République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

projet Scientifique

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par

Kabot Abo Bakare Essedike

Titre

Approximation de solution des équations différentielles stochastiques

---

Membres du jurés :

Pr.	**Khalfallah Nabil**	U.Biskra	**Président**
Pr.	**Chighoub Farid**	U.Biskra	**Encadreur**
Dr.	**Benabba Fadhila**	U.Biskra	**Examinateur**

septembre 2020

Didicace

je dédie ce simple travail

Mes chers parents que dieu lui accorde une longue vie

A toutes mes soeurs etmes fréres

A toute ma précieuse famille

A mes cheres amis

A toute la promotin de mathématique

Kabot Abo Bakare Essdike .

Remerciements

Je remercie mon Allah qui m'aidé pour finir mon mémoire

Je remercie mon encadreur Pr. CHIGHOUB Farid *professeur de mathématique à l'université de Biskra, qui m'a dirigé et m'a dit touts les conseils importants et les indications utiles*

Enfin, je remercier ma famille et toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Table des matières **iii**

Introduction **1**

1 Généralités et notations **3**

1.1 Généralités sur les processus stochastiques 3

1.2 Mouvement brownien et Martingales 5

1.3 Intégrale stochastique et formule d'Itô 7

1.3.1 L'intégrale de Wiener 7

1.3.2 L'intégrale stochastique ou intégrale d'Itô 8

1.4 Existence et unicité de solution des équations différentielles stochastiques 10

1.4.1 Théorème d'éxistence et d'unicité 12

2 Discrétisation des équations différentielles stochastiques **13**

2.1 Le schéma d'Euler 14

2.1.1 Vitesse de convergence forte 15

2.1.2 Vitesse de convergence faible 18

2.2 Le schéma de Milshtein 18

2.2.1 Le cas de la dimension 1 18

2.2.2 Le cas général 21

3 Schéma d'approximation des solutions des équations différentielles stochastiques rétrogrades **23**

3.1 **Schémas de rétro-approximation** 26

3.1.1 **Pseudo-discrétisation** 26

3.2 **Schéma de rapprochement explicite** 30

Conclusion **36**

Bibliographie **37**

Annexe B : Abréviations et Notations **39**

Introduction

Dans cette mémoire, nous proposons d'approximer la solution (X, Y, Z) de l'équation différentielle stochastique progressive-rétrograde couplée définie pour tout $0 \leq t \leq T$ par

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dW_s, \\ Y_t = g\left(X_T\right) + \int_t^T f\left(s, X_s, Y_s, Z_s\right) dW_s - \int_t^T Z_s dW_s, \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}$ et W est un mouvement brownien défini sur une espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t))$, pour $0 \leq t \leq T$. La composante X sera approximée par le schéma d'Euler ou de Milshtein. La simulation du couple (Y, Z) est plus délicate. Douglas et al ont présenté dans [7] une méthode numérique pour une classe de EDS progressive-rétrograde basée sur l'approximation aux différences finies de la EDP associée et le schéma en quatre étapes développé dans [15]. Dans [5], Chevance a proposé une méthode numérique pour les EDSR où le générateur f ne dépend pas du gradient de contrôle Z. La difficulté réside dans l'approximation du processus Z qui ne provient que du théorème de représentation martingale. Dans le cas où f ne dépend que de Z, Bally a développé dans [1] un schéma de discrétisation considérant une partition temporelle aléatoire. Sa méthode est plus difficile à mettre en œuvre. Le travail de Zhang [19] est plus intéressant mais ne répond pas à la question de approximation de Bouchard et Touzi [3] ont investi ce travail pour donner un schéma d'approximation implicite. Gobet et al [11] proposent un nouveau schéma numérique basé sur la base d'une fonction de régression itérative dont les coefficients sont évalués en utilisant la simulation de Monte Carlo.

Cette approche est de donner un schéma d'approximation par la représentation de la solution (Y, Z) de l'EDS rétrograde. Nous étudions un schéma de pseudo approximation puis un schéma de discrétisation explicite, et nous calculons l'erreur dans $\mathbb{L}^2$ induite par ces approximations.

Notre travail est structuré en trois chapitres :

Dans Le premier chapitre, nous allons expliquer la théorie du calcul stochastique, en donnant les définitions et les propriétés, notre objectif dans ce mémoire est de faire une étude l'approximation de solution des équations différentielles stochastiques étés des processus continues ainsi que leurs résultats principaux qui nous permettre de défnir dintégrale stochastique et la formule d'Itô.et rappelle sur les équation diffiérentille stochastique, cité quelques unes de leurs propriétés et on propose les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions.

Ensuite, dans le deuxième chapitre la discrétisation exacte n'existe pas, il convient de se tourner vers des approximations discrètes du processus continu sous-jacent. Les schémas d'Euler et de Milstein sont les procédés de discrétisation les plus répandus. Tous deux sont des développements d'Itô-Taylor de l'équation (1.3) à des ordres différents.

Finallement, le troisième chapitre est consacré à l'étude approximation et simulation des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) . Nous proposons deux schémas d'approximation (schéma de rétro-approximation puis un schéma de rapprochement explicite) .

On termine par une conclusion qui synthétise notre travail.

Chapitre 1

Généralités et notations

1.1 Généralités sur les processus stochastiques

Pour représenter un phénomène aléatoire dépendant du temps, le modèle mathématique est donné par

1) Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

2) Une fonction $X : (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) \longmapsto (E, \mathcal{E})$ avec $(t, w) \longmapsto X(t, w)$.

Pour chaque t fixé, l'état du systéme est une variable aléatoire c'est à dire $w \longmapsto X(t, w)$ est mesurable. Pour $w \in \Omega$ fixé, $t \curvearrowright X(t, w)$ est appelée une trajectoire.

Définition 1.1.1 ***(Processus stochastique)*** *Soit T un ensemble d'indices $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{N})$, on appelle processus défini sur T à valeur dans (E, ξ), une famille $(X(t))_{t \in T}$ d'applications mesurables de $(T \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{E})$, puor tout $t \in T$, $X(t)$ est une variable aléatoire.*

Définition 1.1.2 (Modification d'un processus) *On dit que deux processus $(X(t))_{t \in T}$ et $(Y(t))_{t \in T}$ définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont modifications l'un de l'autre si $\forall t \in T$, $X(t) = Y(t)$, $\mathbb{P} - p.s.$*

C'est équivalent à dire :$\forall t \in T$, $\exists N_t$, $\mathbb{P}(N_t) = 0$ et $\forall w \notin N_{t,}$ $X(t, w) = Y(t, w)$.

Définition 1.1.3 ***(Processus indistinguables)*** *Deux processus $(X(t))_{t\in T}$ et $(Y(t))_{t\in T}$ sont indistinguables si $\mathbb{P}(X(t) = Y(t), \forall t \in T) = 1$.*

C'est équivalent à dire : $\exists N$, $\mathbb{P}(N) = 0$, $\forall w \notin N$, $X(t, w) = Y(t, w)$, $\forall t \in T$.

Remarque 1.1.1 *Il est clair que si $(X(t))_{t\in T}$ et $(Y(t))_{t\in T}$ sont indistinguables alors ils sont modifications l'un de l'autre. La réciproque est généralement fausse.*

Définition 1.1.4 ***(Processus mesurable)*** *Un processus $(X(t))_{t\in T}$ est mesurable si l'application $(t, w) \mapsto X_t(w)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $B(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 1.1.5 ***(Filtration)*** *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ au sens où, $\forall s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est appelée filtration de $(\Omega, \mathcal{F})$. On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré.*

Définition 1.1.6 ***(Processus adapté)*** *Un processus $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si, pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurabe.*

Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.

Si $N \subset \mathcal{F}_0$, et si X est adapté par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ alors toute modification de X est encore adaptée.

Définition 1.1.7 ***(Processus progressivement mesurable)*** *On dit q'un processus $(X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est progressivement mesurable si l'application*

$$X(.,.) : \ ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}(0,t) \otimes \mathcal{F}) \longrightarrow (E, \mathcal{E}),$$
$$(s, w) \longmapsto X(s, w),$$

est $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(0,t) \otimes \mathcal{F})-$ mesurable.

Finissons ces généralités par la notion de temps d'arrêt.

Définition 1.1.8 ***(Temps d'arrêt)*** *Soit τ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On dit que τ est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$temps d'arrêt si, pour tout t, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Si τ est un temps d'arrêt, on appelle tribu des évènements antérieurs à τ, la tribu définie par

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{\tau \leq T\} \in \mathcal{F}_t, \forall t\}.$$

Proposition 1.1.1 *Soit τ est un temps d'arrêt. Si X est progressivement mesurable, le processus arrêté X^τ défini par $X_t^\tau = X_{\tau \wedge t}$ est progressivement mesurable.*

1.2 Mouvement brownien et Martingales

Définition 1.2.1 ***(Mouvement brownien standard)*** *On appelle mouvement brownien standard un processus stochastique W à valeurs réelles tel que*

1) $\mathbb{P} - p.s.$ $t \longmapsto W_t(w)$ est continue,

2) Pour $0 \leq s < t$, $W_t - W_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\{W_u, u \leq s\}$ et de loi gaussienne centrée de variance $t - s$.

3) $W_0 = 0$ $\mathbb{P} - p.s.$

Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire W_t suit la loi gaussienne centrée de variance t. On dit q'un mouvement brownien (MB dans la suite) part d'un point x si $W_0 = x$.

Remarque 1.2.1 *On dit que W est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–MB si W est un processus continu, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, vérifiant*

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \forall 0 \leq s \leq t,\ \mathbb{E}\left(\exp\left(iu\left(W_t - W_s\right)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \exp\left\{-u^2\left(t-s\right) \mid 2\right\}.$$

Proposition 1.2.1 *Soit W un MB standard*

1) pour tout $s > 0$, $\{W_{t+s} - W_s\}_{t\geq 0}$ est un MB indépendant de$\{W_u, u \leq s\}$,

2) $-W$ est aussi un MB,

3) pour tout $c > 0$, $\{cW_{t/c^2}\}_{t\geq 0}$ est un MB,

4) le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tW_{1/t}$est un MB.

Définition 1.2.2 *Un processus X à valeurs réelles est une surmartingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si*

1) pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$–mesurable,

2) pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable,

3) pour $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t|F_s) \leq X_s$.

X est une sousmartingale lorsque $-X$ est une surmartingale, X est une martingale si X est à la fois une surmartingale et une sous-martingale.

Remarque 1.2.2 *Si W est un MB, alors $\{W_t^2 - t\}_{t\geq 0}$ et $\{\exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2)\}_{t\geq 0}$ sont des martingales.*

Théorème 1.2.1 ***(Théorème d'arrêt)*** *Si X est une martingale et si σ et τ sont deux temps d'arrêt bornés tels que $\sigma \leq \tau$, alors, $\mathbb{E}(X_\tau|F_\sigma) = X_\sigma$ $\mathbb{P}-p.s.$*

Rappelons aussi qu'un processus X adapté et intégrable est une martingale si et seulement si, pour tout temps d'arrêt borné τ, $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

Théorème 1.2.2 *Soit X une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–martingale, alors X possède une modification càdlàg , i.e. dont les trajectoires sont continues à droite et possèdent des limites à gauche.*

Définition 1.2.3 ***(Martingale locale)*** *Soit X un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–adapté, à trajectoires continues à droite. On dit que X est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ telle que $lim_{n\to\infty}\tau_n = +\infty$ $\mathbb{P}-p.s$ et, pour tout n, $X^{\tau_n}\mathbf{1}_{\tau_n>0}$ est une martingale.*

Théorème 1.2.3 *Soit X une martingale locale continue. Il existe un unique processus croissant et continu $\langle X, X\rangle$, nul en 0, tel que $X^2 - \langle X, X\rangle$ soit une martingale locale.*

Proposition 1.2.2 *Soit X une martingale locale continue. Il y a équivalence entre*

1) $X_0 \in L^2$ et $E[\langle X, X\rangle_\infty] < \infty$,

2) X est une martingale bornée dans L^2.

1.3 Intégrale stochastique et formule d'Itô

Dans cette section, T est un réel positif, on cherche à définir l'intégrale

$$I(\theta) = \int_0^T \theta(s)\, dW(s), \tag{1.1}$$

où $(\theta(t))_{t\geq 0}$ est un certain processus et $(W(t))_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien. Le probléme de donner un sens à l'élément différentiel $dW(s)$ puisque la fonction $s \longmapsto W(s)$ n'est pas dérivable.

1.3.1 L'intégrale de Wiener

On note

$$L^2([0,T], \mathbb{R}) = \left\{ \theta : [0,T] \longmapsto \mathbb{R} \text{ tel que, } \int_0^T |\theta(s)|^2\, ds < \infty \right\}.$$

L'intégrale de Wiener est une intégrale du type (1.1) avec θ une fonction déterministe, c'est à dire ne dépendant pas de w.

Si θ^n est une fonction *en escalier déterministe* de la forme

$$\theta^n(t) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i(t)\, \mathbf{1}_{\left[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}\right]},$$

où, $p_n \in \mathbb{N}$, les α_i sont réels et $\left\{t_i^{(n)}\right\}$ une suite croissante de $[0,T]$. On définit intégrale de Wiener par

$$I(\theta^n) = \int_0^T \theta^n(s)\, dW(s) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \left(W(t_{i+1}) - W(t_i)\right).$$

Par le caractère gaussien du mouvement Brownien et l'indépendance de ses accroissements, la varaible alétoire $I(\theta^n)$ est une varaible gaussienne d'espérance nulle et de variance

$$\begin{aligned} Var\left(I\left(\theta^n\right)\right) &= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 Var\left(W\left(t_{i+1}\right) - W\left(t_i\right)\right), \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 \left(t_{i+1} - t_i\right), \\ &= \int_0^T \left(\theta^n\left(s\right)\right)^2 ds. \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1 *On remarque que $\theta \longmapsto I(\theta)$ est une fonction linéaire, de plus, si f et g sont deux fonctions en escalier, on a $\mathbb{E}\left(I(f)\,I(g)\right) = \int_0^T f(s)\,g(s)\,ds$. On parle alors de la propriété d'isométrie de l'intégrale de Wiener.*

Soit maintenant $\theta \in L^2\left([0,T],\mathbb{R}\right)$. Il existe donc une suite de fonction en escalier $\{\theta^n, n \geq 0\}$ qui converge dans $L^2\left([0,T],\mathbb{R}\right)$ vers θ. D'après le paragraphe précédent on peut construire les intégrales de Wiener $I(\theta^n)$ qui sont des gaussiennes centrées qui, par isométrie forment une suite de Cauchy. L'espace $L^2\left([0,T],\mathbb{R}\right)$ étant complet, cette suite converge vers une varaible aléatoire gaussienne notée $I(\theta)$. On peut montrer que la limite ne dépend pas du choix de la suite $\{\theta^n, n \geq 0\}$. $I(\theta)$ s'appelle intégrale de Wiener de θ par rapport à $(W(t))_{t\in\mathbb{R}}$.

1.3.2 L'intégrale stochastique ou intégrale d'Itô

On cherche maintenant à définir l'intégrale (1.1) , la construction de $I(\theta)$ se fait par discrétisation comme dans le cas de l'intégrale de Wiener.

Considérons tout dabord Les processus étagés du type

$$\theta^n(t) = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \mathbf{1}_{\left[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}\right]}(t), \tag{1.2}$$

où, $p_n \in \mathbb{N}$, $\left\{t_i^{(n)}\right\}$ une suite croissante de $[0,T]$, et $\theta_i \in L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P}\right)$ pour tout $i = 0, ..., p_n$. On défini $I(\theta^n)$ par

$$I\left(\theta^n\right) = \sum_{i=1}^{p_n} \theta_i \left(W\left(t_{i+1}\right) - W\left(t_i\right)\right).$$

On peut vérifier que $\mathbb{E}\left(I\left(\theta^{n}\right)\right)=0$, et $Var\left(I\left(\theta^{n}\right)\right)=\mathbb{E}\int_{0}^{T}\left(\theta^{n}\left(s\right)\right)^{2}ds.$

Soit Υ l'espace des processus θ càglàd (c'est à dire, continue à gauche limité à droite) , $\mathcal{F}_{t}-$adapté tel que

$$\left\|\theta\right\|^{2}=\mathbb{E}\left(\int_{0}^{T}\left|\theta\left(s\right)\right|^{2}ds\right)<\infty.$$

On peut définir $I\left(\theta\right)$ pour tout $\theta\in\Upsilon$, on approche θ par un suite de processus étagés donnée par (1.2) , la limite étant dans $L^{2}\left(\Omega,\left[0,T\right]\right)$. L'intégrale $I\left(\theta\right)$ est alors $\lim I\left(\theta^{n}\right)$ avec

$$\mathbb{E}\left(I\left(\theta\right)\right)=0,$$

et

$$Var\left(I\left(\theta\right)\right)=\mathbb{E}\left(\int_{0}^{T}\theta^{2}\left(s\right)ds\right).$$

Définition 1.3.1 ***(processus d'Itô)*** *On appelle processus d'Itô un processus* $\left(X\left(t\right)\right)_{0\leq t\leq T}$ *à valeurs réelles tel que* $\forall 0\leq s\leq t,$

$$X\left(t\right)=X\left(0\right)+\int_{0}^{t}b\left(s\right)ds+\int_{0}^{t}\sigma\left(s\right)dW\left(s\right),\ \mathbb{P}-p.s.$$

où, $X\left(0\right)$ est $\mathcal{F}_{0}$–mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions

$$\int_{0}^{T}\left|b\left(s\right)\right|ds<\infty\text{ et }\int_{0}^{T}\left\|\sigma\left(s\right)\right\|^{2}ds<\infty,\text{ où }\left\|\sigma\right\|=trace\left(\sigma\sigma^{*}\right).$$

Le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

Théorème 1.3.1 ***(Première formule d'Itô)*** *Soit* $\left(X\left(t\right)\right)_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô, soit* $f:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ *de classe* C^{2}*. Alors*

$$f(X\left(t\right))=f(X\left(0\right))+\int_{0}^{t}f_{x}(X\left(s\right))dX\left(s\right)+1/2\int_{0}^{t}f_{xx}(X\left(s\right))\sigma^{2}\left(s\right)ds.$$

Théorème 1.3.2 ***(Deuxième formule d'Itô)*** *Soit* $\left(X\left(t\right)\right)_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô, soit* f *une* *fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x. On a*

$$f(t, X(t)) = f(0, X_0) + \int_0^t f_t(s, X(s))ds + \int_0^t f_x(s, X(s))dX(s) + 1/2 \int_0^t f_{xx}(s, X(s))\sigma^2(s)\,ds.$$

Proposition 1.3.1 ***(Formule d'intégration par parties)*** *Soient $(X(t))_{0\leq t\leq T}$, $(Y(t))_{0\leq t\leq T}$ deux processus d'Itô, alors*

$$X(t)\,Y(t) = X(0)\,Y(0) + \int_0^t X(s)\,dY(s) + \int_0^t Y(s)\,dX(s) + \langle X, Y\rangle_t\,.$$

1.4 Existence et unicité de solution des équations différentielles stochastiques

Le but des équations différentielles stochastiques est de fournir un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par une bruit aléatoire. Considérons

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma dW_t \text{ avec } X_0 = y.$$

Ou encore sous forme intégrale

$$X_t = y + \int_0^t b(s, X_s)\,ds + \sigma W_t.$$

On généralise cette équation en autorisant à σ dépendre de l'état à l'instant t

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t \text{ avec } X_0 = y.$$

Soit encore sous la forme intégrale

$$X_t = y + \int_0^t b(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,dW_s.$$

Remarquant que le mouvement brownien $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus dont les trajectoires sont $\mathbb{P}-p.s.$ à variations infinies, et de plus elles sont nul part différentiables, c'est à dire le terme dW_t dans l'équation précédente n'a aucun sens en analyse fonctionnelle déterministe. Et donc l'intégrale $\int_0^t \sigma(X_s)\, dW_s$ ne peut pas être considérée comme une intégrale de Riemann-Stieljes ou Lebesgue-Stieljes, par conséquent l'équation précédente ne peut pas être interprétée comme une équation différentielle ordinaire. La quantité $\int_0^t \sigma(X_s)\, dW_s$ s'appelle une intégrale stochastique. On continue de généraliser l'équation tout en autorisant σ et b dépendent du temps t, on se place donc dans un cadre vectoriel. Elle se représente sous la forme suivante

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t, \\ X_0 = y. \end{cases}$$

On se place toujours sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et on se donne W un MB d-dimensionnel sur cet espace. On considère également une variable aléatoire y, de carré intégrable, et indépendante du MB W. On considère la filtration définie, pour tout t positif, par $\mathcal{F}_t = \sigma\{\sigma\{y, W_s; s \leq t\} \cup \mathbb{N}\}$. Soit T un réel strictement positif. On considère deux fonctions $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ qui sont mesurables. On cherche à résoudre l'équation différentielle stochastique

$$X_t = y + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s \tag{1.3}$$

Le coefficient b s'appelle la dérive tandis que la matrice $\sigma\sigma^t$ s'appelle la matrice de diffusion.

Définition 1.4.1 *Une solution (forte) de l'EDS (1.3) , est un processus continu tel que*

1) X est progressivement mesurable,

2) $\mathbb{P}-p.s.$ $\int_0^T \left\{|b(s, X_s)| + \|\sigma(s, X_s)\|^2\right\} ds < \infty$, où $\|\sigma\| = trace(\sigma\sigma^*)$.

3) $\mathbb{P}-p.s.$, on a : $X_t = y + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s$, $0 \leq t \leq T$.

On notera S^2 l'espace de banach constitué des processus X, progressivement mesurable, tels que $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right] < \infty$ muni de la norme $\|X\| := E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X|^2\right]^{\frac{1}{2}}$, et S_c^2 le sous espace de S^2

formé des processus continus. Notes que deux processus indistinguables sont identifiés et par abus d'écriture l'espace quotient est noté de la même façon.

Lemme 1.4.1 ***(Lemme de Gronwall)*** *Soit $\nu : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t,*

$$\nu(t) \leq a + b \int_0^t \nu(s)\, ds, \; a \in \mathbb{R}, b \geq 0.$$

Alors, pour tout t,

$$\nu(t) \leq a \exp(bt).$$

Le but de cette section est d'énoncer et de démontrer le théorème d'éxistence et d'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques de type (1.3) .

1.4.1 Théorème d'éxistence et d'unicité

Quelles conditions doit on appliquer sur b et σ pour avoir l'éxistence et l'unicité d'une solution de EDS (1.3) ?

Le résultat classique d'Itô si la réponse de la question précédente est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.4.1 *On suppose, la condition initiale X_0 est de carré intégrable, et qu'il existe K tel que pour tout $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$*

i) $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$ (condition de Lipschitz),

ii) $|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K^2\left(1+|x|^2\right)$ (condition de croissance linéaire).

Alors il existe une unique solution de (1.3) à trajectoires continues pour $t \leq T$. De plus cette solution vérifie $\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right) < \infty$.

Remarque 1.4.1 *La premiére condition nous assure l'existence et l'unicité de la solution l'équation (1.3) . La deuxième condition nous assure que le processus n'explose pas en temps fini. De plus si cette condition n'est pas vérifiée, l'équation (1.3) admettra une solution unique mais seulement jusqu'au temps de l'explosion.*

Chapitre 2

Discrétisation des équations différentielles stochastiques

Dans cette section, $(W_t, t \geq 0)$ désigne un mouvement Brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ sur $\left(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ (i.e. chaque composante est un mouvement Brownien standard réel et ces mouvements Browniens réels sont indépendants). Soit $X_0 = y$ une v.a. $\mathcal{F}_0$-mesurable de carré intégrable.

On fixe $T > 0$. On considère deux fonctions

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}, \text{ et } b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Considérons l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t &= \sigma(t, X_t)dW_t + b(t, X_t)dt, \\ X_0 &= y. \end{cases} \tag{2.1}$$

2.1 Le schéma d'Euler

On subdivise l'intervalle $[0,T]$ en N sous-intervalles de même longueur et pour $k \in \{0,\dots,N\}$ on pose $t_k = \dfrac{kT}{N}$. Le schéma d'Euler consiste a discrétiser l'EDS

$$dX_t = \sigma\left(t, X_t\right) dW_t + b\left(t, X_t\right) dt,\ X_0 = y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

suivant la grille $(t_k)_k$ en posant

$$\begin{cases} \overline{X}_0 = y, \\ \forall 0 \leq k \leq N-1,\ \overline{X}_{t_{k+1}} = \overline{X}_{t_k} + \sigma\left(t_k, \overline{X}_{t_k}\right)\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right) + b\left(t_k, \overline{X}_{t_k}\right)\left(t_{k+1} - t_k\right). \end{cases} \tag{2.3}$$

Pour passer d'un instant de discrétisation au suivant on fige les coefficients de diffusion et de dérive à leur valeur au début de l'intervalle. Afin d'implémenter ce schéma, il suffit de savoir simuler les accroissements $\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)_{0\leq k \leq N-1}$ qui sont $i.i.d.$ suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}_d\left(0, \dfrac{T}{N} I_d\right)$ où I_d désigne la matrice identité de dimension d. Pour effectuer les preuves de convergence, il est commode d'introduire le schéma d'Euler en temps continu défini par

$$\forall 0 \leq k \leq N-1,\ \forall t \in \left[t_k, t_{k+1}\right],\ \overline{X}_t = \overline{X}_{t_k} + \sigma\left(t_k, \overline{X}_{t_k}\right)\left(W_t - W_{t_k}\right) + b\left(t_k, \overline{X}_{t_k}\right)\left(t - t_k\right).$$

Si pour $s \in [0,T]$, on note $\tau_s = \lfloor \frac{Ns}{T} \rfloor \times \frac{T}{N}$ le dernier instant de discrétisation avant s, on a

$$d\overline{X}_t = \sigma(\tau_t, \overline{X}_{\tau_t})dW_t + b(\tau_t, \overline{X}_{\tau_t})dt,\ \overline{X}_0 = y. \tag{2.4}$$

où

$$\overline{X}_t = \overline{X}_0 + \int_0^t b(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s})ds + \int_0^t \sigma(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s})dW_s \tag{2.5}$$

2.1.1 Vitesse de convergence forte

Théorème 2.1.1 *On suppose que les coefficient σ, b satisfont l'hypothèse de Lipshitze et que*

$$\exists \alpha, C \succ 0,\ \forall (s,t) \in [0,T],\ \ |\sigma(t,x) - \sigma(s,x)| + |b(t,x) - b(s,x)| \leq C(1+|x|)(t-s)^{\alpha}.$$

On note $\overline{X}^N$ le schéma d'Euler avec N pas de temps défini plus haut. Alors pour $\mu = \min\left(\alpha, \frac{1}{2}\right)$

$$\forall p \geq 1, \mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|X_t - \overline{X}_t^N\right|^{2p}\right) \leq \frac{C}{N^{2\mu p}},$$

où la constante C ne dépend pas de N. En outre si $\gamma < \mu$, $N^{\gamma}\sup_{t\leq T}\left|X_t - \overline{X}_t^N\right|$ converge presque sûrement vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

Remarque 2.1.1 *On a*

$$\left\|\sup_{t\leq T}\left|X_t - \overline{X}_t^N\right|\right\|_{2p} = \left(\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|X_t - \overline{X}_t^N\right|^{2p}\right)\right)^{\frac{1}{2p}} \leq \frac{C}{N^{\mu}},$$

et on dit que la vitesse forte du schéma d'Euler est en $\dfrac{1}{N^{\mu}}$. En particulier lorsque les coefficients de l'EDS ne dépendent pas du temps ou que $\alpha \geq \dfrac{1}{2}$, la vitesse forte est en $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$.

Nous allons donner la démonstration de l'inégalité

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|X_t - \overline{X}_t^N\right|^{2}\right) \leq \frac{C}{N^{2\mu}},$$

qui correspond au cas $p = 1$.

Preuve. On a pour tout $u \in [0,T]$

$$\begin{cases} X_u = y + \int_0^u b(s,X_s)ds + \int_0^u \sigma(s,X_s)dW_s, \\ \overline{X}_u = y + \int_0^u b(\tau_s,\overline{X}_{\tau_s})ds + \int_0^u \sigma(\tau_s,\overline{X}_{\tau_s})dW_s. \end{cases}$$

alors

$$X_u - \overline{X}_u = \int_0^u \left(\sigma\left(s, X_s\right) - \sigma\left(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}\right)\right) dW_s + \int_0^u \left(b\left(s, X_s\right) - b\left(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}\right)\right) ds.$$

Donc pour $t \in [0, T]$, en utilisant l'inégalité de Doob pour l'intégrale stochastique et celle de Cauchy-Schwarz pour l'intégrale classique, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup_{u \le t} \left|X_u - \overline{X}_u\right|^2\right) \le\ & 2\mathbb{E}\left(\sup \left|\int_0^u \sigma\left(s, X_s\right) - \sigma\left(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}\right) dW_s\right|^2\right) \\ & + 2\mathbb{E}\left(\sup_{u \le t} \left|\int_0^u b\left(s, X_s\right) - b\left(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}\right) ds\right|^2\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

en utilisant l'inégalité Hölder pour

$$\mathbb{E}\left(\sup_{u \le t} \left|\int_0^u b\left(s, X_s\right) - b\left(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}\right) ds\right|^2\right) \le t\mathbb{E}\left(\int_0^t \left|b\left(s, X_s\right) - b\left(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}\right)\right|^2 ds\right),$$

et l'isométré d'Ito

$$2\mathbb{E}\left(\sup \left|\int_0^u \sigma\left(s, X_s\right) - \sigma\left(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}\right) dW_s\right|^2\right) \le C\mathbb{E}\left(\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s\right) - \sigma\left(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}\right)\right|^2 ds\right),$$

et obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup_{u \le t} \left|X_u - \overline{X}_u\right|^2\right) \le\ & C\mathbb{E}\left(\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s\right) - \sigma\left(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}\right)\right|^2 ds\right) \\ & + 2t\mathbb{E}\left(\int_0^t \left|b\left(s, X_s\right) - b\left(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}\right)\right|^2 ds\right). \end{aligned}$$

Avec les hypothèses de régularité faites sur les coefficients de l'EDS, on a

$$\begin{aligned} \left|\sigma\left(s, X_s\right) - \sigma\left(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}\right)\right|^2 \le\ & 3\left|\sigma\left(s, X_s\right) - \sigma\left(s, X_{\tau_s}\right)\right|^2 + 3\left|\sigma\left(s, X_{\tau_s}\right) - \sigma\left(\tau_s, X_{\tau_s}\right)\right|^2 \\ & + 3\left|\sigma\left(\tau_s, X_{\tau_s}\right) - \sigma\left(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}\right)\right|^2 \\ \le\ & C\left(\left|X_s - X_{\tau_s}\right|^2 + \left(1 + \left|X_{\tau_s}\right|\right)^2 \left(s - \tau_s\right)^{2\alpha} + \left|X_{\tau_s} - \overline{X}_{\tau_s}\right|^2\right). \end{aligned}$$

Comme

$$(X_s - X_{\tau_s}) = \int_{\tau_s}^{t} b(u, X_u)du + \int_{\tau_s}^{t} \sigma(u, X_u)dW_u, \text{ pour } \tau_s \leq s,$$

en utilisant l'inégalité Hölder et l'isométré d'Ito, on a

$$\begin{aligned}
E\left(|X_s - X_{\tau_s}|^2\right) &\leq 2E\left(\left|\int_{\tau_s}^{s} \sigma\left(u, X_u\right) dW_u\right|^2\right) + 2E\left(\left|\int_{\tau_s}^{s} b\left(u, X_u\right) du\right|^2\right) \\
&\leq C \int_{\tau_s}^{s} E\left(|\sigma\left(u, X_u\right)|^2\right) du + 2\left(s - \tau_s\right) \int_{\tau_s}^{s} E\left(|b\left(u, X_u\right)|^2\right) du \\
&\leq C\left(1 + \left(s - \tau_s\right)\right) \int_{\tau_s}^{s} E\left(1 + |X_u|^2\right) du \\
&\leq C\left(1 + \left(s - \tau_s\right)\right)\left(1 + |y|^2\right)\left(\tau_s - s\right),
\end{aligned}$$

et comme $0 \leq s - \tau_s \leq \frac{T}{N}$, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left(\left|\sigma\left(s, X_s\right) - \sigma\left(\tau_s, \overline{X}_{\tau_s}\right)\right|^2\right) \leq C\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^{2\alpha}} + \mathbb{E}\left(\sup_{u \leq s}\left|X_u - \overline{X}_u\right|^2\right)\right).$$

Cette inégalité reste vraie en remplaçant σ par b au membre de gauche et avec (2.4) , on en déduit

$$\mathbb{E}\left(\sup_{u \leq s}\left|X_u - \overline{X}_u\right|^2\right) \leq C\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N^{2\alpha}} + \int_0^t \mathbb{E}\left(\sup_{u \leq s}\left|X_u - \overline{X}_u\right|^2\right) ds\right).$$

En pratique, nous intéressons à la convergence de l'espérance d'une fonctionnelle de $(\overline{X}_T^N)$ vers la même espérance calculée en (X_T) plutôt qu'à la vitesse forte du schéma. Dans un premier temps, on peut déduire le corollaire suivant du Théorème (2.1.1) qui donne un premier résultat sur la convergence faible du schéma d'Euler.

2.1.2 Vitesse de convergence faible

Corollaire 2.1.1 *(Convergence faible).Pour* $\alpha \geq \frac{1}{2}$ *et si* f *est une fonction lipschitzienne de constante de lipschitz* K*, le théorème* (2.1.1) *assure que*

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}(f(X_T)) - \mathbb{E}(f(\overline{X}_T))\right| &\leq \mathbb{E}\left(\left|f(X_T) - f(\overline{X}_T)\right|\right) \leq \sqrt{\mathbb{E}\left(\left|f(X_T) - f(\overline{X}_T)\right|^2\right)} \\ &\leq K\sqrt{\mathbb{E}\left(\left|X_T - \overline{X}_T\right|^2\right)} \leq \frac{C}{N^{\mu}}.\end{aligned}$$

Mais la première inégalité qui consiste à majorer la valeur absolue de la différence des espérances par l'espérance de la valeur absolue des espérances est trés grossière. En fait la question de savoir si $\mathbb{E}(f(\overline{X}_T))$ est proche de $\mathbb{E}(f(X_T))$ revient à se demander si la loi de $\overline{X}_T$ est proche de celle de X_T. On va donc s'intéresser au problème de la convergence en loi du schéma d'Euler. La convergence en loi est une convergence entre des fonctions tests comme la fonction f introduite plus haut. C'est pourquoi on parle de la convergence faible.

2.2 Le schéma de Milshtein

Il semble plus intéressant d'essayer d'améliorer l'ordre de convergence forte du schéma d'Euler. Le schéma de Milshtein est obtenu en rajoutant des termes au schéma d'Euler et sa vitesse de convergence forte est en $\dfrac{1}{N}$ au lieu de $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ pour le schéma d'Euler (cas $\alpha = \dfrac{1}{2}$ dans les hypothéses du théorème 2.1.1.).

2.2.1 Le cas de la dimension 1

On suppose $n = d = 1$ et on se place dans le cas homogène en temps $\sigma(t,x) = \sigma(x)$ et $b(t,x) = b(x)$. On souhaite discrétiser l'EDS

$$dX_t = \sigma\left(X_t\right)dW_t + b\left(X_t\right)dt,\ \ X_0 = y \in \mathbb{R}.$$

Sur l'intervalle de temps $[t_k, t_{k+1}]$,

$$X_t = X_{t_k} + \int_{t_k}^{t} \sigma(X_s)\, dW_s + \int_{t_k}^{t} b(X_s)\, ds.$$

Comme

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\int_{t_k}^{t} \sigma(X_s)\, dW_s\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left(\int_{t_k}^{t} \sigma^2(X_s)\, ds\right) \sim C(t-t_k), \\ \mathbb{E}\left[\left(\int_{t_k}^{t} b(X_s)\, ds\right)^2\right] &\leq (t_k - t)\, \mathbb{E}\left(\int_{t_k}^{t} b^2(X_s)\, ds\right) \sim C(t-t_k)^2, \end{aligned}$$

on voit que le terme d'intégrale stochastique est dominant lorsque le pas de temps est petit. Donc pour améliorer la convergence du schéma, il faut améliorer la discrétisation de ce terme d'intégrale stochastique, comme dans la présentation du schéma d'Euler, on a utilisé l'approximation

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma(X_s)\, dW_s \sim \sigma(X_{t_k})\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right).$$

Pour fixer les idées, on se place en dimension 1 et on suppose que $b = 0$. Alors, pour $s \in [t_k, t_{k+1}]$,

$$\begin{aligned} \sigma(X_s) &= \sigma\left(X_{t_k} + \int_{t_k}^{s} \sigma(X_s)\, dW_s\right) \\ &\simeq \sigma\left(X_{t_k} + \sigma(X_{t_k})(W_s - W_{t_k})\right) \\ &\simeq \sigma(X_{t_k}) + \sigma'(X_{t_k})\, \sigma(X_{t_k})(W_s - W_{t_k}). \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'égalité

$$\int_{t_k}^{t} (W_s - W_{t_k})\, dW_s = \frac{1}{2}\left\{(W_t - W_{t_k})^2 - (t - t_k)\right\},$$

ce qui conduit à l'approximation

$$\begin{aligned}\int_{t_k}^{t} \sigma\left(X_s\right) dW_s &\simeq \sigma\left(X_{t_k}\right) \int_{t_k}^{t} dW_s + \sigma'\left(X_{t_k}\right) \sigma\left(X_{t_k}\right) \int_{t_k}^{t} \left(W_s - W_{t_k}\right) dW_s \\ &\simeq \sigma\left(X_{t_k}\right)\left(W_t - W_{t_k}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sigma'\left(X_{t_k}\right)\left(\left(W_t - W_{t_k}\right)^2 - \left(t - t_k\right)\right).\end{aligned}$$

Le terme de dérive b ayant une contribution inférieure dans l'erreur d'approximation par rapport au terme de diffusion, il n'est pas nécessaire de le corriger. Pour $d = 1$, on obtient donc le schéma d'approximation suivant

$$\begin{cases} \widetilde{X}_0 = y \text{ et pour } k \in \{0, \ldots, N-1\},\ \forall t \in \left[t_k, t_{k+1}\right], \\ \widetilde{X}_t = \widetilde{X}_{t_k} + \sigma\left(\widetilde{X}_{t_k}\right)\left(W_t - W_{t_k}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sigma'\left(\widetilde{X}_{t_k}\right)\left(\left(W_t - W_{t_k}\right)^2 - \left(t - t_k\right)\right) + b\left(\widetilde{X}_{t_k}\right)\left(t - t_k\right). \end{cases}$$

Pour générer le schéma aux instants de discrétisation $\left(\widetilde{X}_{t_k}\right)_{0 \le k \le N}$, il suffit à nouveau de générer les accroissments $\left(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}\right)_{0 \le k \le N-1}$ qui sont *i.i.d.* suivant la loi gaussienne $N_1\left(0, \frac{T}{N}\right)$. La vitesse forte du schéma est donnée par le résultat suivant que nous ne démontrerons pas.

Théorème 2.2.1 *On suppose que les coefficients σ et b sont C^2 à dérivées bornées. Alors*

$$\forall p \ge 1, \sup_{t \le T} \mathbb{E}\left(\left|X_T - \widetilde{X}_T^N\right|^{2p}\right) \le \frac{C}{N^{2p}}$$

où la constante C ne dépend pas de N. En outre $\forall \gamma < 0$, $N^{\gamma} \max_{0 \le k \le N}\left|X_{\frac{kT}{N}} - \widetilde{X}_{\frac{kT}{N}}^N\right|$ converge presque sûrement vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

Remarque 2.2.1 *Lorsque la fonction σ est constante, le schéma de Milshtein coincide avec le schéma d'Euler et la vitesse forte de ce dernier est donc en $\frac{C}{N}$.*

2.2.2 Le cas général

On effectue la même correction qu'en dimension 1 mais les notations sont plus lourdes. Pour $s \in [t_k, t_{k+1}]$ et $(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,d\}$, on a

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}\left(X_s\right) &\simeq \sigma_{ij}\left(X_{t_k}\right) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_l}\left(X_{t_k}\right)\left(X_s^l - X_{t_k}^l\right) \\ &\simeq \sigma_{ij}\left(X_{t_k}\right) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_l}\left(X_{t_k}\right)\sum_{m=1}^{d}\sigma_{lm}\left(X_{t_k}\right)\left(W_s^m - W_{t_k}^m\right).\end{aligned}$$

On introduit les notations

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} \sigma_{1j} \\ \vdots \\ \sigma_{nj} \end{pmatrix} \text{ et } \partial\sigma_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_{nj}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \sigma_{nj}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

pour la j-ième colonne σ de et pour la matrice $\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_l}\right)_{1\leq i,l\leq n}$. Cela permet de récrire le développement précédent sous forme vectorielle

$$\sigma_j\left(X_s\right) \simeq \sigma_j\left(X_{t_k}\right) + \sum_{m=1}^{d} \partial\sigma_j\sigma_m\left(X_{t_k}\right)\left(W_s^m - W_{t_k}^m\right).$$

Dans $\sigma\left(X_s\right)dW_s = \sum_{j=1}^{d}\sigma_j\left(X_s\right)dW_s^j$, la j-ème colonne de σ vient multiplier dW_s^j. Donc

$$\sigma\left(X_s\right)dW_s \simeq \sigma\left(X_{t_k}\right)dW_s + \sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{m=1}^{d}\partial\sigma_j\sigma_m\left(X_{t_k}\right)\left(W_s^m - W_{t_k}^m\right)\right)dW_s^j.$$

Le schéma de Milshtein s'écrit donc

$$\begin{cases} X_0 = y \text{ et pour } k \in \{0,\dots,N-1\},\ \forall t \in [t_k, t_{k+1}], \\ \widetilde{X}_t = \widetilde{X}_{t_k} + \sigma\left(\widetilde{X}_{t_k}\right)\left(W_t - W_{t_k}\right) + \sum_{j,m=1}^{d}\partial\sigma_j\sigma_m\left(\widetilde{X}_{t_k}\right)\int_{t_k}^{t}\left(W_s^m - W_{t_k}^m\right)dW_s^j + b\left(\widetilde{X}_{t_k}\right)\left(t - t_k\right). \end{cases} \tag{2.7}$$

Pour implémenter en pratique le schéma, on rencontre le problème suivant : pour $j \neq m$, on ne sait pas simuler $\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(W_s^m - W_{t_k}^m\right)dW_s^j$. Le seul cas où on sait mettre en oeuvre le schéma est celui où la condition de commutativité suivante est satisfaite $\forall j, m \in \{1, \ldots, d\}$, $\partial\sigma_j\sigma_m = \partial\sigma_m\sigma_j$

$$i.e.\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_l}(x)\,\sigma_{lm}(x) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{im}}{\partial x_l}(x)\,\sigma_{lj}(x)\,.$$

En effet comme pour $m \neq j$,

$$\int_{t_k}^{t} \left(W_s^m - W_{t_k}^m\right) dW_s^j + \int_{t_k}^{t} \left(W_s^j - W_{t_k}^j\right) dW_s^m = \left(W_t^m - W_{t_k}^m\right) - \left(W_t^j - W_{t_k}^j\right),$$

sous la condition de commutativité

$$\begin{aligned}
\sum_{j,m=1}^{d} \partial\sigma_j\sigma_m\left(\widetilde{X}_{t_k}\right)\int_{t_k}^{t}\left(W_s^m - W_{t_k}^m\right)dW_s^j &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\partial\sigma_j\sigma_j\left(X_{t_k}\right)\left(\left(W_t^j - W_{t_k}^j\right)^2 - (t-t_k)\right)\\
&\quad + \sum_{j=1}^{d}\sum_{m=1}^{j-1}\partial\sigma_j\sigma_m\left(\widetilde{X}_{t_k}\right)\left(W_t^m - W_{t_k}^m\right)\left(W_t^j - W_{t_k}^j\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j,m=1}^{d}\partial\sigma_j\sigma_m\left(\widetilde{X}_{t_k}\right)\left(W_t^m - W_{t_k}^m\right)\left(W_t^j - W_{t_k}^j\right)\\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\partial\sigma_j\sigma_j\left(X_{t_k}\right)(t-t_k)\,.
\end{aligned}$$

Et le schéma ne fait plus intervenir que les accroissements $(W_t - W_{t_k})$.

Que la condition de commutativité soit satisfaite ou non, le résultat de convergence énoncé en dimension 1 dans le théorème (2.2.1) reste valable.

Chapitre 3

Schéma d'approximation des solutions des équations différentielles stochastiques rétrogrades

L'objectif de ce chapitre est d'utédier l' approximation des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) couplée par une EDS, définie pour tout $0 \leq t \leq T$ par

$$\begin{cases} X_t = x + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dW_s, \\ Y_t = g\left(X_T\right) + \int_t^T f\left(s, X_s, Y_s, Z_s\right) dW_s - \int_t^T Z_s dW_s, \end{cases}$$

La composante X sera approximée par le schéma d'Euler ou de Milshtein. La simulation du couple (Y, Z) est plus délicate. Nous étudions deux schémas d'approximation (schéma de pseudo approximation puis un schéma de discrétisation explicite).

Notation 3.0.1 *Soit* $\pi : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ *une partition régulière de l'intervalle de temps* $[0, T]$ *telle que* $|\pi| = \dfrac{T}{n}$ *et* $t_i = i|\pi|$ *pour* $i = 0, ..., n$. *Notons par :*

$$\triangle W_{t_{i+1}} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$$

et

$$\mathbb{E}_i = \mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_{t_i}]$$

pour tous i. Enfin, dans la suite C indiquera une constante générique indépendante de π qui peut prendre des valeures differentes de ligne en ligne.

Nous utiliserons les hypothèses suivantes

H1) $\sigma \in \mathcal{C}_b^{0,2}([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^*)$ et $b \in \mathcal{C}_b^{0,1}([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et tous les dérivés (par rapport à x) sont uniformément limités par une constante commune $K > 0$. En autre, il existe une constante $k > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,T]$

$$k \leq |\sigma(t,x)| \leq K \text{ et } |b(t,0)| \leq K$$

H2) Les fonctions $f \in \mathcal{C}([0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont uniformément $K - Lipschitz$, i.e $\forall x, x', y, y', z, z' \in \mathbb{R}$ et $\forall t, t' \in [0,T]$

$$|f(t,x,y,z) - f(t',x',y',z')| \leq K\left(|t-t'| + |x-x'| + |y-y'| + |z-z'|\right)$$

et

$$|g(x) - g(x')| \leq K\left(|x-x'|\right).$$

D'après ces hypothèses, il existe un processus unique adapté (X, Y, Z) solution de l'EDSR de sorte que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T} |X_t|^2 + \sup_{0\leq s\leq T} |Y_t|^2 + \int_0^T |Z_s|^2\, ds\right) \leq C\left(1 + |x|^2\right). \tag{3.1}$$

Les estimations suivantes sont standard, voir par exemple [19]

$$\max_{1\leq i\leq n} \sup_{t\in(t_{i-1},t_i]} \mathbb{E}\left(\left|X_t - X_{t_{i-1}}\right|^2 + \left|Y_t - Y_{t_{i-1}}\right|^2\right) \leq C\left(1 + |x|^2\right)|\pi|, \tag{3.2}$$

et

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\left|Z_s - Z_{t_{i-1}}\right|^2 - \left|Z_s - Z_{t_i}\right|^2\right) ds \leq C\left(1 + |x|^2\right)|\pi|. \tag{3.3}$$

Pour commencer, définissons pour $0 < t < r < T$ le processus

$$N_r^t = \frac{1}{r-t}\int_t^r \sigma^{-1}(s, X_s)\nabla X_s dW_s (\nabla X_t)^{-1},$$

où ∇X est la solution unique de l'EDS linéaire suivante

$$\nabla X_t = 1 + \int_0^t \partial_x b(s, X_s)\nabla X_s ds + \int_0^t \partial_x \sigma(s, X_s)\nabla X_s dW_s.$$

On note que ∇X est inversible et

$$\begin{aligned}(\nabla X_t)^{-1} = 1 - &\int_0^t \left(\partial_x b(s, X_s) - |\partial_x \sigma(s, X_s)|^2\right)(\nabla X_s)^{-1} ds \\ &- \int_0^t \partial_x \sigma(s, X_s)(\nabla X_s)^{-1} dW_s.\end{aligned}$$

En conséquence de ces notations, on dispose des estimations suivantes [17]

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}\left|N_r^t\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{C}{\sqrt{r-t}}, 0 \\ \mathbb{E}\left|N_{r_1}^t - N_{r_2}^t\right|^2 &\leq C\frac{|r_1 - r_2|}{(r_1 - t)(r_2 - t)},\end{aligned} \tag{3.4}$$

La formule de représentation peut s'écrire $\mathbb{P}-$presque sûrement d'après [16]

$$\begin{cases} Y_t = \mathbb{E}\left(g(X_T) + \displaystyle\int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s) ds \,|\mathcal{F}_t\right) \\ Z_t = \mathbb{E}\left(g(X_T) N_T^t + \displaystyle\int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s) N_s^t ds \,|\mathcal{F}_t\right)\sigma(t, X_t). \end{cases}$$

Remarque 3.0.2 *Une conséquence directe de la formule de représentation de la matrice Z est , Si les coditions **H1)** et **H2)** sont vérifiées, pour tout $p \geq 2$, il existe une constante $C_p > 0$ dépendant uniquement de T, K et p telle que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T}|Z_t|^P\right] \leq C_p(1 + |x|^p).$$

Voir [17] Lemma 2.5 pour la démonstration.

Maintenant, nous sommes prêts à donner les schémas d'approximation.

3.1 Schémas de rétro-approximation

3.1.1 Pseudo-discrétisation

Dans cette partie, nous considérons que la composante X sera approchée par le schéma classique d'Euler

$$\begin{cases} \bar{X}_0 = x, \\ \bar{X}_{t_{i+1}} = \bar{X}_{t_i} + b\left(t_i, \bar{X}_{t_i}\right)|\pi| + \sigma\left(t_i, \bar{X}_{t_i}\right) \triangle W_{t_{i+1}} \text{ pour tous } i = 0, ..., n-1, \end{cases}$$

Nous avons mis pour tous $t_i \leq t \leq t_{i+1}$

$$\bar{X}_t = \bar{X}_{t_i} + b\left(t_i, \bar{X}_{t_i}\right)(t - t_i) + \sigma\left(t_i, \bar{X}_{t_i}\right)(W_T - W_{t_i}),$$

et nous avons l'estimation suivante, pour tout $p \geq 2$

$$\mathbb{E}\left[\underset{0 \leq t \leq T}{sup}\left|\bar{X}_t\right|^p\right] < +\infty, \text{ et } \mathbb{E}\left[\underset{0 \leq t \leq T}{sup}\left|X_t - \bar{X}_t\right|^p\right] \leq C_p |\pi|^{\frac{p}{2}}. \tag{3.5}$$

Pour approximer la solution de l'EDS rétrograde, nous considérons le schéma de temps discret naturel

$$\begin{cases} \bar{Y}_{t_n} = g\left(\bar{X}_{t_n}\right), \text{ et pour } i = n-1, ..., 0, \\ \bar{Y}_{t_i} = \mathbb{E}_i\left[\bar{Y}_{t_{i+1}} + f\left(t_{i+1}, \bar{X}_{t_{i+1}}, \bar{Y}_{t_{i+1}}, \bar{Z}_{t_{i+1}}\right)|\pi|\right], \\ \bar{Z}_{t_i} = \mathbb{E}_i\left[\bar{Y}_{t_{i+1}} N^{t_i}_{t_{i+1}} + f\left(t_{i+1}, \bar{X}_{t_{i+1}}, \bar{Y}_{t_{i+1}}, \bar{Z}_{t_{i+1}}\right) N^{t_i}_{t_{i+1}} |\pi|\right] \sigma\left(t_i, \bar{X}_{t_i}\right), \end{cases}$$

et

$$\bar{Y}_{t_{i+1}} + f\left(t_{i+1}, \bar{X}_{t_{i+1}}, \bar{Y}_{t_{i+1}}, \bar{Z}_{t_{i+1}}\right)|\pi| = \bar{Y}_{t_i} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{Z}_s dW_s.$$

Nous définissons ensuite pour tous $t \in (t_i, t_{i+1})$

$$\begin{cases} \bar{Y}_t = \bar{Y}_{t_{i+1}} + f\left(t_{i+1}, \bar{X}_{t_{i+1}}, \bar{Y}_{t_{i+1}}, \bar{Z}_{t_{i+1}}\right)(t_{i+1} - t) - \int_t^{t_{i+1}} \tilde{Z}_s dW_s, \\ \bar{Z}_t = \bar{Z}_{t_i}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Le théorème suivant fournit les estimations d'erreur due à cette approximation

Théorème 3.1.1 *Il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de T et K telle que*

$$\underset{0 \leq t \leq T}{sup}\, \mathbb{E}\left[\left|Y_t - \bar{Y}_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|Z_t - \tilde{Z}_t\right|^2 dt\right] \leq C\left|\pi\right|.$$

Preuve. Nous désignons $\Theta_s = (X_s, Y_s, Z_s)$ et $\bar{\Theta}_s = (\bar{X}_s, \bar{Y}_s, \bar{Z}_s)$. De la formule d'Itô et de la propriété Lipschitz de f, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|Y_t - \bar{Y}_t\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^{t_{i+1}} \left|Z_s - \tilde{Z}_s\right|^2 ds \\
&= \mathbb{E}\left|Y_{t_{i+1}} - \bar{Y}_{t_{i+1}}\right|^2 \\
&+ 2\mathbb{E}\int_t^{t_{i+1}} \left(Y_s - \bar{Y}_s\right)\left(f\left(s, \Theta_s\right) - f\left(t_{i+1}, \bar{\Theta}_{t_{i+1}}\right)\right) ds, \\
&\leq \mathbb{E}\left|Y_{t_{i+1}} - \bar{Y}_{t_{i+1}}\right|^2 \\
&+ \frac{C}{\alpha}\mathbb{E}\int_t^{t_{i+1}} \left(\left|s - t_{i+1}\right|^2 + \left|X_s - X_{t_{i+1}}\right|^2 + \left|X_{t_{i+1}} - \bar{X}_{t_{i+1}}\right|^2\right) ds \\
&+ \alpha\mathbb{E}\int_t^{t_{i+1}} \left|Y_s - \bar{Y}_s\right|^2 ds + \frac{C}{\alpha}\mathbb{E}\int_t^{t_{i+1}} \left(\left|Y_s - Y_{t_{i+1}}\right|^2 + \left|Y_{t_{i+1}} - \bar{Y}_{t_{i+1}}\right|^2\right) ds \\
&+ \frac{C}{\alpha}\mathbb{E}\int_t^{t_{i+1}} \left(\left|Z_s - Z_{t_{i+1}}\right|^2 + \left|Z_{t_{i+1}} - \bar{Z}_{t_{i+1}}\right|^2\right) ds,
\end{aligned}$$

pour chaque $t \in (t_i, t_{i+1})$ et $\alpha > 0$. En appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons par (3.2)

$$\mathbb{E}\left|Y_t - \bar{Y}_t\right|^2 \leq \left(\left(1 + C\left|\pi\right|\right)\mathbb{E}\left|Y_{t_{i+1}} - \bar{Y}_{t_{i+1}}\right|^2 + \frac{C}{\alpha}\Lambda_i\right) e^{\alpha\left|\pi\right|}. \tag{3.7}$$

En particulier pour $t = t_i$, nous avons

$$\mathbb{E}\left|Y_{t_i} - \bar{Y}_{t_i}\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^{t_{i+1}} \left|Z_s - \tilde{Z}_s\right|^2 ds \leq (1 + C\alpha\,|\pi|)\left[(1 + C\,|\pi|)\,\mathbb{E}\left|Y_{t_{i+1}} - \bar{Y}_{t_{i+1}}\right|^2 + \frac{C}{\alpha}\Lambda_i\right]$$

Itération de la dernière inégalité pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|Y_{t_i} - \bar{Y}_{t_i}\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^{t_n} \left|Z_s - \tilde{Z}_s\right|^2 ds \\
&\leq (1 + C\,|\pi|)^{n-i}\,(1 + C\alpha\,|\pi|)^{n-i}\,\mathbb{E}\left|g\left(X_{t_n}\right) - g\left(\bar{X}_{t_n}\right)\right|^2 \\
&+ (1 + C\alpha\,|\pi|)\,\frac{C}{\alpha}\sum_{j=0}^{n-i-1}(1 + C\,|\pi|)^j\,(1 + C\alpha\,|\pi|)^j\,\Lambda_{i+j}, \\
&\leq C\left(\mathbb{E}\left|X_{t_n} - \bar{X}_{t_n}\right|^2 + |\pi| + \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left|Z_s - Z_{t_{j+1}}\right|^2 ds\right) \\
&+ (1 + C\alpha\,|\pi|)\,\frac{C}{\alpha}\,|\pi|\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}\left|Z_{t_j} - \bar{Z}_{t_j}\right|^2
\end{aligned} \tag{3.8}$$

par la condition **H2)**, (3.3) et (3.5) . D'autre part, de l'expression de Z et $\bar{Z}$, si nous notons par

$$\Sigma_j = \left|\sigma^{-1}\left(t_j, X_{t_j}\right) Z_{t_j} - \sigma^{-1}\left(t_j, \bar{X}_{t_j}\right)\bar{Z}_{t_j}\right|,$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\Sigma_j &= \left|\mathbb{E}_j\left[\left(Y_{t_{j+1}} - \bar{Y}_{t_{j+1}}\right) N_{t_{j+1}}^{t_j} + \int_{t_j}^{t_{j+1}}\left(f\left(s, \Theta_s\right) N_{t_s}^{t_j} - f\left(t_{j+1}, \bar{\Theta}_{t_{j+1}}\right) N_{t_{j+1}}^{t_j}\right) ds\right]\right| \\
&= \left|\mathbb{E}_j\left[Y_{t_j} - \bar{Y}_{t_j} + \int_{t_j}^{t_{j+1}}\left(Z_s - \bar{Z}_s\right) dW_s\right] N_{t_{j+1}}^{t_j} + \mathbb{E}_j\left[\int_{t_j}^{t_{j+1}} f\left(s, \Theta_s\right)\left(N_{t_s}^{t_j} - N_{t_{j+1}}^{t_j}\right) ds\right]\right|.
\end{aligned}$$

Depuis (3.6) et (3.4) on a

$$\begin{aligned}
\Sigma_j &\leq \left(\mathbb{E}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left|Z_s - \tilde{Z}_s\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\mathbb{E}\left|N_{t_{j+1}}^{t_j}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\mathbb{E}_j \left|f\left(s, \Theta_s\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left|N_{t_s}^{t_j} - N_{t_{j+1}}^{t_j}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} ds, \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{|\pi|}} \left(\mathbb{E}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left|Z_s - \tilde{Z}_s\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + C\left(\mathbb{E}_j 1 + \sup_{0\leq s\leq T} \left|\Theta_s\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sqrt{\frac{t_{j+1} - s}{|\pi|\left(s - t_j\right)}} ds, \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

alors

$$\Sigma_j \leq \frac{C}{\sqrt{|\pi|}} \left(\mathbb{E}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left|Z_s - \tilde{Z}_s\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + C\left(\mathbb{E}_j 1 + \sup_{0\leq s\leq T} \left|\Theta_s\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{|\pi|}.$$

La propriété Lipschitz de σ et la condition **H1)** assurent que

$$\left|Z_{t_j} - \bar{Z}_{t_j}\right| \leq C\left(\left|Z_{t_j}\right| \left|X_{t_j} - \bar{X}_{t_j}\right| + \left|\Sigma_j\right|\right).$$

En prenant les estimations de $\mathbb{L}^2$ et en les remplaçant par (3.9) , nous avons

$$\begin{aligned}
|\pi| \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}\left|Z_{t_j} - \bar{Z}_{t_j}\right|^2 &\leq C \sum_{j=0}^{n-1} \left(\left(\mathbb{E}\left|X_{t_j} - \bar{X}_{t_j}\right|^4\right)^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left|Z_s - \tilde{Z}_s\right|^2 ds + |\pi|^2\right), \\
&\leq C\mathbb{E}\int_0^T \left|Z_s - \tilde{Z}_s\right|^2 ds + C\left|\pi\right|. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Maintenant, on replace (3.10) en (3.8) pour obtenir pour $i = 0$

$$\left|Y_0 - \bar{Y}_0\right| + \mathbb{E}\int_0^T \left|Z_s - \tilde{Z}_s\right|^2 ds \leq C\left|\pi\right| + \left(1 + C\alpha\left|\pi\right|\right) \frac{C}{|\pi|} \mathbb{E}\int_0^T \left|Z_s - \tilde{Z}_s\right|^2 ds.$$

Pour α sufficiently plus grand que C nous avons

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}\left|Z_{t_j} - \bar{Z}_{t_j}\right|^2 \leq C,$$

on conclure par (3.8) et (3.7) que

$$\sup_{0\leq s\leq T}\mathbb{E}\left|Y_t-\bar{Y}_t\right|^2\leq C\left|\pi\right|,$$

En même temps, avec (3.3) , nous concluons que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T\left|Z_s-\tilde{Z}_s\right|^2ds &\leq 2\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left|Z_s-Z_{t_j}\right|^2ds+2\left|\pi\right|\sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{E}\left|Z_{t_j}-\bar{Z}_{t_j}\right|^2,\\ &\leq C\left|\pi\right|.\end{aligned}$$

Ceci complète la preuve du théorème. ■

Remarque 3.1.1 *Nous pouvons obtenir un résultat similaire si nous remplaçons dans l'approximation de la composante à terme X le schéma d'Euler par le schéma de Milshtein,dans ce schéma, le processus N ne dépend que de la composante X, nous l'appelons une pseudo-approximation.*

3.2 Schéma de rapprochement explicite

Dans cette section, nous considérons que le processus X sera approché par le schéma de Milshtein décrit par

$$\begin{cases}X_0^\pi=x;\\ X_{t_{i+1}}^\pi=X_{t_i}^\pi+\left(b-\frac{1}{2}\partial_x\sigma\sigma\right)\left(t_i,X_{t_i}^\pi\right)\left|\pi\right|+\sigma\left(t_i,X_{t_i}^\pi\right)\triangle W_{t_{i+1}}\\ +\frac{1}{2}\left(\partial_x\sigma\sigma\right)\left(t_i,X_{t_i}^\pi\right)\left(\triangle W_{t_{i+1}}\right)^2\end{cases}$$

pour $t\in(t_i,t_{i+1})$, mettons

$$\begin{aligned}X_t^\pi&=X_{t_i}^\pi+\left(b-\frac{1}{2}\partial_x\sigma\sigma\right)\left(t_i,X_{t_i}^\pi\right)(t-t_i)+\sigma\left(t_i,X_{t_i}^\pi\right)(W_t-W_{t_i})\\ &+\frac{1}{2}\left(\partial_x\sigma\sigma\right)\left(t_i,X_{t_i}^\pi\right)(W_t-W_{t_i})^2\end{aligned}$$

On sait que [10]

$$\sup_{0\leq s\leq T}\mathbb{E}\left|X_t-X_t^\pi\right|^2\leq K(T)\left|\pi\right|^p,\forall p\geq 2 \tag{3.11}$$

Où K est une fonction croissante. Définissons les processus ∇X^{π} et $(\nabla X^{\pi})^{-1}$ par $\nabla X^{\pi}_{t_0} = \left(\nabla X^{\pi}_{t_0}\right)^{-1} = 1$, et pour chaque $t \in (t_i, t_{i+1})$

$$\begin{aligned}\nabla X^{\pi}_t = \nabla X^{\pi}_{t_i} &+ \left(\partial_x b - \frac{1}{2}\partial_x \sigma^2\right)\left(t_i, X^{\pi}_{t_i}\right)\nabla X^{\pi}_{t_i}\left(t - t_i\right) \\ &+ \partial_x \sigma\left(t_i, X^{\pi}_{t_i}\right)\nabla X^{\pi}_{t_i}\left(W_t - W_{t_i}\right) + \left|\partial_x \sigma\left(t_i, X^{\pi}_{t_i}\right)\right|^2 \nabla X^{\pi}_{t_i}\left(W_t - W_{t_i}\right)^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left(\nabla X^{\pi}_t\right)^{-1} = \left(\nabla X^{\pi}_{t_i}\right)^{-1} &- \left(\partial_x b - \frac{1}{2}\partial_x \sigma^2\right)\left(t_i, X^{\pi}_{t_i}\right)\left(\nabla X^{\pi}_{t_i}\right)^{-1}\left(t - t_i\right) \\ &- \partial_x \sigma\left(t_i, X^{\pi}_{t_i}\right)\left(\nabla X^{\pi}_{t_i}\right)^{-1}\left(W_t - W_{t_i}\right) \\ &+ \left|\partial_x \sigma\left(t_i, X^{\pi}_{t_i}\right)\right|^2\left(\nabla X^{\pi}_{t_i}\right)^{-1}\left(W_t - W_{t_i}\right)^2.\end{aligned}$$

Maintenant, nous sommes prêts à estimer le processus N. Nous avons mis pour $i = 0, ..., n-1$

$$N^{\pi,t_i}_{t_{i+1}} = \frac{1}{|\pi|}\int_{ti}^{t_{i+1}} \sigma^{-1}\left(s, X^{\pi}_s\right)\nabla X^{\pi}_s dW_s \left(\nabla X^{\pi}_{t_i}\right)^{-1},$$

et nous avons les estimations suivantes

$$\begin{aligned}\sup_{0\le s\le T}\mathbb{E}\left(\left|\nabla X_t - \nabla X^{\pi}_t\right|^2 + \left|\left(\nabla X_t\right)^{-1} - \left(\nabla X^{\pi}_t\right)^{-1}\right|^2\right) &\le C\left|\pi\right|^2, \\ \max_{0\le s\le T}\mathbb{E}\left(\left|N^{t_i}_{t_{i+1}} - N^{\pi,t_i}_{t_{i+1}}\right|^2\right) &\le C\left|\pi\right|^2.\end{aligned}$$

Preuve. Nous désignons $\nabla \bar{X}$ l'approximation de Milshtein de ∇X défini par $\nabla \bar{X}_0 = 1$, et

$$\begin{aligned}\nabla \bar{X}_t = \nabla \bar{X}_{t_i} &+ \left(\partial_x b - \frac{1}{2}\partial_x \sigma\right)\left(t_i, X_{t_i}\right)\nabla \bar{X}_{t_i}\left(t - t_i\right) \\ &+ \partial_x \sigma\left(t_i, X_{t_i}\right)\nabla \bar{X}_{t_i}\left(W_t - W_{t_i}\right) + \left|\partial_x \sigma\left(t_i, X_{t_i}\right)\right|^2 \nabla \bar{X}_{t_i}\left(W_t - W_{t_i}\right)^2,\end{aligned}$$

pour $t \in (t_i, t_{i+1})$. Puis nous avons

$$\sup_{0 \le s \le T} \mathbb{E}\left(\left|\nabla X_t - \nabla X_t^\pi\right|^2\right) \le C\left|\pi\right|^2.$$

D'un autre côté

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\nabla \bar{X}_t - \nabla X_t^\pi\right|^2 &\le C\left(1 + |\pi| + |\pi|^2\right)\mathbb{E}\left|\nabla \bar{X}_{t_i} - \nabla X_{t_i}^\pi\right|^2 \\
&+ C\left|\pi\right|\left(1 + C\left|\pi\right|\right)\left(\mathbb{E}\left|\nabla \bar{X}_{t_i}\right|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left|X_{t_i} - X_{t_i}^\pi\right|^4\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ C\left|\pi\right|^2\left(\mathbb{E}\left|\nabla \bar{X}_{t_i}\right|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left|X_{t_i} - X_{t_i}^\pi\right|^8\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

En particulier pour $t = t_{i+1}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\nabla \bar{X}_{t_{i+1}} - \nabla X_{t_{i+1}}^\pi\right|^2 &\le \left(1 + C\left|\pi\right|\right)\mathbb{E}\left|\nabla \bar{X}_{t_i} - \nabla X_{t_i}^\pi\right|^2 + C\left|\pi\right|^3 \\
&\le C\left|\pi\right|^2.
\end{aligned}$$

Le résultat est suivi de l'itération classique. par le même argument, nous prouvons que

$$\mathbb{E}\left|\left(\nabla X_t\right)^{-1} - \left(\nabla X_t^\pi\right)^{-1}\right|^2 \le C\left|\pi\right|^2.$$

Pour le deuxième point, nous avons

$$\begin{aligned}
\left|\pi\right|^2\mathbb{E}\left|N_{t_{i+1}}^{t_i} - N_{t_{i+1}}^{\pi,t_i}\right|^2 &\le C\left\{\mathbb{E}\left|\left(\nabla X_{t_i}\right)^{-1} - \left(\nabla X_{t_i}^\pi\right)^{-1}\right|^2\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathbb{E}\left|\nabla X_s\right|^2 ds\right. \\
&+ \mathbb{E}\left|\left(\nabla X_{t_i}^\pi\right)^{-1}\right|^2\int_{t_i}^{t_{i+1}}\mathbb{E}\left|\nabla X_s - \nabla X_s^\pi\right|^2 ds \\
&+ \mathbb{E}\left|\left(\nabla X_{t_i}^\pi\right)^{-1}\right|^2\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\mathbb{E}\left|X_s - X_s^\pi\right|^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left|\nabla X_s\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} ds, \\
&\le C\left|\pi\right|^3,
\end{aligned}$$

par la **H1)** et le premier point. Ceci complète la preuve de la proposition .Maintenant, nous présentons notre schéma d'approximation vers explicite rétrograde. Nous examinons le processus

(Y^π, Z^π) défini par

$$\begin{cases} Y_{t_n}^\pi = g\left(X_{t_n}^\pi\right) \text{ et pour } i = n-1, ..., 0, \\ Y_{t_i}^\pi = \mathbb{E}_i\left[Y_{t_{i+1}}^\pi + f\left(t_{i+1}, X_{t_{i+1}}^\pi, Y_{t_{i+1}}^\pi, Z_{t_{i+1}}^\pi\right)|\pi|\right], \\ Z_{t_i}^\pi = \mathbb{E}_i\left[Y_{t_{i+1}}^\pi N_{t_{i+1}}^{\pi,t_i} + f\left(t_{i+1}, X_{t_{i+1}}^\pi, Y_{t_{i+1}}^\pi, Z_{t_{i+1}}^\pi\right) N_{t_{i+1}}^{\pi,t_i}|\pi|\right]\sigma\left(t_i, X_{t_i}^\pi\right). \end{cases}$$

La version continue est définie de la même manière que la pseudo-approximation

$$Y_t^\pi = Y_{t_{i+1}}^\pi + f\left(t_{i+1}, X_{t_{i+1}}^\pi, Y_{t_{i+1}}^\pi, Z_{t_{i+1}}^\pi\right)(t_{i+1} - t) - \int_t^{t_{i+1}} \tilde{Z}_s^\pi dW_s,\ \ Z_t^\pi = Z_{t_i}^\pi,$$

où $\tilde{Z}_s^\pi$ est le processus unique prévisible intégrable carré vérifian

$$Y_{t_{i+1}}^\pi = Y_{t_i}^\pi = \mathbb{E}_i\left[Y_{t_{i+1}}^\pi\right] + \int_t^{t_{i+1}} \tilde{Z}_s^\pi dW_s.$$

Avec ces suggestions, nous fournissons l'erreur d'induction de cette approximation. ■

Théorème 3.2.1 *Nous avons cette estimation*

$$\sup_{0 \le s \le T} \mathbb{E}\left|Y_t - Y_t^\pi\right|^2 + \mathbb{E}\int_0^T \left|Z_t - Z_t^\pi\right|^2 dt \le C|\pi|$$

Où $C > 0$ ne dépend que de K, k et T.

Preuve. Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que

$$\sup_{0 \le s \le T} \mathbb{E}\left|\bar{Y}_t - Y_t^\pi\right|^2 + \mathbb{E}\int_0^T \left|\bar{Z}_s - Z_s^\pi\right|^2 ds \le C|\pi|.$$

On note $\Theta_s^\pi = (X_s^\pi, Y_s^\pi, Z_s^\pi)$, et soit $\beta > 0$ une constante à choisir plus tard. De la propriété

Lipschitz de f nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\bar{Y}_t - Y_t^\pi\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^{t_{i+1}} \left|\tilde{Z}_s - \tilde{Z}_s^\pi\right|^2 ds \\
&= \mathbb{E}\left|\bar{Y}_{t_{i+1}} - Y_{t_{i+1}}^\pi\right|^2 + 2\mathbb{E}\int_t^{t_{i+1}} \left(\bar{Y}_s - Y_s^\pi\right) f\left(t_i, \Theta_{t_{i+1}}\right) - f\left(t_{i+1}, \Theta_{t_{i+1}}^\pi\right) ds \\
&\leq \beta\mathbb{E}\int_t^{t_{i+1}} \left|\bar{Y}_s - Y_s^\pi\right|^2 ds + \frac{C}{\beta}\left|\pi\right| \mathbb{E}\left|\bar{Z}_{t_{i+1}} - Z_{t_{i+1}}^\pi\right|^2 + \left(1 + \frac{C}{\beta}\left|\pi\right|\right)\mathbb{E}\left|\bar{Y}_{t_{i+1}} - Y_{t_{i+1}}^\pi\right|^2.
\end{aligned}$$

Utiliser le lemme de Gronwal et l'itération classique pour obtenir

$$\mathbb{E}\left|\bar{Y}_{t_i} - Y_{t_i}^\pi\right|^2 + \mathbb{E}\int_{t_i}^{t_n} \left|\tilde{Z}_s - \tilde{Z}_s^\pi\right|^2 ds \leq \left(1 + C\beta\left|\pi\right|\right)\frac{C}{\beta}\left|\pi\right| \sum_{j=0}^{n-1} \left|\bar{Z}_{t_j} - Z_{t_j}^\pi\right|^2.$$

Par contre, σ est borné par K, alors on peut écrire

$$\begin{aligned}
\left|\bar{Z}_{t_j} - Z_{t_j}^\pi\right| &\leq K\left|\mathbb{E}_j\left[\bar{Y}_{t_{j+1}} N_{t_{j+1}}^{t_i} - Y_{t_{j+1}}^\pi N_{t_{j+1}}^{\pi,t_i} + \left|\pi\right| f\left(t_{j+1}, \bar{\Theta}_{t_{j+1}}\right) N_{t_{j+1}}^{t_i} - f\left(t_{j+1}, \Theta_{t_{j+1}}^\pi\right) N_{t_{j+1}}^{t_i}\right]\right|, \\
&\leq K\left|\mathbb{E}_j\left[\left(\bar{Y}_{t_{j+1}} - Y_{t_{j+1}}^\pi + \left|\pi\right| f\left(t_{j+1}, \bar{\Theta}_{t_{j+1}}\right) - \left|\pi\right| f\left(t_{j+1}, \Theta_{t_{j+1}}^\pi\right)\right) N_{t_{j+1}}^{t_i}\right]\right| \\
&+ K\left|\mathbb{E}_j\left[\left(Y_{t_{j+1}}^\pi + \left|\pi\right| f\left(t_{j+1}, \Theta_{t_{j+1}}^\pi\right)\right)\left(N_{t_{j+1}}^{t_i} - N_{t_{j+1}}^{\pi,t_i}\right)\right]\right|, \\
&\leq K\left|\mathbb{E}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left|\tilde{Z}_s - \tilde{Z}_s^\pi\right|^2 dW_s N_{t_{j+1}}^{t_i}\right| \\
&+ K\left(\mathbb{E}_j\left[Y_{t_{j+1}}^\pi + \left|\pi\right| f\left(t_{j+1}, \Theta_{t_{j+1}}^\pi\right)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\left|N_{t_{j+1}}^{t_i} - N_{t_{j+1}}^{\pi,t_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\left|\pi\right|}}\left(\mathbb{E}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left|\tilde{Z}_s - \tilde{Z}_s^\pi\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ C\sqrt{\left|\pi\right|}\left(\mathbb{E}_j\left[Y_{t_{j+1}}^\pi + \left|\pi\right| f\left(t_{j+1}, \Theta_{t_{j+1}}^\pi\right)\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

De la même manière que la pseudo-approximation, nous montrons pour β plus grand que C que

$\sum_{j=0}^{n-1} \left| \bar{Z}_{t_j} - Z_{t_j}^{\pi} \right|^2 \leq C$, et nous concluons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \bar{Y}_t - Y_t^{\pi} \right|^2 + \mathbb{E} \int_0^T \left| \bar{Z}_s - Z_s^{\pi} \right|^2 ds &\leq |\pi| \sum_{j=0}^{n-1} \left| \bar{Z}_{t_j} - Z_{t_j}^{\pi} \right|^2 , \\ &\leq C \left| \pi \right| . \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve du théorème. ■

Remarque 3.2.1 *L'espérance conditionnelle dans le schéma de discrétisation ci-dessus, réduit à la régression sur la variable aléatoire $\bar{X}_{t_i}$ dans la pseudo discrétisation et $X_{t_i}^{\pi}$ dans le schéma explicite. Différentes méthodes de régression sont développées, voir par exemple [2], [4] et [14].*

Conclusion

L'objectif de cette mémoire est l'étude d'approximation de solution des équations différentielles stochastiques, d'abord nous avons présenté quelques notions basique de la théorie des calculs stochastique et équations différentielles stochastiques.

Ensuite nous avons détaillé la discrétisation des équations différentielles stochastiques(schéma d'Euler , schéma de Milshtein).

Enfin nous avons présenté schéma d'approximation des solutions des équations différentielles stochastiques rétrogrades (schémas de rétro-approximation,schéma de rapprochement explicite).

Bibliographie

[1] V. Bally – An approximation scheme for BSDEs and applications to control and nonlinear PDE's, Pitman Research Notes in Mathematics Series (1997), 364, Longman.

[2] B. Bouchard, I. Ekeland et N. Touzi – On the Malliavin approach to Monte Carlo approximation of conditional expectations,Finance Stoch 111 (2) (2004), p. 175–206.

[3] B. Bouchard et N. Touzi – Discrete time approximation and Monte-Carlo simulation of backward stochastic differential equations, Stochastic Processes and their Applications 8 (1) (2004), p. 45–71.

[4] J. Carriére – Valuation of the early-exercice price for option using simulations and nonparametric regression, Insurance : Mathematics and Economics 19 (1996), p. 19–30.

[5] D. Chevance – Numerical methods for backward stochastic differential equations, Numerical methods in finance (L. Rogers et D.Talay, éds.), Cambridge University Press, 1997, p. 232–244.

[6] J. Cvitanic et I. Karatzas – Backward stochastic differential equations with reflection and Dynkin games, The Annals of Probability 24 (1996), p. 2024–2056.

[7] J. Douglas, J. Ma et P. Protter – Numerical methods for forward-backward stochastic differential equations, Annals of Applied Probability 6 (1996), p. 940–968.

[8] N. El Karoui, S. Peng et M. Quenez – Backward stochastic differential equation in finance, Mathematical Finance (1997), p. 1– 71.

[9] M. El Otmani Approximation scheme for solutions of BSDE's via the representation theorem Annales mathématiques Blaise Pascal 13, 15-27 (2006) .

[10] O. Faure – Simulation du mouvement brownien et des diffusions, PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1992.

[11] E. Gobet, J. Lemor et X. Warin – A regression-based Monte-Carlo method to solve backward stochastic differential equations, Annals of Applied Probability 15(3) (2005), p. 2172–2002.

[12] S. Hamadène et J-P.Lepeltier – Zero-sum stochastic differential games and BSDEs, Systems and Control letters 24 (1995), p. 259–263.

[13] M. Juanblanc. (2006). Cours de calcul stochastique. Master 2IF EVRY. Lecture Notes.

[14] F. Longstaff et E. Schartz – Valuing american options by simulation : a simple least squares approach, The review of Financial studies 14(1) (2001), p. 113–147.

[15] J. Ma, P. Protter et J. Young – Solving forward backward stochastic differential equations explicitly : a four step scheme, Probability Theory and Related Fields 98 (1994), p. 339–359.

[16] J. Ma et J. Zhang – Representation theorems for backward stochastic differential equations, The Annals of Applied Probability 12(4) (2002), p. 1390–1418.

[17] J. Ma et J. Zhang Representation and regularities for solutions to BSDE's with reflections, Stochastic Processes and their Applications 115 (2005), p. 539–569.

[18] E. Pardoux et S. Peng – Adapted solution of backward stochastic differential equations, Systems and control Letters 14 (1990), p. 51–61.

[19] J. Zhang – A numerical scheme for BSDE's, The Annals of Apllied Probability 14(1) (2004), p .459–488.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	Espace de probabilité filltré.
T	Le temps terminal.
MB	Mouvement Brownien.
$< X, X >_T$	Variation quadratique de X sur $[0, T]$.
exp	Exponentiel.
lim sup	Limite supérieur
b	Drift.
σ	Cofficient de diffusion.
max, min	maximum, minimum
$\mathbb{P} - p.s$	Presque sûrment pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$s \wedge t$	$\min(s, t)$.
$i.i.d$	indépendantes identiquement distribuées
$\mathcal{B}(.)$	Tribu Borélienne
$\frac{\partial .}{\partial x}$	La dérivé partielle première par rapport à la variable x .
$\frac{\partial^2 .}{\partial x^2}$	La dérivé partielle seconde par rapport à la variable x .
EDS	équation différentielle stochastique.
EDSR	équations différentielles stochastiques rétrogrades .