République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

El-GUERRI Bouthina

Titre :

Equations différentielles stochastiques rétrogrades de Volterra

Membres du Comité d'Examen :

Prf.	**CHIGHOUB Farid**	UMKB	Président
MCA.	**YAKHLEF Samia**	UMKB	Encadreur
Dr.	**REMILI Nasira**	UMKB	Examinateur

Septembre 2020

Dédicace

J'ai toujours pensé faire où offrir quelque chose à mes parents en signe de reconnaissance pour tout ce qu'ils ont consenti comme efforts, rien que pour me voir réussir, et voilà l'occation est venue.

A ceux qui m'ont donné la vie, symbole de beauté, de fierté et de sagesse et de patience :

Mes chers parents.

A mes frères et mes soeurs :

"Ishak, Kaouthar, Salsabil, Tasnim, Hanan, Mohamed".

A mon encadreur.

A tous mes enseignants chacun avec son nom.

A mes amis.

A mes collègues de la promotion 2020.

Aux lecteurs de ce mémoire.

REMERCIEMENTS

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu "**Allah**" qui ma donné le courage pour faire ce travail.

Tout d'abord je tiens à exprimer mes remerciements et ma profonde reconnaissance envers mon encadreur madame **Yakhlef Samia**, pour son exigence de clarté et de rigueur qui m'a beaucoup apporté, pour la confiance qu'il m'a témoignée lors des moments décisifs ainsi que pour son soutien tout au long temps de ce projet.

Je traduis par la même occasion ma reconnaissance à **Prf.Chala Adel** pour son aide permanente, ainsi que la prise en charge de tous les besoins de mes études universitaire.

Ma gratitude va tout autant aux membres du jury : **Prf.Chighoub Farid** et **Dr.Remili Nasira**, pour m'avoir fait l'honneur d'examiner ce mémoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon profond respect.

J'adresse mes remerciements aux enseignants, bibliothécaires et administrateurs de la faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie.

Table des matières

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Introduction **1**

1 Généralités de base **4**

1.1 Calcul stochastique 4

1.1.1 Variable aléatoire 4

1.1.2 Processus stochastique 4

1.1.3 Filtration 6

1.2 Mouvement brownien 7

1.3 Martingale et temps d'arrêt 8

1.4 Intégrale stochastique 8

1.4.1 Propriétés de l'intégrale stochastique 9

1.4.2 Processus d'Itô 9

1.5 Résultats utiles 10

1.5.1 Inégalité maximale 10

1.5.2 Inégalité de Hölder 10

1.5.3 Lemme de Gronwall 11
1.5.4 Lemme de Fatou 11
1.5.5 Théorème de Fubini 11
1.5.6 Théorème de représentation des martingales Browniennes 11
1.5.7 Théorème du point fixe de Picard 12

2 EDS et EDS de Volterra **13**

2.1 Equation différentielle stochastique 13
2.1.1 Notations et définitions 13
2.1.2 Existence et unicité des solutions 15
2.2 Equation différentielle stochastique de Volterra 19
2.2.1 Notations et définitions 19
2.2.2 Existence et unicité des solutions 20

3 EDSR et EDSR de Volterra **24**

3.1 Equation différentielle stochastique rétrograde 24
3.1.1 Notations et définitions 24
3.1.2 Existence et unicité des solutions dans le cas Lipschitz 26
3.2 Equation différentielle stochastique rétrograde de Volterra 28
3.2.1 Notations et définitions 28
3.2.2 Existence et unicité des solutions 29

Conclusion **33**

Bibliographie **34**

Annexe B : Abréviations et Notations **36**

Introduction

Les équations intégrales stochastiques de Volterra (EISV) sont un type spécial d'équations intégrales. Ils représentent des modèles intéressants de dynamique stochastique avec mémoire, ont des applications par exemple en ingénierie, biologie et finance.

Dans un espace de probabilité filtré complet $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ sur lequel on définit un mouvement Brownien standard $d-$dimensionnel B_t et on note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle i.e : $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} = \sigma(B_s, s < t)$. Par le type d'Itô (Forward) l'équation stochastique différentielle (EDSF en abrégé), on parle du problème de la valeur initiale suivant :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}, \forall t \in [0, T]. \tag{1}$$

Les résultats standard concernant l'équation (1) peuvent être trouvés dans de nombreux livres (voir [9] et [10] par exemple). On sait que l'équation (1) est de la forme intégrale suivante :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \forall t \in [0, T]. \tag{2}$$

Cela nous suggère naturellement que l'on peut considérer la forme intégrale suivante :

$$X_t = \xi(t) + \int_0^t b(t, s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(t, s, X_s)dB_s, \forall t \in [0, T]. \tag{3}$$

Ce qui précède est référé à nous comme une équation intégrale stochastique de Volterra, pour certaines études systématiques (même pour des cas plus généraux) ont été effectuées dans la littérature (voir [11] et [12] par exemple). Il est clair qu'en général on ne peut pas transformer (3) en EDSF de la forme (1), même si les coefficients b et σ sont lisses.

Mathématiquement (3) est strictement plus général que (2). D'autre part du point vue des applications pratiques (3) permet une certaine dépendance à long terme du bruit dans les modèles considérés. Il est intéressant que l'on puisse même permettre à $\sigma(t,s,X(s))$ d'être seulement $\mathcal{F}_t-$mesurable d'une certaine manière (il faut donc anticiper les intégrales) mais on pourrait avoir des solutions adaptées. Donc la théorie pour (3) est beaucoup plus riche que celle de (2), tant en théorie qu'en applications. D'autre part, en 1973 alors que l'étude stochastique des problèmes de contrôle optimaux, Bismut introduit les équations stochastiques rétrogrades (linéaires) pour la premières fois. Pardoux et Peng ont étudié d'abord les EDSR non linéaires générales de la forme suivante en 1990 :

$$\begin{cases} -dY_t = g(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t dB_t, 0 \leq t \leq T, \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{4}$$

Il s'agit d'un problème de valeur terminale pour une équation différentielle stochastique de type itô. Par une solution adaptée on prend un couple de processus (Y,Z) qui est $\mathcal{F}_t-$adaptée et satisfaisant (4) au sens habituel d'itô. Maintenant , on prend le point de vue de la relation entre (1) et (3). Comme nous le savons que (4) est interprété comme l'équation intégrale suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

Nous pouvons appeler ce qui précède une équation intégrale stochastique rétrograde de Volterra (EISRV en abrégé) inspiré par (3), nous nous posons la question suivante :

Quel est l'analogique de (3) pour (5) comme (3) pour (2) ?

Il se trouve qu'un analogique doit prendre la forme suivante :

$$Y(t) = \xi(t) + \int_t^T g(t,s,Y(s),Z(t,s),Z(s,t))ds - \int_t^T Z(t,s)dB_s, \forall t \in [0,T], \tag{6}$$

où ξ et g sont données et on cherche le couple (Y, Z). On appelle (6) une équation intégrale stochastique rétrograde de Volterra. Il y a deux caractéristiques importantes de (6) sont :

1. Le terme $Z(t, s)$ dépends de t.
2. La dérive (drift) dépends des deux termes $Z(t, s)$ et $Z(s, t)$ en général.

Dans ce mémoire nous nous intéressons a la forme simple d'une EISRV (i.e g ne dépend pas de $Z(s, t)$)de la forme suivante :

$$Y(t) = \xi(t) + \int_t^T g(t, s, Y(s), Z(t, s))ds - \int_t^T Z(t, s)dB_s, \forall t \in [0, T].$$

Notre travail est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux généralités de base, processus stochastique, MB, martingale et intégrale stochastique.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution d'une EDS et d'une EDS de Volterra. Pour la preuve de l'existence d'une solution pour l'EISV en utilise la même méthode que dans l'EDS.

Enfin, dans le troisième chapitre nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution pour l'EDSR et l'EISRV.

Chapitre 1

Généralités de base

Dans ce chapitre on va présenter des notions générales concernant le calcul stochastique, MB, martingale, l'intégrale stochastique et quelques résultats utiles dans ce travail.

1.1 Calcul stochastique

1.1.1 Variable aléatoire

Définition 1.1.1 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *et* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *deux espaces mesurables.*

Une v.a X *est une application mesurable :*

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})),$$

où : $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *est la tribu borélienne.*

1.1.2 Processus stochastique

Définition 1.1.2 *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t \geq 0}$ *est une famille de variables aléatoires* X_t *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *indexée par un ensemble* T*.*

· *Si* T *est un ensemble dénombrable (comme* $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{Q}^+$*),* X *est appellée un processus stochastique à* *temps discrêt.*

· *Si $T = \mathbb{R}^+$, X est appellée un processus stochastique à temps continu.*

Remarque 1.1.1 **i.** *Un processus stochastique peut être vu comme une fonction de deux variables :*

$$X : \Omega \times T \to \mathbb{R}^d$$
$$(\omega, t) \to X_t(\omega),$$

où : t est le temps et $\omega \in \Omega$ est l'aléatoire.

ii. *Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \to X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

iii. *Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \to X_t(\omega)$ est une fonction réelles appelée trajectoire du processus.*

Définition 1.1.3 *(**Processus continu**) : Un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est dit continu (ou à trajectoires continues) si pour tout $\omega \in \Omega$ les applications $t \to X_t(\omega)$ sont continues.*

Définition 1.1.4 *(**Processus mesurable**) : Un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est dit mesurable si l'application :*

$$\begin{aligned} (\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)) \quad &\to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (t, \omega) \quad &\to X_t(\omega), \end{aligned}$$

est mesurable, i.e : pour tout $(x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$ l'ensemble :

$$\left\{(t, \omega) \diagup X_t^1(\omega) \leq x_1, ..., X_t^d(\omega) \leq x_d\right\} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+).$$

Définition 1.1.5 *(**Processus adapté**) : Un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est dit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ si pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

Définition 1.1.6 *(**Processus progressivement mesurable**) : Un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est dit progressivement mesurable (ou progressif) si l'application :*

$$\begin{aligned} (\Omega \times [0, t], \mathcal{F} \times \mathcal{B}([0, t])) \quad &\to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (s, \omega) \quad &\to X_s(\omega), \end{aligned}$$

est mesurable pour tout t.

Définition 1.1.7 ***(Processus càdlàg)*** *: Un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est dit càdlàg (continu à droite limité à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et limitées à gauche pour presque tout ω.*

Définition 1.1.8 ***(Processus indistinguable\modification)*** *:*

1. *On dit que X et Y sont indistinguables si les trajectoires de X et Y sont les mêmes $\mathbb{P}-ps$, i.e :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

2. *On dit que X est une modification de Y si :*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1, \forall t \geq 0.$$

Proposition 1.1.1 *Si X est une modification de Y et si X et Y sont continus à droite ou à gauche alors X et Y sont indistinguables.*

Définition 1.1.9 ***(Processus à variation finie)*** *: Un processus X est dit à variation finie sur l'intervalle $[0,t]$ si :*

$$\sup_{0\leq t_0<t_1<\ldots<t_n\leq t}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|X_{t_{k+1}}-X_{t_k}\right|\right) < \infty.$$

Définition 1.1.10 ***(Processus arrêté)*** *: Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique et T un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On appelle le processus arrêté à l'instant T la suite aléatoire $X_t^T = (X_{T\wedge t})_{t\geq 0}$.*

1.1.3 Filtration

Définition 1.1.11 ***(Filtration)*** *: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.*

Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sur cet espace est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, i.e : $\forall s < t$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.

Définition 1.1.12 ***(Filtration naturelle)*** *: Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Une filtration naturelle associée à X est la filtration définie par :*

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma\left(X_s, s \leq t\right), \forall t \geq 0.$$

Définition 1.1.13 ***(Filtration naturelle augmentée)*** *: On considère la filtration $\left(\mathcal{F}_t^X\right)_{t\geq 0}$ est définie par :*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(\tilde{\mathcal{F}}_t \cup \mathcal{N}\right),$$

où : $\mathcal{N}$ la famille de tout les ensembles négligeables de l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors $\left(\mathcal{F}_t^X\right)_{t\geq 0}$ est appellée la filtration naturelle augmentée de X.

Remarque 1.1.2 *Si l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, on parlera de l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, \mathbb{P})$.*

1.2 Mouvement brownien

Définition 1.2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique est appelé mouvement brownien standard (MB en abrégé) s'il satisfaire les conditions suivantes :*

1. *$B_0 = 0$.*
2. *Les trajectoires $t \to B_t(\omega)$ sont continue pour tout $\omega \in \Omega$.*
3. *$\forall s \leq t$ l'accroissement $B_t - B_s$ est une variable gaussienne centré de variance $(t - s)$ i.e : $(B_t - B_s) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t - s)$.*
4. *Pour tout $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n$ les variables $(B_{s_n} - B_{s_{n-1}}, ..., B_{s_1} - B_{s_0}, B_{s_0})$ sont indépendantes.*

Remarque 1.2.1 *On dit que B est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $-MB$ si B est un processus continu, adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, vérifiant :*

$$\forall u \in \mathbb{R}, \forall\ 0 \leq s \leq t,\ \mathbb{E}\left(\exp\left(iu\left(B(t) - B(s)\right)\right) \diagup \mathcal{F}_s\right) = \exp\left\{-u^2(t-s)\diagup 2\right\}.$$

1.3 Martingale et temps d'arrêt

Définition 1.3.1 *(**Martingale à temps continue**) : Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si :*

1. *X_t est intégrable,i.e : $\forall t \geq 0 : \mathbb{E}\,|X_t| < \infty$.*
2. *X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable, i.e : adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*
3. *$\forall s \leq t : \mathbb{E}\left[X_t \diagup \mathcal{F}_s\right] = X_s$.*

Remarque 1.3.1 *Si on remplace la troisième condition par : $\forall s \leq t : \mathbb{E}\left[X_t \diagup \mathcal{F}_s\right] \geq X_s$ (rèsp : $\forall s \leq t : \mathbb{E}\left[X_t \diagup \mathcal{F}_s\right] \leq X_s$), alors X_t est dit sous-martingale (rèsp sur-martingale).*

Définition 1.3.2 *(**Martingale locale**) : Un processus càdlàg adapté $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante vers l'infini telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ le processus arrêté X^{T_n} soit une martingale nulle en 0, i.e : $X_0 = 0$.*

Définition 1.3.3 *(**Temps d'arrêt**) : Un temps d'arrêt τ par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une application $\tau : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ telle que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ : \{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega \diagup \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

1.4 Intégrale stochastique

Lintégrale stochastique ou l'intégrale d'Itô est une intégrale de la forme suivante :

$$\int_0^t \theta_s dB_s.$$

Quand $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique, le caractère aléatoire de θ exige des conditions supplémentaires par rapport à l'intégrale de Wienner. On note par $\left\{\mathcal{F}_t^B\right\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du MB B.

Définition 1.4.1 *On dit que $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est un bon processus s'il est $\mathcal{F}_t^B-$adapté, càdlàg et si :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < \infty, \forall t \geq 0.$$

1.4.1 Propriétés de l'intégrale stochastique

1. $\theta \to \int_0^t \theta_s dB_s$ est linéaire.
2. Le processus $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0 \leq t \leq T}$ est à trajectoires continues.
3. Le processus $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0 \leq t \leq T}$ est $\mathcal{F}_t^B-$adapté.
4. $\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = 0$ et $Var\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$.
5. Propriété d'isométrie :

$$\forall t, u \geq 0 : \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)\left(\int_0^u \phi_s dB_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge u} \theta_s \phi_s ds\right],$$

où : θ et ϕ deux bons processus.

1.4.2 Processus d'Itô

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et B un movement brownien sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$ la filtration naturelle du MB.

Définition 1.4.2 *On appelle processus d'Itô un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$\mathbb{P} - p.s, \forall\ 0 \leq t \leq T : X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

où : x est $\mathcal{F}_0-$mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurable vérifiant :

$$\int_0^t |b_s|\, ds < \infty \ \ et \ \int_0^t |\sigma_s|^2\, ds < \infty, \mathbb{P} - p.s.$$

On écrit généralement le processus d'Itô en utilisant la forme différentielle suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Le coefficient b s'appelle la dérive (drift) et σ s'appelle le coefficient de diffusion (ou volatilité).

Remarque 1.4.1 **i-** *La décomposition d'un processus d'Itô est unique.*

ii- *Le processus $t \to x + \int_0^t b_s ds$ est la partie à variation finie de X, et le processus $t \to \int_0^t \sigma_s dB_s$ est la partie martingale de X (martingale locale).*

1.5 Résultats utiles

1.5.1 Inégalité maximale

On a souvent besoin de majouration d'intégrale stochastique. L'inégalité de Doob conduit à :

Proposition 1.5.1 *Soit θ un bon processus alors :*

$$\mathbb{E}\left(\left[\sup_{t\leq T}\int_0^t \theta_s dB_s\right]^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\left[\int_0^T \theta_s dB_s\right]^2\right) = 4\mathbb{E}\left(\int_0^T \theta_s^2 ds\right).$$

1.5.2 Inégalité de Hölder

Soient $p, q \in [1, +\infty[$ des exposants conjugués i.e :$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Si f, g sont des applications mesurables, alors :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Quand $p = q = 2$ l'inégalité de Hölder donne l'inégalité de Cauchy-Schwartz, i.e :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

1.5.3 Lemme de Gronwall

Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t :

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)\, ds, a \in \mathbb{R}, b \geq 0,$$

alors pour tout t :

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

1.5.4 Lemme de Fatou

Théorème 1.5.1 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de foncitons mesurables positives, alors :*

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} \inf f_n\right) d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu.$$

1.5.5 Théorème de Fubini

Théorème 1.5.2 *Soit* f *une fonction continue sur* $[a,b] \times [c,d]$ *à valeurs dans un ensemble* E*, alors :*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx\right) dy.$$

1.5.6 Théorème de représentation des martingales Browniennes

Théorème 1.5.3 *Soit* M *une martingale càdlàg de carré intégrable pour la filtration du MB* $\left\{\mathcal{F}_t^B\right\}_{t\in[0,T]}$*, alors il existe un unique processus* $(Z_t)_{t\in[0,T]}$*, appartenant à* $M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$*, tel que :*

$$\mathbb{P}-ps, \forall t \in [0,T], M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s.$$

1.5.7 Théorème du point fixe de Picard

Théorème 1.5.4 *Soit* (E,d) *un espace métrique complet et* $f : E \to E$ *une fonction contractante c'est à dire il existe* $k \in [0,1[$ *tel que :*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y), \forall x, y \in E,$$

alors il existe un unique point $a \in E$ *tel que* $f(a) = a$*.*

Chapitre 2

EDS et EDS de Volterra

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la forme d'une équation différentielle stochastique et présenter le résultat d'existence et d'unicité de la solution par la méthode itérative de Picard dans la première section, et la même étude se fait pour une équation différentielle stochastique de Volterra (en autrement dit équation intégrale stochastique de Volterra) dans la deuxième section.

2.1 Equation différentielle stochastique

Les équations différentielles stochastiques sont de plus en plus utilisées dans différents domaines tels que les finances par exemple de modéliser l'évolution de cours des bourses, la dynamique des populations pour modéliser la localisation ou la taille de la population d'une espéce donnée et la physique comme le mécanique des fluides et la géophysique.

2.1.1 Notations et définitions

Définition 2.1.1 *Une équation différentielle stochastique (EDS) est de la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{2.1}$$

où :

- $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (la dérive) et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$ (le coefficient de diffusion) sont deux fonctions mesurables bornées, où : T un réel strictement positif et $d, m \in \mathbb{N}$.
- $x \in \mathbb{R}^d$ une condition initiale (de carré intégrable et indépendante du MB B).

Cette équation est constituée par :

(a) Un espace de probabilité filtré complet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ où la filtration est définie pour tout t positif par :

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left\{\sigma\left(x, B_s; s < t\right) \cup \mathcal{N}\right\}.$$

(b) Un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $-$mouvement brownien $B = (B_1, B_2, ..., B_m)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

(c) Un processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$ continue $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $-$adapté tel que les intégrales :

$$\int_0^t b(s, X_s)ds \text{ et } \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s,$$

ont un sens (i.e : sont bien définies) et de plus l'égalité :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \forall t \in [0,T], \tag{2.2}$$

(De forme générale : $\forall i = 1, ..., d$ on a : $X_t^i = x^i + \int_0^t b^i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_{i,j}(s, X_s)dB_s^j$).

soit satisfaite $\forall t \in [0,T]$ $\mathbb{P} - ps$.

Remarque 2.1.1 *L'équation* (2.1) *est interprétée au sens d'une équation intégrale* (2.2).

On précise ce que nous entendons par une solution d'EDS (2.1).

Définition 2.1.2 *(**solution forte**) : Un processus continu X est dit solution forte de l'EDS* (2.1) *si :*

1· X est progressivement mesurable.

2· $\mathbb{P}-p.s$ on a :

$$\int_0^t \left\{|b(s,X_s)| + ||\sigma(s,X_s)||^2\right\} ds < \infty,$$

où : $||\sigma|| = trace(\sigma\sigma^t)$, telle que $\sigma\sigma^t$ la matrice de diffusion.

3· $\mathbb{P}-p.s$ on a :

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s, \forall t \in [0,T].$$

Remarque 2.1.2 *Pour simplifier les calculs déjà nombreux, les démonstrations seront effectuées dans le cas $d = m = 1$.*

2.1.2 Existence et unicité des solutions

Ces équations n'ont pas toujours de solution. Pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution on a besoin de deux types de conditions pour les fonctions b et σ.

On met comme notation :

i - $\mathbb{S}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$: L'espace de Banach constitué des processus X progressivement mesurable, tels que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right] < \infty \text{ et muni de la norme } \|X\| = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right]^{1/2}.$$

ii - $\mathbb{S}_c^2\left(\mathbb{R}^d\right)$: Le sous espace de $\mathbb{S}^2$ formé des processus X continus.

Théorème 2.1.1 *(**Existence et unicité**) : Soient b et σ deux fonctions boréliennes.On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $t \in [0,T]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$:*

a• Condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps :

$$|b(t,x) - b(t,y)| + ||\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|| \leq K|x-y|.$$

b• Croissance linéaire :

$$|b(t,x)| + ||\sigma(t,x)|| < K(1+|x|).$$

c• La condition initiale x est de carré intégrable i.e : $\mathbb{E}\left[|x|^2\right] < \infty$.

Alors l'EDS (2.1) possède une unique solution et cette dernière appartient à $\mathbb{S}^2$ et donc à $\mathbb{S}^2_c$.

Preuve. La preuve consiste à utiliser la méthode itérative de Picard (ie : la méthode de point fixe) comme dans le cas déterministe.

Pour $X \in \mathbb{S}^2_c$, posons pour tout $t \in [0,T]$:

$$\Phi(X)_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Le processus $\Phi(X)$ est bien défini et est continu si $X \in \mathbb{S}^2_c$.

Soit X et Y deux éléments de $\mathbb{S}^2_c$, et on utilise la majouration $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on a pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$:

$$|\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t|^2 \leq 2 \sup_{0\leq t\leq u} |\int_0^t (b(s, X_s) - b(s, Y_s))ds|^2 + 2 \sup_{0\leq t\leq u} |\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s))dB_s|^2.$$

D'aprés les propriétes de l'intégrale stochastique et l'inégalité maximale de Doob, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t|^2\right] \quad & \leq 2\mathbb{E}\left[(\int_0^u |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|ds)^2\right] \\ & +8\mathbb{E}\left[\int_0^u \|\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)\|^2 ds\right]. \end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majouration :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t|^2\right] \quad & \leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|^2 ds\right] \\ & +8\mathbb{E}\left[(\int_0^u \|\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)\|^2 ds\right], \end{aligned}$$

et comme les fonctions b et σ sont Lipschitz en espace, on obtient, pour tout $u \in [0,T]$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t|^2\right] \leq 2K^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq s} |X_t - Y_t|^2 ds\right]. \tag{2.3}$$

Notant 0 le processus nul, et en utilisant la majoration $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ on obtient :

$$|\Phi(0)_t|^2 \leq 3\left(x^2 + \sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t b(s,0)ds|^2 + \sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t \sigma(s,0)ds|^2\right).$$

On utilise l'inégalité maximale de Doob et la croissance linéaire de b et σ :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\Phi(0)_t|^2\right] \leq 3(\mathbb{E}\left[x^2\right] + K^2T^2 + 4K^2T). \tag{2.4}$$

Les formules (2.3) et (2.4) montront alors que le processus $\Phi(X)$ appartient à $\mathbb{S}_c^2$ dès que X appartient à $\mathbb{S}_c^2$.

L'existence : On définit par récurrence une suite de processus de $\mathbb{S}_c^2$ en posant :

$$\begin{cases} X^{n+1} = \Phi(X^n) \ , \forall n \in \mathbb{N} \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

On obtient à l'aide de la formule (2.3) pour tout $n \geq 0$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2\right] \leq \frac{C^nT^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^1|^2\right],$$

où : $C = 2K^2(T+4)$.

Encore, en notant D le majorant de la formule (2.4) :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2\right] \leq D\frac{C^nT^n}{n!},$$

(i.e : $D = 3(\mathbb{E}\left[x^2\right] + K^2T^2 + 4K^2T)$).

Il résulte de cette dernière inégalité que :

$$\sum_{n\geq 0} \left\|\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|\right\|_{L^1} \leq \sum_{n\geq 0} \left\|\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|\right\|_{L2} \leq \sqrt{D}\sum_{n\geq 0} \frac{(CT)^{n/2}}{\sqrt{n!}} < \infty.$$

Ainsi la série $\sum_n \sup_t \left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|$ converge $\mathbb{P} - p.s$, donc $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus X continu (i.e : $X \in \mathbb{S}_c^2$) puisque la convergence à lieu dans $\mathbb{S}^2$. Alors X est une solution de l'EDS (2.1) en passant à la limite dans la définition $X^{n+1} = \Phi(X^n)$ (i.e $\lim_{n\to\infty} X^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \Phi(X^n) \Leftrightarrow X = \Phi(X)$).

L'unicité : Si X et Y sont deux solutions de l'EDS (2.1) dans $\mathbb{S}_c^2$ alors :

$$X = \Phi(X) \text{ et } Y = \Phi(Y),$$

et d'aprés l'inégalité (2.3) et pour tout $u \in [0,T]$ on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} |X_t - Y_t|^2\right] \leq 2K^2(T+4)\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s} |X_t - Y_t|^2\right] ds.$$

D'aprés le lemme de Gronwall on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t - Y_t|^2\right] = 0,$$

ce qui prouve que X et Y sont indistinguables.

Pour montrer l'unicité des solutions de l'EDS (2.1) au sens de la définition (2.1.2), nous devons montrer que toute solution appartient à $\mathbb{S}_c^2$ (c'est à dire continue par définition) est appartient à $\mathbb{S}^2$.

On considère le temps d'arrêt $\tau_n = \inf\left\{t \in [0,T], |X_t| > n\right\}$, pour tout $u \in [0,T]$, on a :

$$|X_{u\wedge\tau_n}|^2 \leq 3\left[|x|^2 + \sup_{0\leq u\leq t} |\int_0^{u\wedge\tau_n} b(s,X_s)ds|^2 + \sup_{0\leq u\leq t} |\int_0^{u\wedge\tau_n} \sigma(s,X_s)dB_s|^2\right],$$

alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n} |X_u|^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}\,|x|^2 + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} b(s,X_s)ds\right)^2\right] + 4\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n} \|\sigma(s,X_s)\|^2 ds\right]\right).$$

La croissance linéaire de b et σ donne :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq t\wedge\tau_n}|X_u|^2\right]\leq 3\left[\mathbb{E}\left|x\right|^2+2K^2T^2+8K^2T+(2K^2T+8K^2)\int_0^t\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq s\wedge\tau_n}|X_u|^2\right]ds\right].$$

D'aprés le lemme de Gronwall, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T\wedge\tau_n}|X_u|^2\right]\leq 3\left(\mathbb{E}\left|x\right|^2+2K^2T^2+8K^2T\right)\exp\left\{3\left(2K^2T+8K^2\right)T\right\},$$

et le lemme de Fatou donne :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T}|X_u|^2\right]\leq 3\left(\mathbb{E}\left|x\right|^2+2K^2T^2+8K^2T\right)\exp\left\{3\left(2K^2T+8K^2\right)T\right\},$$

ceci implique l'unicité des solutions de l'EDS (2.1). ■

2.2 Equation différentielle stochastique de Volterra

Les équations différentielles stochastiques de Volterra (autrement dit les équations intégrales stochastiques de Volterra - $\mathbb{EISV}$ en abrégé -) sont un type spécial d'équations intégrales. Ils représentent des modèles intéressants pour la dynamique stochastique avec mémoire, afin par exemple des applications en l'ingénierie, la biologie et la finance.

2.2.1 Notations et définitions

Soient $\left(\Omega,\mathcal{F},\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0},\mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filtré complet, $B=\left(B_t\right)_{t\geq 0}$ un movement brownien de $1-$dimonsion et $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle augmentée du MB B.

Définition 2.2.1 *L'équation intégtale stochastique de Volterra est donnée sous la forme :*

$$X_t=\xi\left(t\right)+\int_0^t b(t,s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(t,s,X_s)dB_s,\forall t\in\left[0,T\right], \tag{2.5}$$

et de la forme différentielle :

$$dX_t = d\xi(t) + \int_0^t \frac{\partial b}{\partial t}(t, s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, s, X_s) dB_s + b(t, t, X_t)dt + \sigma(t, t, X_t)dB_t,$$

tels que :

1. $\xi(t)$ est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté et à trajectoire continu $\forall t \in [0, T]$.
2. $b(t, s, x)$ et $\sigma(t, s, x)$ sont des fonctions aléatoires définies pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ et $x \in \mathbb{R}$.
3. Le processus X_t est une solution de l'équation (2.5) s'il est $\mathcal{F}_t-$adapté et à trajectoire continu $\forall t \in [0, T]$.

2.2.2 Existence et unicité des solutions

On étudie l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.5) sous les hypothèses suivantes.

Hypothèses (H.1)

i) $\xi(t)$ est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté et càdlàg.

ii) $b(t, s, x)$ et $\sigma(t, s, x)$ sont $\mathcal{F}_s-$mesurable pour tout $s \leq t$.

iii) Il existe un constant $C > 0$ tel que pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ on a :

$$|b(t, s, 0)| + \|\sigma(t, s, 0)\| \leq C.$$

iv) $b(t, s, x)$ et $\sigma(t, s, x)$ sont Lipschitz par rapport à x, uniforme en t pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$ on a :

$$|b(t, s, x) - b(t, s, x')| + ||\sigma(t, s, x) - \sigma(t, s, x')|| \leq C|x - x'|.$$

v) Il existe $C > 0$ tel que :

$$|b(t, s, x)| + ||\sigma(t, s, x)|| < C(1 + |x|).$$

Théorème 2.2.1 ***(existence et unicité)*** *: Si les hypothèses (H.1) sont satisfaites, l'équation* (2.5) *possède une solution unique.*

Preuve. D'abord on démontre **l'existence** de la solution X_t, en utilisant la suite des approximations successives de Picard. On définit une suite comme suit :

$$\begin{cases} X_t^0 = \xi(t) \\ X_t^{n+1} = \xi\left(t\right) + \int_0^t b(t,s,X_s^n)ds + \int_0^t \sigma(t,s,X_s^n)dB_s, \forall n \geq 0. \end{cases}$$

On a :

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t \left(b(t,s,X_s^n) - b(t,s,X_s^{n-1})\right) ds + \int_0^t \left(\sigma(t,s,X_s^n) - \sigma(t,s,X_s^{n-1})\right) dB_s.$$

Comme $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ on a pour tout $\forall t \in [0,T]$:

$$\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 \leq 2\left|\int_0^t \left(b(t,s,X_s^n) - b(t,s,X_s^{n-1})\right) ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \left(\sigma(t,s,X_s^n) - \sigma(t,s,X_s^{n-1})\right) dB_s\right|^2.$$

En passant par l'espérence et en appliquant les propriétés d'intégrale stochastique on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left(b(t,s,X_s^n) - b(t,s,X_s^{n-1})\right) ds\right|^2\right] \\ &+ 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\|\sigma(t,s,X_s^n) - \sigma(t,s,X_s^{n-1})\right\|^2 ds\right]. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on prend :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] &\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|b(t,s,X_s^n) - b(t,s,X_s^{n-1})\right|^2 ds\right] \\ &+ 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left\|\sigma(t,s,X_s^n) - \sigma(t,s,X_s^{n-1})\right\|^2 ds\right]. \end{aligned}$$

D'aprés l'hypothèse (iv) on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right] \leq K\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X^n(s) - X^{n-1}(s)\right|^2 ds\right], \tag{2.6}$$

où : $K = 2C^2(T+1)$.

Maintenant en utilisant l'hypothèse (v) pour $n=0$ nous obtenons de la même façon que ci-dessous :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|X_t^1-X_t^0\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t b(t,s,\xi(s))ds+\int_0^t \sigma(t,s,\xi(s))dBs\right|^2\right]\\ &\leq 2K\mathbb{E}\int_0^t\left[1+\xi^2(s)\right]ds\\ &\leq 2Kt\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left[1+\xi^2(t)\right].\end{aligned}$$

Donc (2.6) devient :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right]\leq\frac{2K'(Kt)^n}{n!},$$

où : $K'=\sup\limits_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\left[1+\xi^2(t)\right]<\infty$. Pour $m>n>0$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|X_t^m-X_t^n\right|^2dt\right] &\leq\sum_{k=n}^{m-1}\frac{2K'\int_0^T(Kt)^kdt}{k!}\\ &=\sum_{k=n}^{m-1}\frac{2K'K^kT^{k+1}}{(k+1)!}\to 0,\text{quand } m,n\to\infty.\end{aligned}$$

Alors la suite $\{X_t^n\}_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy converge sur $[0,T]$ dans $\mathbb{L}^2$. En passant à la limite dans la définition on trouve l'unique solution, i.e :

$$\lim_{n\to\infty}X_t^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\xi(t)+\int_0^t b(t,s,X_s^n)ds+\int_0^t\sigma(t,s,X_s^n)dB_s\right]\Leftrightarrow X_t=\xi(t)+\int_0^t b(t,s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(t,s,X_s)dB_s.$$

Pour montrer **l'unicité** on suppose qu'il existe deux solutions pour l'équation (2.5), $X(t)$ et $Y(t)$ alors :

$$X(t)-Y(t)=\int_0^t\left[b(t,s,X_s)-b(t,s,Y_s)\right]ds-\int_0^t\left[\sigma(t,s,X_s)-\sigma(t,s,Y_s)\right]dB_s.$$

On utilise la même estimation de (2.6), on trouve :

$$\mathbb{E}\left[|X(t)-Y(t)|^2\right]\leq 2C^2(T+1)\mathbb{E}\left[\int_0^t|X(s)-Y(s)|^2ds\right]\leq 2C^2(T+1)\int_0^t\mathbb{E}\left[|X(s)-Y(s)|^2\right]ds.$$

On applique l'inégalité de Gronwall on trouve :

$$\mathbb{E}\left[|X(t)-Y(t)|^2\right]=0,$$

donc :

$$\mathbb{P}\left[X(t)-Y(t)\right]=1;\forall t\in[0,T].$$

Puisque $X(t)$ et $Y(t)$ sont deux processus continus, on déduit que :

$$\mathbb{P}\left[X(t)=Y(t),\forall t\in[0,T]\right]=1,$$

alors les deux solutions sont indistinguables. ■

Chapitre 3

EDSR et EDSR de Volterra

Dans ce chapitre on va présenter des notions sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades et les équations différentielles stochastiques rétrogrades de Volterra. D'abord on montre dans la première section l'existence et l'unicité de la solution d'une EDSR, puis on fait la même étude pour une équation différentielle stochastique rétrograde de Volterra (autrement dit équation intégrale stochastique rétrograde de Volterra) dans la deuxième section.

3.1 Equation différentielle stochastique rétrograde

Les équations différentielle stochastiques rétrogrades jouent un rôle trés important dans les jeux différentiels stochastiques de somme nulle, en mathématiques financiers et en contrôle optimale stochastique des diffusions.

3.1.1 Notations et définitions

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et $B = \{B_t^i, t \geq 0, 1 \leq i \leq d\}$ un MB $d-$dimentionnel sur cet espace. On notera $\mathcal{F}_t = \sigma\left(\sigma\left(B_s, 0 \leq s \leq t\right) \cup N\right)$ la filtration naturelle augmentée du mouvement brownien B, et T un temps terminal donné,et on l'appelle aussi l'horizon.On définit des espaces de processus nous allons travaille dans la suite :

- $\mathbb{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et $\mathbb{S}_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)$: la même notation qu'on a donne dans le chapitre précédent.

- $\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ formé par les processus Z, progressivement mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$ tels que :

$$\|Z\|^2_{\mathcal{M}^2} = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2\, dt\right] < \infty,$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$,$\|z\|^2 = trace\,(zz^t)$. $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

Les espaces $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^2_c$ et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons $\mathcal{B}^2$ l'espace de banach $\mathbb{S}^2_c\left(\mathbb{R}^k\right) \times M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

Définition 3.1.1 *Les EDSR sont des équations du type suivant :*

$$\begin{cases} -dY_t = g(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, 0 \le t \le T \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

ou de façon équivalente, sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, 0 \le t \le T. \tag{3.1}$$

Dans l'EDSR (3.1) les éléments de base sont :

1. La fonction $g : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \to \mathbb{R}^k$ est appelée le générateur, telle que pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ le processus $(g\,(t, y, z))_{0\le t\le T}$ soit progressivement mesurable, $d, k \in \mathbb{N}$.
2. La variable aléatoire ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ qui est appelée la condition terminale.

Notre objectif est de trouver la solution de l'équation (3.1), c'est-à-dire les inconnues Y et Z.

Définition 3.1.2 ***(solution d'une EDSR)*** *: Une solution de l'EDSR* (3.1) *est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\le t\le T}$ *vérifiant :*

1. *Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ (resp).*
2. *On a :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{|g(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2\right\} ds\right] < \infty.$$

3. $\mathbb{P}-ps$, on a :

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, 0 \leq t \leq T.$$

3.1.2 Existence et unicité des solutions dans le cas Lipschitz

En 1990, E.Pardoux et S.Peng ont démontré l'existence et l'unicité des solutions de l'EDSR (3.1) dans le cas où le générateur g est non linéaire. On commence par un cas trés simple, celui où g ne dépend ni de Y ni de Z et ceci est illustré par le lemme suivant.

Lemme 3.1.1 *Soient $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}_T)$ et le processus $\{G_t\}_{0\leq t\leq T} \in M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$, l'EDSR suivante :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T G_s ds - \int_t^T Z_s dB_s, 0 \leq t \leq T,$$

possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

Preuve. Supposons dans un premier temps que (Y, Z) soit une solution vérifiant $Z \in M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$. Si on prend l'espérence conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$,on a nécessairement,

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T G_s ds \diagup \mathcal{F}_t\right).$$

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que d'aprés le théorème Fubini, comme G est progressivement mesurable, $\int_0^t G_s ds$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, en fait dans $\mathbb{S}_c^2$ puisque G est de carré intégrable. On a alors $\forall t \in [0, T]$:

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T G_s ds \diagup \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t G_s ds := M_t - \int_0^t G_s ds.$$

M est une martingale brownienne, via la théorème de représentation des martingales browniennes on construit un processus Z appartenant à M^2 tel que :

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s,$$

et donc :

$$Y_t = M_t - \int_0^t G_s ds = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t G_s ds.$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée puisque comme $Y_T = \xi$,

$$\begin{aligned} Y_t - \xi \quad &= M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t G_s ds - \left(M_0 + \int_0^T Z_s dB_s - \int_0^T G_s ds \right) \\ &= \int_t^T G_s ds - \int_t^T Z_s dB_s. \end{aligned}$$

L'unicité est évidente. ■

Nous montrons à présent le théorème de Pardoux et Peng.

Théorème 3.1.1 *(de E.Pardoux et S.Peng) : Sous les hypothèses suivantes :*

1. ***Condition d'intégrabilité :***

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s,0,0)|^2 \, ds \right] < \infty.$$

2. ***Condition de Lipschitz en** (y, z) : il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout t, y, y', z et z' on a :*

$$|g(t,y,z) - g(t,y',z')| \leq K(|y-y'| + \|z - z'\|,$$

l'EDSR (3.1) *admet une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k \times d})$.

Preuve. L'idée de la démonstration est basée sur un argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ des solutions (Y, Z). Au début en construisant une application Φ définie par :

$$\begin{aligned} \Phi : \quad & \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}^2 \\ & (y,z) \to \Phi(y,z) = (Y,Z), \end{aligned}$$

tel que (Y, Z) est la solution de l'EDSR suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, y_s, z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, 0 \leq t \leq T,$$

et en vérifiant qu'elle est bien dans lui même.

Ensuite pour l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.1) il suffit de montrer l'existence et l'unicité d'un point fixe pour Φ, c'est-à-dire on montre que Φ est

contractante.

Pour plus détails voir [5] page $(19 - 20)$. ■

3.2 Equation différentielle stochastique rétrograde de Volterra

Le but de cette section est d'introduire la forme d'une équation différentielle stochastique rétrograde de Volterra -$\mathbb{EISRV}$ en abrégé- et d'étudier l'existence et l'unicité de la solution de cette équation, en utilisant des résultats obtenus dans la section précédente.

3.2.1 Notations et définitions

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sur cet espace. On notera $\mathcal{F}_t = \sigma\left(\sigma\left(B_s, 0 \leq s \leq t\right) \cup N\right)$ la filtration naturelle augmentée du MB B, et T un temps terminal donné.

Définition 3.2.1 *Une équation intégrale stochastique rétrograde de Volterra est donnée sous la forme :*

$$Y(t) = \xi(t) + \int_t^T g(t, s, Y(s), Z(t, s))ds - \int_t^T Z(t, s)dB_s, \forall t \in [0, T], \tag{3.2}$$

où : ξ et g sont des fonctions déterministes et le couple de processus $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ est la solution de cette équation.

Cette équation est d'une forme différentielle suivante :

$$\partial Y(t) = d\xi(t) + \int_t^T \frac{\partial g}{\partial t}(t,s,Y_s,Z_{t,s})\,ds - \int_t^T \frac{\partial Z}{\partial t}(t,s)dB_s - g(t,t,X_t,Z_{t,t})dt + Z(t,t)dB_t.$$

3.2.2 Existence et unicité des solutions

On note :

$H_{\Delta}^{2,\beta}([0,T])$: un espace de Hilbert formé par les processus (Y,Z) tels que : $Y:[0,T]\times\Omega\to\mathbb{R}$ est $\mathcal{F}$ adapté et $Z:\Delta\times\Omega\to\mathbb{R}$ est $\mathcal{F}-$adapté sur $[t,T]$ où l'ensemble

$$\Delta = \left\{(t,s)\in[0,T]^2 : t\leq s\right\},$$

muni de la norme :

$$\|(Y,Z)\|^2_{H_{\Delta}^{2,\beta}([0,T])} = \mathbb{E}\int_0^T \left[e^{\beta t}\left|Y(t)\right|^2 + \int_t^T e^{\beta s}\left|Z(t,s)\right|^2 ds\right] dt.$$

On étudie l'existence et l'unicité sous les hypothèses suivantes.

Hypothèses (H.2)

1. $g:[0,T]^2\times\mathbb{R}^2\times\Omega\to\mathbb{R}$ telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_t^T g(t,s,0,0)\,ds\right)^2 dt\right]<\infty.$$

2. Il existe une constant $C>0$ telle que pour tout $t,s\in[0,T]$:

$$|g(t,s,y,z)-g(t,s,y',z')|\leq C(|y-y'|+|z-z'|),$$

   pour tout y,y',z et z'.

3. $\xi(.)\in\mathbb{L}^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega,\mathbb{R})$.

Lemme 3.2.1 *On considére l'EISR de Volterra suivante :*

$$Y(t) = \xi(t) + \int_t^T g(t,s)ds - \int_t^T Z(t,s)dB_s, \forall t \in [0,T]\,, \tag{3.3}$$

où : $\xi(t) \in \mathbb{L}^{2,\beta}_{\mathcal{F}_T}([0,T])$, $g : \Delta^c \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ *est* $\mathcal{B}(\Delta^c) \otimes \mathcal{F}_T-$*mesurable telle que* $s \to g(t,s)$ *est* $\mathcal{F}-$*progressivement mesurable pour tout* $t \in [0,T]$ *et aussi :*

$$\mathbb{E}\int_0^T \int_t^T e^{\beta s} |g(t,s)|^2 \, dsdt < \infty,$$

alors (3.3) *admet une solution unique adaptée* $(Y,Z) \in H^{2,\beta}_\Delta([0,T])$ *et on a l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T e^{\beta s}|Y(s)|^2 ds + \mathbb{E}\int_0^T\int_t^T e^{\beta s}|Z(t,s)|^2 dsdt \quad &\leq C\mathbb{E}\int_0^T e^{\beta t}|\xi(t)|^2 dt + C\mathbb{E}\int_0^T e^{\beta t}\left|\int_t^T g(t,s)ds\right|^2 dt \\ &+C\mathbb{E}\int_0^T\int_t^T e^{\beta u}|\xi(t)|^2 \beta dudt \\ &+C\mathbb{E}\int_0^T\int_t^T e^{\beta s}\left|\int_s^T g(t,u)du\right|^2 \beta dsdt,\end{aligned}$$

En outre :

$$\mathbb{E}\int_0^T e^{\beta s}|Y(s)|^2 ds + \mathbb{E}\int_0^T\int_t^T e^{\beta s}|Z(t,s)|^2 dsdt \quad \leq C\mathbb{E}e^{\beta t}\int_0^T |\xi(t)|^2 dt + \frac{C}{\beta}\mathbb{E}\int_0^T\int_t^T e^{\beta s}\frac{|g(t,s)|^2}{\alpha^2(s)}dsdt, \tag{3.4}$$

où : $\alpha^2(s)$ *fonction arbitraire.*

Remarque 3.2.1 *Ce lemme est une forme simplifier du lemme (3.1.1) du papier de Tianxiao Wang et Yufeng Shi* [13] *page* $(5-9)$.

Théorème 3.2.1 ***(existence et unicité)*** *: Si les hypothèses (H.2) sont satisfaites, l'équation* (3.2) *possède une solution unique* $(Y,Z) \in H^{2,\beta}_\Delta([0,T])$.

Preuve. La preuve consiste à trouver une solution de l'équation (3.2) par la méthode de point fixe. L'existence et l'unicité d'un point fixe vont résulter du fait que pour tout $T > 0$ l'application $(y,z) \to (Y,Z)$ est contractante sur l'espace $H^{2,\beta}_\Delta([0,T])$.

D'abord en vérifiant qu'elle est bien dans lui même.

On considère l'équation suivante :

$$Y(t) = \xi(t) + \int_t^T \bar{g}(t,s)ds - \int_t^T Z(t,s)dB_s, \tag{3.5}$$

où : $\bar{g}(t,s) = g\left(t,s,y\left(s\right),z\left(t,s\right)\right)$, pour tout $(t,s) \in \Delta$.

Pour résoudre l'équation (3.5) on présente la famille d'EDSR suivante, pour tout $t \in [0,T]$:

$$\bar{Y}(r,t) = \xi(t) + \int_r^T \bar{g}(t,s)ds - \int_r^T \bar{Z}(s,t)dB_s, r \in [t,T].$$

Il est bien connu que l'équation ci-dessus admet une solution adaptée $\left(\bar{Y},\bar{Z}\right)$ et l'estimation suivante est vraie :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{r\in[t,T]}\left|\bar{Y}(r,t)\right|^2 + \int_r^T \left|\bar{Z}(s,t)\right|^2 ds\right] \leq C\mathbb{E}\left[\left|\xi(t)\right|^2 + \left(\int_r^T \bar{g}(t,s)ds\right)^2\right].$$

On pose $Y(t) = \bar{Y}(t,t)$ et $Z(t,s) = \bar{Z}(s,t)$ pour tout $(t,s) \in \Delta$, donc le couple (Y,Z) est une solution adaptée pour l'équation (3.5) et on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|Y(t)\right|^2 + \int_t^T \left|Z(t,s)\right|^2 ds\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\xi(t) + \int_t^T \bar{g}(t,s)ds\right|^2\right] \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[\left|\xi(t)\right|^2 + \left(\int_t^T \bar{g}(t,s)ds\right)^2\right].\end{aligned}$$

En intégrant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\left|Y(t)\right|^2 + \int_t^T \left|Z(t,s)\right|^2 ds\right) dt\right] \leq 2\mathbb{E}\int_0^T \left[\left|\xi(t)\right|^2 + \left(\int_t^T \bar{g}(t,s)ds\right)^2\right] dt.$$

On ajoute et on soustrait le $g(t,s,0,0)$ en le côté gauche, puis par l'hypothèse de lipschitz on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(|Y(t)|^2 + \int_t^T |Z(t,s)|^2\, ds\right) dt\right] \quad &\leq C\mathbb{E}\int_0^T \left[|\xi(t)|^2 + \left(\int_t^T g(t,s,0,0)ds\right)^2\right] dt \\ &+C\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(|y(t)|^2 + \int_t^T |z(s)|^2\, ds\right) dt\right],\end{aligned}$$

pour une contante C, alors l'application $(y,z) \to (Y,Z)$ définie de l'espace $H_\Delta^{2,\beta}([0,T])$ à lui même.

Ensuite on va montrer que cette application est contractante sur l'espace $H_\Delta^{2,\beta}([0,T])$ sous la norme $\|.\|_{H_\Delta^{2,\beta}([0,T])}$.

Si $i = 1,2$ on a $(y_i, z_i, k_i) \in H_\Delta^{2,\beta}([0,T])$ et (Y_i, Z_i, K_i) est la solution adaptée correspondante de l'équation (3.2), donc d'aprés l'inégalité (3.4) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(e^{\beta t}|Y_1(t) - Y_2(t)|^2 + \int_t^T e^{\beta t}|Z_1(t,s) - Z_2(t,s)|^2\, ds\right) dt\right] \quad &\leq \frac{C}{\beta}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(e^{\beta t}|y_1(t) - y_2(t)|^2\right.\right. \\ &\left.\left.+ \int_t^T e^{\beta t}|z_1(t,s) - z_2(t,s)|^2\, ds\right) dt\right],\end{aligned}$$

ce qui signifie que :

$$\|(Y,Z)\|^2_{H_\Delta^{2,\beta}([0,T])} \leq \frac{C}{\beta}\|(y,z)\|^2_{H_\Delta^{2,\beta}([0,T])}.$$

Donc l'application $(y,z) \to (Y,Z)$ est contractante sur l'espace $H_\Delta^{2,\beta}([0,T])$ pour tout $\beta > 0$.

Alors (Y,Z) est la solution unique de l'équation (3.2). ■

Conclusion

Dans ce travail nous avons essayé d'exposer les deux résultats d'existence et l'unicité de la solution l'un pour les EDSR et l'autre pour les EDSR de Volterra.

Dans la preuve de la solution d'une EDSRV on a utilisait la même méthode comme dans le cas d'une EDSR qui est le point fixe mais pas les mêmes étapes, car la forme différentielle de l'équation intégrale est plus compliqué, puisque elle contient le terme intégrale et donc on ne peut pas appliquer la formule d'Itô comme il était fait dans l'EDSR.

Bibliographie

[1] Jeanblanc, M , Simon, T . (2005) . Eléments de calcul stochastique.

[2] Jeanblanc, M . (2006) . Cours de calcul stochastique.

[3] Khalfallah, N . (2019) . Cours de théorie générale des processus stochastique. Université de Biskra.

[4] Labed, B . (2019) . Cours de mouvement brownien et calcul stochastique. Université de Biskra

[5] Briand, P . (2004). Equations Différentielles Stochastique Rétrogrades.

[6] Øksendal, B . (2000) . Stochastic Differential Equations.

[7] Agram, N., Øksendal, B., & Yakhlef, S. (2019). New approach to optimal control of stochastic Volterra integral equations. Stochastics, 91(6), 873-894..

[8] Agram, N., Øksendal, B., & Yakhlef, S. (2016). Optimal control of forward-backward stochastic Volterra equations

[9] Hida, T, Kuo, H. H, Potthoff, J, & Streit, L. (1993). White Noise. An Infinite-demensional Approach. Kluwer

[10] Hu, Y. & Øksendal, B. (2016). Linear backward stochastic Volterra equations. Stochastic Processes and their Applications

[11] Aase, K., Øksendal, B., Privault, N., & Ubøe, J. (2000). White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance. Finance and Stochastics, 4(4), 465-496.

[12] Benth, F. E. (1993). Integrals in the Hida distribution space (S)*. B. Lindstrøm, B. Øksendal, and A.S. Ustunel, editors, Stochastic Analysis and Related Topics, Vol. 8, 89-99.

[13] Tianxiao, W. & Yufeng, S. (2010). Solvability of general backward stochastic Volterra integral equations with non-Lipschitz conditions

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{R}^d$	:Espace réel euclidien de dimension d.
$\mathbb{R}^{d\times m}$	:Ensemble des matrices réelles $d\times m$.
$\mathbb{L}^2\left(\mathcal{F}_T\right)$	:Espace des variables aléatoires de carée intégrable $\mathcal{F}_T-$mesurable
$\mathbb{L}^{2,\beta}_{\mathcal{F}_T}\left([0,T]\right)$	$:=\left\{ Y:[0,T]\rightarrow\mathbb{R}/\ \ Y\left(s\right)\text{ est }\mathcal{F}_T-\text{mesurable tel que } E\int_0^T e^{\beta t}\left\vert Y\left(t\right)\right\vert^2 dt<+\infty\right\}$
$H^{2,\beta}_{\Delta}\left([0,T]\right)$	:Espace des processus (Y,Z) tels que $Y:[0,T]\times\Omega\rightarrow\mathbb{R}$, $Z:\Delta\times\Omega\rightarrow\mathbb{R}$, avec $s\rightarrow Z\left(t,s\right)$ et $s\rightarrow Z\left(t,s\right)$ sont $\mathcal{F}$ adapté sur $[t,T]$, muni de la norme, $\left\Vert (Y,Z)\right\Vert^2_{H^{2,\beta}_{\Delta}([0,T])}=E\int_0^T\left[e^{\beta t}\left\vert Y\left(t\right)\right\vert^2+\int_t^T e^{\beta t}\left\vert Z\left(t,s\right)\right\vert^2 ds\right]dt<+\infty.$
Δ^c	$:=\left\{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]\ \ /\ \ t\leq s\right\}=[0,T]^2\setminus\Delta$
$\mathcal{B}\left(\Delta^c\right)$	:La tribu de Borel engendrée par Δ^c
σ^t(ou z^t)	:Transposée de la matrice σ (ou la matrice z).
$\bar{\mathbb{R}}_+$	:est l'intervalle $[0,+\infty]$.
$\mathbb{P}-ps$	:Presque sûrment pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$\mathbb{E}\left(X\right)$	:Espérence mathématique de la variable aléatoire X.
$\mathbb{E}\left(X/\mathcal{F}_t\right)$	:Espérence conditionnelle de la variable aléatoire X pa rapport a $\mathcal{F}_t$.

EDS	:Equation différentielle stochastique.
EDSR	:Equation différentielle stochastique rétrograde.
EISV	:Equation intégrale stochastique Volterra.
EISRV	:Equation intégrale stochastique rétrograde Volterra.
MB	:Mouvement Brownien.
v.a	:Variable aléatoire.
resp	:Respectivement.
i.e	:C'est-à-dire.