

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Statistique**

Par :

Guessouri Amel

Titre :

Sur les copules et applications

Membres du Comité d'Examen :

Dr. **Abedelli Jihane** UMKB Encadreur

Dr. **Touba Sonia** UMKB Président

Dr. **Benbraika Ghozlene** UMKB Examineur

Juin 2019

DÉDICACE

A celle qui m'a transmis la vie, l'amour, le courage, à toi chère
maman "**Kiati Saida**" toutes mes joies, mon amour et ma reconnaissance.

A mon père "**Lahcen**" pour l'éducation qu'il m'a prodigué ; avec tous les
moyens et au prix de toutes les sacrifices qu'il a consentis à mon égard et
à mes études depuis mon enfance.

A mon chère frère **Mourad**.

A mes chères soeurs **Sabrina, Farida, Sihem, Djahida, Dounia**.

A mes neveux **Hiba, Wassim, Dalel, Khalil, Akram, Loujain**.

A mes beau-frères **Toufik, Sebti**.

A mes amies **Sameh, Wafa, Samiha, Bouthaina, Meriem, Abir, Roufaida, Amira**.

A toutes ces personnes, sincèrement : Merci !

REMERCIEMENTS

Avant tout, je tiens à remercier **ALLAH** le tout puissant qui m'a donné la santé, le courage et la patience pour arriver à ce jour.

Tout d'abord, je remercie Dr.**Abdelli Jihane** pour avoir proposée, accepté d'encadré ce mémoire. Je la remercie pour sa gentillesse, sa patience, sa simplicité et ses précieux conseils.

Je remercie le Dr.**Brahimi Brahim** pour ses conseils et pour toute l'aide qu'il m'a apporté.

Je voudrais remercier le Dr.**Ben Attia** pour son aide et sa réponse patiemment et aimablement à nos nombreuses questions.

Je tiens aussi à remercier les membres du jury : Dr.**Touba Sonia** et Dr.**Benbraika Ghoulene**, qui ont bien daigné siéger la soutenance de ce mémoire.

Enfin j'adresse mes plus sincères remerciements à mes parents, mes soeurs, mon frère et à toute ma famille et mon proches amies et collègues, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce travail.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Liste des tableaux	vi
Introduction	1
1 Théorie des copules	3
1.1 Copules bivariées	3
1.1.1 Théoreme de Sklar	5
1.1.2 Borne de Frechet-Hoeffding	7
1.1.3 Propriétés de copule	8
1.2 Densité de copule	11
1.3 Mesures d'association	12
1.3.1 Concordance et discordance	12
1.3.2 Mesure de concordance	15
1.3.3 Tau de Kendall et rho de Spearman	15
1.4 Copule de survie	17
1.5 Familles de copules	18

1.5.1	Copules elliptiques	18
1.5.2	Copules Archimédiennes	21
1.5.3	Copule Farlie-Gumbel-Morgenstern	24
1.5.4	Copule de valeur extrême	25
2	Application des copules en assurance	26
2.1	Mesure de risque	26
2.2	La Valeur en Risque	28
2.3	La VaR Conditionnelle	29
2.4	Mesure de risque de distorsion	30
2.5	MRD de la somme des v.a	32
2.5.1	La CMRD	34
2.5.2	Représentation du MRD par les copules	34
2.6	La copule archimédienne de distorsion	35
2.7	Mesures de risque pour la somme des pertes	37
2.7.1	Application	38
	Conclusion	42
	Annexe A : Abréviations et Notations	44

Table des figures

1.1	Densité de copule Gaussienne pour $\rho = 0.3$ (à gauche) et $\rho = 0.8$ (à droite). .	19
1.2	Densité de copule student pour $\rho = 0.6$ et $v = 4$	21
1.3	Densité de copules Frank pour $\theta = 5$,clayton pour $\theta = 8$ et Gumbel pour $\theta = 3$.	24
2.1	Représentation graphique de la VaR	28
2.2	Présentation graphique de TVaR et VaR.	30
2.3	Densité de copule de clayton avec $\theta = 2$ (panneau de gauche).Densité de dis- tortion copula avec $\delta = 4$ (panneau de droite).	39

Liste des tableaux

1.1	Générateurs des principales copules Archimédiennes et leurs dépendance du queue et tau de Kendall	23
2.1	CMRD et transformé tau de Kendall de la somme de deux risques distribués de Pareto avec le paramètre de distorsion de queue =1.2.	39
2.2	CMRD et transformé tau de Kendall de la somme de deux risques distribués de Pareto avec le paramètre de distorsion de queue = 1.4.	39

Introduction

Les copules constituent un sujet de recherche relativement moderne étant en plein essor depuis principalement les trois dernières décennies. Elles sont devenue en quelques années un outil important pour modéliser les risques multivariées (entre autres) surtout dans les domaines de la finance et l'assurance.

Les copules permettent de coupler les lois marginales afin d'obtenir une lois multivariée, d'où le nom latin **copula** qui signifie tout ce qui sert à attacher, lien et chaîne, choisi par Abe Sklar en 1959, mathématicien américain et professeur émérite à l'Illinois Institute of Technology, la fonction sous-jacente fut étudiée bien avant, sous d'autres appellations, par exemple dans les travaux de Fréchet, de Férone et de plusieurs autres mathématiciens et statisticiens qui s'intéressaient aux fonctions de distribution multivariée ayant les lois marginales fixées. Elles mettent en évidence la relation de dépendance entre deux variables aléatoires par la relation établie dans le théorème de Sklar :

$$F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)).$$

La mesure de dépendance entre deux ou plusieurs variables aléatoires est une pratique largement utilisée chez les statisticiens. Parmi celles-ci le coefficient de corrélation linéaire de Pearson est le plus connu, mais l'utilisation de cette mesure connaît plusieurs défauts, pour éviter ce problème nous avons recours à d'autres mesures de dépendance observées sur un échantillon et qui sont les coefficients de corrélation non linéaire tels que le tau de Kendall et le rho de Spearman. Ces mesures de dépendance peuvent être exprimées explicitement en fonction de la copule.

La connaissance de l'outil statistique la copule est essentielle à l'appréhension de nombreux domaines d'application de la finance quantitative : gestion de risques, modélisation du risque de credit, l'évaluation d'options...ect, qu'il est nécessaire de modéliser une structure de dépendance de plusieurs variables aléatoires, à chaque fois, nous pouvons faire appel aux copules Ce travail est constitué de 2 chapitre :

Chapitre1 : le premier chapitre est une introduction mathématique aux copules. Nous introduisons les définitions de base des copules bivariées, liées à cette théorie, en particulier le théorème de Sklar. Après nous présentons l'aspect des mesures d'associations : la mesure de concordance, la mesure de dépendance en forme de copule telle que le tau de Kendall et le rho de Spearman. A la fin de ce chapitre nous présentons quelques exemples de familles paramétriques de copules les plus utilisées.

Chapitre2 : Au deuxième chapitre, nous donnons une application des copules en assurance, nous calculerons la mesure de risque de distorsion copule (CMRD) de la somme de deux variables aléatoires qui conservent les propriétés de copule archimédienne. L'implémentation se fera à l'aide du logiciel de statistiques **R**.

Chapitre 1

Théorie des copules

Dans ce premier chapitre, nous donnons quelques définitions de base et propriétés qui nous permettons de décrire le concept de copule en le cas bivariée.

1.1 Copules bivariées

Considérons l'intervalle $I = [0, 1]$.

Définition 1.1 Une copule 2-dimensionnelle est une fonction C de $I^2 = [0, 1]^2$ dans I ayant des propriétés suivantes :

i) La copule C est attachée (grounded), c'est -à-dire :

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0, \quad \forall u, v \in I. \quad (1.1)$$

ii) Les marges sont uniformes, c'est -à-dire :

$$C(u, 1) = u \text{ et } C(1, v) = v, \quad \forall u, v \in I. \quad (1.2)$$

iii) La copule C est 2-croissantes : $\forall u_1, v_1, u_2, v_2 \in I$ telle que $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$, on a :

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (1.3)$$

Exemple 1.1 Copule produit : notée Π , est définie par :

$$\Pi(u, v) = uv, \quad \forall u, v \in I.$$

cette copule vérifiée les propriétés 1.1 1.2 1.3 telle que :

i) $\Pi(u, 0) = u.0 = \Pi(0, v) = 0.v = 0, \quad \forall u, v \in I.$

ii) $\Pi(u, 1) = u.1 = u$ et $\Pi(1, v) = 1.v = v. \quad \forall u, v \in I.$

iii) $\forall u_1, v_1, u_2, v_2 \in I$ telle que : $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2.$

$$\Pi(u_2, v_2) - \Pi(u_2, v_1) - \Pi(u_1, v_2) + \Pi(u_1, v_1) = u_2v_2 - u_2v_1 - u_1v_2 + u_1v_1 \geq 0,$$

où :

$$u_2 \geq u_1 \implies \begin{cases} u_2v_2 \geq u_1v_2 \\ u_2v_1 \geq u_1v_1 \end{cases}$$

donc :

$$u_2v_2 - u_2v_1 \geq u_1v_2 - u_1v_1.$$

alors :

$$u_2v_2 - u_2v_1 - u_1v_2 + u_1v_1 \geq 0.$$

Copule max : noté W , elle est définie par :

$$W(u, v) = \max(u, v), \quad \forall u, v \in I.$$

Copule min : noté M , elle est définie par :

$$M(u, v) = \min(u, v), \quad \forall u, v \in I.$$

Famille de fréchet(1958) : sont des copules à deux paramètres $(\alpha, \beta) \in [0, 1]$ avec $\alpha + \beta \leq 1$:

$$C_{\alpha, \beta}(u, v) = \alpha M(u, v) + \beta W(u, v) + (1 - \alpha - \beta)\Pi(u, v).$$

1.1.1 Théoreme de Sklar

Le concept de ce théorème a été introduit par Sklar en 1959. Ce théorème est la base de la théorie des copules car il élucide le rôle que jouent les copules dans la relation entre les distributions bivariées F et leur marge univariées F_1 et F_2 .

Définition 1.2 On appelle inverse généralisé de la fonction F la fonction F^{-1} de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} par :

$$F^{-1}(t) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}.$$

Proposition 1.1 Soit X une v.a de fonction de répartition F , alors :

1. Si U est uniforme dans $[0, 1]$, alors $F^{-1}(U) \rightarrow F$.
2. Si F est continue, alors $F(X) \rightarrow U_{[0,1]}$.

Théoreme 1.1 (Sklar) Soit F une fonction de répartition conjointe de deux v.a X et Y dont les marginales sont F_1 et F_2 , alors il existe une copule $C : I^2 \rightarrow I$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)). \tag{1.4}$$

Si F_1 et F_2 sont continues alors C est unique.

Preuve. Soit C la distribution de couple aléatoire (U, V) avec $U = F_1(X)$ et $V = F_2(Y)$. A l'aide de la définition 1.2 et la proposition 1.1, nous pouvons montrer l'équation 1.4 :

$$\begin{aligned} F(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= P(F_1^{-1}(U) \leq x, F_2^{-1}(V) \leq y) \\ &= P(U \leq F_1(x), V \leq F_2(y)) \\ &= C(F_1(x), F_2(y)). \end{aligned}$$

■

Corollaire 1.1 On appelle copule de dimension 2 toute fonction de répartition bivariée C ayant pour marginales la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Corollaire 1.2 (*inverse de théorème de Sklar*)

Soit F une fonction de répartition 2- dimensionnelle de fonction de répartitions marginales F_1 et F_2 . La copule C associé à F est donnée par :

$$C(u, v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)). \text{ pour tout } (u, v) \in I^2.$$

Preuve. En appliquant le théorème 1.1 en posant $u = F_1(x)$ et $v = F_2(y)$, on trouve que :

$$\begin{aligned} C(u, v) &= P(U \leq u, V \leq v) \\ &= P(F_1(X) \leq u, F_2(Y) \leq v) \\ &= P(X \leq F_1^{-1}(u), Y \leq F_2^{-1}(v)) \\ &= F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)). \end{aligned}$$

■

Exemple 1.2 Soit F la fonction jointe de vecteur aléatoire (X, Y) est définie par :

$$F_\theta(x, y) = \begin{cases} 1 - \exp(-x) - \exp(-y) + \exp(-(x + y + \theta xy)), & x \geq 0, y \geq 0. \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec $\theta \in [0, 1]$ et admet pour les marginales :

$$F_1(x) = \exp(-(1 - x)), \quad F_2(y) = \exp(-(1 - y)).$$

nous avons :

$$F_1^{-1}(u) = -\log(1 - u), \quad F_2^{-1}(v) = -\log(1 - v).$$

la copule correspondante est donc :

$$C_\theta(u, v) = u + v - 1 + (1 - u)(1 - v)e^{-\theta \ln(1-u) \ln(1-v)}.$$

1.1.2 Borne de Fréchet-Hoeffding

Toute copule bivariable C bornées par deux copules.

Théoreme 1.2 Soit C une copule, on a : $\forall (u, v) \in I^2$

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) = M(u, v).$$

Preuve. On a :

$$\begin{cases} C(u, v) \leq C(u, 1) = u \\ C(u, v) \leq C(1, v) = v \end{cases}$$

implique que :

$$C(u, v) \leq \min(u, v).$$

d'autre part :

$$\forall (u, v) \in I^2 : C(u, v) \geq 0.$$

et de 1.3 on pose : $u_1 = u, u_2 = 1, v_1 = v, v_2 = 1$, on a :

$$\begin{aligned} C(1, 1) - C(1, v) - C(u, 1) + C(u, v) &\geq 0 \\ \implies 1 - v - u + C(u, v) &\geq 0 \\ \implies C(u, v) &\geq u + v - 1. \end{aligned}$$

donc :

$$C(u, v) \geq \max(u + v - 1, 0).$$

alors :

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v).$$

Les copules W et M sont appelées borne inférieure et borne supérieure respectivement de Fréchet-Hoeffding ou copule minimale et maximale. ■

1.1.3 Propriétés de copule

Soit X, Y deux v.a continues de fonction de répartition jointe F et de marginales F_1 et F_2 , et soit C la copule associée. Dans ce qui suit, on va présenter quelques propriétés concernant les copules.

a)-**La continuité** : d'après la condition de lipschitz :

$\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ on a :

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1) \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

C est uniformément continue sur I .

b)-**La symétrie** : On dit que C est symétrique si :

$$\forall (u, v) \in I^2 : C(u, v) = C(v, u).$$

c)-**L'ordre** : C'est à dire :

$$C_1 \leq C_2 \iff \forall (u, v) \in I^2 : C_1(u, v) \leq C_2(u, v).$$

d)-**La convexité** : Soit $(a, b), (c, d) \in [0, 1]^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, on dit que C est convexe si on a :

$$C(\lambda a + (1 - \lambda)c, \lambda b + (1 - \lambda)d) \leq \lambda C(a, b) + (1 - \lambda)C(c, d).$$

e)-**Le théorème d'invariance** :

L'un des théorèmes essentiels à la théorie des copules celui de l'invariance par transformations strictement croissantes.

Théoreme 1.3 Soient X et Y deux variables aléatoires continues de copule C_{XY} .

Si α et β sont deux fonctions strictement croissante alors :

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}.$$

Preuve. On pose F_1, F_2, G_1, G_2 des distributions de $X, Y, \alpha(X), \beta(Y)$ respectivement, on trouve :

$$\begin{aligned} G_1(x) &= P(\alpha(X) \leq x) = P(X \leq \alpha^{-1}(x)) \text{ (car } \alpha \text{ est une fonction croissante).} \\ &= F_1(\alpha^{-1}(x)). \end{aligned}$$

On fait la même chose pour G_2 , on obtient donc : $G_2(y) = F_2(\beta^{-1}(y))$.

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(G_1(x), G_2(y)) &= P(\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y) \\ &= P(X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)) \\ &= C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), F_2(\beta^{-1}(y))) \\ &= C_{XY}(G_1(x), G_2(y)). \end{aligned}$$

■

Théoreme 1.4 -Si α est strictement croissante (\nearrow) et β strictement décroissante (\searrow) :

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v).$$

-Si α est strictement décroissante (\searrow) et β strictement croissante (\nearrow) :

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v).$$

-Si α et β sont strictement décroissante (\searrow) :

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 - C_{XY}(1 - u, 1 - v).$$

i)-Dérivées partielles :

Les dérivées partielles de $C(u, v)$ existent presque sûrement pour tout $u, v \in [0, 1]$:

$$0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} \leq 1 \text{ et } 0 \leq \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} \leq 1.$$

g)-Dépendance de queue :

La dépendance de queue permet de voir le niveau de dépendance dans les valeurs extrêmes (λ_U upper tail dépendance) et dans les petites valeurs (λ_L lower tail dépendance).

Les deux paramètres λ_U et λ_L se basent sur les probabilités conditionnelles, le lemme suivant les mettra en relation avec les copules.

Lemme 1.1 *Soient U et V deux variables aléatoires uniformes sur I et C la copule associée.*

Pour $u, v \in I$, on a :

$$P(U \leq u \mid V \leq v) = \frac{C(u, v)}{v},$$

$$\text{et } P(U > u \mid V > v) = \frac{1 - u - v + C(u, v)}{1 - v}.$$

Preuve. On a :

$$P(U \leq u \mid V \leq v) = \frac{P(U \leq u, V \leq v)}{P(V \leq v)} = \frac{C(u, v)}{v},$$

$$\text{et } P(U > u \mid V > v) = \frac{P(U > u, V > v)}{P(V > v)}$$

$$= \frac{1 - P(U \leq u) - P(V \leq v) + P(U \leq u, V \leq v)}{1 - P(V \leq v)}$$

$$= \frac{1 - u - v + C(u, v)}{1 - v}.$$

■

Définition 1.3 *Une copule C a une dépendance de queue à gauche (lower tail dépendance)*

si :

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} P[X \leq F_1^{-1}(u) \mid Y \leq F_2^{-1}(v)] = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}. \text{ existe et } \lambda_L \in]0, 1].$$

Si $\lambda_L = 0$ alors elle n'a pas de dépendance de queue à gauche.

Une copule C a une dépendance de queue à droite (upper tail dépendance) si :

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} P [X > F_1^{-1}(u) \mid Y > F_2^{-1}(v)] = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u - C(u, u)}{1 - u}. \text{ existe et } \lambda_U \in]0, 1].$$

Si $\lambda_U = 0$ alors elle n'a pas de dépendance de queue à droite.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \lim_{u \rightarrow 0^+} P [X \leq F_1^{-1}(u) \mid Y \leq F_2^{-1}(v)] \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} P [F_1(X) \leq u \mid F_2(Y) \leq v] \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \rightarrow 1^-} P [X > F_1^{-1}(u) \mid Y > F_2^{-1}(v)] \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} P [F_1(X) > u \mid F_2(Y) > v] \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u - C(u, u)}{1 - u}. \end{aligned}$$

■

1.2 Densité de copule

Définition 1.4 Les copules admettent des densités de probabilités, si la densité c associée à la copule C existe et elle est définie par :

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}.$$

où $c : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Si la distribution jointe F est absolument continue, en utilisant le théorème de Sklar 1.1, on peut exprimer la densité d'un copule aléatoire (X, Y) en fonction de densité de sa copule et

de ses marginales f_1 et f_2 par :

$$f(x, y) = c(F_1(x), F_2(y))f_1(x)f_2(y).$$

Exemple 1.3 On prend la copule produit, nous avons :

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \Pi(u, v) = uv \\ \implies c(u, v) &= \frac{\partial^2 \Pi(u, v)}{\partial u \partial v} = 1. \end{aligned}$$

Cette copule caractérise l'indépendance entre deux v.a car la densité de copule dans ce cas s'écrit par :

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y).$$

1.3 Mesures d'association

1.3.1 Concordance et discordance

Il convient tout d'abord de rappeler la notion de concordance.

Définition 1.5 Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux observations d'un couple de variables aléatoires (X, Y) .

On dit que (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont concordante si et seulement si :

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0.$$

c'est à dire : $(x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2)$ ou $(x_1 > x_2$ et $y_1 > y_2)$.

On dit que (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont discordante si et seulement si :

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0.$$

c'est à dire $(x_1 < x_2$ et $y_1 > y_2)$ ou $(x_1 > x_2$ et $y_1 < y_2)$.

Définition 1.6 (*Fonction de concordante*)

La fonction de concordante est la différence entre la probabilité de concordance et celle de discordance entre deux couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) .

Elle est donnée par :

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

On peut écrit Q en terme de deux copules.

Théoreme 1.5 Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux copules de variables aléatoires indépendants de fonctions de répartition conjointes F et \tilde{F} avec des marges communes F_1 et F_2 respectivement. Soient C_1 et C_2 les copules associé aux fonctions de répartition F et \tilde{F} respectivement, alors :

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1.$$

Preuve. On pose : $u = F_1(x)$ et $v = F_2(y)$

$$\begin{aligned} Q &= P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \\ &= P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - (1 - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]) \\ &= 2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1. \end{aligned}$$

avec

$$P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2) + P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2).$$

on a :

$$\begin{aligned}
 P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_2) &= P(X_2 < X_1, Y_2 < Y_1) \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} P(X_2 < X_1, Y_2 < Y_1) dC_1(F_1(x), F_2(y)) \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} C_2(F_1(x), F_2(y)) dC_1(F_1(x), F_2(y)) \\
 &= \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v).
 \end{aligned}$$

De façon similaire :

$$\begin{aligned}
 P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2) &= P(X_2 > X_1, Y_2 > Y_1) \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} P(X_2 > X_1, Y_2 > Y_1) dC_1(F_1(x), F_2(y)) \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{F}(x, y) dC_1(F_1(x), F_2(y)), \quad (\tilde{F} \text{ fonction de survie de } F) \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} [1 - F_1(x) - F_2(y) + C_2(F_1(x), F_2(y))] dC_1(F_1(x), F_2(y)) \\
 &= \int \int_{I^2} [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(u, v).
 \end{aligned}$$

C_1 est la fonction de répartition du couple (U, V) d'une loi uniforme $(0, 1)$, $E(U) = E(V) = \frac{1}{2}$

donc :

$$\begin{aligned}
 P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_2) &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \\
 &= \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v).
 \end{aligned}$$

Par suite :

$$Q = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1.$$

■

1.3.2 Mesure de concordance

Une mesure d'association K entre deux variables aléatoires continues X et Y de copule C est une mesure de concordance, si elle satisfait les propriétés suivants :

1. K est définie pour toute paire de variables aléatoires continues.
2. $-1 \leq K_{X,Y} \leq 1$, $K_{X,X} = 1$ et $K_{X,-X} = -1$.
3. $K_{X,Y} = K_{Y,X}$.
4. Si X et Y sont indépendants, alors : $K_{X,Y} = K_{\Pi} = 0$.
5. $K_{-X,X} = K_{X,-Y} = -K_{X,Y}$.
6. Si C_1 et C_2 sont deux copules telles que : $C_1 < C_2$ alors : $K_{C_1} \leq K_{C_2}$.
7. Si $\{(X_n, Y_n)\}$ est une suite continue de variables aléatoires avec des copules $\{C_n\}$ et si $\{C_n\}$ converge point par point vers C , alors : $\lim_{n \rightarrow \infty} K_{C_n} = K_C$.

Théoreme 1.6 *Soit K une mesure de concordance pour des variables aléatoires continues X et Y .*

1. Si Y est fonction croissante de X , alors : $K_{X,Y} = 1$.
2. Si Y est fonction décroissante de X , alors : $K_{X,Y} = -1$.
3. Si α et β sont des fonctions strictement croissantes, alors : $K_{\alpha(X),\beta(Y)} = K_{X,Y}$.

1.3.3 Tau de Kendall et rho de Spearman

Le tau de Kendel et le rho de Spearman sont deux mesures de concordance bien connues en statistique. Elles donnent une mesure de la corrélation entre les rangs des observations à la différence coefficient de corrélation linéaire qui lui apprécie la corrélation entre les valeurs, l'avantage de s'exprimer simplement en fonction de la copule associée au couple de variables aléatoires.

Tau de Kendall

Soient (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) deux couples de vecteurs continus i.i.d de fonction jointe F .

Le tau de Kendall est donné par :

$$\tau_{XY} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Son expression en terme de la copule associé est la suivante :

Définition 1.7 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues de copule C . Si les couples sont identiquement distribués i.e : $F_1 = F_2 = F$, le tau de Kendall a pour expression :

$$\tau_C = 4 \int \int_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1.$$

comme les copules sont uniformément distribuées sur I , alors :

$$\int \int_{I^2} C(u, v) dC(u, v) = E[C(u, v)].$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\tau_C = 4E[C(u, v)] - 1.$$

Rho de Spearman

Soient $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ des copies indépendantes de vecteur aléatoire (X, Y) .

Le rho de spearman noté $\rho_{X,Y}$, est défini par :

$$\rho_{X,Y} = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]).$$

Nous pouvons définir le rho de Spearman en fonction de copule C .

Théoreme 1.7 Soit F une fonction de distribution bivariée continue de marginales F_1 et F_2 .

Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire de distribution F . Le rho de Spearman est alors défini

comme le coefficient de corrélation linéaire entre les variables $F_1(X_1)$ et $F_2(X_2)$ suivent une loi uniforme sur $I = [0, 1]$, leur espérance vaut $\frac{1}{2}$ et leur variance $\frac{1}{12}$. Ainsi on a :

$$\rho_s = 12 \int \int_{I^2} F_1(x_1)F_2(x_2)dF(x_1, x_2) - 3.$$

ou en utilisant les copules

$$\rho_s = 12 \int \int_{I^2} uv dC(u, v) - 3.$$

alors :

$$\rho_s = \frac{E(UV) - E(U) - E(V)}{\sqrt{Var(U)}\sqrt{Var(V)}}.$$

1.4 Copule de survie

Dans de nombreuses applications, les variables aléatoires d'intérêt représentent la durée de vie des individus ou des objets dans une population. La probabilité de survie dans le cas univarié est définie par : $P(X > x) = 1 - F(x)$ telle que F représente la fonction de répartition de X . De même pour le cas bivarié, si F est la fonction de répartition jointe associé au copule aléatoire (X, Y) , et soit C sa copule de la fonction jointe de survie est :

$\bar{F}(x, y) = P(X > x, Y > y)$ et les marginales sont \bar{F}_1 et \bar{F}_2 , alors :

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, y) &= P(X > x, Y > y) \\ &= 1 - P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= 1 - F_1(x) - F_2(y) + F(x, y) \\ &= \bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(y) - 1 + C(1 - \bar{F}_1(x), 1 - \bar{F}_2(y)). \end{aligned}$$

Donc la copule de survie \hat{C} de X, Y est :

$$\hat{C}(\bar{F}_1(x), \bar{F}_2(y)) = \bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(y) - 1 + C(1 - \bar{F}_1(x), 1 - \bar{F}_2(y)).$$

De sorte que si nous définissons la fonction \hat{C} de I^2 dans I par :

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v),$$

on a :

$$\bar{F}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}_1(x), \bar{F}_2(y)).$$

1.5 Familles de copules

Il existe nombreuses familles de copules qui diffèrent dans le détail de la dépendance qu'elles représentent. Une famille en général a plusieurs paramètres qui se rapportent à la force et la forme de la dépendance. Certaines familles de copules sont décrites ci-dessous.

1.5.1 Copules elliptiques

Les copules elliptiques sont définies à partir des familles lois elliptiques ¹. En cas particulier on a la copule gaussienne et la copule de student.

Définition 1.8 *On appelle copule elliptique toute copule qui s'écrit de la forme suivante :*

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi_{g,1}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi_{g,2}^{-1}(v)} g\left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) dx dy \\ &= F_\rho(\Phi_{g,1}^{-1}(u), \Phi_{g,2}^{-1}(v)). \end{aligned}$$

où F_ρ est la distribution jointe des v.as X et Y , $\Phi_{g,1}^{-1}(u)$ et $\Phi_{g,2}^{-1}(v)$ sont leurs fonctions quantiles respectives et ρ leurs coefficients de corrélation.

Copule normale (Gaussienne)

La copule gaussienne bivariée est donnée par :

¹soit X suit la loi elliptique de paramètres μ, Σ et g . de densité : $f(x) = (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} g(x - \mu) \Sigma^{-1}(x - \mu)^t$
 $\mu \in \mathbb{R}^d, x \in \mathbb{R}^d$.

$M_d(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices carrées réelles de taille d^2 .

$\Sigma \in M_d(\mathbb{R})$: est matrice de forme symétrique définie positive .

g : est une fonction à valeurs positives vérifiant $\int_{\mathbb{R}^d} g(xx^t) dx = 1$.

$$C_\rho(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \exp\left[\frac{-(x^2 - 2\rho xy + y^2)}{2(1-\rho^2)}\right] dx dy.$$

$$C_\rho(u, v) = \Psi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)).$$

telle que $\rho \in]-1, 1]$ et $\rho = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sqrt{\text{var}(x)}\sqrt{\text{var}(y)}}$.

Ψ_ρ : distribution normale bivariee centré de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$.

Φ : fonction de répartition de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$\Phi(x) = P(X_i \leq x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x \exp^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Voir la figure 1.1

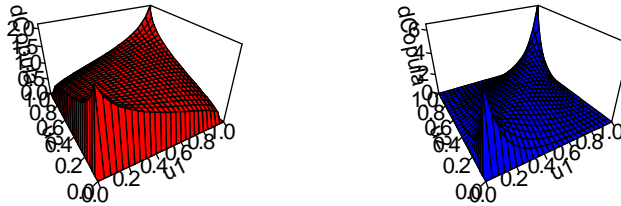


FIG. 1.1 – Densité de copule Gaussienne pour $\rho = 0.3$ (à gauche) et $\rho = 0.8$ (à droite).

-Si $\rho = 0$ alors $C_\rho(u, v) = \Pi(u, v)$.

-Si $\rho = -1$ alors $C_\rho(u, v) = W(u, v)$.

-Si $\rho = 1$ alors $C_\rho(u, v) = M(u, v)$.

Dépendance de queue :

$$\lambda_L = \lambda_U = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho < 1, \\ 1 & \text{si } \rho = 1. \end{cases}$$

Alors cette copule n'est pas une dépendance de queue sauf pour $\rho = 1$.

Tau de kendall et rho de spearman :

Le tau de kendall d'une copule Gaussienne est donnée par :

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho).$$

et le rho de spearman par :

$$\rho_s = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right).$$

Copule student

La fonction de répartition de student dans le cas univarié est définie par :

$$t_v(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{\pi v} \Gamma(v+2)} \left(1 + \frac{s^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} ds.$$

telle que Γ est la fonction Gamma.

Dans le cas bivarié, la fonction de répartition de student est définie par :

$$t_{\rho,v}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+1}{2}} ds dt.$$

avec $\rho \in [-1, 1]$.

Définition 1.9 *La copule de student (t copule) est une copule paramétrique, paramétrée par le coefficient de corrélation linéaire ρ et le degré de liberté v . Cette copule est définie par :*

$$\begin{aligned} C_{\rho,v}^t(u, v) &= t_{\rho,v}(t_v^{-1}(u), t_v^{-1}(v)) \\ &= \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+1}{2}} ds dt. \end{aligned}$$

voir la figure 1.2

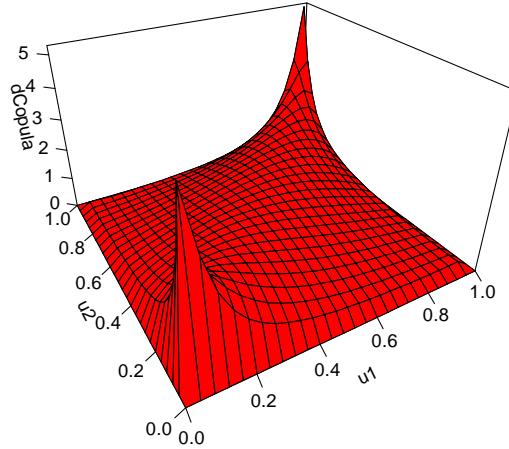


FIG. 1.2 – Densité de copule student pour $\rho = 0.6$ et $v = 4$.

Remarque 1.1 *Si le degré de liberté $v \rightarrow \infty$, alors la copule de student converge vers la copule Gaussienne.*

Dépendance de queue :

Comme la copule de student est symétrique, nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda_U &= 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} P\{U_2 > u \mid U_1 = u\} \\ &= 2 - 2 \lim_{u \rightarrow 1^-} t_{v+1} \left(\left(\frac{v+1}{v + [t_v^{-1}(u)]^2} \right) \frac{t_v^{-1}(u) - \rho t_v^{-1}(u)}{\sqrt{1-\rho^2}} \right) \\ &= 2 - 2t_{v+1} \left(\left(\frac{(v+1)(1-\rho)}{(1+\rho)} \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Tau de kendall et rho de spearman :

Le tau de kendall et rho de spearman sont les mêmes que la copule normale.

1.5.2 Copules Archimédiennes

Les copules archimédiennes offrent une très grande flexibilité au niveau de la structure de dépendance. Parmi les copules appartenant à cette famille notons les copules de Clayton,

de Gumbel et de Frank. Elles sont construites à l'aide d'une fonction φ qui est appelée la fonction génératrice de la copule.

Définition 1.10 Une fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{*+}$ est dite génératrice si elle est continue, décroissante et convexe telle que $\varphi(1) = 0$. Le pseudo-inverse de φ est définie par :

$$\varphi^{[-1]}(u) = \begin{cases} \varphi^{-1}(u) & \text{si } 0 \leq u \leq \varphi(0). \\ 0 & \text{si } \varphi(0) \leq u \leq +\infty. \end{cases}$$

Remarquons que si $\varphi(0) = \infty$, alors φ est strictement décroissante et au moins deux fois continuellement dérivable telle que :

$$\varphi'(u) < 0 \text{ et } \varphi''(u) > 0, \forall 0 \leq u \leq 1.$$

On peut remplacer le pseudo-inverse $\varphi^{[-1]}$ par l'inverse ordinaire.

Définition 1.11 Une copule est dite Archimédienne si elle d'écrit sous la forme :

$$C^A(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)).$$

Avec φ est un générateur.

Théoreme 1.8 (tau de Kendall)

Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires dont la copule C est archimédienne avec le générateur $\varphi \in \Omega$. Alors, le tau de Kendall de X_1 et X_2 est donné par :

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

Dépendance de queue : Si C présente une dépendance supérieure au niveau de la queue de distribution alors, $(\varphi^{-1})'(0) = -\infty$ et de plus on a la relation :

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\varphi^{-1})'(2u)}{(\varphi^{-1})'(u)}.$$

Le coefficient de dépendance de queue inférieur est donné par :

$$\lambda_L = 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\varphi^{-1})'(2u)}{(\varphi^{-1})'(u)}.$$

Exemples de copule Archimédienne

Le tableau suivant présente quelques familles Archimédiennes classiques :

copule	$\varphi_\theta(t)$	$C_\theta(u, v)$	λ_L	λ_U	τ
Frank	$-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$-\frac{1}{\theta} \ln \left\{ 1 + \frac{(e^{-\theta}(u-1)e^{-\theta}(v-1))}{e^{-\theta} - 1} \right\}$; $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	0	0	$1 - \frac{4}{\theta} + \frac{4}{\theta^2} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1} dt$
Clayton	$(t^{-\theta} - 1) / \theta$	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$; $\theta \in [-1, \infty] \setminus \{0\}$	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	0	$\frac{\theta}{\theta+2}$
Gumbel	$(-\ln t)^\theta$	$\exp \left\{ - [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta} \right\}$; $\theta \geq 1$	0	$2 - 2^{1/\theta}$	$1 - 1/\theta$

TAB. 1.1 – Générateurs des principales copules Archimédiennes et leurs dépendance du queue et tau de Kendall

-Pour la **Copule de Franc** : on retrouve les cas particuliers suivants comme cas limites :

$$C_{-\infty} = W, C_0 = \Pi, C_\infty = M.$$

-Pour la **Copule de Clayton** : on retrouve les cas particuliers suivants comme cas limites :

$$C_{-1} = W, C_0 = \Pi, C_\infty = M.$$

-Pour la **Copule de Gumbel** : on retrouve les cas particuliers suivants comme cas limites :

$$C_1 = \Pi, C_\infty = M.$$

Remarque 1.2 les copules Π et W sont des copules Archimédiennes pour les générateurs $\varphi(t) = -\ln(t)$ et $\varphi(t) = 1 - t$; $t \in [0, 1]$ respectivement.

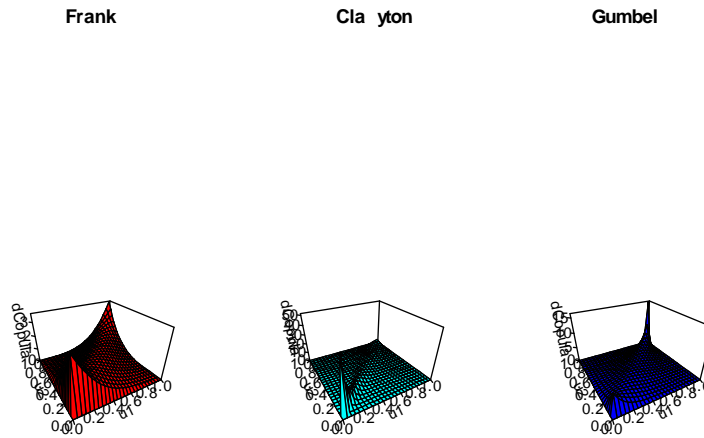


FIG. 1.3 – Densité de copules Frank pour $\theta = 5$, clayton pour $\theta = 8$ et Gumbel pour $\theta = 3$.

1.5.3 Copule Farlie-Gumbel-Morgenstern

Cette copule a été étudiée par Morgenstern (1956), Gumbel (1958), et enfin par Farlie (1960).

Définition 1.12 La copule Farlie-Gumbel-Morgenstern connue par (F-G-M) est définie pour un paramètre de dépendance $\theta \in [-1, 1]$ comme suit :

$$C(u, v) = uv + \theta u\bar{v}\bar{u}\bar{v}.$$

telle que : $\bar{u} = 1 - u$ et $\bar{v} = 1 - v$.

La densité de copule F-G-M est donnée par :

$$\frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} = c(u, v) = 1 + \theta(1 - 2u - 2v + 4uv) \quad \forall u, v \in I^2.$$

1.5.4 Copule de valeur extrême

Comme leur nom l'indique, les copules de valeurs extrêmes sont issues de la théorie de valeurs extrêmes. Dans cette dernière, on considère les variables aléatoires de maximum suivantes :

$$M_{(n,X)} = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i) \text{ et } M_{(n,Y)} = \max_{1 \leq j \leq n} (Y_j).$$

On étudie alors la distribution de probabilité de la variable :

$$M_n = (M_{(n,X)}, M_{(n,Y)}),$$

et les cas pour lesquels cette variable, qu'on a renormalisée, ne suit pas une loi dégénérée.

Définition 1.13 *Soit n une constante réelle positive. Une copule de valeurs extrême est une copule qui vérifie la relation suivante :*

$$C(u^n, v^n) = C^n(u, v) \quad \forall u, v \in I^2.$$

où :

$$C^{\frac{1}{n}}(u^n, v^n) = C(u, v) \quad \forall u, v \in I^2, \quad \forall n > 0.$$

Exemple 1.4 *Considérons la copule de Gumbel comme exemple de copule de valeur extrême.*

On a :

$$\forall \theta \geq 1 : C(u, v) = \exp \left\{ - \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} C(u^n, v^n) &= \exp \left\{ - \left[(-\ln u^n)^\theta + (-\ln v^n)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \\ &= \exp \left\{ - \left[n^\theta ((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta) \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \\ &= \exp \left\{ -n \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \\ &= \left(\exp \left\{ - \left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \right)^n = C^n(u, v). \end{aligned}$$

Chapitre 2

Application des copules en assurance

Ce chapitre explore le potentiel d'applications de la théorie des copules à la finance de marché. En particulier, nous allons mesurer la somme des pertes parfois quand ils sont dépendants, et une fois indépendants.

Premièrement, nous allons donner un ensemble des notations de définitions utilisées dans la littérature financière.

2.1 Mesure de risque

Les mesures de risques sont des outils de quantification de risque. Elles permettent d'évaluer un niveau de dangerosité d'un risque mais également de comparer les différents risques et de les classer selon le niveau de dangerosité.

De manière générale, elles visent à fixer un niveau de capital pour un portefeuille de risques donné, et mesurent le risque en un ou plusieurs nombres.

Définition 2.1 Soit Ω l'ensemble fini des états de nature possibles, on appelle variable aléatoire réelle une fonction X qui à un état de la nature ω associé le réel $X(\omega)$.

Une mesure de risque $\mu(X)$ est une fonction $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1. μ est croissante : $X \leq Y \implies \mu(X) \geq \mu(Y)$.
2. invariante par translation : $\mu(X + \alpha) = \mu(X) + \alpha, \forall X, \forall \alpha$.

D'après cette définition, nous pouvons dire que l'espérance, la variance ou l'écart type, lorsqu'ils existent, sont des mesures de risque.

Propriétés :

Une mesure de risque μ doit pouvoir vérifier un certain nombre de propriétés élémentaires :

Invariance par transformation :

$$\forall X, \forall \alpha : \mu(X + \alpha) = \mu(X) + \alpha.$$

L'ajout d'un actif sans risque à un portefeuille risqué ne fait que translater la mesure de risque.

Sous-additivité :

$$\mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y).$$

La fusion de deux centres de portefeuille ne crée pas de risque supplémentaire. Au contraire, la diversification tend à réduire le risque global.

Autrement dit, le risque sur un portefeuille est plus faible que la somme des risques individuels.

Homogénéité positive :

$$\mu(\lambda X) = \lambda \mu(X), \forall \lambda > 0.$$

Lorsque l'investissement est multiplié, par conséquent le risque est également multiplié.

Monotonie :

$$X \leq Y \implies \mu(X) \geq \mu(Y).$$

Si X offre un rendement inférieur à celui de Y dans tous les états de la nature, alors il est plus risqué que Y .

Propriété de borne supérieure :

$$\mu(X) \leq \max(-X).$$

Le besoin en capital est borné par la perte maximale possible.

Définition 2.2 (*Artzner et al 1999*)

On dit que μ est cohérente si elle est invariante par translation, sous-additive, positivement homogène et monotone.

Ces conditions correspondent aux conditions intuitives d'une mesure de risque.

2.2 La Valeur en Risque

La Value at Risk (VaR) est une mesure probabiliste de la perte possible sur un horizon donné. Elle représente un niveau de perte pour une position ou un portefeuille qu'avec un certain degré de confiance.

La value at Risk est la perte maximale d'un portefeuille dont le rendement suit une loi donnée, pour détention donnée.

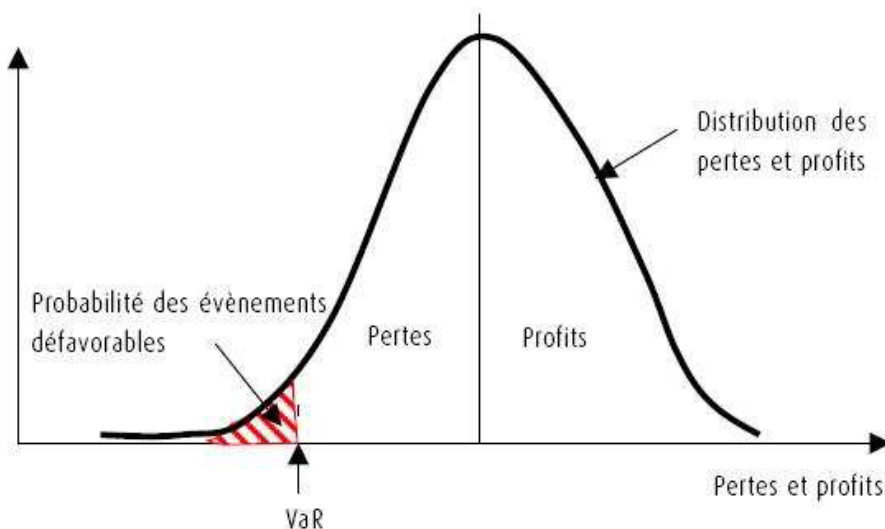


FIG. 2.1 – Représentation graphique de la VaR

Remarque 2.1 *La Value at Risk n'est pas une prévision mais une estimation de risque sur une position déjà en portefeuille.*

Définition 2.3 *Soit L une variable aléatoire de fonction de répartition F_L d'une position financière risquée, sur un horizon de temps fixé τ . Pour un niveau de confiance $\alpha \in [0, 1]$:*

$$VaR_\alpha(L) = \inf \{l : F_L(l) \geq \alpha\}.$$

Ce n'est rien d'autre que le quantile d'ordre α de la perte potentielle pour un horizon donné. Si F est strictement décroissante, alors $F^{-1} = F^{[-1]}$, c'est à dire l'inverse usuel est égale à l'inverse.

On peut définir le α quantile de F par :

$$q_\alpha = F^{[-1]}(\alpha) = \inf \{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Notons également :

$$VaR_\alpha(L) = F^{-1}(\alpha).$$

Remarque 2.2 *Il est possible de montrer que la VaR satisfait tous les propriétés d'une mesure de risque, exceptée la sous additivité. Ce qui veut dire que la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente.*

2.3 La VaR Conditionnelle

La Tail VaR (TVaR) aussi appelée Expected Shortfall, Conditional Tail Expectation (CTE), ou bien encore Conditional VaR, est une mesure de risque définie de la manière suivante :

$$TVaR_\alpha(X) = E[-X \mid X < -VaR_\alpha(X)].$$

En d'autres termes, la VaR conditionnelle peut se définir comme l'espérance de la perte lorsque cette perte dépasse la VaR.

Puisque la VaR mesure la valeur qui sépare les $(1 - \alpha)\%$ de distribution, on cherche à se focaliser sur la queue de distribution de la perte, les $\alpha\%$ restant dont on ne connaît ni la distribution ni l'espérance.

Contrairement à la VaR, la CVaR est une mesure cohérente qui vérifie les propriétés d'une mesure de risque.

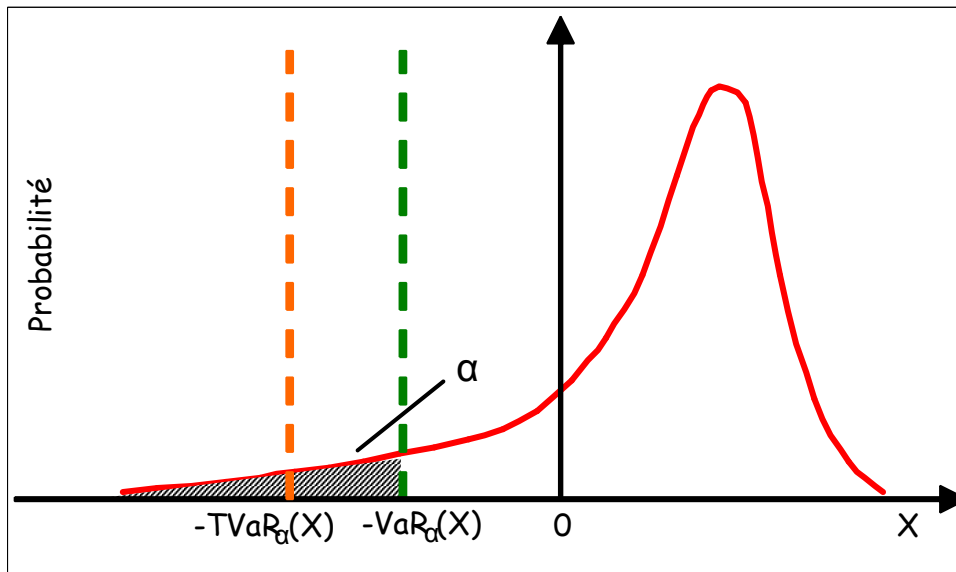


FIG. 2.2 – Présentation graphique de TVaR et VaR.

2.4 Mesure de risque de distorsion

Soit X une variable aléatoire non-négative¹ d'une entreprise, avec une fonction de distribution F_X . La mesure de risque de distorsion (MRD) de la v.a X , est défini comme suit :

$$\pi_\psi[X] = \int_0^{+\infty} \psi(1 - F_X(x)) dx. \quad (2.1)$$

où $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction non décroissante, appelée fonction de distorsion, vérifiant $\psi(0) = 0$ et $\psi(1) = 1$.

¹Le MRD d'un v.a X est : $\pi_\psi[X] = \int_0^{+\infty} \psi(1 - F(x)) dx + \int_{-\infty}^0 [\psi(1 - F(x)) - 1] dx$
Si X v.a non négatif alors le MRD est la première partie de $\pi_\psi[X]$.

Dans le calcul actuariel littérature les fonctions suivantes sont fréquemment utilisées : $\forall s \in [0, 1]$

$$\psi_\rho(s) = s^\rho, \text{ pour } 0 < \rho \leq 1 \text{ (power distortion).}$$

$$\psi_k(s) = \phi(\phi^{-1}(s) + k) \text{ pour } 0 \leq k < \infty \text{ (Wang distortion).}$$

$$\psi_\tau(s) = \min(s/(1 - \tau), 1) \text{ pour } 0 \leq \tau < 1 \text{ (smallest distortion).}$$

$$\psi_\alpha(s) = s^\alpha(1 - \alpha \ln s), \text{ pour } 0 < \alpha \leq 1 \text{ (look back distortion).}$$

où $\phi^{-1}(u) = \inf \{x : \phi(x) \geq u\}$ est la fonction quantile de la distribution normale standard ϕ . Les constantes ρ , k et α sont appelées paramètres de distorsion.

Lorsque $\rho = 1$ et $k = \tau = 0$, il n'y a pas de distorsion et la MRD correspondant est égal à l'espérance de X .

Propriétés

On dit que la MRD est cohérente si est seulement si la fonction de distorsion ψ est concave. Cette dernier vérifie le théorème de sous-additivité des intégrales de Choquet.

Exemple 2.1 *Value at risk est une mesure de risque de distorsion avec fonction de distorsion associée :*

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 - \alpha, \\ 1 & \text{si } 1 - \alpha \leq x < 1. \end{cases}$$

CTE est une mesure de risque de distorsion avec fonction de distorsion associée :

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\alpha} & \text{si } 0 \leq x < 1 - \alpha. \\ 1 & \text{si } 1 - \alpha \leq x < 1. \end{cases}$$

Remarque 2.3 *Il est bien connu que le CTE est un exemple de mesure du risque de distorsion concave, alors que la VaR n'est pas.*

2.5 MRD de la somme des v.a

Avant de commencer cette section, nous vous rappelons la distribution de somme des v.a.s à partir de convolution de variables aléatoires continues.

Si X et Y sont deux variables aléatoires continues indépendantes de densités respectives f_1 et f_2 , la cumulative F_Z de $Z = X + Y$ est donnée par :

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_1(x)f_2(y)dx dy.$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-y} f_1(x)dx \right) f_2(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(z-y)f_2(y)dy.$$

de même façon, on obtient :

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(z-x)f_1(x)dx.$$

où F_1 et F_2 sont les cumulatives de X et Y .

Pour obtenir la densité de Z , on dérive sa cumulative $F_Z(z)$. En dérivant par rapport à X sous l'intégrale, on obtient :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y)f_2(y)dy.$$

On définit :

$$(f_1 * f_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y)f_2(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z-x)f_1(x)dx.$$

Si X et Y sont deux variables indépendantes, la densité de $Z = X + Y$ est donnée par $f_1 * f_2$.

On connaît bien la loi de la somme Z . Si X et Y sont indépendantes, sinon, il faut connaître la loi du couple (X, Y) et par exemple sa densité $f(x, y)$.

Si elle existe pour avoir la loi de Z par :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx.$$

Soit F_1 et F_2 les fonctions de distribution X et Y respectivement.

On considère les cas où X et Y ne sont pas indépendants et on va présenter la notion des copules dans le cas bivarié, alors d'après le théorème de Sklar, il existe un unique copule $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ telle que :

$$F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)), \quad (2.2)$$

où F la distribution jointe de (X, Y) et des marges F_1, F_2 respectivement.

La copule C est la distribution jointe de v.a $U = F_1(X)$ et $V = F_2(Y)$. Il est défini sur $[0, 1]^2$ par :

$$C(u, v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)).$$

où F_i^{-1} est le quantile de F_i , $i = 1, 2$.

La copule est utilisée pour définir une convolution C donnée par :

$$F_{X+Y}(z) = F_X(x) *^C F_Y(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C(u, F_Y(z - F_X^{-1}(u))) du.$$

Considérons $Z = (X, Y)$, un vecteur de pertes de risque et nous discutons du calcul du MRD de la somme Z de ses composants.

On suppose que X et Y sont indépendants. La fonction de distribution G de sa somme Z est une convolution des distributions marginales F_1 et F_2 de X et de Y , c'est à dire : $G = F_1 * F_2$.

La MRD de la somme Z , pour une fonction de distorsion donnée ψ , peut être obtenue via la formule 2.1, c'est à dire :

$$\pi_\psi [Z] = \int_0^{+\infty} \psi(1 - G(z)) dz. \quad (2.3)$$

La question qui se pose dans ce cas est : Quel est la valeur de MRD de la somme des risques individuels dépendants ?

La réponse à cette question est basée sur les concepts des distribution jointe et les copules.

2.5.1 La CMRD

Définition 2.4 (*Mesure de Risque de Distorsion Copule*)

Soit une copule C et une bijection non décroissante $\Gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, la copule de distorsion C^Γ est définie par :

$$C^\Gamma(u_1, u_2) = \Gamma^{-1}(C(\Gamma(u_1), \Gamma(u_2))).$$

Cette transformation affectera la distribution jointe F et par conséquent la distribution G de la somme Z . Alors ils sont notées par F^Γ et G^Γ respectivement.

Les fonctions suivantes sont fréquemment utilisées :

$$\begin{aligned} \Gamma_r(s) &= s^r, \text{ pour } 0 < r \leq 1. \\ \Gamma_\delta(s) &= \frac{\ln(\delta s + 1)}{\ln(\delta + 1)}, \text{ pour } \delta > 0. \\ \Gamma_{\xi, \vartheta}(s) &= \frac{(\xi + \vartheta)s}{\xi s + \vartheta}, \text{ pour } \xi, \vartheta > 0. \\ \Gamma_v(s) &= \frac{s^v}{2 - s^v}, \text{ pour } 0 < v \leq 1/3. \end{aligned}$$

On appelle mesure de risque de distorsion copule CMRD qui est définie par :

$$\pi_\psi^\Gamma[Z] = \int_0^{+\infty} \psi(1 - G^\Gamma(z)) dz.$$

Remarque 2.4 Si X, Y sont indépendants, la fonction de copule correspondante $C(u_1, u_2) = u_1 u_2$ est appelée la copule du produit et est notée par C^\perp .

Dans ce cas, nous avons $C^\Gamma = C$ et donc : $\pi_\psi^\Gamma[Z] = \pi_\psi[Z]$.

2.5.2 Représentation du MRD par les copules

Soit un vecteur de pertes de risque $T = (X, Y)$, avec la distribution jointe F et marges continues $F_i, i = 1, 2$. La distribution de $Z = X + Y$ est :

$$G(t) = \int_{A(t)} dF(x, y) \text{ pour } \forall t \geq 0.$$

où $A(t) = \{(x, y), 0 \leq x + y \leq t\}$. En utilisant le théorème de Sklar 2.2, on obtient :

$$G(t) = \int_{A(t)} dC(F_1(x), F_2(y)).$$

Si nous supposons que la copule C et les marges F_i sont différentiables avec les densités c et f_i , alors :

$$G(t) = \int_{A(t)} c(F_1(x), F_2(y)) f_1(x) f_2(y) dx dy.$$

Le changement de variables $F_1(x) = u$ et $F_2(y) = v$ donne :

$$G(t) = \int_0^{F_2(t)} \int_0^{F_1(t-F_2^{-1}(v))} c(u, v) du dv. \quad (2.4)$$

Selon cette dernier résultat, le calcul du MRD correspondant à Z , nécessite la connaissance de la densité de copule de G et des marges du vecteur T .

Si X et Y sont indépendants, on a : $c(u, v) = 1$, et donc :

$$G(t) = \int_0^{F_2(t)} F_1(t - F_2^{-1}(v)) dv = \int_0^t F_1(t - x) dF_2(y).$$

qui est la convolution habituelle des $F_i, i = 1, 2$.

2.6 La copule archimédienne de distorsion

On définit C la copule archimédienne bivariée par :

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)).$$

où $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ sa générateur lequel est continue, strictement décroissant et convexe avec $\varphi(1) = 0$.

Notons que $\varphi^{[-1]}$ est continue et non croissant sur $[0, \infty]$. Si $\varphi(0) = \infty$, le générateur s'appelle strict et $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

les générateurs des copules Clayton, Frank et Gumbel d'une copule archimédienne sont stricts

alors leurs copules vérifiées :

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)).$$

Nous prenons C un copule archimédienne et une bijection strictement croissante $\Gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, nous considérons la fonction de distorsion $C^\Gamma : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ définie par :

$$C^\Gamma(u, v) = \Gamma^{-1}(C(\Gamma(u), \Gamma(v))).$$

D'après le théorème 3.3.3 de Nelsen [1], C^Γ est un copule si Γ est concave et continue sur $[0, 1]$ avec $\Gamma(0) = 0$ et $\Gamma(1) = 1$.

Soit Ω représente l'ensemble des fonctions Γ vérifiant les hypothèses ci-dessus.

Théoreme 2.1 *Soit C une copule archimédienne avec le générateur φ et supposons que $\Gamma \in \Omega$, alors la copule C^Γ est archimédienne si et seulement si $\varphi \circ \Gamma$ est convexe.*

Preuve. En effet, soit φ le générateur de la copule C et soit $\varphi \in \Omega$, alors :

$$C^\Gamma(u, v) = \Gamma^{-1}(C(\Gamma(u), \Gamma(v))).$$

Nous avons : $\Gamma^{[-1]} = \Gamma^{-1}$, alors :

$$C^\Gamma(u, v) = \Gamma^{[-1]} \varphi^{[-1]}(\varphi(\Gamma(u)) + \varphi(\Gamma(v))).$$

Il est facile de montrer que : $\Gamma^{[-1]} \varphi^{[-1]} = (\varphi \circ \Gamma)^{[-1]}$, il s'ensuit que :

$$C^\Gamma(u, v) = K^{[-1]}(K(u) + K(v)). \tag{2.5}$$

avec $K = \varphi \circ \Gamma$, d'après le théorème 4.1.4 de Nelsen [1], C^Γ est archimédienne si et seulement si K est convexe. Notons que $\varphi \circ \Gamma$ est le générateur de C^Γ . ■

Corollaire 2.1 *La fonction de distorsion $t \rightarrow \Gamma^\perp(t) = \exp(-\varphi(t))$ transforme n'importe quelle copule archimédienne C dans la copule produit C^\perp .*

Proposition 2.1 *Soit τ^Γ et ρ^Γ respectivement, le tau de Kendall et le rho de Spearman de la copule C^Γ . Nous avons des hypothèses appropriées :*

$$1 + \frac{\tau - 1}{a^2} \leq \tau^\Gamma \leq 1 + \frac{\tau - 1}{b^2},$$

et

$$\frac{\rho + 3}{a^3} - 3 \leq \rho^\Gamma \leq \frac{\rho + 3}{b^3} - 3.$$

où $0 < a \leq b < \infty$ sont des bornes pour la dérivée de Γ .

2.7 Mesures de risque pour la somme des pertes

Il peut arriver que le modèle (représenté par la copule C) choisi pour ajuster les données ne fournisse pas suffisamment d'informations sur la structure de dépendance. Ceci nous conduit à transformer C en copule C^Γ plus flexible de la même classe telle que :

$$F(x_1, x_2) = C^\Gamma(F_1(x), F_2(y)). \quad (F \text{ est la distribution jointe de } (X, Y)).$$

Suppose que C est archimédienne, d'après le théorème 2.1 C^Γ est archimédienne aussi. Alors :

$$G^\Gamma(t) = \int_0^{F_2(t)} \int_0^{F_1(t-F_2^{-1}(v))} c^\Gamma(u, v) du dv,$$

où c^Γ est la densité de C^Γ .

La MRD de la distribution de pertes G est :

$$\pi_\psi^\Gamma [Z] = \int_0^{+\infty} \psi(1 - G^\Gamma(z)) dz.$$

que nous appelons la CMRD. Cela peut être considéré comme une manière de mesure le risque

Z en faussant à la fois la structure de dépendance et la distribution de queue sans perdre la fonctionnalité de cohérence. La CMRD ajuste la mesure de probabilité réelle pour donner plus poids aux événements à risque plus élevé et moins à la structure de dépendance, ainsi on trouve :

$$E[Z] \leq \pi_{\psi}^{\Gamma}[Z] \leq \pi_{\psi}[Z]. \quad (2.6)$$

2.7.1 Application

Soit X et Y deux risques avec la distribution jointe représentée par la copule de Clayton C_{θ} , $\theta > 0$ et distribution marginales de Pareto F_1 et F_2 de paramètres $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, respectivement, où $F_1(x) = 1 - x^{-1/\alpha_1}$ et $F_2(y) = 1 - y^{-1/\alpha_2}$, $x, y > 1$. Le tau de Kendall de C_{θ} est :

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}.$$

Soit $\psi(x) = x^{1/\rho}$, $\rho \geq 1$, et $\Gamma(t) = t^{1/\delta}$, $\delta \geq 1$. La copule de distorsion C_{θ}^{Γ} , notée par C_{θ}^{δ} est de type Clayton avec générateur $(\varphi \circ \Gamma)(t) = (t^{-\theta/\delta} - 1)/\theta$ et sa tau de Kendall est :

$$\tau^{\Gamma} = (\theta/\delta)(\theta/\delta + 2).$$

La distribution de la somme $Z = X + Y$ est donné par :

$$G^{\delta}(t, \theta, \alpha_1, \alpha_2) = \int_1^{1-t^{-1/\alpha_2}} \left(\int_1^{1-(t-(1-v)^{-\alpha_2})^{-1/\alpha_1}} c_{\theta}^{\delta}(u, v) du \right) dv,$$

où

$$c_{\theta}^{\delta}(u, v) = (\theta/\delta + 1)u^{-\theta/\delta+1}(u^{-\theta/\delta} + v^{-\theta/\delta} - 1)^{-\delta/\theta-2}$$

est la densité de C_{θ}^{δ} .

La figure 2.3 donne un aperçu de l'effet de la copule de distorsion.

La MRD et la CMRD de Z sont désignés respectivement par :

$$\pi_{\psi}[Z] = \int_2^{+\infty} (1 - G(t))^{1/\rho} dt, \text{ et } \pi_{\psi}^{\delta}[Z] = \int_2^{+\infty} (1 - G^{\delta}(t))^{1/\rho} dt.$$

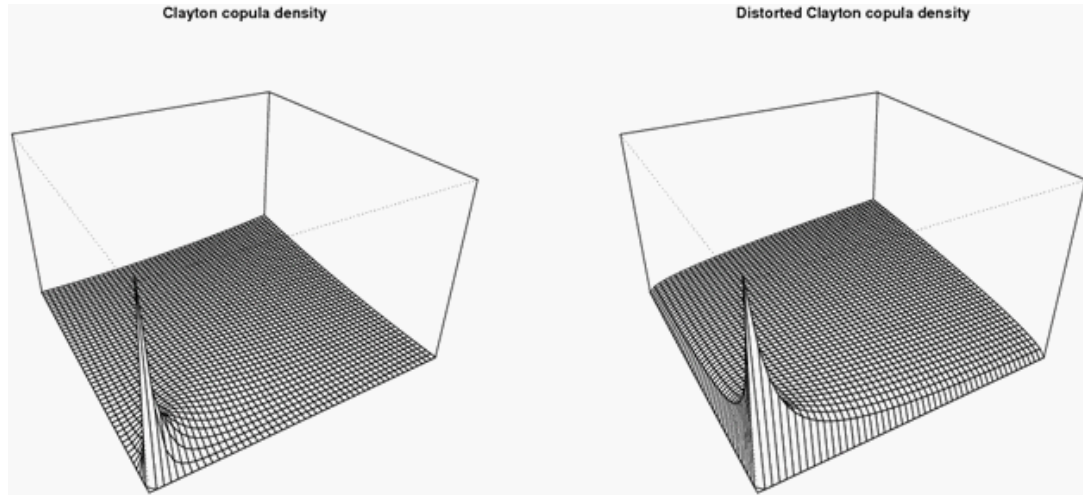


FIG. 2.3 – Densité de copule de clayton avec $\theta = 2$ (panneau de gauche). Densité de distorsion copula avec $\delta = 4$ (panneau de droite).

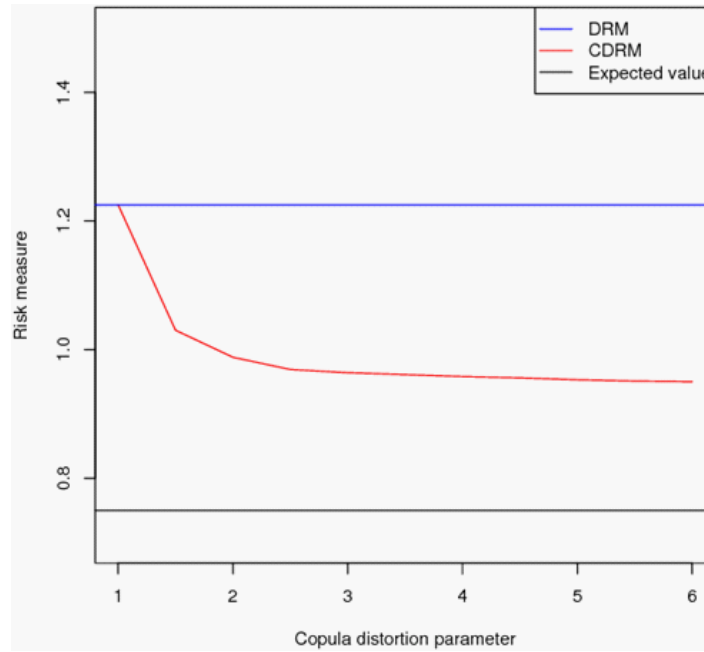
Nous sélectionnons un modèle de Pareto avec $\theta = 3/2$, $\alpha_1 = 1/3$ et $\alpha_2 = 1/5$. On obtient $E(Z) = 0.750$ et $\tau = 0.428$. Pour deux différents paramètres de queues de distorsion $\rho = 1.2$ et $\rho = 1.4$. Les CMRD des valeurs distinctes pour la copule de distorsion de paramètre δ sont résumés dans les tableaux 2.1 et 2.2, où nous voyons que les inégalités 2.6 sont satisfaites pour quelque valeur de la copule de distorsion paramétrée. Ceci est bien illustré graphiquement à la figure 2.7.1 sur laquelle les trois mesures de risque de 2.6 sont tracées en fonction de δ .

δ	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5	6
τ^δ	0.428	0.333	0.272	0.230	0.200	0.176	0.157	0.130	0.111
$\pi_\rho^\delta [Z]$	1.225	1.030	0.988	0.969	0.964	0.961	0.958	0.953	0.950

TAB. 2.1 – CMRD et transformé tau de Kendall de la somme de deux risques distribués de Pareto avec le paramètre de distorsion de queue = 1.2.

δ	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5	6
τ^δ	0.428	0.333	0.272	0.230	0.200	0.176	0.157	0.130	0.111
$\pi_\rho^\delta [Z]$	2.091	1.801	1.736	1.712	1.703	1.699	1.694	1.685	1.680

TAB. 2.2 – CMRD et transformé tau de Kendall de la somme de deux risques distribués de Pareto avec le paramètre de distorsion de queue = 1.4.



Mesures de risque de la somme de deux risques de distribution de Pareto avec le paramètre de distorsion de queue = 1.2.

Prendre $\delta = 1$ signifie qu'il n'y a pas de distorsion sur la structure de dépendance, c'est à dire $C^1 = C$ et $\pi_\rho^1[Z] = \pi_\rho[Z]$. En d'autres termes, la CMRD avec $\delta = 1$ se réduit au MRD, ce qui peut être vu dans les deuxièmes colonnes des tableaux 2.1 et 2.2. Ce fait est également clair sur la figure 2.7.1. D'autre part, lorsque δ augmente, le tau de Kendall transformé diminue, ce qui signifie que la dépendance devient plus faible (voir les dixièmes lignes des tableaux 2.1 et 2.2). De plus, à partir de quelques δ , les valeurs de CMRD deviennent à peu près constantes tout en étant toujours plus grand que l'espérance (voir la troisième ligne du tableau 2.1 et 2.2).

Remarques finales

Dans l'analyse de portefeuille, la structure de dépendance joue un rôle majeur dans la quantification des risques. Cela nous a amenés à penser à une mesure du risque tenant compte de ce fait, en plus du comportement de la queue. Dans cet article, nous avons proposé une mesure du risque pour la somme de deux pertes dépendantes en transformant simultanément la distribution de queue et la copule, ce qui représente la dépendance entre les marges, au moyen de deux fonctions de distorsion. Nous avons obtenu une mesure cohérente que nous appelés

la mesure de risque de distorsion copule.(CMRD). Cette nouvelle mesure a la particularité d'être supérieure a l'espérance et inférieure au MRD.

Conclusion

En conclusion on constate que parmi les mesures de dépendances les plus utilisées, les fonctions copules sont très usités dans beaucoup de domaines, parmi ces derniers, l'application en finances et assurances sont très appréciées vu les résultats obtenus dans ce domaine, nous l'avons aussi constaté grâce à notre application dans le duxième chapitre, notamment la mesure de risque et sùrtout établir une écriture simple de la fonction de distorsion, tel que cité dans les traveaux de Brahimi et al.(2010).

Nous avons aussi établir la loi de la somme de deux risques X et Y de lois de Paréto et la représentation de leur loi jointe par une copule de Clayton qui appartient à la famille des copules Archimédienne.

Bibliographie

- [1] Nelsen, R.B. (2006). An introduction to copulas, second edition. Springer, New York.
- [2] Cadoux, D. et Marc Loizeau, J. (2004) : Copules et dépendances, France
- [3] Belmir, I ,(2018).Modélisation de la Dépendance par les Copules-Thèse de doctorat (université BISKRA).
- [4] Chine, A ,(2011)-Sur la statistique de copules-Thèse de doctorat (université BISKRA).
- [5] Durrleman, V., Nikeghbali, A., Roncalli, T., (2000). A simple transformation of copulas. Groupe de Recherche Opérationnelle,Crédit Lyonnais, France.
- [6] Lounas, F ,(2011)-Modélisation de la dépendance par les copules et applications-Mémoire de Magister(université Tizi-Ouzou).
- [7] BEZAT,.A.,NIKEGHBALI,.A.,(2000)..La théorie des extrêmes et la gestion des risques de marché..Groupe de Travail ENSAE,.France.
- [8] Brahimi,B.,Meraghni,Dj.,Necir,A.,.(2010)..Distortion risk measures for sums of dependent losses.Journal Afrika Statistika,261-267.
- [9] Wang, S.S., (1995). Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. Insurance Math.Econom., 17, 43-54

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

i.e	: c'est-à-dire.
i.i.d	: indépendantes identiquement distribuées
v.a	: variable aléatoire
$\mathbb{E}[X]$: espérance mathématique ou moyenne du v.a. X .
H, F_i	: Fonction de répartition jointe et marginales
h, f_i	: Densité jointe et marginales
F^{-1}	: fonction inverse
λ_U, λ_L	: Dépendance de queue supérieure, inférieure.
C, C_θ, c	: Copule et copule paramétrique et densité de copule
Π, M, W	: Copules prout, min et max
$\tau_{XY}, \tau_C, \rho_{XY}, \rho_s$: Tau de Kendall et rho de Spearman
ϕ	: Fonction de la loi normale standard
C^Γ	: la copule de distorsion
MRD	: la mesure de risque de distorsion
$CMRD$: la copule de mesure de risque de distorsion