République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

HASSAINE Oum elkhair

Titre :

Transformation de Laplace et applications

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	RAHMANI Nacer	UMKB	Président
Dr.	KABOUL Hanane	UMKB	Encadreur
Dr.	OUAAR Fatima	UMKB	Examinateur

Juin 2019

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes parents : Mohamed Abou chihab et ma mère Merade Lyamna.

Mes frères « Houssam, Abd elmalek et yacine ».

Et Mes sœurs« Djawida, Samiha, Fatima, et Khawla »

Toutes mes familles.

Et mes amis.

Tous mes collégues de la promotion "2018-2019".

HASSAINE Oum elkhair.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein du département Mathématiques faculté des sciences exactes et des sciences de la nature et de la vie, université de Biskra.

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.

Deuxièmement, je voudrais remercier Notre Encadreur :

Dr. KABOUL Hanane, pour m'avoire proposé ce sujet, ainsi que pour le soutien et ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail. Et maitre de conférences pour la conférence qu'il a accordée en acceptante de diriger mes recherches. Et merci beaucoup à Dr. BENBRAIKA Souad de m'avoir aidé tout au long de la période de travail et à partir de laquelle j'ai appris beaucoup de choses au cours de la réalisation de ce travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury, le président : RAHMANI Nacer et l'examinateur : OUAAR Fatima pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je tiens également à remercier toute personne ayant participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier, tous ceux qui m'ont enseigné durant toutes mes études et en particulier mes enseignants à l'université de Biskra.

Table des matières

Liste des tableaux

Introduction

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

La transformation de Laplace, avec la transformation de Fourier, est l'une des plus importantes transformations intégrales. Elle intervient dans de nombreuses problémes de physique mathématique, de calcul des probabilités, d'automatique, etc..., et elle joue aussi un grand rôle en analyse classique. Elle porte très légitimement le nom de Pierre-Simon Laplace(1749-1827), surnommé le « Newton français », En effet, Laplace a souligné l'intérêt de présenter la plupart des fonctions, des suites, des sommes partielles et des restes des séries usuelles sous forme intégrale, afin d'en obtenir des développements. Plus tard, l'ingénieur britannique Oliver Heaviside (1850-1925) a inventé le calcul symbolique afin de résoudre des équations différentielles et intégrales. Laurent Schwartz (1915-2002) a étendu la transformation de Laplace aux distributions, permettant de mieux comprendre et étayer le calcul symbolique.

La transformation de Laplace est un processous éxécuté sur des fonctions mathématiques pour la convertir d'un champ à un autre. Il s'agit généralement d'une conversion de domaine temporel(t) en domaine fréquentiel($z = x + iy$), similaire à une transformation de Fourier(TF) mais peut être vue comme une généralisation de TF restreinte aux fonctions définis sur $\mathbb{R}^+$. On intérêt théorique permet de résoudre divers problèmes de la physique. Plus précisément, elle permet de résoudre, analytiquement, quelques équations différentielles linéaires et aussi quelques équations intégrale .

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la transformation de Laplace au sens des fonctions et des distributions et nous avons présenté l'application de cette transformée.

L'organisation de ce mémoire s'articule autour du plan de travail suivant :

Chapiter 1 : Dans ce chapiter. Nous allons étudier la transformation de Laplace d'une fonction f localement sommable définie sur $\mathbb{R}^+$ (fonction causale). On étudie le probléme d'inversion de transformation de Laplace qui consiste à déterminer une fonction $\mathcal{L}f = F$ soit la transformée de Laplace.

Chapiter 2 : Dans ce chapiter. On étudier la transformation de Laplace au sens des distributions et comment résoudre les équations de convolution.

Chapiter 3 : Ce chapiter porte quelques applications sur la transformation de Laplace (résouder des équations différentielles linéaire et des équations aux dérivées partielles ainsi que des équations intégrales).

Chapitre 1

Transformation de Laplace au sens des fonctions

Dans ce chapitre, nous commençons par un section de concepts de base concernant les théorèmes et les fonctions dont nous avons l'utilisés dans la suite de ce mémoire. La suite de chapitre, nous representons la définition de la transformation de Laplace et de sa relation avec la transformation de Fourier. Ensuit, on parle sur ses propriétés de base qui nous avons adapté des exemples simples, et en fin nous proposent probléme d'inversion.

1.1 Concepts de base

– **Intervalles finis :** Soient a et b deux réels avec $a \leq b$. On qualifie de "fermés" tous les intervalles bornés fermés des deux côtés ou bien les intervalles infinis d'un côté et fermés de l'autre.

– **Fonction continue par morceaux :** Si elle n'admet que des points de discontinuités de premiére espéce (admettant une limite à gauche et une limite à droite).

– **Fonction d'order exponentielle :** Si elle est bornée par une exponentielle, c'est-à-dire, s'il existe des constantes réelles $M \geq 0$ et r telles que, pour $t \geq 0$,

$$|f(t)| \leq Me^{rt}.$$

- **Fonction causale :**Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si $f(t) = 0$ dès que $t < 0$.
- **Fonctions $\mathcal{C}_L$:** La classe de fonctions réelles $\mathcal{C}_L$ est formée des fonctions causales continues par morceaux et d'ordre exponentielle.
- **Fonction holomorphe :** est une fonction à valeurs complexes définie et dérivable en tout point d'un sous ensemble ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$ (c'est la dérivation au sens complexe).
- **Lemme de Riemann-Lebesgue :** Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\widetilde{f}$ tend vers 0 à l'infini

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \widetilde{f}(k) \right| = 0.$$

- **Théorème des résidus :** Soit f une fonction holomorphe sur Ω, sauf peut-être en des singularités isolées z_k. Soit γ le bord orienté d'un compact A contenu dans Ω,ne passant par aucun des z_k. Alors les z_k contenus dans A sont en nombre fini et

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\Pi i \sum_{\substack{k \\ z_k \in A}} \operatorname{Res}(f, z_k).$$

- **Calcul pratique des résidus :** le résidu $\operatorname{Res}(f, z_0)$ d'une fonction en z_0 est le coefficient a_{-1} de son développement de Laurent au voisinage de z_0. Si f a un pôle simple en z_0

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

et cette formule se généralise au cas où le pôle est d'ordre m, comme on s'en convainc aisément

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z) \right).$$

1.2 Transformation de Laplace

La transformée de Laplace appartient à la famille trés vaste des transformées intégrales, qui établissent une relation entre une fonction f et sa transformée F sous la forme :

$$F(\omega) = \int_I K(\omega, t) f(t)\, dt$$

Une transformée particuliére nécessite donc la définition du noyau $K(\omega, t)$ et de l'intervalle d'intégration I. La transformée le plus utilisées est celle de Laplace, pour laquelle on a :

$$I = \mathbb{R}^+, \quad \text{et} \quad K(\omega, t) = e^{-\omega t}, \quad \omega = \omega_r + i\omega_i \in \mathbb{C}.$$

Définition 1.2.1 *Soit une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), la transformée de Laplace (TL) de f, lorsqu'elle existe, est la fonction $\mathcal{L}f = F$ de la variable complexe $z = x + iy$ définie par l'intégrale :*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = F(z) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t)\, e^{-zt} dt \tag{1.1}$$

La fonction $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$ est appelée l'origine de F.

La fonction $\mathcal{L}f$ est appelée l'image de f, par la transformation de Laplace.

Théorème 1.2.1 ***(condition suffisante d'existence des TL)***

Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur tout intervalle $[0, N[$ fini, et si elle est d'ordre expontielle x_0 pour $t > N$ ie($\exists M > 0, N \in \mathbb{R} / \forall t > N, |e^{-x_0 t} f(t)| < M$ ou encore $|f(t)| < Me^{x_0 t}$), alors sa transformée de Laplace existe pour tout $\Re z > x_0$.

Preuve. pour $N > 0$, Nous avons :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-zt} dt = \int_0^N f(t)\, e^{-zt} dt + \int_N^{+\infty} f(t)\, e^{-zt} dt$$

puisque f est continue par morceaux sur tout intervalle fini $[0, N[$, alors l'intégrale $\int_0^N f(t)\, e^{-zt} dt$

existe. Et puisque f est expontielle d'ordre x_0 pour $t > N$, alors on a

$$\begin{aligned}\left|\int_N^{+\infty} f(t)\, e^{-zt}dt\right| &\leq \int_N^{+\infty} \left|f(t)\, e^{-zt}dt\right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-zt}dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} Me^{x_0 t}e^{-zt}dt = \frac{M}{z-x_0} < +\infty.\end{aligned}$$

Et par conséquent, la transformée de Laplace existe pour tout $\Re z > x_0$. ■

Remarque 1.2.1 *Pour $t < 0$, les valeurs de f n'interviennent pas dans la définition. On convient souvent que $f(t) = 0$ pour $t < 0$. On dit alors que f est une fonction causale.*

Définition 1.2.2 *Le nombre réel :*

$$x_0 = \inf\left\{x \in \mathbb{R} / f(t)\, e^{-xt} \in L^1\left(\mathbb{R}^+\right)\right\}$$

est appelé l'abcisse de sommabilité de f ou abcisse de convergence absolue de f.

Théorème 1.2.2 *Si f est une fonction de l'abcisse de sommabilité x_0, alors la TL existe dans le demi-plan $\Re z > x_0$.*

Preuve. On a $z = x + iy$. Pour $\Re z = x > x_0$:

$$|\mathcal{L}f(z)| \leq \int_{\mathbb{R}^+} \left|f(t)\, e^{-(x+iy)t}\right| dt \leq \int_{\mathbb{R}^+} |f(t)|\, e^{-xt}dt < \int_{\mathbb{R}^+} |f(t)|\, e^{-x_0 t}dt < +\infty,$$

En conséquence, $F(z)$ est bornée pour $\Re z > x_0$. ■

Exemple 1.2.1 *La fonction d'Heaviside connait encore par échelon unité :*

$$H(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \geq 0 \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases}$$

L'abcisse de sommabilité de H est $x_0 = 0$, puisque $H(t)\, e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}^+)$ pour $\Re z > 0$.

Alors la transformation de Laplace est :

$$\mathcal{L}\{H(t)\}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} dt = \lim_{h\to\infty} \tfrac{1-e^{zh}}{z} = \tfrac{1}{z}, \quad \textit{pour } \Re z > 0.$$

1.3 Caractérisation et Holomorphie

Commençons par préciser la relation entre la transformée de Fourier et la transformée de Laplace. Nous étudions ensuite l'holomorphie de fonction, qui joue un rôle important dans la résolution d'équations intégratives.

Proposition 1.3.1 *Soit f localement sommable. On a, sur la domaine de sommabilité. La TL de f peut alors s'écrire comme une TF.*

Preuve. Soit f est une fonction de l'abcisse de sommabilité x_0, qui admet une TL telle que $\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = F(z)$.

En posant $z = x + i2\Pi y$:

$$\begin{aligned} F(z) = F(x + i2\Pi y) &= \int_{\mathbb{R}^+} f(t)\, e^{-zt} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(H(t)\, f(t)\, e^{-xt}\right) e^{-i2\Pi yt} dt = \mathcal{F}\left(H(t)\, f(t)\, e^{-xt}\right), \text{ pour } x > x_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier. ■

Proposition 1.3.2 *La TL d'une fonction localement sommable f, est une fonction holomorphe dans la domaine de sommabilité $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > x_0\}$ et on a la formule :*

$$\frac{d^n F(z)}{dz^n} = F^{(n)}(z) = \int_0^\infty (-t)^n f(t)\, e^{-zt} dt = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(z) \tag{1.3}$$

Preuve. En effet, les 2 fonctions $f(t)\, e^{-zt}$ et $(-t)^n f(t)\, e^{-zt}$ ont le même comportement à l'infini, donc la même abcisse de sommabilité. Il faut justifier la dérivation sous le signe somme, ce qui résulte de l'inégalité

$$\left|(-t)^n f(t) e^{-zt}\right| \leq t^n |f(t)| e^{-x_0 t}.$$

La fonction majorante étant intégrable, on peut permuter la dérivation et le signe intégrale, d'où le resultat. $F'(z)$ est fini en tant que TL : on en déduit donc l'holomorophie de F. ■

Exemple 1.3.1 *Soit* $f(t) = te^{-at} / a \in \mathbb{R}$.

On a $z = x + iy$ *et* $n = 1$, *alors :*

$$\mathcal{L}\{te^{-at}\}(z) = \int_0^\infty -te^{-at}e^{-zt}dt = -\int_0^\infty te^{-(a+z)t}dt = \frac{1}{(z+a)^2}.$$

et comme

$$\frac{dF(z)}{dz} = F'(z) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+a}\right) = \frac{1}{(z+a)^2}.$$

alors par comparison, on obtient :

$$\mathcal{L}\{te^{-at}\}(z) = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+a}\right) = \frac{1}{(z+a)^2}.$$

1.4 Propriétés de transformation de Laplace

Dans ce qui suit, nous supposerons, à moins que nous ne l'indiquions explicitement, que toutes les fonctions satisfont aux conditions du théorème(condition suffisante d'existence de la transformée de Laplace).

1.4.1 Linéarité :

La transformation de Laplace est une application linéaire. Plus précisément, Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, et pour toutes fonctions $\mathcal{C}_L$ f et g, d'abscisses de sommabilité respectives x_{01}, x_{02}, on a :

$$\mathcal{L}\left\{\left[\alpha f+\beta g\right](t)\right\}(z)=\alpha\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(z)+\beta\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}(z)=\alpha F(z)+\beta G(z),$$

où $\Re z>\max\left(x_{01},x_{02}\right).$

Preuve. La linéarité de la transformation de Laplace est une conséquence directe des propriétés de l'integrale. ■

1.4.2 Translation :

Soit $f\in\mathcal{C}_L$, d'abcisse de sommabilité x_0, qui admet une TL.

Si $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(z)=F(z)$, alors pour tout $a\in\mathbb{R}$ on a

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)\right\}(z)=e^{-az}F(z),\quad \Re z>x_0$$

Preuve. Posons

$$g(t)=\begin{cases} f(t-a) & \text{si} \quad t>a \\ 0 & \text{si} \quad t<0 \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} &= \int_0^\infty g(t)\,e^{-zt}dt \\
&= \int_0^a g(t)\,e^{-zt}dt+\int_a^\infty g(t)\,e^{-zt}dt \\
&= \textstyle\int_a^\infty f(t-a)\,e^{-zt}dt \quad \text{on pose : } h=t-a \\
&= \int_0^\infty f(h)\,e^{-z(h+a)}dh \\
&= e^{-za}\int_0^\infty f(h)\,e^{-zh}dh \\
&= e^{-az}F(z).
\end{aligned}$$

■

1.4.3 Conjugaison complexe :

Soit $f \in \mathcal{C}_L$, d'abcisse de sommabilité x_0

Si $\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = F(z)$, alors

$$\mathcal{L}\left\{\overline{f}(t)\right\}(z) = \overline{F}(\overline{z}).$$

Preuve. Par défintion de TL, on obtient :

$$\mathcal{L}\left\{\overline{f}(t)\right\}(z) = \int_0^{+\infty} \overline{f}(t)\, e^{-zt} dt = \overline{\int_0^{+\infty} \overline{f}(t)\, e^{-\overline{z}t} dt} = \overline{F}(\overline{z}).$$

■

1.4.4 Changement d'échelle (dilatation) :

Soit $f \in \mathcal{C}_L$, d'abcisse de sommabilité x_0, et soit un réel $C > 0$.

Si $\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = F(z)$, alors :

$$\mathcal{L}\{f(Ct)\}(z) = \frac{1}{C} F\left(\frac{z}{C}\right).$$

Preuve. Par défintion de TL, on obtient :

$$\mathcal{L}\{f(Ct)\}(z) = \int_0^{+\infty} f(Ct)\, e^{-zt} dt$$

On pose $h = Ct$, alors :

$$\mathcal{L}\{f(Ct)\}(z) = \int_0^{+\infty} f(h)\, e^{-\frac{z}{C}h} dh = \frac{1}{C} F\left(\frac{z}{C}\right).$$

■

1.4.5 Dérivation :

Théorème 1.4.1 *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ où $\lim\limits_{t\to0^+} f(t) = f(0^+)$ existe. On suppose en outre que f' est une fonction continue par morceaux qui admet une TL, alors :*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(z) = zF(z) - f\left(0^+\right) \tag{1.4}$$

Preuve. La démonstration se fait par parties. ■

De manière générale

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(z) = z^n F(z) - \sum_{k=1}^{n} z^{k-1} f^{(n-k)}\left(0^+\right).$$

1.4.6 Intégration :

La TL d'une dérivée revient essentiellement à multiplier par z. On ne sera pas surpris du résultat réciproque : une division par z correspond à une intégration de la fonction.

Proposition 1.4.1 *On a la transformée d'une primitive F est donnée par la formule suivante :*

$$\mathcal{L}\{F(t)\}(z) = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}(z)}{z} = \frac{F(z)}{z}$$

Preuve. Posons : $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx \Rightarrow g'(t) = f(t)$ et $g(0) = 0$

alors :

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = \mathcal{L}\{g'(t)\}(z) = z\mathcal{L}\{g(t)\}(z) \quad \text{(d'aprés(1.4))}$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}(z) = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}(z)}{z} = \frac{F(z)}{z}.$$

■

1.4.7 Convolution :

Venons en maintenant au propriétés liées au produit de convolution, pour voir la TL du produit de convolution.

Définition 1.4.1 *Soient f, g deux fonctions localement semmable. La définition du produit de convolution est :*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')\, g(t-t')\, dt'.$$

Supposons maintenant que f et g soient des fonctions causales. On a donc

$$f(t') = 0, \quad \text{pour } t' < 0 \qquad \text{et} \qquad g(t-t') = 0, \quad \text{pour } t < t' \quad \cdot$$

Le domaine d'intégration est donc restrient à l'intervalle $[0, t]$ dans le cas des fonctions causales :

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t')\, g(t-t')\, dt', \quad f \text{ et } g \text{ causales.}$$

On remarequera que $(f * g)$ est elle même causale, puisque $f(t') = 0 \quad \text{pour } t' < 0 \ \cdot$

Théorème 1.4.2 *Soient f et g deux fonctions causales et convolable en tout point $t \geq 0$, d'abcisses de sommabilité respectives x_{01},x_{02}, telles que $\mathcal{L}(f)$, $\mathcal{L}(g)$, $\mathcal{L}(f * g)$ existent. Alors*

$$\mathcal{L}\{[f * g](t)\}(z) = F(z)\,.G(z)\,, \quad \textit{pour } \Re z > x_0 = \max(x_{01}, x_{02})$$

Preuve. En utilisant la définition de produit de convolution, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{[f * g](t)\}(z) &= \int_0^{+\infty} (f * g)(t)\, e^{-zt} dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-zt} \left[\int_0^t f(t')\, g(t-t')\, dt' \right] dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-zt'} e^{+zt'} e^{-zt} \left[\int_0^t f(t')\, g(t-t')\, dt' \right] dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-zt'} f(t')\, dt' \int_{t'}^{+\infty} e^{-z(t-t')} g(t-t')\, dt
\end{aligned}$$

et en posant $t = t' + r$ avec t' fixé dans l'intégrale $\int_{t'}^{+\infty} e^{-z(t-t')} g(t-t')\, dt$ on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{[f * g](t)\}(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt'} f(t')\, dt' \int_0^{+\infty} e^{-z(r)} g(r)\, dr \\ &= F(z)\, G(z)\,.\end{aligned}$$

■

1.5 Comportements asymptotiques

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction continue par morceaux. Supposons sa transformée de Laplace $F(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-zt} dt$ définie pour $\Re z > 0$. Nous nous proposons d'étudier le comportement asymptotique de $F(z)$ quand $z \to +\infty$ et quand $z \to 0^+$.

1.5.1 Comportement à l'ifini

On sait déjà que les transformées de Laplace sont bornées et holomorphes pour $\Re z > x_0$. Montrons en outre que la transformée de Laplace tend vers 0 à l'infini.

Théorème 1.5.1 *Soit f une fontion d'abcisse de sommabilité x_0, alors*

$$\lim_{|z| \to +\infty} F(z) = 0, \quad \textit{pour } \Re z > x_{0.}$$

Preuve. Soit $F(z) = \int_{\mathbb{R}^+} f(t)\, e^{-zt} dt$. Posons $z = x + i2\Pi y = x + i\omega$.

On obtient :

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^+} \left(f(t)\, e^{-xt} \right) e^{-i\omega t} dt.$$

Cela résulte du lemme de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{\omega \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^+} \left(f(t)\, e^{-xt} \right) e^{-i\omega t} dt = 0.$$

piusque $f(t)\, e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}^+)$. ■

1.5.2 Théorème de la valeur initiale

Théorème 1.5.2 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Si $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$. Alors $\mathcal{L}f$ vérifiè :*

$$\lim_{|z|\to+\infty} zF(z) = f\left(0^+\right).$$

Preuve. On a

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(z) = \int_{\mathbb{R}^+} f'(t)\, e^{-zt} dt = zF(z) - f(0^+), \quad \text{d'aprés (1.4)}$$

D'aprés le théorème précedent. Toute TL tend vers 0 quand z tend vers $+\infty$. Par conséquence

$$\lim_{|z|\to+\infty} \left(zF(z) - f\left(0^+\right)\right) = 0,$$

ce qui achève la preuve. ■

Exemple 1.5.1 *On considère la fonction suivant :*

$$f(t) = H(t)$$

On a

$$\mathcal{L}f(z) = \mathcal{L}H(z) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-zt} dt = \frac{1}{z}, \quad \textit{alors} \quad \lim_{|z|\to+\infty} z\mathcal{L}f(z) = 1.$$

et comme

$$f\left(0^+\right) = f(+\infty) = 1.$$

En comparant avec ce qui précède, on obtient

$$\lim_{z\to+\infty} z\mathcal{L}f(z) = f\left(0^+\right).$$

1.5.3 Théorème de la valeur finale

Théorème 1.5.3 *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$. *Si* $\lim_{t\to+\infty} f(t) = f(+\infty)$. *Alors* $\mathcal{L}f$ *vérifiè :*

$$\lim_{|z|\to 0^+} zF(z) = f(+\infty).$$

Preuve. Lorsque $\Re z > 0$, $|e^{-zt}f'(t)| \leq |f'(t)|$. Alors d'après le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{z\to 0}\left(\int_{\mathbb{R}^+} f'(t)\, e^{-zt} dt\right) = \int_{\mathbb{R}^+} f'(t)\, dt = f(+\infty) - f\left(0^+\right).$$

Par ailleurs le théorème sur la TL de f' donne $zF(z) - f(0^+)$.

On obtient donc également

$$\lim_{z\to 0}\left(\int_{\mathbb{R}^+} f'(t)\, e^{-zt} dt\right) = \lim_{z\to 0}\left(zF(z) - f\left(0^+\right)\right),$$

alors :

$$\lim_{z\to 0} zF(z) - f\left(0^+\right) = f(+\infty) - f\left(0^+\right)$$

d'où :

$$\lim_{z\to 0} zF(z) = f(+\infty).$$

■

Remarque 1.5.1 *Ces deux théorèmes(1.5.2) et (1.5.3) son trés importentes en pratique : celle permettent de vérifier , dans une certaine mesure, l'exactitude d'une transformée* $F(z)$ *aprés calcul, si on connait par ailleurs les valeurs limites de* $f(t)$.

1.6 L'inverse de la transformée de Laplace

L'intérêt le plus important venant de l'utilisation de la transformation de Laplace, est qu'elle transforme une équation différentielle, accompagnée des conditions aux limites, en équation algébrique, dont l'iconnue est la transformée de Laplace de la fonction, en incluant les conditions aux limites. Pour revenir à la fonction recherchée, on fait appel à la transformation de Laplace inverse, dont la définition est rappelée ci-dessous :

Définition 1.6.1 *Pour une fonction* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *dont sa transformée de Laplace existe et est notée* F *alors, on définie la transformée de Laplace inverse si l'on considère uniquement les variables sont réelles, ainsi*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^+} F(z)\, e^{zt} dz, \quad t \geq 0.$$

On trouve aussi parfois

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(z)\}(t) = \int_{\mathbb{R}^+} (\mathcal{L}f)(z)\, e^{zt} dz, \quad t \geq 0.$$

Remarque 1.6.1 1. *L'opérateur* $\mathcal{L}^{-1}$ *vérifie des propriétés similaires à celles vérifiées par son opérateur inverse* $\mathcal{L}$.

2. *Le calcul explicite des transformées de Laplace inverse se fait en général par le théorème des résidus d'analyse complexe.*

1.6.1 Formule de Bromwich-Wagner :

Théorème 1.6.1 *Soit* $\mathcal{L}f$ *la TL de la fonction* f *et* x_0 *son abcisse de sommabilité. Si, en outre, soit* $y \in \mathbb{R}$, *la fonction* $\mathcal{L}f(x + i2\Pi y)$ *est sommable sur* $\mathbb{R}$., *alors l'originale* f *est retrouvé par la relation :*

$$H(t)\, f(t) = \frac{1}{2\Pi i} \int_B \mathcal{L}f(z)\, e^{+zt} dz.$$

Où B est la droite parallèle à l'axe imginaire d'abcisse $x > x_0$ appelée droit de Bromwich. Cette formule s'appele formule de Bromwich-Wagner.

Preuve. Pour $x > x_0$, la transformation de Laplace $\mathcal{L}f$ peut s'exprime comme une transformée de Fourier

$$\mathcal{L}f\left(x+i2\Pi y\right)=F[H\left(t\right)f\left(t\right)e^{-xt}]\left(y\right)=\mathcal{F}\left(H\left(t\right)f\left(t\right)e^{-xt}\right). \quad \text{d'aprés (1.2).}$$

En utilisant la formule d'inversion de Fourier, on obtient :

$$\begin{aligned} H\left(t\right)f\left(t\right) &= e^{+xt}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{L}f\left(x+i2\Pi y\right)e^{+i2\Pi yt}dy \\ &= \frac{1}{2\Pi i}\int_{x-i2\Pi y}^{x+i2\Pi y}\mathcal{L}f\left(z\right)e^{+zt}dz \\ &= \frac{1}{2\Pi i}\int_{B}\mathcal{L}f\left(z\right)e^{+zt}dz. \end{aligned}$$

■

Exemple 1.6.1 *On déterminons la fonction suivante :*

$$f\left(t\right)=\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(z\right)\right\}\left(t\right)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(z+1\right)^{2}}\right\}.$$

Puisque la fonction à inventorier a un pôle à $z=-1$, il suffit alors de prendre $\Re z > -1$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(z\right)\right\}=\textstyle\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{Res}\left[e^{zt}F\left(z\right)\right], \quad \textit{où } z_1, z_2, ..., z_n \textit{ sont les pôles de } F\left(z\right)$$

donc, la transformée de Laplace inverse est :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(z\right)\right\}\left(t\right)=\frac{1}{2\Pi i}\int_{B}\frac{1}{\left(z+1\right)^{2}}\left(z\right)e^{+zt}dz=\mathrm{Res}\left(\frac{1}{\left(z+1\right)^{2}}e^{zt},-1\right)$$

avec :

$$Res\left(\frac{1}{\left(z+1\right)^{2}}e^{zt},-1\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\left(m-1\right)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(\left(z-z_0\right)^{m}e^{zt}F\left(z\right)\right)$$

alors :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(z)\}(t) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m e^{zt} F(z) \right)$$

Pour $m = 2$, on obtient :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(z+1)^2}\right\}(t) = \lim_{z \to -1} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d[(z+1)^2 e^{zt} \frac{1}{(z+1)^2}]}{dz} = \lim_{z \to -1} \frac{d}{dz} e^{zt} = \lim_{z \to -1} t e^{zt} = t e^{-t} = f(t).$$

1.6.2 Formule de Heaviside :

Définition 1.6.2 *Soit N et D deux polynômes tels que $d^\circ(N) < d^\circ(D)$, et soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ les zéros de D qu'on suppose simples, on suppose de plus que la fraction rationnelle*

$F(z) = \frac{N(Z)}{D(Z)}$ est irréductible.

La formule de Heaviside permet de trouver l'origine d'une fraction rationnelle, elle est donnée par :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{N(\alpha i)}{D(\alpha i)} e^{\alpha_i t}.$$

En décomposant en élements simples, on a :

$$F(z) = \frac{A_1}{z - \alpha_1} + \frac{A_2}{z - \alpha_2} + ... + \frac{A_n}{z - \alpha_n}.$$

Exemple 1.6.2 *On considère la fonction suivante :*

$$F(z) = \frac{2z+1}{z^2 + 5z + 6}$$

- ***La transformée inverse de Laplace de F est :***

On a :

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{2z+1}{z^2+5z+6} = \frac{2z+1}{(z+3)(z+2)} = \frac{A}{z+3} + \frac{B}{z+2} \\ &= \frac{5}{z+3} - \frac{3}{z+2}. \end{aligned}$$

Car :

$$A\left(z+2\right)+B\left(z+3\right)=2z+1\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}A+B=2\\ \\ 2A+3B=1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}A=5\\ \\ B=-3\end{array}\right.$$

alors :

$$\begin{aligned}f\left(t\right)&=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{z+3}-\frac{3}{z+2}\right)\\&=5e^{-3t}-3e^{-2t}.\end{aligned}$$

Exemple 1.6.3 *On considère la fonction suivante :*

$$G\left(z\right)=\frac{1}{z\left(z+1\right)^{2}}$$

- ***La transformée inverse de Laplace de*** G ***est :***

On a :

$$\begin{aligned}G\left(z\right)&=\frac{1}{z\left(z+1\right)^{2}}=\frac{A}{z}+\frac{Bz+C}{(z+1)^{2}}\\&=\frac{1}{z}-\frac{z+2}{(z+1)^{2}}.\end{aligned}$$

Car :

$$A\left(z+1\right)^{2}+Bz+C=1\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}\left(A+B\right)z^{2}=0\\ \\ \left(2A+C\right)z=0\\ \\ A=1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}A=1\\ \\ B=-1\\ \\ C=-2\end{array}\right..$$

alors :

$$\begin{aligned}g\left(t\right)&=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z}-\frac{z+2}{(z+1)^{2}}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z}-\frac{z+1+1}{(z+1)^{2}}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z}-\left(\frac{1}{(z+1)}+\frac{1}{\left(z+1\right)^{2}}\right)\right\}\\&=1-e^{-t}-te^{-t}.\end{aligned}$$

1.7 Formulaires des transformées de Laplace usuelles

Le tableau suivant resumé la TL de fonctions usuelles :

$f(t)\ (t \geq 0)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(z)$	z_0
c	$\frac{c}{z}$	0
ct^n	$\frac{cn!}{z^{n+1}}$	0
$\sin bt$	$\frac{b}{z^2+b^2}$	0
$\cos bt$	$\frac{z}{z^2+b^2}$	0
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{z-\alpha}$	α
$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(z-\alpha)^{n+1}}$	α
$\sinh \alpha t$	$\frac{\alpha}{z^2-\alpha^2}$	$\lvert\alpha\rvert$
$\cosh \alpha t$	$\frac{z}{z^2-\alpha^2}$	$\lvert\alpha\rvert$
$e^{\alpha t}\sin bt$	$\frac{\alpha}{(z-\alpha)^2+b^2}$	α
$e^{\alpha t}\cos bt$	$\frac{z-\alpha}{(z-\alpha)^2+b^2}$	α
t^n	$\frac{n!}{z^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{z^{n+1}}$	0
$t^\alpha / \alpha > 0$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}$	0
$\delta(t-t_0)$	e^{-zt_0}	0
$H(t-t_0)$	$\frac{e^{-zt_0}}{z}$	0

TAB. 1.1 – Les transformation de Laplace de quelques fonctions usuelles.

Remarque 1.7.1

1. *Dans ce tableau on a* $f(t) = 0$ *pour* $t < 0$ *et* $t_0 > 0$.

2. Γ *désigne la fonction gamma d'Euler*

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)\,.\textit{et on particulier, on a } \Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\Pi}.$$

Chapitre 2

Transformation de Laplace au sens des distributions

Considérons la fonction constante $z = 1$ Puisqu'elle ne tend pas vers 0 à l'infini, elle ne peut être la transformée de Laplace d'une fonction au sens des fonctions. Nous allons voir qu'il est possible, en passant des fonctions aux distributions, de définir une TL qui pourra croître à l'infini.

2.1 Concepts de base à de distributions

- **Fonction test :** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle fonction test toute fonction indéfiniment dérivable définie sur U et à support dans une partie compacte de U.

$$\mathfrak{D}\left(\mathbb{R}^n\right) = \left\{\varphi \in \mathcal{C}^\infty : \text{support bornée}\right\}.$$

- **Compact :** Soit $(\mathbb{R}^n, d)$ un espace métrique. Une partie K de $\mathbb{R}^n$ est dite compacte si, de toute suite (u_n) d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K.

– **Support de fonction :** est le plus petit fermée de $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{Supp}f = \{x \in \mathbb{R}^n \diagup f(x) \neq 0\}.$$

Exemple 2.1.1 *Soit la fonction d'Heaviside, et soit $\varphi \in \mathfrak{D}$, on a :*

$$\langle T_H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

On a donc : $\boldsymbol{Supp}(T_H) = \mathbb{R}^+$.

– **Le dual topologique :** est le sous-espace du dual algébrique constitué des formes linéaires continues.

– **Espace tempéré $\mathfrak{s}$** : On appelle $\mathfrak{s}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables et telles que : $\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \left| t^m \varphi^{(k)}(t) \right| < \infty$

$$\mathfrak{s}(\mathbb{R}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty \diagup \forall k \in \mathbb{N},\ \varphi^{(k)} \text{ à décroissement rapide} \right\}.$$

Cet ensemble est appelé espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide (les fonctions de cet espace décroissent plus vite que n'importe quelle loi de puissance en t).

– **Espace des distributions $\mathfrak{s}'$:** On appelle $\mathfrak{s}'$ le dual de $\mathfrak{s}$ et on le nomme ensemble des distributions tempérées. L'ensemble des distributions tempérées est inclus strictement dans $\mathfrak{D}'$.

2.2 Définitions et propriétés

Définition 2.2.1 *On appelle distribution T sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tout formes* ***linéaire*** *et* ***continue*** *de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$), c-à-d elle satisfait les deux conditions suivantes :*

1. *T* ***linéaire :*** *pour tous $\varphi, \psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a*

$$\langle T, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle + \beta \langle T, \psi \rangle.$$

2. *T **continue** : pour toute compact $K \subset \Omega$ et pour tout fonction $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ avec **supp**$\varphi \subset K$, il existe une constante $C > 0$ et une entier m tels que :*

$$\left|\langle T, \varphi\rangle\right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} \left|D^{\alpha}\varphi(x)\right|.$$

Exemple 2.2.1 *Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose*

$$\begin{array}{rcll} \delta_a & : & \mathfrak{D}(\Omega) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & \varphi & \rightarrow & \langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a). \end{array}$$

*Alors δ_a est une distribution sur $\mathbb{R}^n$ (appelée distribution de **Dirac**).*

Proposition 2.2.1 *À toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) lcalement intégrable ie ($\int_K |f(x)|\, dx$ existe sur tout compact K) on peut associer une distribution notée T_f dite distribution **régulière**, en posant pour $\varphi \in \mathfrak{D}$*

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Remarque 2.2.1 *Toutes les distributions qui ne s'écrivent pas de cette maniére dites **singulières.***

Notation 2.2.1 *On notera dans la suite par $\mathfrak{D}'_+$ l'ensemble de toute les distributions dont le support est contenu dans $[0, +\infty[$. On dit aussi que $\mathfrak{D}'_+$ est le **dual** de $\mathfrak{D}_+$.*

La transformée de Laplace d'une distribution est donnée par la définition suivant

Définition 2.2.2 *Soit T une distribution de $\mathfrak{D}'_+$ à support borné. La transformée de Laplace de T est $\mathcal{L}T$:*

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{L}T & : & \mathbb{C} \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & z \rightarrow & \mathcal{L}T(z) = \mathcal{T}(z) = \langle T, e^{-zt}\rangle. \end{array}$$

On notera que dans le cas des distributions régulières on retrouve la définition da la TL au sens des fonctions. La définition pécédente de la TL impose nécessairement des restriction aux distributions auxquelles elle s'applique. Dans le cas présent, la fonction e^{-zt} est bien $\mathcal{C}^{\infty}$,mais n'est pas à support bornée. $\mathcal{L}T$ n'est donc pas bien définie que parce que la distribution elle-même est à support borné. on peut définir les TL de distributions dans d'autres cas, par exemple pour $T \in \mathfrak{D}'_{+}$ et telle que $Te^{-zt} \in \mathfrak{s}'_{+}$ (tempérée).

Exemple 2.2.2 *L'impulsion de Dirac, (on dit aussi « un Dirac » et ce n'est pas à proprement parler une fonction) notée est la limite lorsque tend vers* 0 *de la fonction rectangulaire (un top) de durée* ε *et de hauteur* $a = \frac{1}{\varepsilon}$ *(la surface* $a\varepsilon = \varepsilon \times \frac{1}{\varepsilon} = 1$ *restant constante et valant* 1*, sa hauteur tend vers l'infini pour une durée nulle, une sorte de laser méga-watt-femto-seconde...). Donc, la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac* δ *est :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\delta(t)\}(z) &= \int_0^{+\infty} \delta(t)\, e^{-zt} dt \qquad (2.1)\\
&= \int_0^{+\infty} a e^{-zt} dt = a \int_0^{\varepsilon} e^{-zt} dt \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} a \left[\frac{-1}{z} e^{-zt} \right]_0^{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} a \left[\frac{-1}{z} e^{-z\varepsilon} + \frac{1}{z} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} a \left[\frac{1 - e^{z\varepsilon}}{z} \right] \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} a\varepsilon \left[\frac{1 - e^{z\varepsilon}}{z\varepsilon} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} a\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} a\varepsilon = 1
\end{aligned}$$

Les propriétés de TL étudiées dans le premier chapiter :convolution, translation, etc.. s'étendent aux distributions. Le seul point nécessitant un peu d'attention concerne la dérivation et l'holomorphie.

Théorème 2.2.1 *Soit la distribution* $T \in \mathfrak{D}'_{+}$ *et admet une TL.*

1. *La distribution dérivée* $\mathcal{T}'$ *admet une TL qui vérifie :*

$$\mathcal{T}'(z) = z\mathcal{L}T(z).$$

2. *La fonction* $\mathcal{L}T$ *est holomorphe dans tout le plan complexe, et on a :*

$$\mathcal{T}'(z) = \left\langle -tT, e^{-zt} \right\rangle.$$

Preuve. La distribution $T \in \mathfrak{D}'_+$ à support borné, il en est de même de sa dérivée. T' admet donc une TL.

1. $\mathcal{T}'(z) = \langle T', e^{-zt} \rangle = -\left\langle T, (e^{-zt})' \right\rangle = -\langle T, -ze^{-zt} \rangle = z \langle T, e^{-zt} \rangle = z\mathcal{L}T(z)$.

   De même pour :

2. $\langle -tT, e^{-zt} \rangle = \langle T, -te^{-zt} \rangle = \left\langle T, \frac{d}{dz}(e^{-zt}) \right\rangle = \frac{d\mathcal{T}}{dz} = \mathcal{T}'(z)$.

■

De manière générale au cas des dérivées d'ordre n

$$\mathcal{L}\left(T^{(n)}\right)(z) = z^n \mathcal{L}T(z).$$

$$\mathcal{T}^{(n)}(z) = \langle (-t)^n T, e^{-zt} \rangle.$$

Exemple 2.2.3

1. $\mathcal{L}\{\delta'(t)\}(z) = z\mathcal{L}\{\delta(t)\}(z) = z.1 = z.$ (d'aprés(2.1))
2. $\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t)\}(z) = \left\langle \delta^{(n)}, e^{-zt} \right\rangle = z^n$ car :

$$\begin{aligned}
\left\langle \delta^{(n)}, e^{-zt} \right\rangle &= (-1)^n \langle \delta, (e^{-zt})^n \rangle \\
&= (-1)^n \langle \delta, (-z)^n e^{-zt} \rangle \\
&= (-1)^n (-z)^n \langle \delta, e^{-zt} \rangle \\
&\overset{\text{(d'aprés(2.1))}}{=} (-1)^n (-z)^n \mathcal{L}\{\delta(t)\}(z) \\
&= z^n.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.2 *Soit f une fonction localement sommable, à laquelle on associe la distribution régulière. On a*

$$\mathcal{L}\{Hf(t)\}(z) = \mathcal{F}(z).$$

Or, par application de la formule des sauts :

$$(Hf)' = Hf' + f\delta, \text{ car } H' = \delta.$$

$$= Hf' + f(0)\delta,$$

soit encore

$$Hf' = (Hf)' - f(0)\,\delta.$$

Comme Hf *est une distribution régulière, on a*

$$\mathcal{F}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\, f(t)\, e^{-zt} dt = F(z),$$

et on retrouve bien le résultat obtenu au sens des fonction :

$$\mathcal{L}\{Hf'\}(z) = zF(z) - f(0).$$

2.3 Convolution et inversion

Le produit de convolution est utilisé dans le traitement du signal. Si l'on a un signal entrant $e(t)$ et un élément filtrant ayant une fonction de transfert $h(t)$ alors le signal de sortie $s(t)$ sera la convolution de ces deux fonctions : $s = e * h$ (produit de convolution) et $S(z) = E(z) * H(z)$ (produit simple de deux fonctions) où $E(z)$ et $H(z)$, $S(z)$ sont les transformées de Laplace des fonctions du temps $e(t)$ et $h(t)$, $s(t)$, alors on a

$$S(z) = E(z) * H(z) \Leftrightarrow H(z) = \frac{S(z)}{E(z)}.$$

Il suffit alors d'appliquer la transformée de Laplace inverse pour retrouver H .

2.3.1 Convolution

Définition 2.3.1 *Le produit de convolution des 2 distributions* X *et* S*, lorsqu'il existe (si l'une au moins des 2 distributions est à support bornée), notée* $X * S$*, est défini pour toute fonctions* $\varphi \in \mathfrak{D}$ *de la forme*

$$\varphi(x, y) = u(x) . v(y), \text{ avec } u, v \in \mathfrak{D},$$

par la relation :

$$\langle X * S, u(x) .v(y)\rangle = \langle X, u\rangle . \langle S, v\rangle .$$

Théorème 2.3.1 *Soient U et V deux distributions dans $\mathfrak{D}'_+$ dont les LT existent, alors leur convolution existe et possède une TL définie par :*

$$\mathcal{L}\{U * V\}(z) = \mathcal{L}\{U\}(z) .\mathcal{L}\{V\}(z) .$$

Preuve. Si U et V sont à supports bornés, comme le support de $U * V$ est inclus dans la somme du support de U et du support de V. Alors le support de $U * V$ borné.On a $U, V \in \mathfrak{D}'_+$ alors $U * V \in \mathfrak{D}'_+$.

En utilisant $e^{-z(x+y)} = e^{-zx}.e^{-zy}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{U * V\}(z) &= \left\langle U * V, e^{-zx}.e^{-zy}\right\rangle \\
&= \left\langle U_x \otimes V_y, e^{-z(x+y)}\right\rangle \\
&= \left\langle U_x, \left\langle V_y, e^{-z(x+y)}\right\rangle\right\rangle \\
&= \left\langle U_x, e^{-zx}\left\langle V_y, e^{-zy}\right\rangle\right\rangle \\
&= \left\langle U_x, e^{-zx}\right\rangle . \left\langle V_y, e^{-zy}\right\rangle = \mathcal{L}\{U\}(z) .\mathcal{L}\{V\}(z) .
\end{aligned}$$

■

2.3.2 inversion

l'objectif de la transformation de Laplace inverse est pour résolution d'équations de convolution. Pour ceci, on dispose le théoréme suivant :

Théorème 2.3.2 *Une fonction homlomorphe $\mathcal{T}(z)$ est la transformée de Laplace d'une distribution $T \in \mathfrak{D}'_+$ si et seulement s'il existe un demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > x_0, x_0 \in \mathbb{R}\}$, dans* *lequel* $|\mathcal{T}(z)|$ *soit majorée par un polynôme* (P) *en* $|z|$ *ie :*

$$|\mathcal{T}(z)| \leq P|z|.$$

2.4 Équations de convolution

La transformation de Laplace peut être utile pour calculer des inverses de convolution dans $\mathfrak{D}'_+$ et donc résoudre des équations de convolution dans $\mathfrak{D}'_+$.

Définition 2.4.1 *Une équation de convolution dans l'espace* $\mathfrak{D}'_+$ *est une équation de la forme :*

$$A * X = B,$$

où A *et* B *sont des distributions données dans* $\mathfrak{D}'_+$, *et* X *une distribution inconnue de* $\mathfrak{D}'_+$.

Exemple 2.4.1 *Considérons une équation différentielle ordinaire (équation d'oscillateur harmonique forcé)*

$$X''(t) + w_0^2 X(t) = F(t)$$

$X(t)$:*La solution de l'équation (ou réponse de l'oscillateur) décrit les oscillations forcées du système.*

$F(t)$: *s'exprime simplement en fonction de* $f(t)$ *(multiplication par une constante,déphasage).*

w_0^2 : *la pulsation propre.*

Cette équation s'écrit sous la forme d'une équation de convolution :

$$A * X = F,$$

avec $A = \delta'' + w_0^2\delta$ *la distribution caractérisant l'oscillateur.*

Les équations de convolution peuvent se résoudre par la méthod de Green.

2.4.1 Méthode de Green

Supposons que l'on sache résoudre l'équation

$$A * E = E * A = \delta. \quad A \text{ donnée.}$$

La solution de cette équation E est l'inverse de convolution de l'équation étudée.

Cette solution particullière suffit à résoudre l'équation générale

$$A * X = B$$

pour une sollicitation B quelconque sous la forme :

$$X = E * B.$$

Où utilisation des propriétés de commutativité et d'associativité sont légitimes puisque toutes les distribution sont dans $\mathfrak{D}'_+(\mathbb{R})$.

Alors,

$$E * B = E * (A * X) = (E * A) * X = \delta * X = X.$$

La solution de l'équation $A*E = \delta$ est aissée par TL puisqu'on trouve aussitôt par application du théorème de convolution :

$$\mathcal{E}(z) = \tfrac{1}{\mathcal{A}(z)}, \quad \text{Où } \mathcal{E}(z) \text{ et } \mathcal{A}(z) \text{ sont des TL de } E \text{ et } A \text{ respectivement.}$$

On obtient ensuit E par transformée de Laplace inverse, puis la solution générale X par $X = E * B$.

Remarque 2.4.1 *La méthode de Green ne permet pas d'obtenir toutes les solutions d'une équation de convolution, mais seulement celle qui est dans $\mathfrak{D}'_+$ et qui admet une TL.*

Chapitre 3

Applications de la transformation de Laplace

La plupart des problémes de physique conduisent à poser et à tenter de résoudre des équations différentielle linéaire (ordinaires et partielles) avec des conditions aux limites caractéristiques de la situation étudiée. La transformée de Laplace permet de traiter un grand nombre d'équations différentielles, et des équatios intégrale (Volterra, Able).

3.1 Résolution des équations différentielles linéaires

3.1.1 Équation différentielles à coefficients constantes

Soit donnée une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(t).$$

On demande de trouver la solution de cette équation $y = y(t)$, pour $t \geq 0$ et vérifiant les conditions initiales :

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

1erétape : Appliquer la transformation de Laplace des deux membres de l'équation :

$$\mathcal{L}\left\{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y\right\}(z) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(z).$$

En utilisant les propriétés de linéairité :

$$a_n \mathcal{L}\left\{y^{(n)}\right\}(z) + a_{n-1}\mathcal{L}\left\{y^{(n-1)}\right\}(z) + ... + a_1 \mathcal{L}\left\{y'\right\}(z) + a_0 \mathcal{L}\left\{y\right\}(z) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(z).$$

sachant que :

$$\mathcal{L}\left\{f^{(k)}(t)\right\}(z) = z^k F(z) - \sum_{i=1}^{k} z^{i-1} f^{(k-i)}\left(0^+\right). \quad \text{d'aprés (1.4)}$$

2^{éme}étape : En utilisant techniques algébriques pour obtient la solution $Y(z)$

3^{éme}étape : Retrouve $y(t)$ en utilisant la transformation inverse sur $Y(z)$.

Exemple 3.1.1 *Déterminons la solution $y(t)$ de l'équation différentielle :*

$$y''(t) + y(t) = t,$$

avec des conditions aux limites suivantes : $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$

***1er étape :** Nous appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation :*

$$\mathcal{L}\left\{y''(t)\right\}(z) + \mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(z) = \mathcal{L}\left\{t\right\}(z).$$

Si $\mathcal{L}\left\{y(t)\right\}(z) = Y(z)$ on a

$$z^2 Y(z) - y'(0) - zy(0) + Y(z) = \frac{1}{z^2}.$$

2**^{éme} **étape : *En utilisant des techniques algébriques nous trouvons*

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{1}{z^2\left(z^2+1\right)} - \frac{2}{z^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \\
&= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2+1} - \frac{2}{z^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \\
&= \frac{1}{z^2} - \frac{3}{z^2+1} + \frac{z}{z^2+1}.
\end{aligned}$$

3**^{éme} **étape : *Nous appliquons la transformation inverse de Laplace aux deux membres de l'équation :*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y\left(z\right)\right\}\left(t\right) = y\left(t\right) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2}\right\}\left(t\right) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{z^2+1}\right\}\left(t\right) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2+1}\right\}\left(t\right)$$

$$y\left(t\right) = t - 3\sin t + \cos t.$$

3.1.2 Équation différentielles à coefficients variables

La transformée de Laplace peut également être utilisée pour résoudre certaines équations différentielles ordinaires dans lesquels les coefficients sont variables.

Soit donnée une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients variables

$$A_n\left(t\right)y^{(n)} + A_{n-1}\left(t\right)y^{(n-1)} + ... + A_1\left(t\right)y' + A_0\left(t\right)y = f\left(t\right)$$

avec des conditions aux limites :

$$y\left(0\right) = y_0, y'\left(0\right) = y_0', ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

Exemple 3.1.2 *Déterminons la solution $y\left(t\right)$ de l'équation différentielle :*

$$ty''\left(t\right) + \left(1-2t\right)y'\left(t\right) - 2y\left(t\right) = 0,$$

satisfaisant aux conditions initiales : $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

1**^{er} **étape :

$$\mathcal{L}\{ty''(t)\}(z) + \mathcal{L}\{(1-2t)\,y'(t)\}(z) - 2\mathcal{L}\{y(t)\}(z) = 0, \quad \textit{avec } \mathcal{L}\{y(t)\}(z) = Y(z)$$

On a :

$$-\tfrac{d}{dz}\{z^2Y(z) - zy(0) - y'(0)\} + zY(z) - y(0) + 2\tfrac{d}{dz}\{zY(z) - y(0)\} - 2Y(z) = 0, \quad \textit{(d'aprés(1.3))}.$$

2**^{éme} **étape :

L'équation précédente s'écrit donc sous la forme :

$$(z-2)\,Y'(z) + Y(z) = 0$$

c-à-d

$$\frac{dY(z)}{Y(z)} + \frac{dz}{z-2} = 0$$

d'où

$$\ln Y(z) + \ln(z-2) = C \diagup \quad C \ \textbf{\textit{constante}}$$

et par conséquent

$$Y(z) = \frac{C}{z-2}$$

3**^{éme} **étape :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(z)\} = C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z-2}\right\} = Ce^{2t}.$$

Or par hypothèse

$$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1,$$

et finalement

$$y(t) = e^{2t}.$$

– **Remarque sur les équations différentielles**

Considérons l'équation différentielle :

$$x''(t) + w^2 x(t) = 0, \quad \text{oú } x : t \to x(t) \text{ est une fonction.}$$

En utilisant la TL au sens des fonctions, nous obtenons les résultats suivantes :

1. Si $x(0) = x'(0) = 0 \Rightarrow x(t) = 0.$
2. Si $\begin{cases} x(0) = x_0 \neq 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = x_0 \cos wt.$

Que se passe-t-il si l'on considère cette équation au sens des distributions?!

$$X''(t) + w^2 X(t) = 0, \quad \text{oú } X \text{ est une distribution.} \tag{3.1}$$

Par transformée de Laplace, on a aussitôt :

$$(z^2 + w^2)\,\mathcal{X}(z) = 0, \quad \text{oú } \mathcal{X}(z) \text{ est une TL de } X.$$

qui admet pour seul solution $\mathcal{X}(z)$, et donc $X = 0$, quelle que soit les conditions initiales.

La raison de la différence entre TL au sens des fonctions et au sens des distributions, vient ce que le calcul à l'aide des TL des distributions implique pour celles-ci l'appartenance à $\mathfrak{D}'_+$, c'est-à-dire une propriété de causalité, qui impose que les distributions soient nulle dans $\mathbb{R}^-$.

La bonne façon de procéder consiste à associer la distribution $X = xH$ à la fonction x, de sorte que :

$$\begin{cases} X' = x'H + x_0\delta. \\ \text{et} \\ X'' = x''H + x'_0\delta + x_0\delta'. \end{cases}$$

En utilisant l'équation différentielle (3.1), on a

$$x''H = -w^2 xH = -w^2 X,$$

et donc, au sens des distributions :

$$X'' + w^2 X = x_0'\delta + x_0\delta'.$$

On vérifiera aisément que l'on retrouve bien les solutions attendues par transformation de Laplace.

Cette modification, parfois nécessaire, des équations différentielles résolues par TL au sens des distributions, est la contre-partie des formules compactes concernant les dérivées.

3.1.3 Systémes différentielle ordinaires

La transformation de Laplace peut être utilisée pour résoudre deux ou plusieurs équations différentielles ordinaires simultanées.

Exemple 3.1.3 *Soit le systémes différentielle suivant :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x'(t) = 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = y'(t) = y - 2x \end{cases}$$

avec des conditions initial : $\begin{cases} x(0) = 8 \\ y(0) = 3 \end{cases}$

1 ^{er} ***étape :*** *En appliquant TL, on a, si* $\mathcal{L}\{x(t)\}(z) = X(z)$, $\mathcal{L}\{y(t)\}(z) = Y(z)$,

$$\begin{cases} zX(z) - 8 = 2X(z) - 3Y(z) \\ zY(z) - 3 = Y(z) - 2X(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (z-2)X(z) + 3Y(z) = 8 \\ 2X(z) + (z-1)Y(z) = 3 \end{cases}$$

2 ^{éme} ***étape :*** *peut être écrit sous forme matricielle :(et par la méthode de Cramer) on obtient*

$$\begin{bmatrix} z-2 & 3 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ Y(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

alors

$$X(z)=\frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & z-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z-2 & 3 \\ 2 & z-1 \end{vmatrix}}=\frac{8z-17}{z^2-3z-4}=\frac{8z-17}{(z+1)(z-4)}=\frac{5}{z+1}+\frac{3}{z-4}.$$

$$Y(z)=\frac{\begin{vmatrix} z-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z-2 & 3 \\ 2 & z-1 \end{vmatrix}}=\frac{3z-22}{z^2-3z-4}=\frac{3z-22}{(z+1)(z-4)}=\frac{5}{z+1}-\frac{2}{z-4}.$$

3^{éme} étape :

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(z)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{z+1}+\frac{3}{z-4}\right\}=5e^{-t}+3e^{4t}.$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(z)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{z+1}-\frac{2}{z-4}\right\}=5e^{-t}-2e^{4t}.$$

3.2 Équations aux dérivées partielles linéaires

L'équation différentielle partielle **(EDP)** est une équation différentielle ordinaire **(EDO)** pour la fonction de plusieurs variables. Nous la trouvons principalement dans toutes les équations de la physique. Par exemple : Les équations de Maxwell en électromagnétisme, l'équation de Schrödinger en mécanique quantique, les équations de Navier-Stokes en hydrodynamique, l'équation de la chaleur en thermodynamique, ...etc

La transformée de Laplace est également utile pour résoudre diverses équations aux dérivées partielles sous réserve de conditions limites.

Exemple 3.2.1 *Déterminons la solution $u(x,t)$ de l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

satisfaisant aux conditions : $\begin{cases} u(x,0) = \sin x. \\ u(0,t) = u(\Pi,t) = 0. \\ 0 < x < 1. \\ t > 0. \end{cases}$

1**[er] **étape :

Si $U(x,z) = \mathcal{L}\{u(x,t)\}$. *On a*

$$\mathcal{L}\{\frac{\partial u}{\partial t}\} = \mathcal{L}\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\frac{\partial u}{\partial t}\} &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-zt} dt \\
&= \lim_{h\to+\infty} \int_0^h \frac{\partial u}{\partial t} e^{-zt} dt \\
&= \lim_{h\to+\infty} \left(u(x,t)\, e^{-zt} \Big|_0^h + z \int_0^h u(x,t)\, e^{-zt} dt \right) \\
&= z \int_0^{+\infty} u(x,t)\, e^{-zt} dt - u(x,0) \\
&= zU(x,z) - u(x,0).
\end{aligned}$$

On pose : $v(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)$, *on obtient :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\} &= \mathcal{L}\{\frac{\partial v}{\partial x}\} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial x} e^{-zt} dt \\
&= \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} v(x,t)\, e^{-zt} dt \\
&= \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-zt} dt \\
&= \frac{d^2}{dx^2} \int_0^{+\infty} u(x,t)\, e^{-zt} dt \\
&= \frac{d^2}{dx^2} U(x,z),
\end{aligned}$$

donc

$$zU(x,z) - u(x,0) = \frac{d^2}{dx^2}U(x,z)$$

c-à-d :

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x,z) - zU(x,t) = \sin x.$$

2**^éme* ***étape :

La solution de cette équation est :

$$U(x,z) = U_g(x,z) + U_p(x,z)$$

$U_g(x,z)$: *solution générale de l'équation homogène.*

$$U_g(x,z) = K_1 e^{\sqrt{z}x} + K_2 e^{-\sqrt{z}x}, \quad / K_1, K_2 \text{ sont des constantes.}$$

$U_p(x,z)$: *solution particulière de l'équation non homogène.*

$$U_p(x,z) = C\sin x. / C = \frac{1}{z+1}$$

c-à-d

$$U_p(x,z) = \frac{\sin x}{z+1}.$$

Alors

$$U(x,z) = K_1 e^{\sqrt{z}x} + K_2 e^{-\sqrt{z}x} + \frac{\sin x}{z+1}.$$

On a

$$U(0,z) = K_1 + K_2,$$

$$U(\Pi,z) = K_1 e^{\sqrt{z}\Pi} + K_2 e^{-\sqrt{z}\Pi}.$$

Par hypothèse,

$$U(0,z) = \mathcal{L}\{u(0,t)\} = \int_0^{+\infty} u(0,t)\, e^{-zt} dt = 0,$$
$$U(\Pi,z) = \mathcal{L}\{u(\Pi,t)\} = \int_0^{+\infty} u(\Pi,t)\, e^{-zt} dt = 0.$$

donc

$$\begin{matrix} K_1 + K_2 = 0, \\ K_1 e^{\sqrt{z}\Pi} + K_2 e^{-\sqrt{z}\Pi} = 0 \end{matrix} \Rightarrow K_1 = K_2 = 0 \Rightarrow U(x,z) = \tfrac{\sin x}{z+1}.$$

3*$^{\acute{e}me}$ *étape :

Finalement, la solution de l'équation proposée est :

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(x,z)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{\sin x}{z+1}\right\} = \sin x \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z+1}\right\} = e^{-t}\sin x.$$

3.3 Équations intégrales

La transformée de Laplace permet d'étudier un grand nombre d'équations intégrales (équation intégrale de Volterra, équation intégrale d'Abel). La propriété relative au produit de convolution joue un rôle cruciale

3.3.1 Équation intégrale de Volterra

Une équation intégrale de Volterra de seconde espèce est une équation de la forme

$$f(x) = g(x) + \int_0^x k(x,t)\, f(t)\, dt,$$

où g, k sont des fonctions connues et f une fonction inconnue est solution de l'équation intégrale.

La fonction k est le noyau de cette équation qui dépend seulement de la différence $x - t$, c-à-d $k(x,t) = k(x-t)$ avec k à support dans $\mathbb{R}_+$.

Soient $F(z) = \mathcal{L}\{f(x)\}(z)$ et $G(z) = \mathcal{L}\{g(x)\}(z)$, $K(z) = \mathcal{L}\{k(x,t)\}(z)$.

1erétape : Appliquer la transformation de Laplace des deux membres de l'équation :

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{g(x)\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^x k(x,t) f(t)\, dt\right\}.$$

2^{éme}étape : En utilisant la définition de produit de convolution

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x k(x,t) f(t)\, dt\right\} = \mathcal{L}\{(k * f)(x)\}(z) = K(z) F(z),$$

d'où

$$F(z) = G(z) + K(z) F(z)$$

par conséquent

$$F(z) = \tfrac{G(z)}{1-K(z)}, \quad K(z) \neq 1.$$

3^{éme}étape : Retrouve f en utilisant la transformation inverse sur F

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(z)\} = f(x).$$

Exemple 3.3.1 *Déterminons la solution f de l'équation intégrale suivante :*

$$f(x) = x^2 + \textstyle\int_0^x \sin(x-t) f(t)\, dt, \quad x \geq 0$$

1er étape :

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(z) = \mathcal{L}\{x^2\}(z) + \mathcal{L}\left\{\int_0^x \sin(x-t) f(t)\, dt\right\}(z)$$

2^{éme} étape :

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(z) = \mathcal{L}\{x^2\}(z) + \mathcal{L}\{\sin x * f(x)\}(z)$$
$$F(z) = \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^2+1} F(z),$$

par conséquent

$$F(z) = \tfrac{2}{z^5} + \tfrac{2}{z^3}, \quad \Re z > 0$$

3^{éme} étape :

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(z)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{z^5} + \frac{2}{z^3}\right\} = \frac{x^4}{12} + x^2.$$

3.3.2 Équation intégrale d'Abel

Une équation intégrale d'Abel est une équation de la forme

$$\int_0^x \frac{g(t)}{\sqrt{x-t}} dt = f(x)$$

où f et y sont des fonctions continues qui admettent des transformées de Laplace.

Le problème consiste à exprimer la fonction y à partir de f qui est supposée connue.

Exemple 3.3.2 *Déterminons la solution g de l'équation intégrale suivante :*

$$\int_0^x \frac{g(t)}{\sqrt{x-t}} dt = 1 + x + x^2.$$

1^{er} étape :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x \frac{g(t)}{\sqrt{x-t}} dt\right\} = \mathcal{L}\{1 + x + x^2\}.$$

2^{éme} étape :

$$\mathcal{L}\left\{g(x) * \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)\right\} = \mathcal{L}\{1 + x + x^2\}$$

$$G(z)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{z^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3}$$

par conséquent

$$G(z) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{z^{\frac{5}{2}}}\right).$$

3**^{éme} **étape :

$$
\begin{aligned}
g(x) = \mathcal{L}^{-1}\{G(z)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}+\frac{2}{z^{\frac{5}{2}}}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\right\} \\
&= \frac{1}{\Pi}\left(x^{-\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{3\Pi}\left(3+6x+8x^{2}\right).
\end{aligned}
$$

En plus des exemples que nous avons étudiés domaine d'application de la transformation de Laplace reste trés vaste, ce qui parmis ses applications de la stabilité de quelques systèmes non linéaires et du traitement d'images .

Conclusion

En conclusion, La transformée de Laplace a de plus l'avantage (par rapport à celle de Fourier) de demander moins de régularité à la fonction : intégrabilité locale et comportement exponentiel à $+\infty$, là où Fourier demande l'intégrabilité au sens L^1.

La transformée de Laplace est un outil trés simple d'emploi pour résoudre les problémes d'évolution (équations différentielles linéaire ou aux dérivées partielles, ou intégrales ...). Par transformée de Laplace, les équations différentielles linéaire deviennent des équations algébriques. Il en résulte une simplification efficace des problémes qui permet souvent leur résolution analytique.

Bibliographie

[1] Ahmed Lesfari. Distribution, analyse de Fourier et transformation de Laplace. Cours et exercices.

[2] Jean-Marc Gilsinger et Mohammed Jaï. Éléments d'analyse fonctionnelle. Fondements et applications aux science de l'ingénieur.

[3] Murray R. Spiegel, Ph. D. (1965). Theory and problems of Laplace transforms.

[4] IFIPS-Université de Paris-Sud. (2008). Transformées de Laplace des fonctions et des distributions. Cours et exercices.

[5] Hadjab Hemza. (2017). Convolution des distributions et applications à la résolutions des équations différentielles. Université de Mohamed Boudiaf-M'sila

[6] M. Moulaï Abderrezak. (2012). Dérivées non entières viscoélastisité linéaire. Modéles et problèmes ouverts. Université de Abderrahmane Mira-Béjaïa.

[7] Jean-Bernard Zuber. (2013-2014). Mathématiques pour physiciens, Formation interuniversitaire de physique.

[8] C.Gasquet et P.Witomski.(1990). Analyse de Fourier et applications, Filtrage, calcul numérique et ondelettes.

[9] Thomas Cluzeau. Mathématiques pour l'ingénieur.

[10] Lang Fred. (2011). Transformation de Laplace.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

TL	:	Transformation de Laplace.
TF	:	Transformation de Fourier.
Ω	:	La lettre Ω désigne toujour un ouvert de $\mathbb{R}$.
K	:	La lettre K désigne toujour un compact de $\mathbb{R}$.
$\mathcal{D}$	:	Espace des fonctions test de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivables à support compact.
$\mathcal{D}'_+$	:	Espacedes distributions (espace des formes linéaire continues sur $\mathbb{R}$) à support inclus dans $[0, +\infty[$.
$\mathcal{S}'_+$	:	Espase des distributions tempérées à support inclus dans $\mathbb{R}_+$.
$\langle .,. \rangle$	:	Crochet de dualité entre une fonction de $\mathcal{D}'_+$ et une fonction de $\mathcal{D}$.
d^0	:	Dégrée de polynôme.
$Res\,(f, z_0)$	:	Résidu d'une fonction f en z_0.
$Suppf$	:	Support de fonction.f
EDO	:	Équation différentielle ordinaire.
EDP	:	Équation différentielle aux dérivée partielle.