1)} - \frac{1}{r}(r+1)(r+t_1)\lambda_r^{(t_1,t_2-1)},$$
$$(2r+t_1+t_2-1)\lambda_r^{(t_1,t_2)} = (r+t_1+t_2)\lambda_r^{(t_1-1,t_2)} - \frac{1}{r}(r+1)(r+t_1)\lambda_r^{(t_1-1,t_2)}.$$

2.1.5 Relation entre les TL-moments et les L-moments

A l'aide des équations précédentes, on trouve des relations entre les trimmed L-moments et les L-moments comme suit :

$$\lambda_r^{(0,1)} = \frac{r+1}{2r}(\lambda_r - \lambda_{r+1}),$$
$$\lambda_r^{(0,2)} = \frac{(r+1)(r+2)}{2r(2r+1)}\lambda_r - \frac{r+2}{2r}\lambda_{r+1} + \frac{r+2}{2(2r+1)}\lambda_{r+2}$$
$$\lambda_r^{(1,1)} = \frac{(r+1)(r+2)}{2r(2r+1)}(\lambda_r - \lambda_{r+2}).$$

Le tableau suivant présente les valeurs de la fonction quantile $Q(u)$, pour $t_1 = t_2 = t = 1$ les TL-moments $\lambda_r^{(1)}$, et ses rapports $\tau_r^{(1)}$, pour quelques distributions :

Distribution	Paramètres	Quantile	TL-moments	Rapport des TL-moments
Uniforme	α, β	$\alpha + (\beta - \alpha)\mu$	$\lambda_1^{(1)} = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $\lambda_2^{(1)} = \frac{\beta-\alpha}{10}$	$\tau_3^{(1)} = 0$, $\tau_4^{(1)} = 0$
Normale	μ, σ	$\mu + \sigma Q^{-1}(u)$	$\lambda_1^{(1)} = \mu$, $\lambda_2^{(1)} = 0.297\sigma$	$\tau_3^{(1)} = 0$, $\tau_4^{(1)} = 0.062$
Exponentielle	α	$-\frac{1}{\alpha}\log(1-u)$	$\lambda_1^{(1)} = \frac{5}{6\alpha}$, $\lambda_2^{(1)} = \frac{1}{4\alpha}$	$\tau_3^{(1)} = \frac{2}{9}$, $\tau_4^{(1)} = \frac{1}{12}$

TAB. 2.1 – TL-moments, ses rapports et quantiles des paramètres pour quelques distributions de probabilité

2.1.6 Estimation des TL-moments

Nous considérons maintenant des estimateurs des TL-moments, qui sont des combinaisons linéaires des statistiques d'ordres $X_{1:n} \leq ... \leq X_{n:n}$ associé d'un échantillon $X_1, ..., X_n$ de taille n. Ces estimateurs ont basé sur ceux qui ont introduit par **Downton** (**1966**).Donc on trouve que :

$$l_r^{(t_1,t_2)} = \hat{\lambda}^{(t_1,t_2)} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k \binom{r-1}{k} \hat{E}(Y_{r+t_1-k:r+t_1+t_2}),$$

où :

$$\hat{E}(Y_{r+t_1-k:r+t_1+t_2}) = \frac{1}{\binom{n}{r+t_1+t_2}} \sum_{i=1}^{n} \binom{i-1}{r+t_1-k-1} \binom{n-i}{t_2+k} X_{i:n}.$$

Tel que $(\hat{E}(Y_{r+t_1-k:r+t_1+t_2}))$est l'estimateur sans biais de $E(X_{r+t-k:r+s+t})$. Donc nous obtenons les $l_r^{(t_1,t_2)}$ comme le suivant :

$$l_r^{(t_1,t_2)} = \frac{1}{r\binom{n}{r+t_1+t_2}} \sum_{i=1+t_1}^{n-t_2} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \binom{i-1}{r+t_1-k-1} \binom{n-i}{t_2+k} X_{i:n}.$$

– Pour $t_1 = 0$ et $t_2 = 1$, les premiers estimateurs de TL-moments sont :

$$\begin{aligned}
l_1^{(0,1)} &= \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{i-1}{0} \binom{n-i}{1} X_{i:n}, \\
l_2^{(0,1)} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\binom{i-1}{1}\binom{n-i}{1} - \binom{i-1}{0}\binom{n-i}{2}}{\binom{n}{3}} \right) X_{i:n}, \\
l_3^{(0,1)} &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\binom{i-1}{2}\binom{n-i}{1} - 2\binom{i-1}{1}\binom{n-i}{2} + \binom{i-1}{0}\binom{n-i}{3}}{\binom{n}{4}} \right) X_{i:n}, \\
l_4^{(0,1)} &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\binom{i-1}{3}\binom{n-i}{1} - 3\binom{i-1}{2}\binom{n-i}{2} + 3\binom{i-1}{1}\binom{n-i}{3} - \binom{i-1}{0}\binom{n-i}{4}}{\binom{n}{5}} \right) X_{i:n}.
\end{aligned}$$

– Pour $t_1 = t_2 = t$, on présente les estimateurs $l_r^{(t)}$ comme le suivant :

$$l_r^{(t)} = \frac{1}{r} \sum_{i=t+1}^{n-t} \left(\frac{\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \binom{i-1}{r+t-k-1} \binom{n-i}{t+k}}{\binom{n}{r+2t}} \right) X_{i:n}.$$

En particulier pour $t = 1$, les quatre premiers TL-moments d'échantillon sont :

$$l_1^{(1)} = \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{i=2}^{n-1} \left[\binom{i-1}{1} \binom{n-i}{1} \right] X_{i:n},$$
$$l_2^{(1)} = \frac{1}{2\binom{n}{4}} \sum_{i=2}^{n-1} \left[\binom{i-1}{2} \binom{n-i}{1} - \binom{i-1}{1} \binom{n-i}{2} \right] X_{i:n},$$
$$l_3^{(1)} = \frac{1}{3\binom{n}{5}} \sum_{i=2}^{n-1} \left[\binom{i-1}{3} \binom{n-i}{1} - 2\binom{i-1}{2} \binom{n-i}{2} + \binom{i-1}{1} \binom{n-i}{3} \right] X_{i:n},$$
$$l_4^{(1)} = \frac{1}{4\binom{n}{6}} \sum_{i=2}^{n-1} \left[\binom{i-1}{4} \binom{n-i}{1} - 3\binom{i-1}{3} \binom{n-i}{2} + 3\binom{i-1}{1} \binom{n-i}{3} - \binom{i-1}{1} \binom{n-i}{4} \right] X_{i:n}.$$

Et les estimateurs de TL-moments précédents sont trés utiles pour l'estimation des rapports des TL-moments d'une population $\tau_r^{(t_1,t_2)}$, du TL-Skewness $\tau_3^{(t_1,t_2)}$ et du TL-Kurtosis $\tau_4^{(t_1,t_2)}$, ça nous donne les estimateurs des rapports des TL-moments suivants :

$$t_r^{(t_1,t_2)} = l_r^{(t_1,t_2)} / l_2^{(t_1,t_2)},$$
$$t_3^{(t_1,t_2)} = l_3^{(t_1,t_2)} / l_2^{(t_1,t_2)},$$
$$t_4^{(t_1,t_2)} = l_4^{(t_1,t_2)} / l_2^{(t_1,t_2)},$$

Remarque 2.1

On se qui concerne l'estimation des paramètres des distributions de probabilité par la méthode des TL-moments, elle est analogue à celle des L-moments qu'on a mentionnée avant.

2.1.7 Propriétés théoriques concernant les TL-moments

Les TL-moments possèdent les propriétés suivant :

- **Existance :** Elamir et Seheult (**2003**) ont montré que la distribution de probabilité, si ses L-moments ou ses moments classiques n'existent pas, alors on peut être spécifiée par ses TL-moments, par exemple la distribution de Cauchy.
- **Unicité:** Hosking (**1990**) a confirmé unicité de TL-moments.

Chapitre 3

Estimation par la méthode des TL-moments

On se propose dans ce chapitre d'étudier deux distributions particulières (la loi de Cauchy et la loi de Pareto généralisée (gpd)) pour chaque distribution. on définit sa fonction de densité $f_X(x)$, sa fonction de répartition $F_X(x)$ et sa fonction de quantile $Q(u)$, les expressions des L-moments (pour la loi gpd) et des TL-moments (pour la loi de Cauchy et la loi de gpd) en fonction de leurs paramètres respectifs sont détaillés dans cette partie ainsi que leurs estimateurs.

3.1 La distribution de Cauchy

Il y a des lois sans moyenne ni écart–type, parmi ces lois est la loi de Cauchy par fois nommée de (**Lorentz** en physique). TL-moments peuvent être utilisés pour l'estimation des paramètres de la loi de Cauchy.

3.1.1 Les fonctions de distribution

Une variable aléatoire X suit une loi de Cauchy, dépendant par deux paramètres ξ et $\alpha >0$ est définie comme suit :

Sa fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-\xi}{\alpha}\right) + 0.5,$$

Sa densité est :

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\alpha\left(1+\left(\frac{x-\xi}{\alpha}\right)^2\right)},$$

Et la fonction de quantile $Q\,(u)= F_X^{-1}\,(u) = x$ est définie par :

$$Q\,(u) = \xi + \alpha\tan\pi\,(u-0.5)\,.$$

En effet :

on a : $u = F(x)$, alors :

$$\begin{aligned}
u &= \tfrac{1}{\pi}\arctan\left(\tfrac{x-\xi}{\alpha}\right) + 0.5 \\
u-0.5 &= \tfrac{1}{\pi}\arctan\left(\tfrac{x-\xi}{\alpha}\right) \\
\pi(u-0.5) &= \arctan\left(\tfrac{x-\xi}{\alpha}\right) \\
x &= \xi + \alpha\tan\pi\,(u-0.5)\,.
\end{aligned}$$

Où :

ξ : le paramètre de position.

α : le paramètre d'échelle.

Et on a les L-moments λ_r de la distribution de Cauchy n'existe pas $(\lambda_1 = \lambda_2 = \infty)$[7]

3.1.2 TL-moments et les estimateurs de TL-moments pour la loi de Cauchy

On va appliquer la fonction quantile de la loi Cauchy pour trouver les premiers quatre TL-moments (1,1).d'aprés (2.3), sont données comme suit :

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{(1)} &= 6\int_0^1 Q(u)u(1-u)du = \xi, \\
\lambda_2^{(1)} &= 6\int_0^1 Q(u)u(1-u)(2u-1)du = 0.698\alpha, \\
\lambda_3^{(1)} &= \frac{20}{3}\int_0^1 Q(u)u(1-u)(5u^2-5u+1)du = 0, \\
\lambda_4^{(1)} &= \frac{15}{2}\int_0^1 Q(u)u(1-u)(14u^3-21u^2+9u-1)du = 0.239414\alpha.
\end{aligned}$$

Et on déduit les rapports de TL-moments(1,1) :

$\cdot TL-skewness$ est donnée par :

$$\tau_3^{(1)} = \lambda_3^{(1)}/\lambda_2^{(1)} = \frac{0}{0.698\alpha} = 0,$$

$\cdot TL-kurtosis$:est donnée par :

$$\tau_4^{(1)} = \lambda_4^{(1)}/\lambda_2^{(1)} = \frac{0.239414\alpha}{0.698\alpha} = 0.343.$$

On a $l_1^{(1)}$est l'estimateur de $\lambda_1^{(1)}$ et $l_2^{(1)}$ est l'estimateur de $\lambda_2^{(1)}$ donc on déduit les estimateurs de ξ et α :

$$\left\{\begin{array}{c} l_1^{(1)} = \hat{\xi} \\ l_2^{(1)} = 0.698\hat{\alpha} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \hat{\xi} = l_1^{(1)}, \\ \hat{\alpha} = \dfrac{1}{0.698} l_2^{(1)}. \end{array}\right.$$

Exemple 3.1 *Le tableau suivant présent les TL-moments, ses paramètres* (ξ,α) *et leurs estimateurs en fonction de TL-moments pour la distribution de Cauchy tels que :* $\xi = 0.2$ *et* $\alpha = 1$ *pour* $n = 100$

Les TL-moments	*les estimateurs des TL-moments*	*Les estimateurs des paramètres*
$\lambda_1^{(1)} = 0.2$	$l_1^{(1)} = 0.30548333$	$\hat{\xi} = 0.1373504$
$\lambda_1^{(1)} = 0.698$	$l_2^{(1)} = 0.60532789$	$\hat{\alpha} = 0.7185097$
$\tau_3^{(1)} = 0$	$t_3^{(1)} = 0.04457702$	
$\tau_4^{(1)} = 0.343$	$t_4^{(1)} = 0.29505698$	

On sait que le Biais définit par :

$$biais(\hat{\gamma}) = E(\hat{\gamma}) - \gamma.$$

Et pour le Mse :

$$Mse = E(\hat{\gamma} - \gamma)^2.$$

Danc le Biais et l'erreur quadratique pour $\hat{\xi}$ *et* $\hat{\alpha}$ *:*

Les estimateurs	*MSE*	*Biais*
$\hat{\xi}$	*0.0039249724*	*- 0.0626496*
$\hat{\alpha}$	*0.079236789*	*- 0.2814903*

On remarque que l'erreur quadratique et le Biais sont proches de zéro.

3.2 La distribution de Pareto généralisée

On a choisi la loi de Pareto généralisée centrée.

Définition 3.1 (La distribution de Pareto généralisée)

On dira que X *suit une loi Pareto généralisée de paramètres* $\sigma > 0$ *et* $\delta \in \mathbb{R}$, *si sa fonction* *de répartition est donnée par :*

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - (1 - \frac{\delta}{\sigma}x)^{\frac{1}{\delta}} & si\ \delta \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{x}{\sigma}) & sinon. \end{cases}$$

Et la fonction de densité est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}(1 - \frac{\delta}{\sigma}x)^{\frac{1-\delta}{\delta}} & si\ \delta \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma}\exp(-\frac{x}{\sigma}) & sinon. \end{cases} .$$

Elle est définie par :

$$\begin{cases} 0 \leq x \ si\ \delta > 0 \\ 0 \leq x \leq -\frac{\sigma}{\delta} \quad sinon. \end{cases}$$

La destribution de pareto est définie par deux paramêtres δ et σ (tels que δ est appellé index des valeurs extrèmes et σ est le paramêtre d'échelle).

3.2.1 Espérance ,variance et fonction de quantile

Si X suit la loi de pareto généralisée, alors :

si $\delta \neq 0$

1. $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \frac{\sigma}{1-\delta}$.
2. $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \frac{2\sigma^2}{(2\delta-1)(\delta-1)}$.
3. $\mathbb{V}ar(x) = .\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{\sigma^2}{(1-2\delta)(\delta-1)^2}$.

si $\delta = 0$

1. $\mathbb{E}(X) = \sigma$.
2. $\mathbb{E}(X^2) = 2\sigma^2$.
3. $\mathbb{V}ar(x) = \sigma^2$.

Et la fonction de quantile $Q(u) = F_X^{-1}(u) = x$ est définie par :

$$Q(u) = \frac{\sigma}{\delta}(1-(1-u)^{\delta}) \text{ si } \delta \neq 0.$$

En effet :

on a $u = F(x)$ alors

$$\begin{aligned}
u &= 1-(1-\tfrac{\delta}{\sigma}x)^{\frac{1}{\delta}} \\
1-u &= (1-\tfrac{\delta}{\sigma}x)^{\frac{1}{\delta}} \\
(1-u)^{\delta} &= (1-\tfrac{\delta}{\sigma}x) \\
x &= \tfrac{\sigma}{\delta}(1-(1-u)^{\delta}).
\end{aligned}$$

3.2.2 L-moments et les estimateurs de L-moments pour la loi de pareto généralisée

On va appliquer la fonction quantile de la loi Pareto généralisée pour trouver les L-moments.[8]

Les premiers quatre L-moments d'apres (1.10) sont données comme suit :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \int_0^1 Q(u)du = \int_0^1 \frac{\sigma}{\delta}(1-(1-u)^{\delta})du \\
&= \frac{\sigma}{\delta}(\int_0^1 1du - \int_0^1 (1-u)^{\delta}du) \\
&= \frac{\sigma}{\delta}([u]_0^1 - \left[\frac{(1-u)^{\delta+1}}{\delta+1}\right]_0^1) \\
&= \frac{\sigma}{\delta}(1+\frac{1}{\delta+1}) \\
&= \frac{\sigma(\delta+2)}{\delta(\delta+1)}.
\end{aligned}$$

La même chose pour λ_2, λ_3 et λ_4, alors :

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \int_0^1 (2u-1)\frac{\sigma}{\delta}(1-(1-u)^{\delta})du = \frac{\sigma}{(\delta+1)(\delta+2)}, \\
\lambda_3 &= \int_0^1 (6u^2-6u+1)\frac{\sigma}{\delta}(1-(1-u)^{\delta})du = \frac{\sigma(\delta-1)}{(\delta+1)(\delta+2)(\delta+3)}, \\
\lambda_4 &= \int_0^1 (20u^3-30u^2+12u-1)\frac{\sigma}{\delta}(1-(1-u)^{\delta})du = \frac{\sigma(\delta-1)(\delta-2)}{(\delta+1)(\delta+2)(\delta+3)(\delta+4)}.
\end{aligned}$$

Et on déduit les rapports de L-moments d'apres (1.5) :

$\cdot L - Skewness$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\tau_3 = \lambda_3/\lambda_2 &= \frac{(\sigma(\delta-1)/(\delta+1)(\delta+2)(\delta+3))}{(\sigma/(\delta+1)(\delta+2))} \\ &= \frac{(\delta-1)}{(\delta+3)}.\end{aligned}$$

$\cdot L - Kurtosis$:est donnée par :

$$\begin{aligned}\tau_4 = \lambda_4/\lambda_2 &= \frac{(\sigma(\delta-1)(\delta-2)/(\delta+1)(\delta+2)(\delta+3)(\delta+4))}{(\sigma/(\delta+1)(\delta+2))} \\ &= \frac{(\delta-1)(\delta-2)}{(\delta+3)(\delta+4)}.\end{aligned}$$

On a l_1 est l'estimateur de λ_1 et t_3 est l'estimateur de τ_3 donc on déduit les estimateurs de δ et σ :

$$\begin{cases} l_1 = \dfrac{\hat{\sigma}(\hat{\delta}+2)}{\hat{\delta}(\hat{\delta}+1)} \\ t_3 = \dfrac{(\hat{\delta}-1)}{(\hat{\delta}+3)} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \hat{\delta} = \dfrac{3t_3+1}{1-t_3}, \\ \hat{\sigma} = \dfrac{\hat{\delta}(\hat{\delta}+1)}{(\hat{\delta}+2)} l_1. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\hat{\delta} &= \frac{3t_3+1}{1-t_3}, \\ \hat{\sigma} &= \frac{\hat{\delta}(\hat{\delta}+1)}{(\hat{\delta}+2)} l_1.\end{aligned}$$

3.2.3 TL-moments et les estimateurs de TL-moments pour la loi de Pareto généralisée

On va appliquer la fonction quantile de la loi Pareto généralisée pour trouver les premiers quatre TL-moments (1,1).d'apres (2.3), sont données comme suit :

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{(1)} &= 6\int_0^1 Q(u)u(1-u)du = \frac{\sigma(\delta+5)}{(\delta+2)(\delta+3)}, \\
\lambda_2^{(1)} &= 6\int_0^1 Q(u)u(1-u)(2u-1)du = \frac{6\sigma}{(\delta+2)(\delta+3)(\delta+4)}, \\
\lambda_3^{(1)} &= \frac{20}{3}\int_0^1 Q(u)u(1-u)(5u^2-5u+1)du = \frac{20\sigma(1-\delta)}{3(\delta+2)(\delta+3)(\delta+4)(\delta+5)}, \\
\lambda_4^{(1)} &= \frac{15}{2}\int_0^1 Q(u)u(1-u)(14u^3-21u^2+9u-1)du = \frac{15\sigma(\delta-1)(\delta-2)}{2(\delta+2)(\delta+3)(\delta+4)(\delta+5)(\delta+6)}.
\end{aligned}$$

Et on déduit les rapports de TL-moments (1,1) :

$\cdot TL-skewness$ est donnée par :

$$\tau_3^{(1)} = \lambda_3^{(1)}/\lambda_2^{(1)} = \frac{10(1-\delta)}{9(\delta+5)}.$$

$\cdot TL-kurtosis$:est donnée par :

$$\tau_4^{(1)} = \lambda_4^{(1)}/\lambda_2^{(1)} = \frac{5(\delta-1)(\delta-2)}{4(\delta+5)(\delta+6)}.$$

On a $l_1^{(1)}$est l'estimateur de $\lambda_1^{(1)}$et $t_3^{(1)}$est l'estimateur de $\tau_3^{(1)}$ donc on déduit l'estimateurs de δ et σ :

$$\left\{\begin{array}{l} l_1^{(1)} = \dfrac{\hat{\sigma}(\hat{\delta}+5)}{(\hat{\delta}+2)(\hat{\delta}+1)} \\ t_3 = \dfrac{10(1-\hat{\delta})}{9(\hat{\delta}+5)} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{\delta} = \dfrac{10-45t_3^{(1)}}{10-9t_3^{(1)}}, \\ \hat{\sigma} = \dfrac{(\hat{\delta}+2)(\hat{\delta}+3)}{(\hat{\delta}+5)} l_1^{(1)}. \end{array}\right.$$

donc :

$$\begin{aligned}
\hat{\delta} &= \frac{10-45t_3^{(1)}}{10-9t_3^{(1)}}, \\
\hat{\sigma} &= \frac{(\hat{\delta}+2)(\hat{\delta}+3)}{(\hat{\delta}+5)} l_1^{(1)}.
\end{aligned}$$

Exemple 3.2

Le tableau suivant présent les estimateurs des paramètres en fonction de TL-moments et L-moments pour la distribution de Pareto généralisée et entre parenthèse l'erreur quadratique tels que : $\sigma = 0.2$ *et* $\delta = 1$

	n=80	n=100	n=200	n=500
$\hat{\sigma}_{TL}$	0.184359 (0.00024)	0.20511 (0.00002)	0.21019 (0.00010)	0.20475 (0.00002)
$\hat{\sigma}_{L}$	0.15781 (0.00178)	0.27982 (0.00637)	0.25245 (0.00275)	0.36793 (0.02819)
$\hat{\delta}_{TL}$	1.29089 (0.0846)	1.02372 (0.00056)	0.942701 (0.00322)	1.03928 (0.00154)
$\hat{\delta}_{L}$	0.90736 (0.00858)	0.64939 (0.12292)	0.62779 (0.13853)	0.52219 (0.2283)

Nous remarquons que l'erreur quadratique obtenu par la méthode des TL–moments est meilleur que celle obtenue par la méthode des L-moments.

Conclusion

L'une des méthodes d'estimation les plus utilisées et la méthode des moments, son inconvénient principal est l'inexistence des moments de quelques distributions bien connues telles que la loi de Cauchy, la loi bêta ..., la méthode des L-moments basée sur les moments des statistiques d'ordre a montré une certaine amélioration de l'estimateur en comparant le Biais et le Mse, mais l'inconvénient principal demeure « Pour que les distributions de probabilité des L-moments soient significatives, on exige seulement que la distribution à une moyenne finie »([6]).

Alors le choix de la méthode TL-moment a apporté une forte amélioration puisqu'elle n'exige pas l'existence de la moyenne, les TL-moments sont des mesures alternatives aux L-moments et moments classiques ou elles donnent des poids égales à zéro pour les observations extrêmes, c'est pour cela quand parle de trimmed L-moments, leurs estimateurs permettent de donner l'estimateurs des paramètres de position et d'échelle ainsi que TL-kurtosis et TL-skewness.

Leurs robustesse par rapport aux L-moments et aux moments classiques est montrer dans plusieurs articles dans ce domaine ([11])([3])([4])

Bibliographie

[1] BENATIA,F (2018) Cours de 2 ème master , Statistique d'ordre Université Mohamed khider de Biskra

[2] Christophe Dutang (2015) Theoretical L-moments and TL-moments Using Combinatorial Identities and Finite Operators

[3] Diana Bílková1,2 (2014) Trimmed L-Moments : Analogy of Classical L-Moments. American Journal of Mathematics and Statistics 2014, 4(2) : 80-106.

[4] Elamir, E.A.H., Seheult, A.H. (2003). Trimmed L-moments, Computational Statistics,Volume 43, numéro 3 , 28 juillet 2003 , pages 299-314.

[5] Greenwood, J.A., Landwehr, J.M., Matalas, N.C., and Wallis, J.R., (1979). Probability weighted moments : definition and relation to parameters of several distributions expressable in inverse form.Water Resour, 1979, vol. 15, no 5, p. 1049-1054.

[6] Hosking, J. R. M. et Wallis. J .R. (1990). L-moments : analysis and estimation ofdistributions using lineair combinations of statistics, Royal Statistical Society

[7] Hosking, J. R. M. et Wallis, J. R. (1955). Regional Frequency Analysis : An Approach Based on L- Moment.

[8] Ibrahim B. Abdul-Moniem (2009) TL-Moments and L-Moments Estimation for the Generalized Pareto Distribution.Applied Mathematical Sciences, 3(1), 43-52.

[9] Ihaka, R., Gentleman, R. (1996) *R : A Language for Data Analysis and Graphics*. Journal of Computational and Grap

[10] Sillitto, G.P. (1951). Interrelations between certain linear systematic statistics of samples from any continuous population. Biometrika 38, 377-382.

[11] Tereza Šimková1(2018) Statistical Inference Based on L-Moments.In Book of Abstracts (p. 128).

[12] Ummi Nadiah Ahmad , Ani Shabri & Zahrahtul Amani Zakaria (2011).Trimmed L-moments (1,0) for the generalized Pareto distribution Hydrological Sciences Journal.

[13] William, H. Asquith. (2011). Distributional Analysis with L-moment statistics Using R Environment for Statistical Computing.CreateSpace.

Annexe A : Logiciel *R*

R est un système, communément appelé langage et logiciel, qui permet de réaliser des analyses statistiques. Plus particulièrement, il comporte des moyens qui rendent possible la manipulation des données, les calculs et les représentations graphiques. *R* a aussi la possibilité d'exécuter des programmes stockés dans des fichiers textes et comporte un grand nombre de procédures statistiques appelées paquets. Ces derniers permettent de traiter assez rapidement des sujets aussi variés que les modèles linéaires (simples et généralisés), la régression (linéaire et non linéaire), les séries chronologiques, les tests paramétriques et non paramétriques classiques, les différentes méthodes d'analyse des données,... Plusieurs paquets, tels *ade4, FactoMineR, MASS, multivariate, scatterplot3d et rgl* entre autres sont destinés à l'analyse des données statistiques multidimensionnelles.
Il a été initialement créé, en 1996, par *Robert Gentleman* et *Ross Ihaka* du département de statistique de l'Université d'Auckland en Nouvelle Zélande. Depuis 1997, il s'est formé une équipe "*R Core Team*" qui développe *R*. Il est conçu pour pouvoir être utilisé avec les systèmes d'exploitation *Unix*, *Linux*, *Windows* et *MacOS*.

Un élément clé dans la mission de développement de *R* est le *Comprehensive R Archive Network* (CRAN) qui est un ensemble de sites qui fournit tout ce qui est nécessaire à la distribution de R, ses extensions, sa documentation, ses fichiers sources et ses fichiers binaires. Le site maître du CRAN est situé en Autriche à Vienne, on peut y accéder par l'URL : "*http ://cran.r-project.org/*". Les autres sites du CRAN, appelés sites miroirs, sont répandus partout dans le monde.

R est un logiciel libre distribué sous les termes de la "GNU Public Licence". Il fait partie intégrante du projet GNU et possède un site officiel à l'adresse "*http ://www.R-project.org*". Il est souvent présenté comme un clone de *S* qui est un langage de haut niveau développé par les *AT&T Bell Laboratories* et plus particulièrement par *Rick Becker, John Chambers* et *Allan Wilks*. *S* est utilisable à travers le logiciel *S-Plus* qui est commercialisé par la société Insightful (*http : //www.splus.com/*).

Voila le code R pour la partie d'application :

Package "lmomco" :

- **TLmoms(rcauchy(100,0.2,1),nmom=4,trim=1) :** pour calculer les : $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \lambda_3^{(1)}, \lambda_4^{(1)}$et les : $\tau_3^{(1)}, \tau_4^{(1)}$
- **samlmu(rcauchy(100,0.2,1),nmom=4,trim=1)** :pour calculer les :$l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, t_3^{(1)}, t_4^{(1)}$.
- **parcau(TLmoms(X,trim=1)) :**pour estimer les paramètres de la loi de cauchy par la méthode des TL-moments (1,1).
- **parTLgpa(TL) :**pour estimer les paramètres de la loi gpd par la méthode des TL-moments (1,1).
- **pargpa(Lm) :**pour estimer les paramètres de la loi gpd par la méthode des L-moments.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\mathbb{E}[X]$	:	espérance mathématique ou moyenne du v.a. X.
exp	:	exponentiel
F	:	fonction de répartition
F_n	:	fonction de répartition empirique
v, a	:	variable aléatoire.
$i : i : d$	:	independantes identiquement distribuées.
$L - CV$	:	L-variation.
PWM	:	Moments de probabilité pondérés.
GPA	:	Loi de pareto généralisé.
$X_{r:n}$	:	r$^{\text{ème}}$ statistique d'ordre
λ_r	:	r$^{\text{ème}}$L-moments
$\lambda_r^{(t_1,t_2)}$	:	r$^{\text{ème}}$TL-moments
l_r	:	L-moments empirique
$l_r^{(t_1,t_2)}$	:	TL-momentsempirique
$\tau_r, \tau_r^{(t_1,t_2)}$	:	Rapports de L-moments et TL-moments
Q	:	la fonction quantile