

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Driche Nabila

Titre :

Régularisation des problèmes mal-posés

Membres du Comité d'Examen :

Dr. **Soltani Siham** UMKB Président

Dr. **Rezki Ibrahim** UMKB Encadreur

Dr. **Hamdi Soumia** UMKB Examineur

Juin 2019

DÉDICACE

De tout mon cœur je dédie ce modeste travail

À mes parents **Moussa** et **Khadidja**, la lumière de ma vie qui nous ont guidés vers le chemin de savoir.

À mon cher mari **Abdallah**, pour son soutien et son encouragement.

À ma chère sœur **Afef** ainsi qu'à mes chères frères **Abdelkader**, **Akrem** et **Hichem**, pour leur tendresse, leur complicité et leur présence toujours à ma côté.

À toute ma famille.

À mes très chers amis les plus proches de mon cœur.

REMERCIEMENTS

A l'issue de ce modeste travail, je tiens à remercier : "**Allah**" qui m'a donné la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements et ma profonde gratitude à mon rapporteur monsieur le docteur : **Rezki Brahim** pour son encadrement continu, pour les remarques constructives qu'il me fournies, ainsi que pour ses précieux conseils durant toute la période de réalisation de mon projet de fin d'étude.

Mes remerciements lui vont aussi pour le temps qu'il a consacré pour les corrections et la révision du contenu de mon mémoire.

En dehors de son apport en matière d'analyse scientifique, je n'oublierai pas de le remercier pour ses qualités humaines, son hospitalité et le soutien qui m'a permis de mener à terme ce mémoire.

Ceci dit, je remercie aussi l'ensemble des membres du jury :**Dr.Soltani Siham** et **Dr.Hamdi Soumia** qui ont bien voulu lire et évaluer le contenu de mon travail et d'être présent le jour de sa présentation.

Il m'est également important d'adresser mes remerciements à monsieur : **Dr. Hafayed Mokhtar**, le chef département mathématique à l'université de Biskra.

Finalement, je tiens remercier toute personne qui a contribué de près ou loin, directement ou indirectement l'accomplissement de ce travail.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Liste des tableaux	vi
Introduction	1
0.0.1 Plan de la thèse	1
1 Rappels sur les espaces de Hilbert et les opérateurs	3
1.1 Espaces de Hilbert	3
1.1.1 Définitions et exemples	3
1.1.2 Propriétés des espaces de Hilbert	6
1.1.3 Bases hilbertiennes	7
1.2 Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert	8
1.2.1 Continuité, borne et norme d'un opérateur linéaire	8
1.2.2 Opérateurs auto-adjoints	9
1.2.3 Spèctre d'un opérateur linéaire	10
1.2.4 Opérateurs non-borné dans un espace de Hilbert	11

2 Problèmes bien et mal-posés	14
2.1 Problèmes inverses	14
2.2 Problèmes bien et mal-posés	15
2.2.1 Définition	15
2.2.2 Définition	15
2.2.3 Exemples des problèmes mal-posés	16
3 Régularisation des problèmes mal-posés	23
3.1 Méthode de Tikhonov	23
3.1.1 Notion d'opérateur régularisant	23
3.1.2 Construction d'opérateurs régularisants	25
3.1.3 Application sous MATLAB	32
Conclusion	35
Bibliographie	36
Abréviations et Notations	37

Table des figures

3.1	Résultat de programme	34
-----	---------------------------------	----

Liste des tableaux

Introduction

La notion d'un problème mathématique mal-posé a apparut dans les discussions du mathématicien français **J. Hadamard** dans son ouvrage "Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations", après avoir introduit, une vingtaine d'années avant la notion d'un problème bien-posé qui doit satisfaire, d'après lui, à trois propriétés : l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution. La perte d'une de propriétés définisse un problème dit mal-posé.

Les méthodes générales de l'analyse mathématique ont bien était adaptés pour les solutions des problèmes bien-posé, cependant, ce n'était pas clair dans quel sens les problèmes mal-posés peuvent avoir solutions. Tikhonov est un de plusieurs mathématiciens qu'a travaillé pour développer la théorie et les méthodes pour résoudre les problèmes mal-posés. Il a pu donner une définition mathématique précise "des solutions approchées" pour des classes générales de ces problèmes.

0.0.1 Plan de la thèse

Ce travail porte sur la régularisation des problèmes mal-posés, quand, pourquoi et comment on régularise un problème mal-posé ?

Premier chapitre, est consacré à l'introduction des espaces de Hilbert des opérateurs et leurs propriétés (définitions, propositions, exemples,...).

Deuxième chapitre, est réservé aux définitions, les types des problèmes inverses, caractérisations des problèmes bien et mal-posés, et quelques exemples.

Troisième chapitre, comporte les principaux des méthodes de régularisation des problèmes

mal-posés (régularisation de Tikhonov).

Chapitre 1

Rappels sur les espaces de Hilbert et les opérateurs

Ce chapitre est constitué d'un rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail. Ce rappel concerne les espaces de Hilbert, les opérateurs et leurs propriétés définis sur les espaces de Hilbert.

1.1 Espaces de Hilbert

1.1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1 Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Une norme sur E est une application de E dans \mathbb{R} , possédant les propriétés suivantes :

- $\forall x \in E, \|x\|_E \geq 0$ et $\|x\|_E = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha x\|_E = |\alpha| \|x\|_E$.
- $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$.

Exemple 1.1 Dans le cas où E est de dimension n (nous l'identifions alors à \mathbb{R}^n), les normes suivantes sont les plus utilisées :

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

- $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$.
- $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$.

Définition 1.2 Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Un produit scalaire sur E est une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} , notée (\cdot, \cdot) , possédant les propriétés suivantes :

- $\forall (x, y, z) \in E^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;
- $\forall (x, y) \in E^2, (x, y) = (y, x)$;
- $\forall x \in E, (x, x) \geq 0$;
- $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Définition 1.3 Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien

Exemple 1.2 Sur \mathbb{R}^n , le produit scalaire euclidien usuel est :

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1.1)$$

Exemple 1.3 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . L'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur Ω est :

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \leq \infty\} \quad (1.2)$$

est un espace préhilbertien si on le munit du produit scalaire :

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad (1.3)$$

Un produit scalaire sur E définit une norme sur E par la formule suivante :

$$\|x\|_E = \sqrt{(x, x)} \quad (1.4)$$

Définition 1.4 Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Exemple 1.4 *L'espace vectoriel \mathbb{R}^n , muni du produit scalaire euclidien usuel, est un espace de Hilbert.*

Le résultat suivant est fondamental

Proposition 1.1 *L'espace vectoriel $L^2(\Omega)$, muni du produit scalaire défini en (1.3), est un espace de Hilbert.*

Exemple 1.5 *(Espace de Sobolev)*

Plaçons nous pour simplifier en dimension 1, sur l'intervalle $[0, 1]$. L'espace de Sobolev d'ordre 1 est

$$E^1(0, 1) = \{x \in L^2(0, 1), \exists x_1 \in L^2(0, 1) \text{ tel que} \quad (1.5)$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(0, 1), \int_0^1 x(t)\varphi'(t)dt = - \int_0^1 x_1(t)\varphi(t)dt\}$$

(où $\mathcal{C}_c^1(0, 1)$ désigne l'espace des fonctions continûment dérivables, à support compact dans $[0, 1]$).

Cette définition est équivalente à celle, plus usuelle utilisant la théorie des distributions. Pour $x \in E^1(0, 1)$, on note $x' = x_1$.

On démontre que $E^1(0, 1)$ est un espace de Hilbert si on le munit du produit scalaire :

$$(x, y)_{E^1} = \int_0^1 x(t)y(t)dt + \int_0^1 x'(t)y'(t)dt \quad (1.6)$$

Dans les applications, on a souvent besoin du sous-espace de E^1 correspondant aux fonctions nulles au bord \dot{z} (au sens de la trace). Ce sous-espace est noté $E_0^1(0, 1)$, et on peut le munir du produit scalaire suivant :

$$(x, y)_{E_0^1} = \int_0^1 x'(t)y'(t)dt. \quad (1.7)$$

On démontre (c'est une conséquence de l'inégalité de Poincaré) que la norme correspondante est équivalente à la norme induite par celle de l'espace E^1 .

1.1.2 Propriétés des espaces de Hilbert

Proposition 1.2 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*). Pour tous $(x, y) \in E^2$, on a l'inégalité :

$$|(x, y)|^2 \leq \|x\|_E^2 \|y\|_E^2 \quad (1.8)$$

L'égalité n'a lieu que si x et y sont proportionnels.

Proposition 1.3 (*Identité du parallélogramme*). Pour tous $(x, y) \in E^2$, on a l'identité :

$$\|x + y\|_E^2 + \|x - y\|_E^2 = 2(\|x\|_E^2 + \|y\|_E^2) \quad (1.9)$$

Le résultat suivant est l'un des plus importants de la théorie.

Théorème 1.1 (*de projection*). Soit F un sous-ensemble fermé, convexe de E , et $z \in E$ donné. Il existe un unique élément $x_0 \in F$ tel que :

$$\|z - x_0\|_E = \inf_{x \in F} \|z - x\|_E \quad (1.10)$$

Le point x_0 est caractérisé par la condition ;

$$(z - x_0, x - x_0) \leq 0, \forall x \in F \quad (1.11)$$

Le point x_0 mis en évidence au théorème (1.1) s'appelle la projection de z sur F . Dans le cas où F est un sous-espace vectoriel, on peut préciser ce résultat :

Corollaire 1.1 Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E , et soit $z \in E$. La projection de z sur F est caractérisée par :

$$(z - x_0, x) = 0, \forall x \in F \quad (1.12)$$

Dans un espace de Hilbert, on dit que deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire

est nul. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F est :

$$F^\perp = \{x \in E, (x, y) = 0, \forall y \in F\}$$

Une conséquence des résultats précédents est :

Corollaire 1.2 Soit F un sous-espace vectoriel de E (non nécessairement fermé). On a

$$F^\perp + \bar{F} = E \tag{1.13}$$

1.1.3 Bases hilbertiennes

Définition 1.5 Une base hilbertienne d'un espace de Hilbert E est une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :

- $\|e_n\|_E = 1, \forall n, \text{ et } (e_n, e_m) = 0, \forall n \neq m;$
- l'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans E .

Précisons la deuxième condition : soit $F_n = \text{vect}\{e_1, \dots, e_n\}$. Les sous-espaces F_n sont emboîtés ($F_n \subset F_m$ pour $n \leq m$), donc $F = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ est un sous-espace vectoriel. La seconde condition de la définition exprime que ce sous-espace est dense dans E , c'est-à-dire que tout élément de E peut être approché arbitrairement par un élément de F .

On démontre alors que tout espace vectoriel (séparable) admet une base hilbertienne. Étant donné une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , tout élément de E s'écrit :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n \tag{1.14}$$

avec (c'est l'égalité de Bessel-Parseval) :

$$\|x\|_E^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \tag{1.15}$$

Un tel développement est unique, c'est-à-dire que si on a un développement

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$$

avec $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, alors $x_n = (x, e_n)$. Notons toutefois qu'une base hilbertienne n'est pas une base algébrique, puisque ce développement n'est pas une combinaison linéaire finie.

On sait construire explicitement des bases hilbertiennes pour certains espaces L^2 . Bien évidemment, une base orthogonale d'un espace vectoriel de dimension finie est une base hilbertienne.

Exemple 1.6 *Les deux suites de fonctions*

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx\right)_{n \geq 1}, \text{ ou } \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx\right)_{n \geq 0}$$

sont des bases hilbertiennes de $L^2(0, \pi)$. Dans ce cas, le développement obtenu en (1.14) s'identifie à un développement en série de Fourier (après prolongement par imparité et périodicité).

1.2 Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert

Soient E et F deux espaces de Hilbert.

1.2.1 Continuité, borne et norme d'un opérateur linéaire

Définition 1.6 *Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$, est continu si :*

$$\exists M > 0, \forall x \in E, \|Ax\| \leq M \|x\|$$

le plus petite nombre M , s'appelle la norme de l'opérateur A :

$$\|A\| = \sup_{u \in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Définition 1.7 On dit que l'opérateur $A : E \rightarrow F$, est borné s'il fait correspondre à tout ensemble borné dans $D(A)$, un ensemble borné dans l'espace F .

Définition 1.8 Un opérateur A^* défini sur $D(A^*) \subset F^*$ à valeur dans E^* ; tel que

$$\forall x \in D(A), \forall y \in D(A^*) : \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$$

A est appelé l'adjoint de A et vérifie de plus : $(A^*)^* = A$ et $\|A^*\| = \|A\|$.

Proposition 1.4 Soit $A : E \rightarrow F$; un opérateur linéaire et A^* son adjoint. On a les relations suivantes :

* $\ker A^* = (\text{Im } A)^\perp$.

* $(\ker A)^\perp = \overline{\text{Im } A^*}$

1.2.2 Opérateurs auto-adjoints

Soit E un espace de Hilbert

Définition 1.9 On dit que l'opérateur A est auto-adjoint si et seulement si $A = A^*$ c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E, \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

Si l'opérateur A est auto-adjoint, alors on a : $\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} |\langle Ax, y \rangle|$

Définition 1.10 Un opérateur $A : E \rightarrow F$; est dit compact si toute suite bornée (f_n) de $D(A)$ contiennent une sous-suite (f_{n_k}) pour laquelle (Af_{n_k}) est convergente et ça c'est équivalent à : l'image d'un ensemble borné par l'opérateur A est un ensemble relativement compact.

Proposition 1.5 Tout opérateur de rang fini est compact.

Définition 1.11 (Schauder) Soit $A \in \mathcal{L}(E; F)$; où F est complet. L'opérateur A est compact si et seulement si son adjoint A^* est compact.

Théorème 1.2 (Théorème de Riesz), L'identité d'un espace vectoriel normé est compact si et seulement si cet espace est de dimension finie.

1.2.3 Spèctre d'un opérateur linéaire

Soit A un opérateur linéaire défini de E dans F tel que $D(A) = E$.

Définition 1.12 On dit que le point λ est un point régulier de A si l'opérateur $(A - \lambda I)$ est inversible, i.e : $\det(A - \lambda I) \neq 0$.

Définition 1.13 L'ensemble des points réguliers de l'opérateur A est appelé ensemble résolvant de A et noté par $\rho(A)$ tel que :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} / (A - \lambda I)^{-1} \text{ existe et borné}\}$$

- Si $\lambda \in \rho(A)$; l'opérateur linéaire et borné $R(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ est appelé résolvante de A .
- Le spectre $\sigma(A)$ et le complémentaire de $\rho(A)$ dans le plan complexe i.e $\sigma(A) = \mathbb{R} / \rho(A)$.
- On dit que λ est valeur propre, et on note $\lambda \in VP(A)$ si $\ker(A - \lambda I) \neq 0$.

Remarque 1.1 Il est clair que $VP(A) \subset \sigma(A)$: En général, l'inclusion est stricte :

Il peut exister λ tel que :

$$\ker(A - \lambda I) = \{0\} \text{ et } \text{Im}(A - \lambda I) \neq E$$

(Un tel λ appartient au spectre mais n'est pas valeur propre).

Remarque 1.2 Si $\dim E < \infty$ alors $\sigma(A) = VP(A)$.

Proposition 1.6 Le spectre $\sigma(A)$ est un ensemble compact et

$$\sigma(A) \subset [-\|A\|, \|A\|]$$

Proposition 1.7 Si A est un opérateur linéaire et borné, alors : $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$

Théorème 1.3 Soit A un opérateur auto-adjoint et compact dans un espace de Hilbert complexe E alors :

1. A possède au moins une valeur propre non-nulle si $A \neq 0$.
2. Les valeurs propres de A sont toutes réelles et contenues dans $[m; M]$, où

$$m = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle, \quad M = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle$$

3. M est la plus grande valeur propre de A si $M \neq 0$; m est la plus petite valeur propre de A si $m \neq 0$.

1.2.4 Opérateurs non-borné dans un espace de Hilbert

Dans cette partie E est un espace de Hilbert séparable sur \mathbb{R} . On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire, qui par convention, est antilinéaire par rapport à la seconde variable.

Opérateurs non-bornés

Définition 1.14 *Un opérateur sur E (ou opérateur non-borné) est la donnée d'un sous-espace vectoriel D de E , et d'une application linéaire $A : D \rightarrow E$. L'espace D est le domaine de l'opérateur A . On le note (D, A) et l'on parle de l'opérateur A , de domaine $D(A) = D$. Si $D' \subset D$ et $Ax = A'x$ pour tout $x \in D'$, on dit que (D, A) est une extension de (D', A') ce que l'on note $(D', A') \subset (D, A)$.*

Opérateurs fermés

Le théorème du graphe fermé affirme qu'un opérateur fermé de domaine E est borné.

Définition 1.15 *Soit (D, A) un opérateur, et $G(A) = \{(x, Ax), x \in D\}$ son graphe. On dit que (D, A) est fermé si $G(A)$ est fermé.*

Définition 1.16 – *fermé lorsque G est un sous-espace fermé de $E \times E$.*

– *fermable si \bar{G} est un graphe, i.e.*

$$(x, y) \in \bar{G}, (x, y') \in G' \Rightarrow y = y'$$

On note alors (\bar{D}, \bar{A}) l'opérateur dont le graphe est \bar{G} . C'est une extension de (D, A) . La linéarité de A donne un critère simple pour montrer qu'un opérateur est fermable : il suffit de vérifier que si $(0, y) \in G$, alors $y = 0$.

Opérateurs symétriques et auto-adjoints

Définition 1.17 *On dit qu'un opérateur (D, A) est symétrique lorsque*

$$\forall x, y \in D, \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

Définition 1.18 *On dit qu'un opérateur (forcément symétrique et fermé) (D, A) est auto-adjoint lorsque $(D^*, A^*) = (D, A)$.*

Pour les opérateurs symétriques qui ne sont pas fermés.

Définition 1.19 *On dit qu'un opérateur symétrique (D, A) est essentiellement auto-adjoint lorsque (\bar{D}, \bar{A}) est auto-adjoint.*

Lemme 1.1 *Si l'opérateur symétrique (D, A) est essentiellement auto-adjoint, alors il admet une unique extension auto-adjointe.*

Proposition 1.8 *Soit (D, A) un opérateur symétrique. S'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im}(A + \lambda)$ et $\text{Im}(A + \bar{\lambda})$ sont denses dans E , alors A est essentiellement auto-adjoint.*

Lemme 1.2 *Soit (D, A) un opérateur fermé, et $R(A)$ sa résolvante. On a les propriétés suivantes :*

1. $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)}$, et $\overline{R(A)} = R(A^*)$
2. Pour $\lambda, \mu \in \rho(A)$, $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A)$.
3. pour $\lambda, \mu \in \rho(A)$, $R_\lambda(A)R_\mu(A) = R_\mu(A)R_\lambda(A)$.

Proposition 1.9 *L'ensemble $\rho(A)$ est un ouvert de \mathbb{R} , et R_A est une application holomorphe, par exemple dans le sens où, pour tout $x, y \in E$, $\lambda \rightarrow \langle R_\lambda(A)x, y \rangle$ est holomorphe. Enfin pour $\lambda \in \rho(A)$ on a*

$$\frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(A))} \leq \|R_\lambda(A)\|.$$

On déduit de l'estimation ci-dessus le critère suivant :

Proposition 1.10 *Soit (D, A) un opérateur fermé. $\lambda \in \mathbb{R}$ appartient au spectre de A s'il existe une suite $(\Psi_n)_n$ de D telle que $\|\Psi_n\| = 1$ et $\|(A - \lambda)\Psi_n\| \rightarrow 0$. La réciproque est vraie si λ est un point du bord du spectre.*

Cas des opérateurs auto-adjoints On remarque d'abord que le spectre résiduel d'un opérateur auto-adjoint est toujours vide. En effet si $\ker(A - \lambda I) = \ker(A^* - \lambda I) = \{0\}$, alors $(\text{Im}(A - \lambda))^\perp = \{0\}$.

Proposition 1.11 *Soit (D, A) un opérateur fermé symétrique. A est auto-adjoint si et seulement si $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

On a donc le critère suivant

Proposition 1.12 *Soit (D, A) un opérateur auto-adjoint. $\lambda \in \mathbb{C}$ appartient au spectre de A si et seulement si il existe une suite (Ψ_n) de D telle que $\|\Psi_n\| = 1$ et $\|(A - \lambda)\Psi_n\| \rightarrow 0$.*

Chapitre 2

Problèmes bien et mal-posés

2.1 Problèmes inverses

Un problème inverse consiste à déterminer des causes d'un phénomène à partir de la connaissance des effets. Ce problème est l'inverse du problème dit direct, consistant à déduire les effets à partir de la connaissance des causes.

L'étude des problèmes inverses est difficile et ça est dû à la possibilité d'avoir plusieurs solutions, car des causes différentes mènent aux mêmes effets. Des informations en plus sont nécessaires pour récupérer l'unicité de la solution.

Une autre difficulté pratique de l'étude des problèmes inverses est qu'elle demande souvent une bonne connaissance du problème direct, d'où le succès dans la résolution d'un problème inverse repose en général sur des éléments spécifiques à ce problème. Il existe toutefois quelques techniques qui possèdent un domaine d'applicabilité étendu.

Parmi les domaines dans lesquels les problèmes inverses jouent un rôle important, nous pouvons citer : l'imagerie médicale, l'ingénierie pétrolière, l'hydrogéologie, la chimie, le radar et l'acoustique sous-marine, le traitement d'image.

Du point de vue mathématique, les problèmes inverses se répartissent en deux grands groupes :

- Les problèmes linéaires qui se ramènent à la résolution d'une équation intégrale de première espèce dans le cas continu ou à la résolution d'un système dans le cas discret.
- Les problèmes non linéaires qui sont le plus souvent des questions d'estimation de para-

mètres dans les équations différentielles ou aux dérivées partielles.

La plus part des problèmes inverses ne satisfait pas à la définition d'un problème bien-posé, on les appelle problèmes mal-posés.

2.2 Problèmes bien et mal-posés

2.2.1 Définition

Un problème bien-posé au sens de Hadamard a les propriétés suivantes :

1. une solution existe : $\forall b \in F$, il existe une solution $x \in E$ telle que $Ax = b$.
2. une solution unique : $\forall x_1, x_2 \in E$, si $Ax_1 = Ax_2 = b$ alors $x_1 = x_2$.
3. elle dépend de façon continue des données :

$$\forall (x_n) \subset E \text{ tq } b_n = Ax_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b = Ax \text{ alors } x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x.$$

Remarque 2.1 *On dit que le problème est mal-posé si l'une de ces propriétés n'est pas satisfaite.*

Remarque 2.2 *La non-existence et la non-unicité de la solution d'un problème mal-posé sont sans doute des difficultés sérieuses mais on peut les rétablir. Cependant le manque de continuité est plus problématique, en particulier en vue d'une résolution approchée ou numérique. C'est-à-dire il ne sera pas possible (indépendamment de la méthode numérique) d'approcher d'une manière satisfaisante la solution du problème inverse car les données disponibles seront bruitées donc proches, mais différentes des données réelles.*

2.2.2 Définition

Soit E et F deux espaces métriques et $A : E \rightarrow F$ telle que :

1. A est injective.
2. A est continue.

3. A^{-1} n'est pas continue.

On dit alors que le problème inverse à savoir : connaissant $g \in F$, trouver $f \in E$ tel que $f = A^{-1}g$, est mal-posé.

2.2.3 Exemples des problèmes mal-posés

On présente ici quelques exemples simples des problèmes mal-posés

Exemple

Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne définit comme suivant

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

le système $Ax = b$ n'a pas des solutions car $\det A = 0$ alors la première condition n'est pas satisfaite donc le problème est mal posé.

Exemple

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne définit comme suivant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. $Ax = b$ est un problème sur-déterminé, il n'a pas de solution (car $b \notin \text{Im}(A)$), donc la première condition n'est pas satisfaite alors le problème est mal-posé. On peut le résoudre par la méthode de projection.

2. $A^\top x = b, b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, ce problème est sous-déterminé, il a plusieurs solutions donc A n'est pas injectif, alors le problème est mal-posé car la deuxième condition n'est pas satisfaite. La solution optimal est $\min_{x \in E} \|x\|_2$.

Résolution du système linéaire $Ax = b$

Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur colonne. On cherche à étudier l'influence des erreurs d'arrondi de la matrice A et du vecteur b sur la solution $x \in \mathbb{R}^n$ du système $Ax = b$.

Exemple 1 On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \times 10^{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10^{-5} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

admet la solution $x = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}^T$. Supposons qu'il existe une petite perturbation dans le troisième élément des données indiquées. Tel que $\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10^{-2} \end{pmatrix}^T$, alors la solution sera après la perturbation de vient $x = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 500,5 \end{pmatrix}^T$.

Puisque le problème est généralement mal posé, alors une petite perturbation dans les données, produit un grand changement dans la solution, donc pour éviter celle perturbation (instabilité de la solution). On doit résoudre

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10^{-5} \end{pmatrix}$$

Ou lieu de résoudre le problème précédent.

Après la régularisation du problème. la solution est $x = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,005 \end{pmatrix}^T$, après la perturbation des données la solution sera $x = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 5,005 \end{pmatrix}^T$.

Exemple 2 On considère les perturbations suivantes :

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,08 & 0,04 & 0 & 0 \\ 0 & -0,02 & -0,11 & 0 \\ -0,01 & -0,01 & 0 & -0,2 \end{pmatrix}$$

et

$$b + \Delta b = \begin{pmatrix} 32,01 \\ 22,99 \\ 33,01 \\ 30,99 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$\Delta b = \begin{pmatrix} 0,01 \\ -0,01 \\ 0,01 \\ -0,01 \end{pmatrix}$$

la solution de $Ay = b + \Delta b$, est

$$y = \begin{pmatrix} 1,82 \\ -0,36 \\ 1,35 \\ 0,79 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$\Delta x = y - x = \begin{pmatrix} 0,82 \\ 1,36 \\ 0,35 \\ -0,21 \end{pmatrix}$$

la solution de $(A + \Delta A)x = b$ est

$$z = \begin{pmatrix} -81 \\ 137 \\ -34 \\ 22 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire

$$\Delta x = z - x = \begin{pmatrix} -82 \\ 136 \\ -35 \\ 21 \end{pmatrix}$$

solution fort différente de la précédente. Une petite perturbation de A entraîne une grande perturbation de x . Ce problème est donc mal posé car la troisième condition n'est pas satisfaite.

Dans ce cas-ci, on dit que la matrice A est mal posé conditionnée. On remarque que, dans les deux cas, l'erreur relative sur les coefficients des données (A ou b) est amplifiée par la même constante que ne dépend que de la matrice A . On appelle conditionnement de la matrice A inversible, le nombre $cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

Autrement dit, de très petites variations sur b ont conduit à des grandes variations sur x . De façon précise, si A est une matrice, son conditionnement $cond(A)$ est grand entraîne que le

système est mal conditionné et donc le problème est mal posé.

Dans l'exemple précédent, on trouve $\text{cond}(A) = 578$, où la norme choisie est la norme matricielle associée à la norme $\|\cdot\|_2$ sur \mathbb{R}^4 i.e ce phénomène de mauvais conditionnement explique pour partie la difficulté de prévoir certains phénomènes. Les appareils de mesure ne sont jamais parfaits, et il est impossible de connaître exactement b . Cela peut entraîner une très grande imprécision sur la valeur de x .

Différentiation et intégration

La différentiation et l'intégration sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. Il est plus habituel à penser à la différentiation comme problème direct, et à l'intégration comme problème inverse. En fait l'intégration possède de bonnes propriétés mathématiques qui conduisent à la considérer comme le problème direct. Et la différentiation est le n prototype du problème mal posé, comme nous allons le voir.

Exemple 1 Considérons l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$, et l'opérateur intégral A définie par

$$Af(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Il est facile de voir directement que A est un opérateur linéaire et continue de $L^2(0,1)$ dans lui-même. Cet opérateur est injectif, par contre son image est le sous espace vectoriel

$$\text{Im } A = \{f \in H^1(0,1), U(0)\} = 0$$

où $H^1(0,1)$ est l'espace de Sobolev. En effet, l'équation

$$Af = g$$

est équivalente à

$$f(x) = g'(x) \text{ et } g(0) = 0$$

L'image de A n'est pas fermé dans $L^2(0, 1)$ (bien entendu, elle l'est dans $H^1(0, 1)$). En conséquence, l'inverse de A n'est pas continu sur $L^2(0, 1)$, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2 Considérons une fonction $g \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ donnée, et $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$g_n = g + \frac{1}{n} \sin(n^2 x)$$

Alors

$$\begin{aligned} f_n &= g'_n \\ &= g' + n \cos(n^2 x) \\ &= f + n \cos(n^2 x) \end{aligned}$$

nous avons voir que

$$\begin{aligned} \|g_n - g\| &= \frac{1}{n} \sin(n^2 x) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\| &= 0 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &= n \cos(n^2 x) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| &= \infty \end{aligned}$$

La différence entre f et f_n peut-être arbitrairement grande, alors même que la différence entre g_n et g est arbitrairement petite. L'opérateur de dérivation (l'inverse de A) n'est donc pas continu, au moins avec ce choix des normes.

Donc la condition de stabilité n'est pas satisfaite alors le problème est mal posé.

Problème de Cauchy relatif à l'équation de Laplace

Exemple On considère le problème de la recherche d'une fonction à deux variables $\Psi(t, z)$ définie sur $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ pour $z \in \mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\begin{cases} \Delta\Psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\Psi = 0 \\ \Psi(0, z) = h(z) \\ \frac{\partial\Psi}{\partial t}(0, z) \end{cases} \quad (2.2)$$

Ce problème aux limites n'est pas bien posé car une partie de la frontière de Ω (la droite $t = 0$) supporte aux deux conditions aux limites tandis que l'autre ($t = \infty$) n'en supporte aucune. Si les données aux limites sont nulle ($h(z) = l(z) = 0$) la solution de (2.1) est $\Psi(t, z) = 0$. Cherchons maintenant la fonction $\hat{\Psi}(t, z)$ solution de (2.1) avec des données perturbées $\hat{h}(z) = \hat{l}(z) = 1/a \sin az$ ($a \geq 0$ fixé). Il est facile de montrer, par séparation de variables que :

$$\hat{\Psi}(t, z) = \frac{1}{a^2} \sin(az) sh(at)$$

convient. Or, pour a "grand", la perturbation $\hat{l} - l$ est d'amplitude "petite" tandis que la perturbation $\hat{\Psi} - \Psi$ prend des valeurs arbitrairement élevées pour tout $t > 0$: en effet,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} sh(at) = \infty \text{ pour tout } t > 0 \text{ fixé}$$

Le problème (2.1) dit "de Cauchy" (problème du second ordre où une partie de la frontière supporte deux conditions aux limites et une autre en supporte zéro) est donc instable par rapport aux perturbations de conditions aux limites, alors que les problèmes aux limites classiques (conditions de Dirichet, Neumann, Robin,...) sont stables.

Un problème voisin, mal posé lui aussi, est celui du prolongement analytique d'une fonction connue sur une partie de son domaine.

Chapitre 3

Régularisation des problèmes mal-posés

On aborde dans ce chapitre une méthode de régularisation pour les problèmes inverses linéaires.

Réguliser un problème mal-posé, c'est le remplacer par un autre bien posé de sorte que l'erreur commise soit compensé par le gain de stabilité. Ce chapitre présente une introduction à la méthode de régularisation la plus courante : la méthode de Tikhonov.

La principale difficulté dans l'application d'une méthode de régularisation à un problème particulier est la détermination du paramètre de régularisation lui-même.

3.1 Méthode de Tikhonov

La régularisation de Tikhonov est la méthode de régularisation la plus utilisée pour la résolution des problèmes qui ne sont pas bien-posés ainsi que pour les problèmes inverses.

3.1.1 Notion d'opérateur régularisant

On considère l'équation :

$$Ax = b \tag{3.1}$$

où :

A un opérateur : $A : E \rightarrow F$

x : paramètre à identifier.

b : mesures.

Si l'opérateur inverse A^{-1} n'est pas continu et qu'on ne dispose pas de la valeur exacte b_{ex} mais de b_δ vérifiant $d(b_{ex}, b_\delta) < \delta$, la solution approchée $x_\delta = A^{-1}b_\delta$ ne peut évidemment pas être considérée comme une approximation $x_{ex} = A^{-1}b_{ex}$.

Définition 3.1 *un opérateur $L(b, \alpha)$, dépendant du paramètre réel positif α , est appelé opérateur régularisant pour l'équation $Ax = b$ dans le voisinage de $b = b_{ex}$ s'il vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\exists \delta_1 > 0$ tq $L(b, \alpha)$ soit défini

$$\text{pour } \forall \alpha > 0 \text{ et } \forall b \in F, \|b - b_{ex}\| \leq \delta_1$$

2. $\exists \alpha = \alpha(\delta)$ une fonction tq

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) \leq \delta_1 \text{ tq } \|b_{ex} - b_\delta\| < \delta \Rightarrow \|x_{ex} - x_\delta\| < \varepsilon \quad \text{avec } x_\delta = L(b_\delta, \alpha(\delta))$$

Cette définition ne suppose pas que l'opérateur $L(b, \alpha)$ soit univoque et il existe en fait une grande diversité d'opérateurs régularisants. Un tel opérateur L est donc capable de fournir une approximation de x_δ aussi précise que l'on veut, pour peu que l'on dispose d'une précision suffisante sur b_{ex} .

Le problème de recherche d'une solution approchée de $Ax = b$ stable vis-à-vis de faibles variations du second membre se réduit donc à :

1. Chercher un opérateur régularisant.
2. Définir le paramètre de régularisation α .

Théorème 3.1 *Soit $A : E \rightarrow F$ un opérateur et soit $L(b, \alpha) : F \rightarrow E$ un opérateur défini pour tout $b \in F$ et pour tout $\alpha > 0$ et continu par rapport à b .*

Si pour tout $x \in E$ on a :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} L(A(x), \alpha) = x$$

alors, $L(b, \alpha)$ est un opérateur régularisant pour $Ax = b$.

Pour l'instant, ces considérations n'ont pas de caractère constructif pour que le concept d'opérateur régularisant soit utile, il faut appliquer des méthodes de construction .

3.1.2 Construction d'opérateurs régularisants

Celle-ci peut découler d'un principe de sélection (Tikhonov & Arsenine). En effet, suppose que le second membre b en notre possession soit entaché, par rapport au second membre exact b_{ex} d'un écart ne dépassant pas une certaine valeurs δ :

$$\|b - b_{ex}\|_F \leq \delta$$

On va alors chercher naturellement une solution au problème inverse (3.1) dans le sous ensemble $E_\delta \subset E$ des éléments x vérifiant :

$$\|Ax - b\|_F \leq \delta \tag{3.2}$$

Fonction stabilisatrice

Mais il ne suffit pas de prendre pour solution de (3.1) un élément quelconque de E_δ : une telle solution n'est en général pas continue par rapport à δ . Il faut donc adapter un principe de sélection qui permette pour tout δ suffisamment petit, de choisir un élément x_δ de E_δ de telle sorte que x_δ dépende continûment de δ . On va poser $\Omega(x)$ une fonctionnelle positive continue d'un sous ensemble E_1 de E dense sur F . On dit que Ω est une fonctionnelle stabilisatrice si :

1. Ω est définie sur une partie dense E_1 de E .
2. Ω est non-négative continue.

3. x_{ex} appartient au domaine de définition de Ω .
4. $\forall d > 0$, l'ensemble des x tels que $\Omega(x) \leq d$ est un compact de E_1 .

Existence d'une solution à $\min \|Ax - b\|_2^2 + \alpha\Omega(x)$

Par exemple, on peut prendre :

$$\Omega(x) = \|x - \bar{x}\|_E^2, \quad \bar{x} \in E \text{ fixé, } E_1 = E$$

cela signifie qu'on va chercher, parmi toutes les solutions à δ près de (3.1) celle qui est la plus proche (ou la moins éloignée...) d'une valeur de référence \bar{x} jugée vraisemblable ou représentative à partir de considérations physiques. Il existe une infinité de manières de choisir Ω ; Ce choix traduira de façon mathématique le critère de sélection que l'on souhaite utiliser pour restreindre le champ des solutions approchées de (3.1). Une fois Ω choisie, on prend pour solution régularisée de (3.1) un élément x_δ qui minimise $\Omega(x)$ sur $E_1 \cap E_\delta$ (il est démontré qu'un élément existe). Cet élément x_δ peut être considéré comme le résultat de l'action sur b d'un opérateur $\hat{L}(b, \delta)$ dépendant de δ .

La propriété de toute solution régularisée x_α est donc de minimiser $\Omega(x)$ sous la contrainte (3.2). Cela revient donc à minimiser le lagrangien

$$\begin{aligned} S_\alpha(x, b) &= \alpha \left[\frac{1}{\alpha} \|Ax - b\|_F^2 + \Omega(x) \right] \\ &= \|Ax - b\|_F^2 + \alpha\Omega(x) \end{aligned}$$

où $\frac{1}{\alpha}$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte (3.2).

Théorème 3.2 *Soit A un opérateur continu de E dans F . Quels que soient $b \in F$ et $\alpha > 0$, il existe un élément $x_\alpha \in E_1$ tel que :*

$$\begin{aligned} \inf_{x \in E_1} S_\alpha(x, b) &= S_\alpha(x_\alpha, b) \\ (\text{C'est-à-dire } S_\alpha(x, b) &= \|Ax - b\|_2^2 + \alpha\Omega(x)) \end{aligned}$$

Donc, quelle que soit la valeur fixée du paramètre α , $S_\alpha(x, b)$ admet un minimum au moins. Pour α fixé, x_α obtenu par un minimisation de S_α , peut être considéré comme le resultat de l'action d'un opérateur $L_1(b, \alpha)$ sur b .

Stratégie de régularisation

Définition 3.2 Une stratégie de régularisation est une famille d'opérateurs linéaires bornés $L_\alpha : F \rightarrow E, \alpha > 0$ tel que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|L_\alpha Ax - x\| = 0, \forall x \in E.$$

i.e, l'opérateur $L_\alpha A$ converge simplement vers l'identité I .

Théorème 3.3 Soit L_α une stratégie de régularisation pour l'opérateur compact $A : E \rightarrow F$, donc $\dim E = +\infty$. Alors la famille d'opérateurs L_α ne sont pas uniformément bornés : il existe une suite $\{\alpha_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ telle que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_j = 0 \text{ et } \lim_{j \rightarrow \infty} \|L_{\alpha_j}\| = \infty$$

i.e il n'y a pas de convergence de $L_\alpha A$ vers l'identité au sens de la norme d'opérateur.

Caractère régularisant de L_1

Théorème 3.4 Soit x_{ex} solution de $Ax_{ex} = b_{ex}$, alors : $\forall \varepsilon > 0, \forall \beta_1(\delta)$ et $\beta_2(\delta)$ deux fonctions définies sur $[0, \delta_1]$, non négatives, non décroissantes et continues telles que :

$$\beta_2(0) = 0 \text{ et } \forall \delta \in [0, \delta_1] : \frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leq \beta_2(\delta)$$

Il existe $\delta_0 \leq \delta_1$ tq $\forall \delta \leq \delta_0, \forall \alpha \in [\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \dots \beta_2(\delta)]$, linégalité :

$$\|b - b_{ex}\|_F \leq \delta$$

entraîne l'inégalité :

$$\|x_\alpha - x_{ex}\|_E \leq \varepsilon$$

pour tout les α vérifiant :

$$\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \leq \alpha \leq \beta_2(\delta)$$

avec $x_\alpha = L_1(b, \alpha)$

L'opérateur L_1 est donc bien régularisant au voisinage de b_{ex} . En fait, L_1 est régularisant pour tout $b \in F$.

En rappelant le caractère stabilisateur de $x \rightarrow \|x\|_2^2$, on a bien la validation de la méthode de régularisation de Tikhonov.

Cette méthode signifie en clair que :

1. L'opérateur $L_1(b, \alpha)$ associé à la minimisation du lagrangien $S_\alpha(x, b)$ est régularisant : une petite perturbation sur le second membre entraîne une petite perturbation sur la solution x_α .
2. Et ceci à condition que le paramètre α appartienne à une certaine plage de valeurs.

Remarque 3.1 *Le caractère régularisant de $L_1(b, \alpha)$ est vrai pour toute une gamme de valeurs de α , et non pour une valeur unique.*

Une manière de choisir α consiste à imposer la condition (critère de Morosov) :

$$\|Ax - b\|_F = \delta$$

dans laquelle la valeur numérique de δ est fixée empiriquement à partir de l'idée qu'on se fait de la qualité des mesures b et du modèle A . Une autre, dite critère d'Arcangeli, conduit à chercher α solution de :

$$\|Ax - b\|_F^2 = \frac{\delta^2}{\alpha}$$

Quoi qu'il en soit, le problème du meilleur choix de α , qui correspond au compromis optimal entre la satisfaction du modèle ($Ax = b$) et le respect du critère de choix stabilisateur ($\Omega(x)$ pas trop grand), est difficile et semble, d'un point de vue théorique, encore largement ouvert.

Des auteurs (voir Engl and Neubauer ainsi que les références de ces articles) ont étudié la convergence de la solution régularisée x_α vers une quasi-solution en fonction de α et de l'écart δ entre seconde membre approché et exact.

Il y est en particulier signalé que la solution régularisée x_α obtenue par minimisation de $S_\alpha(x, b)$ converge vers la quasi-solution de norme minimale

– comme $O(\delta^{\frac{1}{2}})$ si $A^+b \in \text{Im}(A^T)$.

– comme $O(\delta^{\frac{2}{3}})$ si $A^+b \in \text{Im}(A^T A)$.

dans le meilleur des cas, c'est à dire avec le meilleur choix possible du paramètre de régularisation α ajusté en fonction δ . Ça indique également que les critères précédents ne sont pas optimaux du point de vue de la vitesse de convergence. Des versions plus élaborées de ces critères, qui reposent sur l'utilisation de la régularisation de Tikhonov itéré, y sont étudiées ; leur convergence est optimale.

En pratique on pourra éventuellement se contenter de choisir α de manière intuitive en se rappelant sa signification de paramètre de compromis.

En résumé, la résolution de (3.1) par la méthode de régularisation de Tikhonov utilise les étapes suivantes :

1. Choix de la fonctionnelle stabilisatrice Ω et construction de la famille de fonctionnelles $S_\alpha(x, b)$ pour $\alpha > 0$.
2. Choix du paramètre de régularisation α , qui doit être strictement positif.
3. Recherche par minimisation de $S_\alpha(x, b)$ par rapport à x , de x_α qui sera une solution régularisée pour le problème inverse (3.1).

Le principe de sélection n'est pas la seule façon de régulariser un problème inverse. Une autre voie possible consiste à remplacer le problème direct initiale décrit par l'opérateur A , par une famille (indexée par un paramètre $\alpha > 0$) de problèmes directs proches, décrit par des opérateurs A_α proches de A . Les opérateurs A_α doivent avoir un inverse continu L_α régularisant au sens de Tikhonov. Par exemple, le problème inverse linéaire (3.1) peut être remplacé par :

$$A_\alpha x = [A^T A + \alpha I]x = A^T b \tag{3.3}$$

où l'opérateur A_α est par construction inversible. L'opérateur L_α qui est donc donnée par :

$$L_\alpha = [A^T A + \alpha I]^{-1} A^T$$

est régularisant (la solution x_α obtenue par (3.1) tendu vers la quasi-solution de norme minimale quand $\alpha \rightarrow 0$). Il faut d'ailleurs remarquer que (3.3) peut également être obtenue en écrivant que la première variation de la fonctionnelle S_α ci dessous est nulle quand x en réalise le minimum :

$$S_\alpha(x, b) = \|Ax - b\|_F^2 + \alpha \|x\|_F^2$$

Sur cette exemple, les deux approches sont donc équivalentes.

Assurer la fermeture de l'espace de l'image de l'opérateur A ($\text{Im } A$) pour définir une solution $b \in F$.

Proposer une solution plus robuste (moins sensible au bruit) qu'une inversion généralisée ne répond pas.

En dimension finie ou infinie, un régularisateur du problème $Ax = b$ est une famille d'opérateur $L_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, L_\alpha \text{ est continu de } F \text{ vers } E$$

$$\forall b \in \text{Im}(A), \lim_{\alpha \rightarrow 0} L_\alpha b = A^T b$$

On choisit L_α pour contraindre l'espace des solutions, et α est le paramètre (coefficient) de régularisation

Pour des données bruitées

$$b_\varepsilon = (b = Ax) + b_{\text{bruit}}$$

on obtient une solution approchée

$$x_\varepsilon = L_\alpha b + L_\alpha b_{\text{bruit}}$$

Le choix de α des deux termes antagonistes $L_\alpha b$ et $L_\alpha b_{\text{bruit}}$.

Contrôle en dimension

- Minimisation de $\|Ax - b\|_F$ dans un sous-espace.
- Minimisation de $\|Ax - b\|_F$ dans E par une méthode itérative à nombre limité d'itérations.
- Minimisation d'un critère composite on cherche E_α minimisant

$$S_\alpha(x, b) = \|Ax - b\|_2^2 + \alpha\Omega(x)$$

On demande à la solution un compromis fidélité aux mesures ($\|Ax - b\|_F$) et fidélité à l'information a priori ($\Omega(x)$).

Présentation de la solution des moindres carrés.

on avoir une solution plus douce, physiquement raisonnable.

$\alpha = 0 \Rightarrow$ moindres carrés.

$\alpha = \infty \Rightarrow$ fidélité parfaite avec l'a priori.

Méthode simple pour la détermination du coefficient de régularisation Une difficulté des méthodes de régularisation réside dans le choix de la valeur du paramètre α . Il existe une grande variété de méthodes permettant d'optimiser ce choix reposant sur une étude attentive du problème posé.

Il existe toutefois une méthode empirique très simple à mettre en œuvre, appelée (en anglais) Generalized Cross-Validation (GCV).

L'idée consiste à mettre de côté l'une des données b du problème et à considérer que la valeur optimale de α conduit à une bonne approximation de cet b . Le α choisit sera alors celui qui optimale cette approximation.

On va voir pratiquement

$$Ax = b \quad (\exists x \text{ tq } b \text{ connu})$$

$$A^T Ax = A^T b, \quad x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

On utilise la régularisation de Tikhonov

$$Ax = b \rightarrow \begin{pmatrix} A \\ \alpha I \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A^T & \alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ \alpha I \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} A^T & \alpha I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^T A + \alpha^2 I)x = A^T b.$$

$$A_\alpha x = b_i$$

$$b_i = A^T b$$

$$A_\alpha = A^T A + \alpha^2 I$$

$$\Rightarrow x_\alpha = (A^T A + \alpha^2 I)^{-1} A^T b.$$

tg α est le minimum de la fonction, $GCV(\alpha) = \left[\frac{\|Ax_\alpha - b\|^2}{[tr(I - AA_\alpha^{-1}A^T)]^2} \right] = \frac{\|(I - AA_\alpha^{-1}A^T)b\|^2}{[tr(I - AA_\alpha^{-1}A^T)]^2}$.

3.1.3 Application sous MATLAB

Programme

Editeur fonction1

```
%function h = tpteopp(nn)
nn = 31
% _____
nn = 31
for i = 1 : nn
    for j = 1 : nn
        if abs(i - j) <= 7
            w(i, j) = 1./13;
        else
            w(i, j) = 0;
        end
    end
end
end
```

end

h = w;

Editeur fonction2

```

function [II, I, H] = tpimage(xx)
GG = im2double(imread('text.png'));
%GG = im2double(imread('tress.tif'));
%GG = im2double(imread('cameraman.tif'));
%GG = im2double(imread('eight.tif'));
I = GG(20 : 50, 70 : 100)
%h = tpeop(31);
II = h * I * h;
subplot(2, 2, 2), imshow(II), title('image floue')
II = II(:);
subplot(2, 2, 3), imshow(I), title('image originale )
H = kron(h, h);
I = I(:); %vectorisation of image
II = H * I;
%end

```

Editeur fonction3

```

function ori = tporig(x)
%[II, I, H] = tpimage(1);
x = lsqr(H, II, .00000000001, 10000);
% y = gmres(H, II, 10, .000001);
ori = vec2mat(x, 32)'; %"matrialisé" levecteur
image x trouvé
% y = vect2mat(y, 20)';

```

```

subplot(2, 2, 1), imshow(ori), title('lsqr calced image')
% subplot(2, 2, 4), imshow(y), title('gmres calced image')
z1 = inv(H)
z1 * H
z = z1 * II;
z = vec2mat(z, 32)';
subplot(2, 2, 4), imshow(z), title('calced image par inverse')
end

```

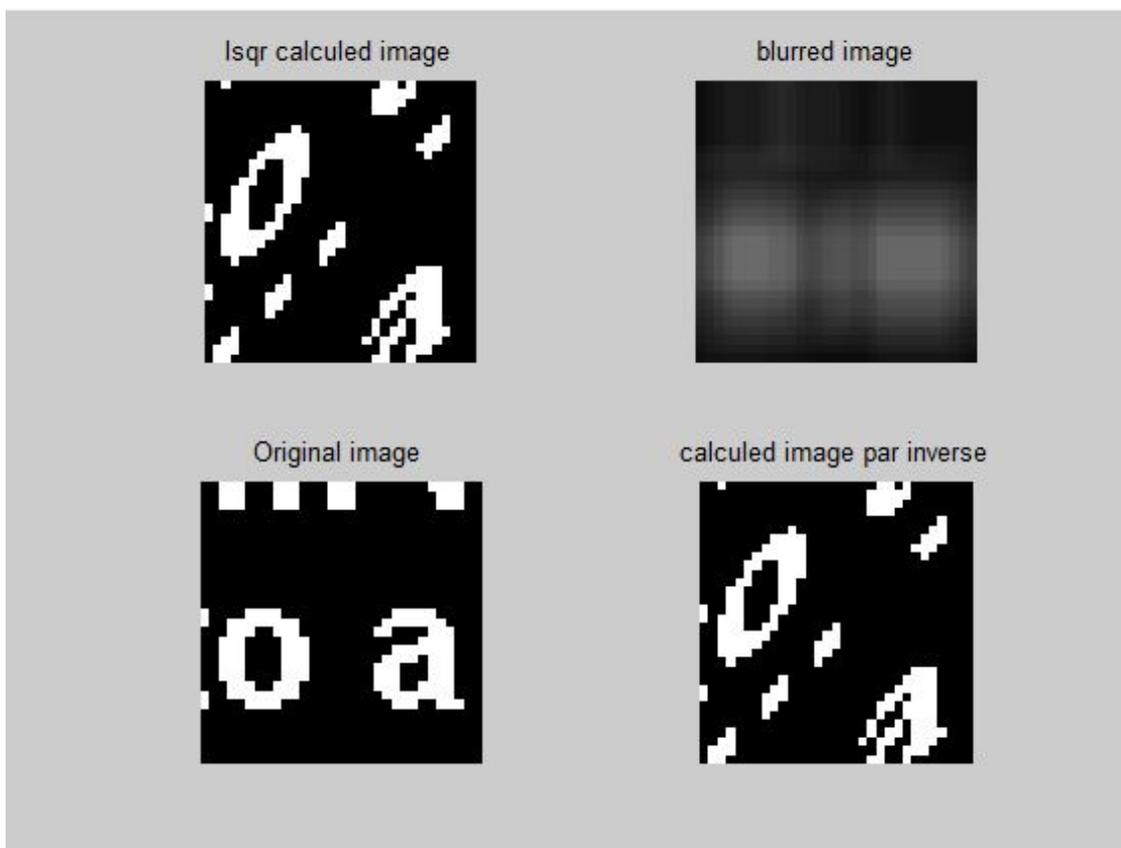


FIG. 3.1 – Résultat de programme

Conclusion

Nous avons essayé de donner une définition au problème inverse, puis problèmes bien et mal-posés, le sujet décrit essentiellement l'utilisation de la méthode de régularisation des problèmes mal-posés utilisant la stratégie de Tikhonov, cette méthode est aussi plus efficace pour la régularisation.

Nous espérons que ce travail contribue à éclairer quelques méthodes d'analyse numérique. Concernant la résolution des problèmes mal-posés.

Bibliographie

- [1] C.Charles. Introduction aux problèmes inverses. 2014/1.
- [2] Colin Daly. (1991). Régularisation et krigeage pour les problèmes mal-posés. Une application au problème de poissonisation. (pp157-171). France.
- [3] J.Hadamard. Lecture on Cauchy's problem in linear partial differential equations. Dover. New-York, MR14 : 474f. 1952.
- [4] Lionel Segui (2007). Introduction aux problèmes mal-posés. Gdt Ignotus LAAS-CNRS.
- [5] Marc Bonnet. (2008). Problèmes inverses. France.
- [6] Mehdi Danech-Rajouh. Problèmes mal-posés. Un exemple d'application à la prévision à court-terme. Mars 1998.
- [7] Michel Kern. Problèmes inverses : aspects numériques. Engineering school 1999 à 2002, École supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, 2002, pp.138.
- [8] Nelly Pustelink. Méthodes proximales pour la résolution de problèmes inverses. Application à la Tomographie par Émission de Positrons. Université de Marne la Vallée, 2010. Français.

Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

\mathbb{R}	: ensemble des nombres réels
A	: opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert
$D(A)$: le domaine de définition de l'opérateur A
A^*	: l'opérateur adjoint de l'opérateur A
$\text{Ker}A$: le noyau de l'opérateur A
$\text{Im} A$: l'image de l'opérateur A
H	: espace de Hilbert
(\cdot, \cdot)	: produit scalaire
$\ \cdot\ $: une norme
λ	: valeur propre de l'opérateur A
$\sigma(A)$: spectre de A
$\rho(A)$: l'ensemble résolvant de A
F^\perp	: l'ensemble orthogonal de l'ensemble F
\bar{F}	: l'ensemble fermeture de l'ensemble F