

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Noumidia Yahia

Titre :

**SUR QUALQUES METHODES DE RESOLUTIONS DES EQUATIONS
INTEGRALES**

Membres du Comité d'Examen :

Pr. Mokhtari Zouhir	UMKB	Encadreur
M. Laadjal Baya	UMKB	Examinatrice
M. Adouane Saida	UMKB	Examinatrice

Juin 2019

DÉDICACE

Avant toute chose, je tiens à remercier "Allah" (mon dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et de lever mes mains vers le ciel et de dire "Al hamdo li Allah".

*Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite,
à ma mère.*

A mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie à m'encourager, à m'aider et à me protéger.

À mon mari

À mes adorables sœurs

À tout ceux qui me sont chères

À tout ceux qui m'aiment

Je dédie ce travail.

REMERCIEMENTS

*Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur "**Prof.Zouhir Mokhtari**" pour ses précieux conseils et ses orientations tout au long de la réalisation de ce mémoire.*

*Je remercie infiniment les membres de jury **M. Laadjal** et **M. Adouane**, qui ont accepté d'évaluer mon travail.*

*Tous mes reconnaissances et remerciements distingués s'adressent à notre chef de département "**Dr.Hfayed Mokhtar**" et à tous les enseignants de département de mathématiques de l'université Mohamed Khider Biskra.*

Merci à Tous.

Table des matières

Introduction	1
1 Généralités sur la Théorie des Équations Intégrales	3
1.1 Équations intégrales et leurs classification	3
1.1.1 Équations intégrales non linéaire de Volterra et de Fredholm	4
1.1.2 Équations intégrales linéaire de Volterra et de Fredholm	5
1.1.3 Équations intégrales-Équations différentielles	7
1.2 Résolution de quelque équations intégrales linéaires non singulière	10
1.2.1 Équation intégrales à noyau dégénéré	10
1.2.2 Méthode de déterminant de Fredholm	14
1.2.3 Méthode de la résolvante et noyaux itérés	16
1.2.4 Équation intégrales à noyau différence	19
2 Équations Intégrales Singulières	23
2.1 Équations intégrales singulières de première espèce à noyau de Cauchy	23
2.1.1 Rappels théoriques sur les équations intégrales singulières de Cauchy	23
2.1.2 Méthodes de résolution exactes	27
2.1.3 Équation intégrale de première espèce singulières générale à noyau de Cauchy	31
2.2 Équation intégrale de seconde espèce singulières à noyau de Cauchy	32
2.2.1 Solution d'une équation intégrale singulière sur un contour fermé	32

2.3	Équation intégrale singulière de Carleman	33
2.3.1	Méthode de résolution exacte	33
2.4	Équation d'Abel	34
3	Résolution Numérique des Équations Intégrales	36
3.1	Méthodes de projection	36
3.1.1	Principe des méthodes de projection	36
3.2	Méthode de collocation	39
3.2.1	Application de la méthode de projection	39
3.3	Méthode de Galerkin	41
3.3.1	Application de la méthode de collocation	41
3.3.2	Application de la méthode de Galerkin	41
3.4	Méthode de Nyströme	43
	Conclusion	46
	Bibliographie	47
4	Annexe : Abréviations et notations	48
	Annexe : Abréviations et notations	48

Introduction

Les premières équations intégrales furent obtenues par DANIEL BERNOULLI vers 1730 dans l'étude des oscillations d'une corde tendue. Après l'introduction du noyau de Green, il fallut attendre les dernières années du XIX^e siècle, avec les travaux de H.A.SCHWARTZ, de H.POINCARÉ, de V.VOLTERRA et surtout ceux de I.FREDHOLM, pour disposer de résultats généraux en liaison étroite avec les premiers développements de l'analyse fondamentale. Quelques années plus tard, l'étude des équations conduisit D.HILBERT à définir l'espace qui porte son nom et à poser les premières bases de la théorie spectrale, cadre dans lequel F.RIESZ développera la théorie des opérateurs compacts en 1918. Ainsi, les équations intégrales ont joué un rôle historique important dans l'élaboration des principaux concepts de l'analyse contemporaine.

FREDHOLM (1866 – 1927) a étudié la méthode pour résoudre les équations intégrales du deuxième espèce. La théorie des équations intégrales intervient dans plusieurs domaines de mathématiques, beaucoup de problèmes dans le domaine des équations différentielles ordinaires et partielles, la physique mathématique, les problèmes de contacts et de l'astrophysique.

En 1887, V.VOLTERRA (1860 – 1940) a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés. En outre, il a étendu la théorie des équations intégrales aux équations intégrales différentielles et aux équations intégrales singulières.

Ainsi, la théorie des équations a été un domaine de recherche actif dans les mathématiques appliquées et la physique mathématique. L'importance des équations intégrales dans toutes

les branches de la science et l'ingénierie nous amène à étudier certaines de ces équations et les résoudre numériquement.

La recherche des solutions par des méthodes numériques est d'une nécessité importante par rapport au cadre théorique mis au point. Un théorème d'existence ou l'unicité ou les deux à la fois est certes d'une utilité très importante puisqu'il renseigne sur des informations qui aident à guider à la recherche des solutions. Cependant la solution explicite n'est pas triviale même pour des équations intégrales qui paraissent simples.

Dans ce mémoire, notre but est de résoudre numériquement des équations intégrales, et d'analyser la convergence et l'estimation de l'erreur. Le travail se compose en trois chapitres comme suit :

Le premier chapitre aborde des notations sur les équations intégrales linéaire ou non linéaire et leurs classifications, la relation entre les équations différentielles et les équations intégrales. Ainsi, nous y exposons certaines méthodes de résolution exacte des équations intégrales non singulières. **Au deuxième chapitre**, on va expliquer quelques définition de base et les méthodes de résolutions de certaines équations intégrales singulières, comme les équations intégrales singulières de Carleman, d'Abel et de Cauchy de première et de deuxième espèce. **Dans le troisième et dernier chapitre** nous présentons divers méthodes de résolution numérique des équations intégrales, surtout d'exhiber quelques méthodes d'approximation et leurs applications, telles que : les méthodes de projection, de collocation, de Galerkin et de Nyström.

Chapitre 1

Généralités sur la Théorie des Équations Intégrales

Dans ce chapitre, nous donnons quelques généralités sur les équations intégrales (E.I) et leurs propriétés.

1.1 Équations intégrales et leurs classification

Une équation intégrale peut être classée comme étant soit une équation intégrale linéaire ou non linéaire. Les équations intégrales les plus utilisées sont les équations intégrales de Volterra et celles de Fredholm. Dans l'équation intégrale de Fredholm les bornes d'intégration sont fixées, tandis que dans l'équation intégrale de Volterra les bornes d'intégration sont variables. Par analogie aux équations différentielles la distinction se fait sentir au niveau du problème aux conditions initiales et du problème aux conditions limites. Nous savons l'équation intégrales dans ce formulaire

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t)u(t)dt$$

où $k(x, t)$ est appelée le noyau, $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont les limites de l'intégration. On peut observer que la fonction inconnue $u(x)$ apparaît sous le signe de l'intégrale. et le noyau $k(x, t)$ et la fonction $f(x)$ sont des fonctions connues, λ un paramètre réel et $c \in \{0, 1\}$.

1.1.1 Équations intégrales non linéaire de Volterra et de Fredholm

On appelle équation intégrale de Volterra non linéaire une équation de la forme

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, u(t))dt$$

où $u(x)$ est une fonction inconnue et $k(x, t)$ et la fonction $f(x)$ sont des fonctions connues, λ un paramètre réel et $c \in \{0, 1\}$.

Si $c = 1$ l'équation intégrale obtenue est appelée équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce.

Si $c = 0$ l'équation s'écrit

$$\int_a^x k(x, t, u(t))dt = f(x)$$

elle est appelée équation intégrale de Volterra non linéaire de première espèce.

L'équation intégrale de Volterra peut se transformer aussi en une équation non linéaire du type de Hammerstein

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)F(t, u(t))dt$$

On appelle une équation intégrale de Fredholm non linéaire l'équation de la forme

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t, u(t))dt$$

où $u(x)$ est une fonction inconnue et $k(x, t)$ et la fonction $f(x)$ sont des fonctions connues,

λ un paramètre réel et $c \in \{0, 1\}$.

Si $c = 1$ l'équation intégrale obtenue est appelée équation intégrale de Fredholm non linéaire de seconde espèce.

Si $c = 0$ l'équation s'écrit

$$f(x) = \int_a^b k(x, t, u(t)) dt$$

elle est appelée équation intégrale de Fredholm non linéaire de première espèce.

1.1.2 Équations intégrales linéaire de Volterra et de Fredholm

Une équation intégrale est dite linéaire si la fonction inconnue se présente d'une manière linéaire. La forme générale des équation intégrale linéaire (E.I.L) est

$$cu(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b(x)} k(x, t)u(t) dt \quad (1.1)$$

1. Si $f(x) = 0$, l'équation (1.1) s'écrit

$$cu(x) = \lambda \int_a^{b(x)} k(x, t)u(t) dt$$

elle est dite équation intégrale linéaire homogène.

2. Si $f(x) \neq 0$, l'équation (1.1) est dite non homogène.
3. Si $b(x) = x$, (1.1) est l'équation intégrale linéaire de Volterra.
4. Si $b(x) = b$, (1.1) est l'équation intégrale linéaire de Fredholm.
5. Si $c = 0$, (1.1) est l'équation intégrale linéaire de première espèce.
6. Si $c = 1$, (1.1) est l'équation intégrale linéaire de seconde espèce.
7. Si $c = 1$, $f(x) = 0$ et $\tilde{k}(x, t) = \lambda k(x, t)$, l'équation (1.1) s'écrit

$$u(x) = \lambda \int_a^b \tilde{k}(x, t)u(t) dt$$

Elle est dite équation de Fredholm linéaire de seconde espèce homogène si dans le cas contraire $f(x) = 0$ elle est dite équation de Fredholm linéaire de seconde espèce non homogène.

L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm. Il suffit de prendre le noyau $k(x, t)$ qui vérifie la condition : $k(x, t) = 0$ pour $x < t$.

Équations intégro-différentielles

On considère dans ce type des équations intégrales

$$u''(x) = f(x) + \lambda \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(x) = 1 \quad (1.2)$$

$$u'(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 (xt)\sqrt{u(t)}dt, \quad u(0) = 1 \quad (1.3)$$

On remarquera que l'équation intégrale (1.2) est une équation intégrale linéaire de deuxième espèce de type de Volterra, pendant-que l'équation (1.3) est une équation intégrale non linéaire de deuxième espèce de type de Fredholm.

Équation intégrale à plusieurs variables

On peut généralisée facilement les équations intégrales au cas multidimensionnel. Si les fonctions f , k et u sont à valeurs vectorielles par exemple dans \mathbb{R}^p , alors on obtient les formulations suivantes

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, u(t))dt, \quad x \geq a$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, u(t))dt, \quad a \leq x \leq b$$

avec

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_{p-1}(x), \dots, f_p(x))^T$$

$$k(x, t) = \begin{pmatrix} k_1(x, t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)) \\ k_2(x, t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)) \\ \vdots \\ k_p(x, t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)) \end{pmatrix}$$

Équation intégrale singulière

On dit qu'une équation intégrale singulière si l'une ou les deux limites de l'intégrale sont infinies. Ou bien le noyau devient au voisinage des points de l'intégrale, c-à-d l'intervalle d'intégration n'est pas bornée. Il est de l'une des forme suivantes

$$]-\infty, b], [a, +\infty[,]-\infty, +\infty[.$$

1.1.3 Équations intégrales-Équations différentielles

Lemme 1.1.1 *Pour tout fonction $u(x)$*

$$\int_a^x \int_a^s u(t) dt ds = \int_a^x (x-t)u(t) dt$$

En général, on a

$$\int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} u(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-x_1)^{n-1} u(x) dx_1$$

Preuve. Soit $g(s) = \int_a^s u(t)dt$,

$$\begin{aligned} \int_a^x \int_a^s u(t)dt ds &= \int_a^x g(s)ds = \int_a^x 1.g(s)ds = [sg(s)]_a^x - \int_a^x s.g'(s)ds \quad (\text{intégration par partie}) \\ &= xg(x) - ag(a) - \int_a^x su(s)ds = x \int_a^x u(t)dt - 0 - \int_a^x tu(t)dt \\ &= \int_a^x (x-t)u(t)dt \end{aligned}$$

■

Problème aux conditions initiales

On considère le problème de **Cauchy** de second ordre suivant

$$\begin{cases} u''(x) = F(x, u(x)), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u_0, & u'(0) = u'_0 \end{cases}$$

L'intégration des deux cotés de zéro à x d'équation différentielle, donne

$$u'(x) = u_0 + \int_0^x F(t, u(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

En intégrant une second fois ,

$$u(x) = u_0 + u'_0 x + \int_0^x \int_0^s F(t, u(t))dt ds$$

En utilisant la relation de lemme précédent, on obtient

$$u(x) = u_0 + u'_0 x + \int_0^x (x-t)F(t, u(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

C'est l'équation intégrale de Volterre de second espèce.

D'autre part, on remarque que cette équation intégrale est linéaire si l'intégrande $F(t, u(t))$

a la forme $F(t, u(t)) = \alpha(t)u(t)$, ou si l'équation différentielle initiale est elle aussi linéaire.

Problème aux conditions limites

Comme on peut transformé un schéma mathématique sous la forme d'une équation intégrale, on peut être aussi traduit en un problème différentiel de valeurs aux limites. Nous allons traiter l'équation différentielle d'ordre 2 suivante avec des conditions aux limites.

On considère le problème de **Dirichlet** suivant

$$\begin{cases} u''(x) = F(x, u(x)), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u_0, & u(1) = u_1 \end{cases}$$

En intégrant l'équation deux fois de suite par rapport à x le long de l'intervalle $[0, x]$, il vient

$$u'(x) = c + \int_0^x F(t, u(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

et

$$u(x) = u_0 + cx + \int_0^x (x-t)F(t, u(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Pour déterminer la constante c , on prend $x = 1$ et on utilise la condition $u(1) = u_1$, ce qui donne

$$c = u_1 - u_0 - \int_0^1 (1-t)F(t, u(t))dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Ainsi, l'équation devient

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 + (u_1 - u_0)x + \int_0^x (x-t)F(t, u(t))dt - x \int_0^1 (1-t)F(t, u(t))dt \\ &= u_0 + (1 - u_0)x + \int_0^x t(1-x)F(t, u(t))dt - \int_x^1 x(1-t)F(t, u(t))dt \end{aligned}$$

qui s'écrit encore comme une équation intégrale de Fredholm de la forme

$$u(x) = u_0 + (u_1 - u_0)x - \int_0^1 k(x, t)F(t, u(t))dt$$

où

$$k(x, t) = \begin{cases} t(1-x), & t \leq x \\ x(1-t), & t \geq x \end{cases}$$

1.2 Résolution de quelques équations intégrales linéaires non singulière

1.2.1 Équation intégrales à noyau dégénéré

On appelle équation intégrale linéaire non singulière à noyau dégénéré une équation de la forme

$$k(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(t)$$

où $k(x, t)$ est appelé le noyau dégénéré, a_i et b_i sont des fonctions continues dans le carré $[a, b] \times [a, b]$ avec $a \leq x$ et $t \leq b$, et linéairement indépendantes.

Remarque 1.2.1 *Les a_i et b_i sont des fonctions supposées continues pour que le noyau $k(x, t)$ soit continue dans le carré $[a, b] \times [a, b]$.*

Équation intégrale de Volterra

Considérons l'E.I de Volterra de première espèce

$$\int_a^x k(x, t)u(t)dt = f(x) \tag{1.4}$$

tel que $a \leq x \leq b$ et $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

★Suposons que le noyau $k(x, t) = g(x)h(t)$ E.I (1.4) est de la forme

$$g(x) \int_a^x h(t)u(t)dt = f(x)$$

donc la solution de E.I (1.4) est

$$u(x) = \frac{1}{g(x)h(x)} \left[f'(x) - g'(x) \frac{f(x)}{g(x)} \right]$$

★Suposons que la noyau $k(x, t) = g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)$ l'équation (1.4) est de la forme

$$g_1(x) \int_a^x h_1(t)u(t)dt + g_2(x) \int_a^x h_2(t)u(t)dt = f(x) \quad (1.5)$$

où $g_1(x) \neq \alpha g_2(x)$, $h_1(t) \neq \beta h_2(t)$ avec α, β sont des constantes, avec $0 < g_1^2(a) + g_2^2(x) < \infty$ et on prenant le changement de variable

$$u(x) = \int_a^x h_1(t)u(t)dt \quad (1.6)$$

L'intégration par parties dans la deuxième intégrale dans (1.5) en tenant compte que $u(a) = 0$ donne

$$[g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x)] u(x) - g_2(x)h_1(x) \int_a^x \left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)} \right]'_t u(t)dt = f(x) \quad (1.7)$$

On pose

$$w(x) = \int_a^x \left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)} \right]'_t u(t)dt \quad (1.8)$$

L'équation (1.7) s'écrit sous la forme

$$[g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x)] w'_x - g_2(x)h_1(x) \int_a^x \left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)} \right]'_t w(t) dt = f(x)h_1(x) \left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)} \right] \quad (1.9)$$

Dans le cas où $g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x) \neq 0$ la solution de l'équation (1.9) la condition $w(a) = 0$ à la forme

$$w(x) = \phi(x) \int_a^x \left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)} \right]'_t \frac{f(t)h_1(t)}{\phi(t) [g_1(t)h_1(t) + g_2(t)h_2(t)]} dt \quad (1.10)$$

avec

$$\phi(x) = \exp \left\{ \int_a^x \left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)} \right]'_t \frac{g_2(t)h_1(t) dt}{g_1(t)h_1(t) + g_2(t)h_2(t)} \right\} \quad (1.11)$$

En utilisant la relation (1.8) et (1.10) et avec une intégration par parties et en tenant compte que $f(a) = 0$ et $w(a) = 0$ et pour $f(x) \neq \text{const.}g_2(x)$ nous obtenons ainsi

$$u(x) = \frac{g_2(x)h_2(x)\phi(x)}{g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x)} \int_a^x \left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)} \right]'_t \frac{dt}{\phi(t)}$$

En utilisant la relation (1.6) nous trouvons une solution de l'équation précédent (1.4) sous la forme

$$u(x) = \frac{1}{h_1(x)} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{g_2(x)h_1(x)\phi(x)}{g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x)} \int_a^x \left[\frac{h_2(t)}{h_1(t)} \right]'_t \frac{dt}{\phi(t)} \right\} \quad (1.12)$$

quant la fonction $\phi(x)$ est définie par la formule (1.11).

Dans le cas où $g_1(x)h_1(x) + g_2(x)h_2(x) = 0$ la solution de l'équation (1.4) est de la forme

$$u(x) = \frac{1}{h_1} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{(f/g_2)'_x}{(g_1/g_2)'_x} \right\} = -\frac{1}{h_1} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{(f/g_2)'_x}{(h_2/h_1)'_x} \right\}$$

★Suposons que le noyau $k(x, t) = g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$ alors l'équation

(1.4) s'écrit sous la forme

$$\sum_{m=1}^n g_m(x) \int_a^x h_m(t)u(t)dt = f(x) \quad (1.13)$$

En utilisant la notation

$$w_m(x) = \int_a^x h_m(t)u(t)dt \quad m = 1, \dots, n \quad (1.14)$$

On peut réécrire l'équation (1.13) on obtient

$$\sum_{m=1}^n g_m(x)w_m(x) = f(x) \quad (1.15)$$

En dérivant l'équation (1.14) on obtient

$$\frac{d}{dx}w_m(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x h_m(t)u(t)dt \quad m = 1, \dots, n$$

et

$$w'_m(x) = h_m(x)u(x) \quad m = 1, \dots, n$$

donc

$$h_1(x)w'_m(x) = h_m(x)h_1(x)u(x) \quad m = 1, \dots, n$$

alors

$$h_1(x)w'_m(x) = h_m(x)w'_1(x) \quad m = 2, \dots, n \quad (1.16)$$

En tenant compte des conditions

$$w'_m(x) = 0 \quad m = 1, \dots, n$$

Les solutions des deux systèmes (1.15) et (1.16) permettent de donner la solution originale de l'équation de (1.13) sous la forme

$$u(x) = \frac{w'_m(x)}{h_m(x)} \quad m = 1, \dots, n$$

1.2.2 Méthode de déterminant de Fredholm

Principe de la méthode

La solution de l'équation de Fredholm de second espèce

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = f(t) \quad (1.17)$$

est donnée par la formule

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda)f(t)dt$$

où $R(x, t; \lambda)$ est dite la résolvante de Fredholm de l'équation (1.17) et est définie par l'égalité

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

Sous la condition $D(\lambda) \neq 0$. Ici $D(x, t; \lambda)$ et $D(\lambda)$ sont des séries de puissances de λ tels que

$$D(x, t; \lambda) = k(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} A_n(x, t) \lambda^n, \quad D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n \lambda^n \quad (1.18)$$

Les fonctions $D(x, t; \lambda)$ et $D(\lambda)$ sont respectivement le déterminant de Fredholm et le mineur du déterminant de Fredholm. Si le noyau $k(x, t)$ est borné ou si l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt < +\infty$$

les séries (1.18) convergent quel que soit λ et elles sont des fonction analytiques entières de λ

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

sauf les λ qui sont zéros de $D(\lambda)$. Ces derniers sont des poles de la résolvants $R(x, t; \lambda)$.

Avec les coefficients ainsi définies

$$A_0(x, t) = k(x, t)$$

et pour $n = 1, 2, \dots$ on a

$$A_n(x, t) = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \begin{vmatrix} k(x, t) & k(x, t_1) & \dots & k(x, t_1) \\ k(t_1, t) & k(t_1, t_1) & \dots & k(t_1, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(t_n, t) & k(t_n, t_1) & \dots & k(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

$$B_0(x, t) = 1$$

et pour $n = 1, 2, \dots$ on a

$$B_n(x, t) = \underbrace{\int_a^b \dots \int_a^b}_n \begin{vmatrix} k(t_1, t_1) & k(t_1, t_2) & \dots & k(t_1, t_n) \\ k(t_2, t_1) & k(t_2, t_2) & \dots & k(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(t_n, t_1) & k(t_n, t_2) & \dots & k(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

et les coefficients $A_n(x, t)$ et B_n vérifient les relations suivantes

$$A_n(x, t) = B_n k(x, t) - n \int_a^b k(x, s) A_{n-1}(s, t) ds$$

$$B_n = \int_a^b A_{n-1}(s, s) ds$$

Voir le Réf [7, p 100 – 105].

1.2.3 Méthode de la résolvante et noyaux itérés

Cas équation de Volterra

Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt \quad (1.19)$$

où $k(x, t)$ est une fonction continue pour $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$ et $f(x)$ est continue pour $x \in [a, b]$. Cherchons la solution de cette équation sous la forme d'une série entière illimitée suivant les puissances de λ

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n y_n(x) \quad (1.20)$$

Portons formellement cette série dans (1.19), il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} y_n(x) \lambda^n = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \sum_{n=0}^{+\infty} y_n(x) \lambda^n dt$$

En procédant par identification nous obtenons

$$y_0(x) = f(x),$$

$$y_1(x) = \int_a^x k(x, t)y_0(t)dt = \int_a^x k(x, t)f(t)dt,$$

$$y_2(x) = \int_a^x k(x, t)y_1(t)dt = \int_a^x k_2(x, t)f(t)dt,$$

$$y_3(x) = \int_a^x k(x, t)y_2(t)dt = \int_a^x k_3(x, t)f(t)dt, \dots etc$$

On établit de façon analogue qu'en générale on a

$$y_n(x) = \int_a^x k(x, t)y_{n-1}(t)dt = \int_a^x k_n(x, t)f(t)dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.21)$$

Ici on a

$$k_n(x, t) = \int_t^x k(x, z)k_{n-1}(z, t)dz \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.22)$$

et on a les relations $k_1(x, t) = k(x, t)$ et $k_n(x, t) = 0$ si $t > x$.

Les fonctions $k_n(x, t)$ définies par (1.21) s'appellent noyaux itérés, les noyaux ont les propriétés suivantes

$$k_n(x, t) = \int_a^x k_m(x, s)k_{n-m}(s, t)ds$$

Compte tenu de (1.21) et (1.22) l'égalité (1.20) peut s'écrire

$$u(x) = f(x) + \sum_{v=1}^{+\infty} \lambda^v \int_a^x k_v(x, t)f(t)dt$$

Ainsi d'après (1.19) le noyau résolvante est définie par la série

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{v=0}^{+\infty} \lambda^v k_{v+1}(x, t)$$

Cas équation de Fredholm

Soit l'équation intégrale de Fredholm de type

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = f(x) \quad (1.23)$$

On cherchons les solutions sous la forme

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \Psi_n(x)$$

Avec $\Psi_n(x)$ définis par les formules

$$\Psi_0(x) = f(x),$$

$$\Psi_1(x) = \int_a^b k(x, t) f(t) dt,$$

$$\Psi_2(x) = \int_a^b k(x, t) \Psi_1(t) dt = \int_a^b k_2(x, t) f(t) dt,$$

$$\Psi_3(x) = \int_a^b k(x, t) \Psi_2(t) dt = \int_a^b k_3(x, t) f(t) dt, \dots etc$$

Ici on a

$$\Psi_n(t) = \int_a^b k_n(x, t) f(t) dt$$

avec

$$k_n(x, t) = \int_a^b k(x, z) k_{n-1}(z, t) dz$$

et

$$k_1(x, t) = k(x, t)$$

on a aussi

$$k_m(x, t) = \int_a^b k_m(x, z) k_{n-m}(z, t) dz$$

Les résolvante de l'équation (1.23) est définie en fonction des noyaux itérés de la forme suivante

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} k_n(x, t) \lambda^{n-1}$$

cette série est la série de **Neumann** du noyau $k_n(x, t)$. Elle est convergente pour un rayon

$$|\lambda| < \frac{1}{M}$$

avec

$$M = \sqrt{\int_a^b \int_a^b k^2(x, t) dx dt}$$

Alors la solution de l'équation de Fredholm est donnée par

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n \Psi_n(x)$$

$$u(t) = f(x) + \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt$$

1.2.4 Équation intégrales à noyau différence

Définition 1.2.1 *On dit qu'une équation intégrale est à noyau différence si*

$$k(x, t) = k(x - t)$$

Équation de Volterra de première espèce

Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce à noyau différence

$k(x, t) = k(x - t)$, i.e

$$\int_a^x k(x - t) u(t) dt = f(x) \tag{1.24}$$

Pour résoudre ces équations ,on utilise la transformée de **Laplace**.tel que

$$\mathcal{L}(k, p) = \tilde{k}(p) = \int_0^{+\infty} k(x) \exp(-px) dx$$

$$\mathcal{L}(f, p) = \tilde{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(x) \exp(-px) dx$$

En appliquant la transformée de **Laplace** à l'équation (1.24) on obtient

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^x k(x-t)u(t) dt \right\} = \tilde{k}(p) \cdot \tilde{u}(p)$$

Ainsi on a

$$\tilde{k}(p) \cdot \tilde{u}(p) = \tilde{f}(p) \tag{1.25}$$

La solution de (1.25) est donnée par la formule

$$\tilde{u}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{\tilde{k}(p)} \tag{1.26}$$

La transformée de **Laplace** inverse de l'équation (1.26) donne la solution de l'équation précédent (1.24)

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{\tilde{k}(p)} \exp(px) dp.$$

Cas particulier Prenons le cas important dans lequel la transformation est une fonction rationnelle de la forme

$$\tilde{u}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{\tilde{k}(p)} = \frac{H(p)}{Q(p)}$$

Si $H(p)$ et $Q(p)$ sont des polynôme de la variable p .

► Si les zéros du dominateur $Q(p)$ sont simples

$$Q(p) = \alpha.(p - \lambda_1)(p - \lambda_2) \cdots (p - \lambda_n), \text{ où } \alpha = \text{const}$$

et $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$ dans ce cas la solution de l'équation (1.24) est de la forme

$$u(x) = \sum_{k=1}^n \frac{H(\lambda_k)}{Q'(\lambda_k)} \exp(\lambda_k x)$$

► Si les zéros du dominateur $Q(p)$ ne sont pas simples

$$Q(p) = \alpha.(p - \lambda_1)^{r_1}(p - \lambda_2)^{r_2} \cdots (p - \lambda_m)^{r_m}, \text{ où } \alpha = \text{const}$$

alors

$$u(x) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(r_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow \lambda_k} \frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}} [(p - \lambda_k)^{r_k} \tilde{u}(p) \exp(px)]$$

Équation intégrale de Volterra de deuxième espèce

Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra de deuxième espèce à noyau différence

$$k(x, t) = k(x - t)$$

$$u(x) - \int_0^x k(x, t)u(t)dt = f(x) \tag{1.27}$$

En appliquant la transformation de **Laplace** à (1.27) on aura

$$\tilde{u}(p) - \tilde{k}(p)\tilde{u}(p) = \tilde{f}(p) \tag{1.28}$$

la solution de (1.28) est donnée par

$$\tilde{u}(p) = \frac{\tilde{f}(p)}{1 - \tilde{k}(p)} \equiv \tilde{f}(p) + \frac{\tilde{k}(p)}{1 - \tilde{k}(p)} \tilde{f}(p)$$

ou bien

$$\tilde{u}(p) = \tilde{f}(p) + \tilde{R}(p)\tilde{f}(p), \quad \tilde{R}(p) = \frac{\tilde{k}(p)}{1 - \tilde{k}(p)}$$

Donc la transformation de **Laplace** inverse donne

$$u(x) = f(x) + \int_0^{+\infty} R(x-t)f(t)dt, \quad \text{avec} \quad R(x) := \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{R}(p) \exp(px)dp$$

Chapitre 2

Équations Intégrales Singulières

2.1 Équations intégrales singulières de première espèce à noyau de Cauchy

2.1.1 Rappels théoriques sur les équations intégrales singulières de Cauchy

Il est nécessaire de rappeler quelques définitions et remarques des équations intégrales singulières de **Cauchy**

Définition 2.1.1 Une équation intégrale singulière est définie comme une intégrale avec les limites infinies ou lorsque le noyau de l'intégrale devienne non lié à un certain moment dans l'intégrale comme pour obtenir des exemples

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1$$

– Une équation intégrale est dite singulière si :

- i) L'intervalle d'intégrale n'est pas borné c-à-d, il est de la forme suivantes : $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, +\infty[$.
- ii) Le noyau est singulier (n'est pas régulier), ou bien le noyau est discontinu.
- iii) Le noyau de l'équation intégrale

$$k(x, t) = \frac{M(x, t)}{(x - t)^\alpha} \quad 0 < \alpha < 1$$

et $M(x, t)$ une fonction continue dans le carré $[a, b] \times [a, b]$, l'équation suivante

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)dt}{\sqrt{(x - t)}} \quad 0 < \alpha < 1$$

est exemple d'une équation intégrale singulière est appelée équation intégrale **d'Abel**.

Exemple 2.1.1 Par exemple si le noyau $k(x, t)$ de E.I.L de Fredholm est de la forme

$$k(x, t) = \frac{M(x, t)}{|x - t|^\alpha} \quad 0 < \alpha \leq 1$$

Avec $M(x, t)$ une fonction bornée sur $[a, b] \times [a, b]$.

Ou encore un noyau $k(x, t)$ logarithmique

$$k(x, t) = M(x, t) \ln |x - t|$$

·Si $\alpha = 1$ alors $k(x, t)$ est appelé noyau de **Cauchy**

$$k(x, t) = \frac{M(x, t)}{|x - t|}$$

Définition 2.1.2 Une équation intégrale singulière de première espèce avec noyau de

Cauchy a la forme suivante

$$\frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad i^2 = -1 \quad (2.1)$$

où Γ est un chemin fermé où non dans le plan complexe de la variable $z = x + iy$; t et τ deux nombres complexes inclus dans Γ , avec $u(t)$ est une fonction inconnue, $f(t)$ est une fonction donnée.

Remarque 2.1.1 ► Si Γ est la droite réelle l'équation intégrale singulière de première espèce à noyau de **Cauchy** sur l'axe réel est de la forme

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)dt}{t - x} = F(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

► Si Γ est un segment $[a, b]$ l'équation intégrale singulière de première espèce à noyau de **Cauchy** sur l'intervalle fini $[a, b]$ est de la forme

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{u(t)dt}{t - x} = F(x), \quad a \leq x \leq b$$

► En générale l'équation intégrale singulière de première espèce à noyau de **Cauchy** sur un chemin Γ fermé où non dans le plan complexe est de la forme

$$\frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{M(t, \tau)u(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad i^2 = -1$$

Définition 2.1.3 Soit Γ une courbe dans le plan complexe $z = x + iy$ régulière, et soit ψ une fonction définie sur Γ . On dit que ψ satisfait à la condition de **Hölder** sur Γ si $\forall t_1, t_2 \in \Gamma$ on a

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| < C |t_1 - t_2|^\alpha$$

où C et α sont des constantes positives.

Remarque 2.1.2 Si $\alpha > 1$ alors la dérivée ψ'_t s'annule partout donc $\psi(t)$ est constante, par conséquent nous supposons que $0 < \alpha \leq 1$.

La valeur principale de l'intégrale curviligne singulière

Soit Γ une courbe régulière dans le plan complexe et considérons l'intégrale curviligne singulière suivante

$$I = \int_{\Gamma} \frac{u(\tau)d\tau}{\tau - t} \quad (2.2)$$

Prenons un cercle quelconque de centre $t \in \Gamma$ et de rayon ε soient $\tau_{1,\varepsilon}$ et $\tau_{2,\varepsilon}$ l'intersection de ce cercle avec la courbe Γ . Soit l'intégrale I_ε définie par

$$I_\varepsilon = \int_{\Gamma - \gamma_\varepsilon} \frac{u(\tau)d\tau}{\tau - t}$$

tel que $\gamma_\varepsilon = \overrightarrow{\tau_{1,\varepsilon}\tau_{2,\varepsilon}}$, alors si la limite de I_ε quant $\varepsilon \rightarrow 0$ existe, on dit que c'est la valeur principale de **Cauchy** ou bien la valeur principale de l'intégrale curviligne singulière et on note

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon$$

D'autres part

$$\int_{\Gamma} \frac{u(\tau)d\tau}{\tau - t} = \int_{\Gamma} \frac{u(\tau) - u(t)}{\tau - t} d\tau + u(t) \int_{\Gamma} \frac{d\tau}{\tau - t}$$

De même façon ci-dessus, nous voyons que l'intégrale singulière (2.2) existe dans le sens de la valeur principale de **Cauchy** pour tout fonction Hölderienne $u(\tau)$. Cette intégrale peut être présentée sous deux formes

$$\int_{\Gamma} \frac{u(\tau)d\tau}{\tau - t} = \int_{\Gamma} \frac{u(\tau) - u(t)}{\tau - t} d\tau + u(t) \left(\ln \frac{b-t}{a-t} + i\pi \right)$$

et

$$\int_{\Gamma} \frac{u(\tau)d\tau}{\tau - t} = \int_{\Gamma} \frac{u(\tau) - u(t)}{\tau - t} d\tau + u(t) \ln \frac{b-t}{a-t} + u(t)i\pi$$

où a et b sont les extrémités de Γ . En particulier, si la courbe est fermée c-à-d *i.e* : $a = b$, nous obtenons

$$\int_{\Gamma} \frac{u(\tau)d\tau}{\tau - t} = \int_{\Gamma} \frac{u(\tau) - u(t)}{\tau - t} d\tau + u(t)i\pi$$

Théorème de Bertrand Poincaré

Théorème 2.1.1 *Considérons les intégrales singulières suivantes :*

$$N(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t} \cdot \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{K(\tau_1, \tau)}{\tau - \tau_1} d\tau$$

$$M(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} d\tau \cdot \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{K(\tau_1, \tau)}{(\tau_1 - t)(\tau - \tau_1)} d\tau_1$$

quand Γ est un chemin régulier et la fonction $K(\tau_1, \tau)$ satisfait la condition de **Hölder** pour les deux variables. Les deux intégrales ont un sens, et bien que N se distingue de M , ils ne sont pas égaux, on la formule de **Bertrand Poincaré** suivante

$$\frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t} \cdot \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{K(\tau_1, \tau)}{\tau - \tau_1} d\tau = K(t, t) + \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} d\tau \cdot \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{K(\tau_1, \tau)}{(\tau_1 - t)(\tau - \tau_1)} d\tau_1 \quad (2.3)$$

qui peut aussi être réécrit sous la forme

$$\int_{\Gamma} \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t} \cdot \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{K(\tau_1, \tau)}{\tau - \tau_1} d\tau = -\pi^2 K(t, t) + \int_{\Gamma} d\tau \cdot \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{K(\tau_1, \tau)}{(\tau_1 - t)(\tau - \tau_1)} d\tau_1$$

Voire le Réf [3, p 714].

2.1.2 Méthodes de résolution exactes

Considérons l'équation intégrale singulière

$$\frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau)}{\tau - \tau_1} d\tau = f(x)$$

avec Γ un contour fermé, dans ce cas on remplace la variable t par τ_1

$$f(\tau_1) = \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau)}{\tau - \tau_1} d\tau$$

$$\frac{1}{i\pi} \frac{f(\tau_1)}{\tau_1 - t} = \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau) d\tau}{\tau - \tau_1} \frac{1}{i\pi} \frac{1}{\tau_1 - t}$$

$$\frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau_1) d\tau_1}{\tau_1 - t} = \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau) d\tau}{\tau - \tau_1} \cdot \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t}$$

Nous appliquons la formule (2.3) de **Bertrand Poincaré**, donc

$$\frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t} \cdot \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau)}{\tau - \tau_1} d\tau = u(t) + \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} u(\tau) d\tau \cdot \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\tau_1}{(\tau_1 - t)(\tau - \tau_1)}$$

Alors on à

$$\frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau_1) d\tau_1}{\tau_1 - t} = u(t) + \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} u(\tau) d\tau \cdot \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\tau_1}{(\tau_1 - t)(\tau - \tau_1)}$$

Nous calculons la deuxième intégrale sur le côté droit de l'équation précédent alors

$$\int_{\Gamma} \frac{d\tau_1}{(\tau_1 - t)(\tau - \tau_1)} = \frac{1}{\tau - t} \left(\int_{\Gamma} \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t} - \int_{\Gamma} \frac{d\tau_1}{\tau_1 - \tau} \right) = \frac{1}{\tau - t} (i\pi - i\pi) = 0$$

Ce qui donne

$$u(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(\tau_1) d\tau_1}{\tau_1 - t} \quad (2.4)$$

Équation intégrale singulière à noyau de Cauchy sur l'axe réel

Considérons l'équation intégrale singulière de première espèce sur l'axe réel suivante

$$\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t) dt}{t - x} = F(x), \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) est un cas particulier de l'équation intégrale précédent (2.1) sur l'axe réel, d'après (2.4) la solution de l'équation (2.5)

$$u(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)dt}{t-x}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.6)$$

On pose $f(x) = F(x)i^{-1}$, et nous réécrivons les équations (2.5) et (2.6) sous la forme

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)dt}{t-x} = F(x), \quad u(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(t)dt}{t-x}$$

Équation intégrale singulière à noyau de Cauchy sur un intervalle fini

Considérons l'équation intégrale singulière de première espèce sur l'intervalle fini $[a, b]$ suivante

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)dt}{t-x} = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

Ses solutions peuvent être construites en utilisant la théorie des problèmes aux limites de **Riemann** pour un chemin non fermé. Nous présentons les résultats définitifs

1. Une solution qui n'est pas borné aux deux extrémités

$$u(t) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \left(\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} f(t)dt + C \right)$$

où C est une constante arbitraire et

$$\int_a^b u(t)dt = C$$

2. Une solution bornée au point a et non bornée à l'extrémité b

$$u(t) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{(x-a)}{(b-x)}} \int_a^b \sqrt{\frac{t-a}{b-t}} \frac{f(t)}{t-x} dt$$

3. Une solution bornée aux deux extrémités

$$u(x) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{(x-a)(b-x)} \int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)} t-x} dt$$

à condition que

$$\int_a^b \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = 0$$

• Les solutions qui ont un point de singularité C à l'intérieur de l'intervalle $[a, b]$ peuvent aussi être construites. Ces solutions ont la forme suivante :

4. Une solution unique qui est non bornée aux extrémités

$$u(x) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{(x-a)(b-x)} \left(\int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t-x} f(t) dt + C_1 + \frac{C_2}{x-s} \right)$$

où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

5. Une solution singulière bornée à une extrémité

$$u(x) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{(x-a)(b-x)} \left(\int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)} t-x} dt + \frac{C}{x-s} \right)$$

6. Une solution singulière bornée aux deux extrémités

$$u(x) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{(x-a)(b-x)} \left(\int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(b-t)} t-x} dt + \frac{D}{x-s} \right) \quad (2.7)$$

où

$$D = \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$$

2.1.3 Équation intégrale de première espèce singulières générale à noyau de Cauchy

Considérons l'équation intégrale singulières générale de première espèce suivante

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{H(t, \tau)}{t - \tau} u(\tau) d\tau = f(t) \quad (2.8)$$

Nous effectuons l'écriture suivant avec le noyau

$$\frac{H(t, \tau)}{\tau - t} = \frac{H(t, \tau) - H(t, t)}{\tau - t} + \frac{H(t, t)}{\tau - t}$$

et on

$$H(t, t) = b(t), \quad \frac{1}{i\pi} \frac{H(t, \tau) - H(t, t)}{\tau - t} = k(t, \tau) \quad (2.9)$$

On peut réécrire l'équation (2.8) sous la forme

$$\frac{b(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau + \int_{\Gamma} k(t, \tau) u(\tau) d\tau = f(t)$$

Dans les deux égalités la fonction $b(t)$ vérifie la condition de **Hölder** dans le contour Γ et le noyau $k(t, \tau)$ vérifie

$$|k(t, \tau)| < \frac{C}{|\tau - t|^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < 1$$

On suppose que la fonction $k(t, \tau)$ est le prolongement analytique sur le domaine de l'intérieur du contour noté Ω^+ , telle que $H(z, z) \neq 0$ pour $z \in \overline{\Omega^+}$, dans ce cas la solution de l'équation (2.7) est donnée par la relation suivante

$$u(t) = \frac{1}{i\pi} \frac{1}{H(t, t)} \int_{\Gamma} \frac{H(t, \tau)}{H(\tau, \tau)} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

2.2 Équation intégrale de seconde espèce singulières à noyau de Cauchy

Définition 2.2.1 *Considérons l'équation intégrale singulière de seconde espèce à noyau de Cauchy suivante*

$$a(t)u(t) + \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{H(t, \tau)}{\tau - t} u(\tau) d\tau = f(t), \quad i^2 = -1 \quad (2.10)$$

où Γ est un chemin fermé ou non dans le plan complexe de la variable $z = x + iy$; avec t et τ deux nombres complexes inclus dans Γ , $u(t)$ est une fonction inconnue et $f(t)$ est une fonction donnée. D'après les relations (2.9) et l'équation (2.10) sera écrite sous la forme

$$a(t)u(t) + \frac{b(t)}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{\Gamma} k(t, \tau)u(\tau) d\tau = f(t)$$

2.2.1 Solution d'une équation intégrale singulière sur un contour fermé

Formules de Sokhotski-Plemelj

Soit Γ une courbe régulière dans le plan complexe et soit $u(t)$ une fonction Hölderienne sur Γ alors l'intégrale de **Cauchy**

$$\phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

Si $t \in \Gamma$ alors $\phi(z)$ peut avoir deux limites (intérieur et extérieur) notés par $\phi^+(t)$ et $\phi^-(t)$ quand $z \rightarrow t$ définies par

$$\phi^+(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad \phi^-(t) = -\frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

On remarque que

$$\phi^+(t) - \phi^-(t) = u(t), \quad \phi^+(t) + \phi^-(t) = \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

2.3 Équation intégrale singulière de Carleman

Définition 2.3.1 On appelle équation intégrale singulière de **Carleman** l'équation suivante

$$a(x)u(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{u(\tau)}{\tau - x} d\tau = f(x) \quad (2.11)$$

2.3.1 Méthode de résolution exacte

Nous introduisons une fonction analytique $\phi(z)$ dans le plan complexe

$$\phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{+\infty} \frac{u(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

Et en utilisant les formules de Sokhotski-Plemelj

$$\phi^{\pm}(t) = \pm \frac{1}{2} u(t) + \frac{1}{2i\pi} \int_0^{+\infty} \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

Alors on peut être extrimée l'équation (2.11) comme suit

$$\{a(x) + i\} \phi^+(x) - \{a(x) - i\} \phi^-(x) = f(x), \quad x > 0 \quad (2.12)$$

avec

$$\phi^{\pm}(t) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \phi^{\pm}(t), \quad x > 0 \quad t = x + iy$$

La solution du problème (2.12) peut être facilement obtenue sous la forme

$$\phi(t) = \phi_0(t) \frac{1}{2i\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(a(\tau) + i)\phi_0^+(\tau) - t} \frac{d\tau}{\tau - t} \quad (2.13)$$

où $\phi_0^+(t)$ représente la solution homogène du problème

$$\{a(x) + i\} \phi_0^+(x) - \{a(x) - i\} \phi_0^-(x) = 0, \quad x > 0$$

avec

$$\phi_0^\pm(t) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \phi^\pm(t), \quad x > 0$$

Cette fonction $\phi_0(t)$ est déterminée par

$$\phi_0(t) = \exp \left[\frac{1}{2i\pi} \int_0^{+\infty} \ln \left(\frac{a(\tau) - i}{a(\tau) + i} \right) \frac{d\tau}{\tau - t} \right]$$

Ainsi $\phi(t)$ est maintenant connue de (2.13), et la solution de l'équation intégrale (2.11) est obtenue en utilisant la formule

$$u(x) = \phi^+(x) - \phi^-(x), \quad x > 0$$

Voir le Réf[4, p 241].

2.4 Équation d'Abel

Considérons l'équation intégrale **d'Abel** l'équation suivante

$$\int_0^x k(x-t)u(t)dt = f(x)$$

Définition 2.4.1 On appelle équation intégrale **d'Abel** une équation de la forme

$$u(x) = \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} g(u(t)) dt$$

où $0 < \alpha < 1$ et $g : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ tel que : $g(0) = 0$.

Définition 2.4.2 *Considérons l'équation intégrale de noyau*

$$k(x, t) = \frac{p(x, t)}{(x - t)^\alpha}, \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1$$

et $p(x, t)$ une fonction continue dans le carré $[a, b] \times [a, b]$. On a l'équation suivante

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

où $u(t)$ est la fonction inconnue, $f(x)$ une fonction donnée, est une exemple d'une équation intégrale singulière est appelée équation intégrale **d'Abel**, et la solution exact s'écrit

$$-u(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

On appelle également équation **d'Abel** généralisée une équation de la forme

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

où α constante tel que $0 < \alpha < 1$.

Chapitre 3

Résolution Numérique des Équations Intégrales

3.1 Méthodes de projection

Définition 3.1.1 (opérateurs de projection) : Soit V une espace de Banach, et soit un opérateur $P \in \mathcal{L}(V)$ tel que $P^2 = P$ est un opérateur de projection. Si V est un espace d'Hilbert alors l'opérateur P est appelé l'opérateur de projection orthogonal. On peut remarque facilement que l'opérateur de projection P est orthogonal si et seulement si

$$\langle Pv, (I - P)u \rangle = 0, \quad \forall u, v \in V$$

3.1.1 Principe des méthodes de projection

Dans toutes les méthodes de projection, on étudie la résolution de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$\lambda\varphi(x) - \int_D K(x, t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x \in D \quad (3.1)$$

où l'ensemble D est un fermé borné d'un espace de fonctions complet V , avec $V = C(D)$ ou $V = L^2(D)$ presque partout. On prend une suite finie d'approximation de sous espace V_n de dimension k_n , tel que $V_n \subset V$, $n \geq 1$. Soit la base $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ de V_n .

Le principe du méthode de projection consiste à chercher une suite de fonctions $\varphi_n \in V_n$, tel que

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=0}^{k_n} c_j \phi_j(x), \quad x \in D$$

On introduit le résidu $r_n(x)$ pour approcher la solution de l'équation (3.1)

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \lambda \varphi_n(x) - \int_D K(x, t) \varphi_n(t) dt - f(x) \\ &= \sum_{j=0}^{k_n} c_j \left\{ \lambda \phi_j(x) - \int_D K(x, t) \phi_j(t) dt \right\} - f(x) \end{aligned}$$

avec φ_n est approximation de la solution φ de l'équation (3.1) et on la note par $\varphi \approx \varphi_n$.

Alors, l'équation (3.1) peut être écrite sous la forme de notation d'opérateur, tel que

$$(\lambda - K)\varphi = f$$

et le résidu r_n peut être écrite sous la forme

$$r_n = (\lambda - K)\varphi - f$$

Les coefficients $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ doivent être choisi de sorte que

$$r_n(x) \rightarrow 0$$

Convergence et estimation

Lemme 3.1.1 *Soit V, W deux espaces de Banach, et soit $A_n : V \rightarrow W$, $n \geq 1$ une suite d'opérateurs linéaires bornés. On suppose que $A_n \varphi \rightarrow \varphi \in V$. Alors la convergence est*

uniforme sur les sous ensembles compacts de V .

Preuve. Car les opérateurs sont uniformément bornés

$$M = \sup_{n \geq 1} \|A_n\| < \infty$$

Alors les opérateurs A_n sont équicontinus

$$\|A_n \varphi - A_n f\| < M \|\varphi - f\|$$

Si S est un compact de V , alors la suite d'opérateurs $(A_n)_{n \geq 1}$ est une famille uniformément bornée et équicontinue sur S , et d'après le théorème **d'Ascoli** on trouve que $(A_n \varphi)$ converge uniformément vers $\varphi \in S$. ■

Lemme 3.1.2 Soit V un espace de Banach, et soit $(P_n)_{n \geq 1}$ une famille de projections bornées sur V telle que

$$P_n \varphi \rightarrow \varphi \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Si l'opérateur $A : V \rightarrow V$ est compact, alors

$$\|A - P_n A\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Preuve. Selon la définition de la norme de l'opérateur

$$\|A - P_n A\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|A\varphi - P_n A\varphi\| = \sup_{z \in A(\varphi)} \|z - P_n z\|$$

avec $A(\varphi) = \{A\varphi / \|\varphi\| \leq 1\}$, l'ensemble $\overline{A(\varphi)}$ est compact et d'après le lemme précédent (5.1.1) on a

$$\sup_{z \in A(\varphi)} \|z - P_n z\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

■

3.2 Méthode de collocation

3.2.1 Application de la méthode de projection

Pour résoudre l'équation de Fredholm de deuxième espèce (3.1), on va choisir des points distincts $x_1, x_2, \dots, x_{k_n} \in D$ telle que

$$r_n(x_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k_n$$

qui vont déterminer les coefficients $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ comme solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \left\{ \lambda \phi_j(x_i) - \int_D K(x_i, t) \phi_j(t) dt \right\} = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, k_n \quad (3.2)$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \lambda \phi_j(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} \int_D K(x_i, t) \phi_j(t) dt + f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, k_n$$

et puisque

$$P_n \varphi(x) = \lambda \varphi_n(x) = \lambda \sum_{j=1}^{k_n} c_j \phi_j(x)$$

alors

$$\begin{aligned} P_n \varphi(x_i) &= \sum_{j=1}^{k_n} \int_D c_j K(x_i, t) \phi_j(t) dt + f(x_i) \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} \lambda c_j \phi_j(x_i) \end{aligned}$$

Alors en posant $\alpha_j = \lambda c_j$, donc l'équation (3.2) peut être écrite sous la forme

$$P_n \varphi(x) = \sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \phi_j(x)$$

telle que $x \in C(D)$ et $P_n : V = C(D) \rightarrow V_n$, est un opérateur de projection. Les coefficients $\{\alpha_j\}$ sont déterminés par la résolution du système

$$\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_j \phi_j(x) = \varphi(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, k_n$$

ce système admet une solution unique si et seulement si

$$\det[\phi_j(x_i)] \neq 0$$

Cette condition implique que le système des fonction $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{k_n}\}$ constitue un système linéairement indépendant, alors on obtient le déterminant de **Vandermonde**. On a $\forall i$, ($1 \leq i \leq k_n$), soit $\ell_i \in V_n$, avec $V_n = \text{vect}\{1, x, \dots, x^n\}$ telle que

$$\ell_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

d'où

$$P_n \varphi(x) = \sum_{j=1}^{k_n} \varphi(x_j) \ell_j(x), \quad x \in D$$

Alors le système $\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{k_n}\}$ est appelé la base des fonctions de **Lagrange** vérifiant

$$\|P_n\| = \max_{x \in D} \sum_{j=1}^{k_n} \ell_j(x)$$

C'est le système de polynômes d'interpolation de **Lagrange**

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{k_n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad i = 0, 1, \dots, k_n$$

3.3 Méthode de Galerkin

3.3.1 Application de la méthode de collocation

Soit $V = L^2(D)$ l'espace d'Hilbert des fonctions de carré intégrable sur D , muni par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur V . Soit $\{\psi_i\}$ un système des fonctions orthogonales telle que

$$\langle r_n, \psi_i \rangle = 0, \quad i = 0, 1, \dots, k_n$$

et comme

$$r_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} \left[c_j \left\{ \lambda \psi_j(x) - \int_D K(x, t) \psi_j(t) dt \right\} \right] - f(x)$$

donc

$$\langle r_n, \psi_i \rangle = \sum_{j=1}^{k_n} [c_j \{ \lambda \langle \psi_j, \psi_i \rangle - \langle K \psi_j, \psi_i \rangle \}] - \langle f, \psi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, k_n$$

C'est le système linéaire de **Galerkin**. Maintenant il suffit de déterminer les coefficients c_i .

3.3.2 Application de la méthode de Galerkin

Le problème consiste à chercher une solution approchée de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$\lambda \varphi(x) - \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

On choisit un système de fonctions $\{\psi_j\}$ linéairement indépendantes dans $V = L^2(a, b)$. Il suffit de trouver une solution approchée sous la forme

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\lambda} \left[f(x) + \sum_{j=1}^n A_j \psi_j(x) \right]$$

On a le résidu

$$r_n(x) = \lambda \varphi_n(x) - \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t) dt - f(x)$$

donc

$$\begin{aligned} r_n(x) &= f(x) + \sum_{j=1}^n A_j \psi_j(x) - \frac{1}{\lambda} \int_a^b K(x, t) \left[f(t) + \sum_{j=1}^n A_j \psi_j(t) \right] dt - f(x) \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n A_j \left[\lambda \psi_j(x) - \int_a^b K(x, t) \psi_j(t) dt \right] - \frac{1}{\lambda} \int_a^b K(x, t) f(t) dt \end{aligned}$$

et comme

$$\langle r_n, \psi_i \rangle = \langle \lambda r_n, \psi_i \rangle = \int_a^b \lambda r_n(x) \psi_i(x) dx = 0$$

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^n A_j \left[\lambda \psi_j(x) - \int_a^b K(x, t) \psi_j(t) dt \right] - \int_a^b K(x, t) f(t) dt \right) \psi_i(x) dx = 0$$

il vient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n A_j \left(\lambda \int_a^b \psi_j(x) \psi_i(x) dx - \int_a^b \int_a^b K(x, t) \psi_j(t) \psi_i(x) dt dx - \int_a^b K(x, t) f(t) dt \right) \\ = \int_a^b \int_a^b K(x, t) f(t) \psi_i(x) dt dx \end{aligned}$$

on pose

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \psi_j(x) \psi_i(x) dx, \quad \beta_{ij} = \int_a^b \int_a^b K(x, t) \psi_j(t) \psi_i(x) dt dx, \quad \gamma_{ij} = \int_a^b \int_a^b K(x, t) \psi_i(x) f(t) dt dx$$

On obtient le système suivant

$$\sum_{j=1}^n A_j (\lambda \alpha_{ij} - \beta_{ij}) = \gamma_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

Par conséquent, les coefficients A_j , $j = 1, \dots, n$, et à partir de la résolution du système (3.3), si

$$D(\lambda) = \det(\lambda \alpha_{ij} - \beta_{ij}) \neq 0.$$

Alors, le système (3.3) détermine les coefficients $\{A_j\}$ de façon unique.

3.4 Méthode de Nyströme

Cette méthode appelée aussi méthode de quadrature (Voire le Réf[6]), consiste à appliquer les méthodes numériques de calcul des intégrales pour obtenir un système linéaire. En fait, ce n'est rien d'autre que l'approximation du, noyau K par un opérateur de dimension fini, *i.e* une matrice. Cette méthode est totalement discrète, elle fournit donc un premier moyen efficace de résolution d'équation numérique. Comme cette méthode est importante, et met en jeu les méthodes d'intégration numérique, nous allons la présenter en détail. On souhaite approximer l'opérateur à noyau A défini par

$$\forall x \in D \quad (A\varphi)(x) = \int_D K(x, t)\varphi(t)dt$$

Pour ce fait, on se donne des règles de quadrature (Q_n) pour calculer l'intégrale du noyau des points $(t_i^{(n)})_{1 \leq i \leq n}$ ainsi que des poids $(\alpha_i^{(n)})_{1 \leq i \leq n}$, d'où l'introduction d'un nouvel opérateur A_n

$$\forall x \in D, \quad (A_n\varphi)(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} K(x, t_k^{(n)})\varphi(t_k^{(n)})$$

Remarque 3.4.1 *On peut voir ces règles de quadratures comme une suite d'opérateurs $Q_n : C(D) \rightarrow C(D)$. On dira que ces règles seront convergentes si elle convergent point à point, *i.e* si*

$$\forall f \in C(D) \quad Q_n(f) \rightarrow \int_D f$$

Alors, on va approcher la solution φ de l'équation

$$\varphi - A\varphi = f$$

par la solution φ_n du problème

$$\varphi_n - A_n\varphi_n = f \tag{3.4}$$

Ceci mène à la résolution d'un système linéaire. Ce qui remarquable, c'est qu'une fois ce système résolu, on peut construire une solution de notre problème d'approximation

original (3.4). Tout ceci est résumé par le théorème suivant

Théorème 3.4.1 (Méthode de Nyström) Soit φ_n la solution de

$$\varphi_n(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} K(x, t_k^{(n)}) \varphi_n(t_k^{(n)}) = f(x) \quad (3.5)$$

Alors les valeurs $\varphi_j^{(n)} = \varphi_n(t_k^{(n)})$ sont solution du système linéaire suivant, où l'on a $k_{ij} = K(t_i^{(n)}, t_j^{(n)})$

$$\varphi_j^{(n)} - \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} K(t_k^{(n)}, t_j^{(n)}) \varphi_n(t_k^{(n)}) = f(t_j^{(n)}), \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

Où encore

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha_1 k_{11} & -\alpha_2 k_{12} & \dots & -\alpha_n k_{1n} \\ -\alpha_1 k_{21} & 1 - \alpha_2 k_{22} & \dots & -\alpha_n k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_n k_{n1} & -\alpha_n k_{n2} & \dots & 1 - \alpha_n k_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^{(n)} \\ \varphi_2^{(n)} \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_1^{(n)}) \\ f(t_2^{(n)}) \\ \vdots \\ f(t_n^{(n)}) \end{pmatrix}$$

Réciproquement, si on se donne une solution $(\varphi_j^{(n)})_{1 \leq j \leq n}$ du système (3.6), alors la fonction φ_n définie par

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} K(x, t_k^{(n)}) \varphi_k^{(n)}, \quad x \in [a, b] \quad (3.7)$$

vérifie l'équation (3.4).

Preuve. On à la première déclaration est triviale. Les solution $\varphi_j^{(n)}, j = 1, \dots, n$ du système (3.6) la fonction φ_n définie par l'équation (3.5) a les valeurs

$$\varphi_n(t_j^{(n)}) = f(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} K(x, t_k^{(n)}) \varphi_k^{(n)} = \varphi_j^{(n)}, \quad j = 1, \dots, n$$

En remplaçant ceci dans (3.7) on remarque que φ_n vérifie aussi l'équation (3.5). ■

Théorème 3.4.2 (convergence de la méthode de Nyström) On suppose que les règles de quadrature $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la méthode de **Nyström** sont convergente. Dans ce cas la suite d'opérateurs (A_n) est localement compact et converge ponctuellement, i.e

$$\forall \varphi \in C(D), A_n \varphi \rightarrow A \varphi, n \rightarrow \infty$$

mais ne converge pas nécessairement en norme.

Théorème 3.4.3 1) La norme associée à l'opérateur intégrale $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ pour un noyau continu K est donnée par

$$\|A\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} \int_a^b |K(x, t)| dt$$

2) La norme associée à l'opérateur de quadrature A_n est donnée par

$$\|A\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} \sum_{k=1}^n \left| \alpha_k^{(n)} K(x, t_k^{(n)}) \right|$$

3) On peut exprimer l'erreur de la quadrature numérique correspondante par

$$\|A\varphi - A_n\varphi\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} \left| \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt - \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} K(x, t_k^{(n)})\varphi(t_k^{(n)}) \right|$$

4) Dans l'hypothèse $\varphi \in C^2[a, b]$ et $K \in C^2([a, b] \times [a, b])$, on a l'estimation suivante

$$\|A\varphi - A_n\varphi\|_\infty \leq \frac{1}{12} h^2 (b-a) \max_{a \leq x \leq b} \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} [K(x, t)\varphi(t)] \right|$$

Preuve. Voir la Réf [8, p 298-299]. ■

Conclusion

Le présent travail a permis de traiter l'aspect numérique des équations intégrales dans un cadre fonctionnel. Ainsi, nous avons donné les principaux types de méthodes d'approximation numérique que l'on peut partager en quatre variantes :

◇ **La méthode de Projection** : leur stratégie est basé sur la projection de notre équation dans un sous espace fonctionnel de dimension finie, dans lequel on cherche à approcher la solution exacte par une combinaison linéaire des éléments de la base de cet sous espace et de travailler avec le résidu.

◇ **La méthode de Collocation** : est une application de la méthode de projection, c'est à dire de choisir des nœud de points distincts de sorte que le résidu soit nul dans ces points.

◇ **La méthode de Galerkin** : application de la méthode de collocation dans le cas lorsque le problème posé est définie dans un espace de Hilbert, le produit scalaire des éléments de la base par le résidu soient nuls.

◇ **La méthode de Nystöm (Quatrature)** : consiste à approcher l'opérateur $A\varphi$ dans l'équation intégrale par une somme finie, et de chercher la solution approchée en un nombre fini de points (points de Nyström) ce qui conduit systématiquement à la résolution d'un système d'équations algébriques de dimension finie.

Bibliographie

- [1] A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov , Handbook of Integral Equations, 2nd Edition, CRC Press, Boca Raton, Fla. : CRC Press, 2008.
- [2] B. N. Mandal, A. Chakrabarti , Applied Singular Integral Equation. Published by Science Publishers, 2011.
- [3] L. V. Kantorovich, V. I. Krylov .Interscience Publishers, Inc. New York, 1958.
- [4] R. Kress, Numerical Analysis. Springer-Verlag Inc, New York, 1998.
- [5] E. Nystöm, Über die praktische Auflösung von Intrgralgleichungen mit Anwendungen auf Randertaufgaben, Acta Math. 54 (1930), 185-204.

Chapitre 4

Annexe : Abréviations et notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous

E.I	Équation intégrale
E.I.L	Équation intégrale linéaire
\in	appartient
∞	infini
Σ	somme
\int	intégrale
exp()	fonction exponentielle
log()	fonction logarithme
lim	limite
max	maximum
det	determinant

\min	minimum
\sup	superieur
α	alpha
β	beta
ϕ	phi
ψ	psi
φ	varphi
ω	oméga
Ω	Oméga
ϵ	epsilon
σ	sigma
η	eta
λ	lambda
γ	gamma
τ	tau
Γ	fonction gamma
\mathbb{R}	ensemble réels
\mathbb{C}	ensomble complexe
χ	chi
\mathcal{L}	tciLaplace
∂	partiel
\ln	fonction logarithme népérien
π	pi

Résumé :

L'objectif essentiel de ce travail consiste à résoudre numériquement une équation intégrale de frontière infinie de première et de deuxième espèce. La méthode de projection, de collocation, de Galerkin et de Nyström permet de donner numériquement des solutions approchées des équations intégrales de frontières.

Abstract:

The main objective of this work is the exact solution of infinite boundary integral equation of first and second kind. The method of projection, collocation, Galerkin and Nyström is applied to get the approximate solution of infinite boundary integral equation.

ملخص:

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو حل عدديا المعادلات التكاملية ذات الحدود الانتهائية للصفين الاول و الثاني. طريقة الاسقاط، التجميع، كلاركين و نيستروم تمكننا من الحصول عدديا على الحلول التقريبية للمعادلات التكاملية ذات الحدود.