République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

NAILI Abir

Titre :

Sur les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les EDSRs linéaires de type champ moyen.

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**BERROUIS Nassima**	UMKB	Encadreur
Dr.	**TABET Moufida**	UMKB	Président
Dr.	**GATT Rafika**	UMKB	Examinateur

Juin 2021

Dédicace

Avant tout propos, je tiens à rendre gràce à **ALLAH** qui ma guidé sur la bonne voie.

Je dédie ce modeste travail :

A mes trés chèrs parents : ma mére *"Bouchra"* et mon père *"Mohammed"*

Quoi que je fasse ,je ne peux pas remplir leur droits dans ce qu'ils ont fait pour moi pour me soutenir financiérement et moralement .

Dieu vous préserve et vous donne la santé, la long vie bien-être.

A mes chères grand-mères : *"Djamaa"* et *"Mobarka".*

Pour prier tout le temps pour moi.

A mes fréres et soeur : "Sami" et "Wassim Abu Firas" et "Maroua".

Pour m'encourager toujour.

A tous ma famille : surtout mes tantes "Amina" et "Nawiya".

A mes amies : "Lina, Ouafa, Haizia, Madiha, Ilhem, Samra, Rania, Amina, Khaoula, Fatima Alzohra,...".

A mes amis en Palestine : "Sabah Abu Toha, Lamees Khamees,Doha Qanita, Sabrin et Noor Mhmoud, Khetam,...".

A ma respectable soeur : "Imane Achour", pour elle, soutiens-moi beaucoup.Et aussi "Salima Doubbakh".

A tous mes amies en l'éducation : "Amina Lakhdari, Iman Ghaddab, Asma, Wahiba, Nasira, Rime, Zineb Achour,".

Au professeur respecté : "Abdellatif Bettayeb".

A tous mes collègue de la promotion 2021.

REMERCIEMENTS

Je glorifie **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné la foi, la patience et le courage d'accomplir ce travail.

Il m'est particulièrement agréable aujourd'hui de remercier toutes les personnes qui ont intervenu de prés ou de loin àmener à bien ce travail.

Je remercie mon encadreur **BEROUIS NASSIMA** pour ses conseils et ses orientations. Je remercie également les membres du jury : **DR TABET MOUFIDA et DR GATT RAFIKA** pour accepté d'évalure et de juger ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.
Je remercie également tous les professeurs qui nous ont étudiés sincérement.
Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenus et encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci beaucoup à tout

Table des matières

Table des figures

Introduction

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs en abrégé) furent introduites pour la première fois (la forme linéaire) en 1973 dans les travaux de Bismut, J. [2] lorsqu' il étudiait l'équation adjointe associée au principe du maximum stochastique en contrôle optimal.

Cependant, il a fallu attendre les années 1990 pour voir une théorie plus générale (non linéaire) sur les EDSRs. Elle fut initiée par Pardoux, E., et Peng, S. [8] qui ont introduit une nouvelle forme :

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f(t, Y_t, Z_t)dt + Z_t \mathrm{d}W_t, \ 0 \leq t \leq T, \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

ou, de façon équivalente, sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)\mathrm{d}r - \int_t^T Z_r \mathrm{d}W_r, \ 0 \leq t \leq T,$$

où ξ est la valeur terminale et f est le générateur ou encore le coefficient de l'EDSR qui est une fonction non linéaire et globalement lipschitizienne par rapport aux variables (Y, Z).La solution est un couple de processus (Y, Z).

Bahlali, Gherbal et Merzerdi [3], ont prouvent l'existence des contrôles optimaux pour les EDSR linéaires et ils ont établirent les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour ce genre de problème de contrôle stochastique.

Notre objectif dans ce mémoire, c'est d'établir les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour un problème de contrôle stochastique pour des systèmes gouvernès par des équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires de type champ moyen dans lequel les coefficients dépendent des processus de l'état de résolution ainsi que de leur distribution via l'espérance d'une fonction

$$y_t = \xi + \int_0^T (a_s y_s + \hat{a}_s \mathbb{E}[y_s] + b_s z_s + \hat{b}_s \mathbb{E}[z_s] + c_s u_s)\mathrm{d}s - \int_0^T z_s \mathrm{d}W_s,$$

avec $a, b, \hat{a}, \hat{b}$ et c sont des matrices suitables et u_s est la variable de contrôle.

Alors notre problème de contrôle est de minimiser une certainne fonction de coût $\mathbf{J}$ définie par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[g(y_0, \mathbb{E}[y_0]) + \int_0^T h(t, y_t, \mathbb{E}[y_t], z_t, \mathbb{E}[z_t], u_t)\mathrm{d}t\right]$$

La méthode de démonstration est basée sur le principe d'optimisation convexe.

Nous présentons notre mémoire de la manière suivante :

Chapitre 1 : Calcul stochastique :

Dans ce chapitre, on introduit les notions générales du calcul stochastique, on définit les processus stochastiques et les notions de mouvement brownien et l'espérance conditionnel, et martingale...etc et on parle aussi sur les équations différentielles stochastiques (EDS) et équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) et nous avons également abordé l'équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires (EDSRL).

Chapitre 2 : Sur les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les EDSRs linéaires de type champ moyen :

Dans ce chapitre, on va établir les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalité pour les EDSRs linéaires de type champ moyen. La méthode de démonstration basée sur le principe d'optimisation convexe.

Chapitre 1

Calcul stochastique

Le but de ce chapitre est de présenter briévement les notions de base et les résultats de calcul stochastique qui seront utilisées tout au long de ce travail.

1.1 Généralités

tribu

Définition 1.1.1 *Une tribu (σ-**Algebra en Anglais**) sur Ω est une famille de parties de Ω, contenant l'ensemble vide, stable par passage au complémentaire, union dénombrable et intersection dénombrable.*

Une tribu contient dans l'espace Ω.

Un espace mesurable est un espace muni d'une tribu.

Proposition 1.1.1 *Une intersection de tribus est une tribu, mais ce n'est pas vrai pour la réunion c'est à dire une réunion de tribus n'est pas une tribu. Soit $\mathcal{F}$ une tribu. Une sous-tribu de $\mathcal{F}$ est une tribu $\mathcal{G}$ telle que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, soit $A \in \mathcal{G}$ implique $A \in \mathcal{F}$.*

La plus petite tribu contenant une famille d'ensembles est l'intersection de toutes les tribus qui contiennent cette famille.

Exemple 1.1.1 *Tribu des boréliens de $\mathbb{R}$. C'est la plus petite tribu contenant tous les intervalles ouverts (ou fermés, ou ouverts à droite fermés à gauche...).*

Mesurabilité

Définition 1.1.2 *Soit $(\Omega,\ \mathcal{F})$ et $(\mathbb{E},\ \varepsilon)$ deux espaces mesurables. Une application f^{-1} de Ω dans E est dite (E, ε) mesurable si $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, $\forall A \in \varepsilon$, où*

$$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in A\}\,.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les tribus employées, on dit simplement que f est mesurable.
Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne si elle est $(B_{\mathbb{R}}, B_{\mathbb{R}})$ -mesurable, soit $f^{-1}(A) \in B_{\mathbb{R}}$, $\forall A \in B_{\mathbb{R}}$. Il suffit que cette propriété soit vérifiée pour les intervalles A.
Les fonctions continues sont boréliennes.

Définition 1.1.3 (Processus stochastique) *Un processus stochastique est une famille $X = (X_t)_{t\in T}$ de variables aléatoires à valeur dans un espace mesurable $(\Omega,\ \mathcal{F})$ est indéxée par le temps t. Le paramètre du temps t variant dans I*

1. Si $I \subset \mathbb{N}$, on dit que le processus a temp discret.
2. Si $I \subset \mathbb{R}$, on dit que le processus a temp continue.

Remarque 1.1.1

a) Si t fixe : X_t est un v.a définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeur dans $(\mathbb{R}^d, B(\mathbb{R}^d))$.

b) Si ω fixe :X_t appelé la trajectoire de $(X_t)_{t\in T}$ associée à ω.

Définition 1.1.4 (Processus modification et indistinguables) *Soient X et Y deux processus et $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ est un espace de probabilité complet. X est une modification de Y*

si, pour tout $t \geq 0$, les v.a. X_t et Y_t sont égales $\mathbb{P}$–p.s :

$$\forall\ t \geq 0,\ \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

X et Y sont indistinguables si, $\mathbb{P}$–p.s, les trajectoires de X et de Y sont les mêmes c'est à dire :

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t,\ \forall\ t \geq 0) = 1.$$

Remarque 1.1.2 *La notion d'indistinguabilité est plus forte que la notion de modification. Notons que si X est une modification de Y et si X et Y sont à trajectoires continues à droite (ou à gauche) alors X et Y sont indistinguables.*

Définition 1.1.5 (Filtration) *Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ est une famille croissante de sous-tribus $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tous $0 \leq s \leq t$ dans T.*

1. Le quadruplet $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T},\ \mathbb{P})$ est appelé espace de probabilité filtré.
2. On dit qu'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est continue à droite (resp à gauche) si :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \underset{s\geq t}{\cap} \mathcal{F}_s (\text{resp } \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-} = \sigma(\underset{s<t}{\cup} \mathcal{F}_s))$$

3. On dit que la filtration est naturelle de processus X si :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s,\ 0 \leq s \leq t),\ t \in T,$$

c'est la plus petite σ-algèbre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.

Définition 1.1.6 (Processus a trajectoire continue) *Un processus (X_t) est a trajectoire continue ou simplement processus continue si :*

$$P(\{\omega \in \Omega : t \rightarrow X_t(\omega)\ \textit{est continne}\}) = 1.$$

Définition 1.1.7 (Processus mesurable) *Un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est dit mesurable si l'application* $(t,w) \to X_t$ *de* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport aux tribus* $B(\mathbb{R}_+) \otimes B(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.1.8 (Processus adapté) *Un processus* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *est dit adapté par rapport à* $\mathcal{F}$ *si pour tout* $t \in T$, X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Définition 1.1.9 (Processus Gaussiens) *Un processus* X *est appelé un processus gaussien si toute combinaison linéaire finie de* X_t *est une variable aléatoire gaussienne, autrement dit si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $t_1...t_n$, $a_1...a_n$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i X_{t_i}$$

est une variable gaussienne. Un processus gaussien est caractérisé par deux fonctions :
sa fonction espérance $t \longmapsto m(t) = \mathbb{E}[X_t]$.
et sa fonction de covariance $(s,t) \longmapsto \Gamma(s,t) = \mathbb{E}[(X_t - m(t))(X_s - m(s))]$.
La fonction $\Gamma(s,t)$ est de type positif au sens où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_1...t_n$, $a_1...a_n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \Gamma(t_i, t_j) \geq 0.$$

Définition 1.1.10 (processus stationnaire) *Un processus est dit stationnaire si :*

$$\{X_{s+t}, t \geq 0\} = \{X_t,\ t \geq 0\},\ \textit{pour tout } s \in \mathbb{R}^+.$$

En particulier, tous les X_t ont même loi.
On voit immédiatement qu'un processus gaussien stationnaire est tel que sa fonction espérance est constante et sa fonction de covariance $\Gamma(s,t)$ ne dépend que de $(s-t)$.

Définition 1.1.11 (Processus càdlàg) *Un processus* X *est dit càdlàg (continue à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et prouvues de limite à gauche pour presque tout* ω.

Définition 1.1.12 (Processus progressivement mesurable) *Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est dit progressivement mesurable par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$ l'application $(s,\omega) \to X_s(\omega)$est mesurable sur $[0,t]$ $\times\Omega$ muni de la tribu produit $B([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$.*

Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On peut également noter que si X est un processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable.

Proposition 1.1.2 *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou continues à gauche) alors X est mesurable et X est progressivement mesurable s'il est de plus adapté.*

Définition 1.1.13 (Temp d'arrêt) *Une variable aléatoire τ :$\Omega \to \mathbb{R}_+$est un temp d'arrêt (par rapport a la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in T}$) si pour $t \in T$:*

$$\{\tau \leq t\} := \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

1.2 Espérance

Pour une variable aléatoire $X \in \mathbb{L}^1(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P})$ l'espérance dans le vocabulaire probabiliste est l'intégrale de X par rapport à $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X \mathrm{d}P$$

Pour une v.a positive, $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

1.3 Espérance conditionnelle

Théorème 1.3.1 (Existence de l'espérance conditionnelle) *Il existe une variable aléatoire Y, unique à un ensemble négligeable près, $\mathcal{G}$-mesurable et intégrable telle que :*

$$\forall A \in \mathcal{G} : \mathbb{E}[Y 1_A] = \mathbb{E}[X 1_A].$$

Définition 1.3.1 *Dans le cadre du théorème 1.3.1 :*
nous introduisons pour la variable aléatoire Y la notation $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] := Y$.
et nous l'appelons espérance de X conditionnellement à $\mathcal{G}$.

Soient X, X_1, X_2 des v.a. intégrables définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Proposition 1.3.1 *L'espérance conditionnelle vérifie :*

1. linéarité : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[\alpha X_1 + \beta X_2|\mathcal{G}] = \alpha \mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}] + \beta \mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}]$.
2. espérance : $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$.
3. si X est $\mathcal{G}$-mesurable alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$.
4. si X est indépendante de $\mathcal{G}$ alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$.
5. si Z est $\mathcal{G}$-mesurable alors $\mathbb{E}[XZ|\mathcal{G}] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ pour toute v.a.X.
6. emboitement : si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} : \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$.
7. monotonie : si $X_1 \leq X_2$ alors $\mathbb{E}[X_1|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X_2|\mathcal{G}]$.

1.4 Mouvement brownien

Historiquement :

– **1828** : Robert Brown, botaniste, observe le mouvement du pollen en suspension dans l'eau.

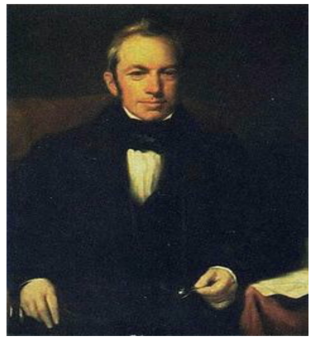

FIG. 1.1 – Robert

- **1877** : Delsaux explique que ce mouvement irrégulier est du aux chocs du pollen avec les molécules d'eau (changements incessants de direction).
- **1900** : Louis Bachelier dans sa thèse "Théorie de la spéculation" modélise les cours de la bourse comme des processus à accroissements indépendants et gaussiens (problème : le cours de l'actif, processus gaussien, peut être négatif).
- **1905** : Einstein détermine la densité du MB et le lie aux EDPs. Schmolushowski le décrit comme limite de promenade aléatoire.
- **1923** : Etude rigoureuse du MB par Wiener, entre autre démonstration de l'existence.

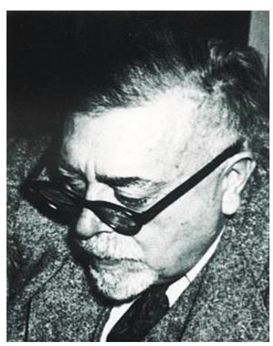

FIG. 1.2 – Wiener

Remarque 1.4.1 *Un mouvement brownien généralement noté B pour Brown ou W pour Wiener.*

Définition 1.4.1 *Soit $\mathcal{F}$ une filtration. Un $\mathcal{F}$-mouvement brownien (standard) est un processus B vérifiant :*

(i) B est $\mathcal{F}$-adapté.

(ii) $B_0 = 0$ $\mathbb{P}-$p.s.

(iii) B est continu, i.e. $t \longmapsto B_t(\omega)$ est continue pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$.

(iv) B est à accroissements indépendants : $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ pour tous t, $s \in [0, T]$ tels que $s \leq t$.

(v) B est à accroissements stationnaires et gaussiens : $B_t - B_s \sim N(0,\, t - s)$ pour tous $t,\ s \in [0, T]$ tels que $s \leq t$.

> **Remarque 1.4.2** *Pour information, dans le définition, la quatrième propriété peut être remplacée par "les accroissements sont stationnaires centrés de carré intégrable avec $Var(B_1) = 1.$"*

Proposition 1.4.1 *Si B est un mouvement brownien et $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle, les processus (B_t), $(B_t^2 - t)$ et $(exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}))$ (Brownien Exponentiel) sont des $\mathcal{F}$-martingales.*

Théorème 1.4.1 (Caractérisation du mouvement brownien) *Un processus X est un mouvement brownien si et seulement si c'est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance donnée par :*

$$cov(X_s, X_t) = s \wedge t, \ \ pour\ s, t \in [0, T].$$

1.5 Martingale

Définition 1.5.1 *Un processus aléatoire $M = (M_t)_{t \in [0,T]}$ est une $\mathcal{F}$-martingale si :*

(i) M est $\mathcal{F}$-adapté(M est $\mathcal{F}$mesurable).

(ii) $M_t \in L^1(\Omega)$, i.e. $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$, pour tout $t \in [0, T]$.

(iii) $\mathbb{E}[M_t | F_s] = M_s$ pour tout $s, t \in [0, T]$ tels que $s \leq t$.

Un processus M est une $\mathcal{F}$-sur-martingale (resp. une$\mathcal{F}$-sous-martingale) s'il vérifie les propriétés (i) et (ii) et $\mathbb{E}[M_t|F_s] \leq M_s$ (resp. $\mathbb{E}[M_t|F_s] \geq M_s$) pour tout s, $t \in [0,T]$ tels que $s \leq t$.

Proposition 1.5.1 *Toute martingale M vérifié :*

$$\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0] \text{ pour tout } t \in [0,T]$$

Preuve. Ona $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_0]\right] = \mathbb{E}[M_0]$, pour tout $t \in [0,T]$. ■

Proposition 1.5.2 *Soit M une $\mathcal{F}$-martingale de carré intégrable (i.e. $\mathbb{E}[|M_t|^2] < \infty$ pour tout $t \in [0,T]$), alors*

$$\mathbb{E}[|M_t - M_t|^2|F_s] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2|F_s]$$

Définition 1.5.2 *pour tout s, $t \in [0,T]$ tels que $s \leq t$.*

1.6 Calcul d'Itô

Dans tout ce paragraphe, on se donne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ une filtration qui vérifie les conditions habituelles et W un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–MB (on peut prendre $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^w$). Les martingales seront toujours càdlàg.

1.6.1 Intégrale stochastique

L'objectif de ce paragraphe est de définir $\int_0^t H_s \mathrm{d}W_s$. Ceci n'est pas évident car comme nous l'avons rappelé précédemment les trajectoires du MB ne sont pas à variation finie et donc l'intégrale précédente n'est en aucun cas une intégrale de Lebesgue-Stieljes. Dans toute la suite, on fixe un réel T strictement positif. Les processus sont définis pour $t \in [0,T]$; on notera X pour $(X_t)_{t\in[0,T]}$.

Définition 1.6.1 *On appelle processus élémentaire $H = (H_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus de la forme :*

$$H_t = \phi_0 1_0(t) + \sum_{i=1}^{p} \phi_i 1_{]t_{i-1},t_i]}(t),$$

où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p = T$, ϕ_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$–mesurable bornée et, pour $i = 1, ..., p$, ϕ_i est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$–mesurable et bornée.

Pour un tel processus, on peut définir l'intégrale stochastique par rapport à W comme étant le processus continu $\{I(H)_t\}_{0\leq t\leq T}$ défini par :

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i (W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1}\wedge t}),$$

soit encore, si $t \in]t_k, t_{k+1}]$,

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(W_t - W_{t_k})$$

1.6.2 Processus d'Itô :

Nous introduisons à présent une classe de processus qui sera très utile dans la suite.

Définition 1.6.2 *On appelle processus d'Itô un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$\mathbb{P} - p.s. \qquad \forall\ 0 \leq t \leq T \qquad X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$–mesurable, K et H sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions, $\mathbb{P}$–p.s. :

$$\int_0^T |K_s|\, \mathrm{d}s < \infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^T |H_s|^2\, \mathrm{d}s < \infty$$

On peut montrer que si un processus d'Itô est une martingale locale continue alors $K_t = 0$ $m \otimes \mathbb{P} - p.p.$ On en déduit alors que la décomposition d'un processus d'Itô est unique au sens où si

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s = X_0^{'} + \int_0^t K_s^{'} \mathrm{d}s + \int_0^t H_s^{'} \mathrm{d}W_s$$

alors $X_0 = X_0^{'}$ $\mathbb{P} - p.s.$ et $H_t^{\prime} = H_t$, $K_t = K_t^{'}$ $m \otimes \mathbb{P} - p.p.$

Si X et Y sont deux processus d'Itô,

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s \quad \text{et} \qquad Y_t = X_0^{'} + \int_0^t K_s^{'} \mathrm{d}s + \int_0^t H_s^{'} \mathrm{d}W_s$$

on pose $\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H_s^{'} \mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}X_t = K_t \mathrm{d}t + H_t \mathrm{d}W_t$. On a alors la

Proposition 1.6.1 (Intégration par parties) *Si X et Y sont deux processus d'Itô, alors :*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s \mathrm{d}X_s + \langle X, Y \rangle_t$$

1.6.3 Formule d'Itô :

Théorème 1.6.1 *Soient $(t,x) \mapsto f(t,x)$ une fonction réelle deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t et X un processus de Itô. Ona :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s^{'}(s, X_s) \mathrm{d}s + \int_0^t f_x^{'}(s, X_s) \mathrm{d}X_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}^{''}(s, X_s) \mathrm{d} \langle X, Y \rangle_s .$$

Nous finissons ce paragraphe en étendant la formule précédente au cas d'un mouvement brownien d–dimensionnel et d'un processus d'Itô n–dimensionnel. Les hypothèses sur les coefficients sont celles de la Définition 1.6.2.

1.7 Equations différentielles stochastiques (EDSs)

Définition 1.7.1 *Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme :*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\mathrm{d}B_s \tag{1.1}$$

ou sous forme condensée :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\mathrm{dt} + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}B_t, \\ X_0 = x \end{cases}$$

L'inconnue est le processus X. Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire (EDO), de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution. Il est utile de préciser les données.

Définition 1.7.2 *Soit b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données. On se donne également un espace $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ et un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien B sur cet espace. Une solution de (1.1) est un processus X continu $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)\mathrm{d}s$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)\mathrm{d}B_s$ ont un sens et l'égalité :*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\mathrm{d}B_s.$$

Définition 1.7.3 *est satisfaite pour tout t, $\mathbb{P}-$ p.s.*

1.7.1 Théorème d'existence :

Théorème 1.7.1 *On suppose que :*

a) les fonctions b et σ sont continues,

b) il existe K tel que pour tout $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

i) $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K\,|x-y|$,

ii) $|b(t,x)|^2 - |\sigma(t,x)|^2 \leq K^2(1+|x|^2)$,

c) La condition initiale X_0 est indépendante de $(B_t,\, t \geq 0)$ et est de carré intégrable, alors il existe une unique solution de (1.1) à trajectoires continues pout $t \leq T$. De plus cette solution vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right] < \infty.$$

1.8 Équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs)

1.8.1 Vocabulaire et notations

Présentation du problème :

Soient $(\Omega,\, \mathcal{F},\, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\, \mathbb{P})$ un espace probabilité filtré et variable aléatoire ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$. On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{-\mathrm{d}Y_t}{\mathrm{d}t} = f(Y_t),\ t \in [0,T] \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

en imposant que, pour tout instant t, Y_t ne dépende pas du futur après t c'est à dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f \equiv 0$. Le candidat naturel est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. La meilleure approximation – disons dans L^2 – adaptée est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[\xi]+\int_0^t Z_s \mathrm{d}W_s = \xi + \int_0^t Z_s \mathrm{d}W_s.$$

Un calcul élémentaire montre alors que :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s,$$

$$i.e. \begin{cases} -\mathrm{d}Y_t = -Z_t \mathrm{d}W_t \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z, l'équation devient donc :

$$\begin{cases} -\mathrm{d}Y_t = f(t, Y_t, Z_t)\mathrm{d}t - Z_t \mathrm{d}W_t \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

Notations :

Soient $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et W un MB d–dimensionnel sur cet espace. On notera $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du MB W. On travaillera avec deux espaces de processus :

– on notera tout d'abord $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$l'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :

$$\|Y\|^2_{\mathcal{S}^2} := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty,$$

et $\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)$ le sous-espace formé par les processus continus. Deux processus indistinguables seront toujours identifiés et nous garderons les mêmes notations pour les espaces quotients.

– et ensuite $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ celui formé par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$,tels que :

$$\|Z\|_{\mathcal{M}^2}^2 := \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 \,\mathrm{d}t\right] < \infty,$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|z\|^2 = trace(zz^*)$. $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

$\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ seront souvent omis ; les espaces $\mathcal{S}^2$, $\mathcal{S}_c^2$ et $\mathcal{M}^2$ sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons $\mathcal{B}^2$ l'espace de Banach $\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)\times \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Nous nous donnons une application aléatoire f définie sur $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $(y,\ z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{f(t,\ y,\ z)\}_{0\le t\le T}$ soit progressivement mesurable. On considère également une variable aléatoire ξ, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

Dans ce contexte, on veut résoudre l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR en abrégé) suivante

$$\begin{cases} -\mathrm{d}Y_t = f(t,Y_t,Z_t)\mathrm{d}t - Z_t\mathrm{d}W_t,\ \ 0\le t\le T, \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

ou, de façon équivalente, sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)\mathrm{d}r - \int_t^T Z_r\mathrm{d}W_r, \quad 0\le t\le T, \tag{1.2}$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'EDSR et ξ la condition terminale. Sans plus tarder, précisons ce que l'on entend par solution de l'EDSR (1.2).

Définition 1.8.1 *Une solution de l'EDSR (1.2) est un couple de processus $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$,
2. $\mathbb{P}-$p.s.
$$\int_0^T \left\{\left|f(r, Y_r, Z_r) + \|Z_r\|^2\right|\right\} \mathrm{d}r < \infty,$$
3. $\mathbb{P}-$p.s., on a :
$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)\mathrm{d}r - \int_t^T Z_r \mathrm{d}W_r,\ 0 \leq t \leq T,$$

Remarque 1.8.1 *Il est important de retenir les deux points suivants : tout d'abord, les intégrales de l'équation (1.2) étant bien définies, Y est une semi-martingale continue, ensuite, comme le processus Y est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe.*

Le rôle de Z :

Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_r \mathrm{d}W_r$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

1.8.2 Équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires

Dans ce paragraphe nous étudions le cas particulier des EDSR linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite.
On se place dans le cas $k = 1$, Y est donc réel et Z est une matrice de taille $1 \times d$ c'est à dire un vecteur ligne de dimension d.

Proposition 1.8.1 *Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, progressivement mesurable et borné. Soient $\{c_t\}_{t\in[0,T]}$ un élément de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$−mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles.*

L'EDSR linéaire :

$$Y_t = \xi + \int_t^T (a_r Y_r + b_r Z_r + c_r)\,\mathrm{d}r - \int_t^T Z_r \mathrm{d}W_r,$$

possède une unique solution qui vérifie :

$$\forall t \in [0,T],\ Y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left(\xi\Gamma_T + \int_t^T c_r\Gamma_r \mathrm{d}r|\mathcal{F}_t\right),$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$;

$$\Gamma_t = \exp\left\{\int_0^t b_r \mathrm{d}W_r - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r|^2\,\mathrm{d}r + \int_0^t a_r \mathrm{d}r\right\}.$$

Remarque 1.8.2 *Notons que si $\xi \geq 0$ et si $c_t \geq 0$ alors la solution de l'EDSR linéaire vérifie $Y_t \geq 0$.*

Chapitre 2

Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les EDSRs linéaires de type champ moyen

Dans ce chapitre, nous établirons les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires de type champ moyen. Soit W_t un processus de Wiener r-dimensionnel définie sur un espace de probabilité complet $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$. On notera par $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de (mouvement Brownien W_t) tel que $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensemble P-nul de $\mathcal{F}$, et on considère une variable aléatoire ξ de carré intégrable et $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Nous considérons un problème de contrôle optimal dans lequel le système est gouverné par l'EDSR linéaire de type champ moyen suivant :

$$y_t = \xi + \int_t^T (a_s y_s + \hat{a}_s \mathbb{E}[y_s] + b_s z_s + \hat{b}_s \mathbb{E}[z_s] + c_s u_s)\mathrm{d}s - \int_t^T z_s \mathrm{d}W_s, \tag{2.1}$$

avec $a, b, \hat{a}, \hat{b}$ et c sont des matrices suitables et u_s est un processus $\mathcal{F}_t$ adapté a valeurs dans un sous ensemble $\mathbb{A}$ de $\mathbb{R}^n$.

La fonction de coût est donnée par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[g(y_0, \mathbb{E}[y_0]) + \int_0^T h(t, y_t, \mathbb{E}[y_t], z_t, \mathbb{E}[z_t], u_t)\mathrm{d}t\right] \tag{2.2}$$

avec

$$h : [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \times \mathbb{R}^{k\times d} \times \mathbb{A} \to \mathbb{R},$$
$$g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R},$$

sont des fonctions données.

Remarque 2.0.3 *.L'équation (2.1), c'est une équation différentielle stochastique rétrograde linéaire (EDSRL) de type champ moyen avec $Y_T = \xi$. On remarque ici que les coefficient dépendent des processus d'état de résolution ainsi que de leur distribution via l'espérance d'une fonction. De plus, la fonctionnelle de coût est également de type champ moyen. L'objectif de controlleur est de trouve parmi les contôles admissibles, un contrôle qui minimise la fonction de coût J sur $\mathbb{A}$, tel que les trajectoires associées à ce contrôle vérifiant l'EDSR linéaire de type champ moyen (2.1).*

2.0.3 Hypothèses :

Pour établir les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalités on besoin des hypothèses suivantes :

On suppose que :

– L'ensemble de valeurs de contrôles $\mathbb{A}$ est convexe et compact.

– h et g sont continues et convexes.

– h et g sont continument dérivables en leurs variables avec des dérivées continues et bornées.

Définition 2.0.2 (Contrôle admissible) *On appelle Contrôle admissible tout processus*

v_t mesurable, $\mathcal{F}_t-$adapté et de carré intégrable à valeurs dans un sous ensemble $\mathbb{A}$ de $\mathbb{R}^k$.

Notant par U l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

Le probléme de contrôle optimal consiste à minimiser une fonction de coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles U.

Définition 2.0.3 (contrôle optimal) *Un contrôle admissible u est dite optimal si :*

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v).$$

2.1 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

Dans ce paragraphe, nous donnons les conditions nécessaires ainsi que les conditions suffisantes d'optimalité, sous forme d'un principe de maximum, sous l'hypothèse de convexité du domaine de contrôle $\mathbb{A}$, dans ce cas, en utilisant la méthode de perturbation convexe du contrôle optimal.

On pertube le contrôle optimal u, de la manière suivante :

$$u_t^\theta = u_t + \theta(v_t - u_t), v \in U, \; o\grave{u}, \; \theta > 0$$

on note par u^θ le contrôle pertubé et par $(y_t^\theta, \, z_t^\theta)$ la solution de l'equation (2.1) contrôlée par u^θ (ou bien les trajectoires associées u^θ).

D'aprés l'optimalité de u, on a :

$$0 \leq J(u^\theta) - J(u).$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\theta}(J(u^\theta) - J(u)) \\ &= \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\theta}(J(u+\theta(v-u)) - J(u)) \\ &= \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\theta}(J(u) + \theta J(v-u) - J(u)) \\ &= \langle J'(u), v-u \rangle \end{aligned}$$

2.1.1 Le principe d'optimisation convexe :

Pour établir les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité en utilisant le principe d'optimisation convexe donner par le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 *Soit $\mathbb{E}$ un espace de Banach réflixif, D est un sous-ensemble convexe, fermé non vide de $\mathbb{E}$ et J est une fonction définie de D dans $\mathbb{R}$, convexe, semi-continue inférieurement et Gâteaux-différentiable de différentielle J' continu. Alors on a*

$$x^* \textit{ minimise } J \Longleftrightarrow \langle J'(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \;\; x \in D$$

Comme l'ensemble des contrôles $\mathbb{A}$ est convexe et J est convexe en u, continu et Gâteaux différentiable de différentielle J' continu, on peut applique le principe d'optimisation convexe précédent, pour obtenir :

$$u \text{ minimise } J \Longleftrightarrow \langle J'(u), v-u \rangle \geq 0, \;\; v \in U \tag{2.3}$$

Commençons par calculer la dérivée de Gâteaux de J au point u et de direction $(v-u)$, nous avons la formule de type champ moyen :

$$\begin{aligned}\langle J'(u), v-u\rangle &= \mathbb{E}\left[\langle g_y(y_0^u,\mathbb{E}[y_0^u])(y_0^v-y_0^u) + \mathbb{E}\left[g_{\overline{y}}(y_0^u,\mathbb{E}[y_0^u])\right], y_0^v-y_0^u\rangle\right] \\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T (\langle h_y(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t), y_t^v-y_t^u\rangle\right. \\ &+\left.\langle \mathbb{E}\left[h_{\overline{y}}(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t)\right], y_t^v-y_t^u\rangle)\mathrm{d}t\right] \\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T (\langle h_z(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t), z_t^v-z_t^u\rangle\right. \\ &+\left.\langle \mathbb{E}\left[h_{\overline{z}}(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t)\right], z_t^v-z_t^u\rangle)\mathrm{d}t\right] \\ &+\mathbb{E}\left[\int_0^T \langle h_u(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t), v_t-u_t\rangle\,\mathrm{d}t\right]\end{aligned} \tag{2.4}$$

Soit u un contrôle admissible et (y^u, z^u) la solution de (2.1) correspondante à u. Alors u est optimal si seulement s'il existe un unique processus adapté Q^v, solution de l'equation différentielle stochastique suivante (appelée équation adjointe) :

$$\begin{cases}\mathrm{d}Q_t^v = (H_y(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],v_t,Q_t^v) + \mathbb{E}[H_{\overline{y}}(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],v_t,Q_t^v))\mathrm{d}t \\ \quad +(H_z(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],v_t,Q_t^v) + \mathbb{E}[H_{\overline{z}}(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],v_t,Q_t^v)])\mathrm{d}W_t, \\ Q_0^v = g_y(y_0^v,\mathbb{E}[y_0^v]) + \mathbb{E}[g_{\overline{y}}(y_0^v,\mathbb{E}[y_0^v])],\end{cases} \tag{2.5}$$

tel que

$$\langle H_u(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t,Q_t^u), v_t-u_t\rangle \geq 0,\ \forall v\in U,\ \mathbb{P}-p.s. \tag{2.6}$$

Où le Hamiltonien H est définie par :

$$H(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],v_t,Q) = h(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],v_t)+\left\langle Q_t, a_ty_t+\hat{a}_t\overline{y_t}+b_tz_t+\hat{b}_t\overline{z_t}+c_tv_t\right\rangle, \tag{2.7}$$

Preuve. On peut réécrire (2.5) comme suit :

$$\begin{cases} \mathrm{d}Q_t^v = \{h_y(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], v_t) + a_t Q_t^v + \mathbb{E}[h_{\overline{y}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], v_t) + \hat{a}_t Q_t^v]\}\mathrm{d}t \\ \quad +\{h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], v_t) + b_t Q_t^v + \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], v_t) + \hat{b}_t Q_t^v]\}\mathrm{d}W_t \\ Q_0^v = g_y(y_0^v, \mathbb{E}[y_0^v]) + \mathbb{E}[g_{\overline{y}}(y_0^v, \mathbb{E}[y_0^v])] \end{cases}$$

On applique la formule d'Itô **(intégration par partie)** à $\langle Q_t^u, y_t^u \rangle$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(Q_t^u y_t^u) &= -Q_t^u a_t y_t^u \mathrm{d}t - Q_t^u \hat{a}_t \mathbb{E}[y_t^u]\mathrm{d}t - Q_t^u b_t z_t^u \mathrm{d}t - Q_t^u \hat{b}_t \mathbb{E}[z_t^u]\mathrm{d}t - Q_t^u c_t u_t \mathrm{d}t + Q_t^u z_t^u \mathrm{d}W_t \\ &\quad + y_t^u h_y(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)\mathrm{d}t + y_t^u a_t Q_t^u \mathrm{d}t \\ &\quad + y_t^u \mathbb{E}[h_{\overline{y}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]\mathrm{d}t + \hat{a}_t Q_t^u \mathbb{E}[y_t^u]\mathrm{d}t \\ &\quad + y_t^u \left[h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + b_t Q_t^u\right] \mathrm{d}W_t \\ &\quad + y_t^u \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \hat{b}_t Q_t^u]\mathrm{d}W_t \\ &\quad + z_t^u h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)\mathrm{d}t + z_t^u b_t Q_t^u \mathrm{d}t \\ &\quad + z_t^u \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]\mathrm{d}t + \hat{b}_t Q_t^u \mathbb{E}[z_t^u]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(Q_t^u y_t^u) &= -Q_t^u c_t u_t \mathrm{d}t + Q_t^u z_t^u \mathrm{d}W_t \\ &\quad + y_t^u \left\{h_y(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \mathbb{E}[h_{\overline{y}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]\right\} \mathrm{d}t \\ &\quad + y_t^u \{h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + b_t Q_t^u \\ &\quad + \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \hat{b}_t Q_t^u]\}\mathrm{d}W_t \\ &\quad + z_t^u \left\{h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]\right\} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

On intégrant entre 0 et T, on obtien :

$$
\begin{aligned}
Q_T^u y_T^u - Q_0^u y_0^u = & \int_0^T \left(-Q_t^u c_t u_t + y_t^u \left\{h_y(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \mathbb{E}[h_{\overline{y}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]\right\}\right) \mathrm{d}t \\
& + \int_0^T z_t^u \left\{h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]\right\} \mathrm{d}t \\
& + \int_0^T y_t^u \{h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + b_t Q_t^u \\
& + \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \hat{b}_t Q_t^u]\} \mathrm{d}W_t
\end{aligned}
$$

Et :

$$
\begin{aligned}
Q_0^u y_0^u = & \, Q_T^u y_T^u + \int_0^T (Q_t^u c_t u_t - y_t^u h_y(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) - \mathbb{E}[h_{\overline{y}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]) \\
& - z_t^u \left\{h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]\right\}) \mathrm{d}t \\
& - \int_0^T (y_t^u (h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + b_t Q_t^u \\
& + \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \hat{b}_t Q_t^u]) + Q_t^u z_t^u) \mathrm{d}W_t
\end{aligned}
$$

Passons à l'espérence, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Q_0^u y_0^u) = & \, \mathbb{E}(Q_T^u y_T^u) \\
& + \mathbb{E}[\int_0^T (Q_t^u c_t u_t - y_t^u (h_y(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) - \mathbb{E}[h_{\overline{y}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]) \\
& - z_t^u \left\{h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]\right\}) \mathrm{d}t]
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Et puisque on a $Q_0^u = g_y(y_0^u, \mathbb{E}[y_0^u]) + \mathbb{E}[g_{\overline{y}}(y_0^u, \mathbb{E}[y_0^u])]$ d'aprés l'équation (2.5) et $y_T^u = \xi$, alors (2.8) devient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(g_y(y_0^u, \mathbb{E}[y_0^u]) + \mathbb{E}[g_{\overline{y}}(y_0^u, \mathbb{E}[y_0^u])])y_0^u] \qquad (2.9)\\
&= \mathbb{E}(Q_T^u \xi) + \mathbb{E}[\int_0^T (Q_t^u c_t u_t - y_t^u h_y(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) - \mathbb{E}[h_{\overline{y}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)])\\
&- z_t^u \left\{h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]\right\})\mathrm{d}t]
\end{aligned}$$

par le même argument nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(g_y(y_0^u, \mathbb{E}[y_0^u]) + \mathbb{E}[g_{\overline{y}}(y_0^u, \mathbb{E}[y_0^u])])y_0^v] \qquad (2.10)\\
&= \mathbb{E}(Q_T^u \xi) + \mathbb{E}[\int_0^T (Q_t^u c_t v_t - y_t^v (h_y(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) - \mathbb{E}[h_{\overline{y}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)])\\
&- z_t^v \left\{h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]\right\})\mathrm{d}t]
\end{aligned}$$

Remplaçant les deux égalités (2.9), (2.10) dans l'égalité (2.4), nous obtenons [?] :

$$
\begin{aligned}
&\langle J'(u), v-u\rangle \\
&= \mathbb{E}(Q_T^u\xi) + \mathbb{E}[\int_0^T (Q_t^u c_t v_t - y_t^v(h_y(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t) - \mathbb{E}[h_{\overline{y}}(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t)]) \\
&- z_t^v(h_z(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t) + \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t)]))\mathrm{d}t] \\
&- \mathbb{E}(Q_T^u\xi) - \mathbb{E}[\int_0^T (Q_t^u c_t u_t - y_t^u(h_y(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t) - \mathbb{E}[h_{\overline{y}}(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t)]) \\
&+ z_t^u(h_z(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t) + \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t)]))\mathrm{d}t] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T (\langle h_y(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t), y_t^v - y_t^u\rangle\right. \\
&+ \langle \mathbb{E}\left[h_{\overline{y}}(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t)\right], y_t^v - y_t^u\rangle)\mathrm{d}t] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T (\langle h_z(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t), z_t^v - z_t^u\rangle\right. \\
&+ \langle \mathbb{E}\left[h_{\overline{z}}(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t)\right], z_t^v - z_t^u\rangle)\mathrm{d}t] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \langle h_u(t,y_t^u,\mathbb{E}[y_t^u],z_t^u,\mathbb{E}[z_t^u],u_t), v_t - u_t\rangle\,\mathrm{d}t\right]
\end{aligned}
$$

ce qui implique que :

$$\begin{aligned}
&\langle J'(u), v-u\rangle \\
&= \mathbb{E}[\int_0^T (Q_t^u c_t v_t - y_t^v(h_y(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) - \mathbb{E}[h_{\overline{y}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]) \\
&- z_t^v(h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]))\mathrm{d}t] \\
&- \mathbb{E}[\int_0^T (Q_t^u c_t u_t - y_t^u(h_y(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) - \mathbb{E}[h_{\overline{y}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]) \\
&+ z_t^u(h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t) + \mathbb{E}[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)]))\mathrm{d}t] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T (\langle h_y(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t), y_t^v - y_t^u\rangle\right. \\
&+ \langle \mathbb{E}\left[h_{\overline{y}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)\right], y_t^v - y_t^u\rangle)\mathrm{d}t] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T (\langle h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t), z_t^v - z_t^u\rangle\right. \\
&+ \langle \mathbb{E}\left[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)\right], z_t^v - z_t^u\rangle)\mathrm{d}t] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \langle h_u(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t), v_t - u_t\rangle \,\mathrm{d}t\right]
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\langle J'(u), v-u\rangle &= \mathbb{E}\left[\int_0^T Q_t^u c_t(v_t-u_t)\mathrm{d}t\right]\\
&- \mathbb{E}\left[\int_0^T (\langle h_y(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t), y_t^v - y_t^u\rangle\right.\\
&- \left.\langle \mathbb{E}\left[h_{\overline{y}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)\right], y_t^v - y_t^u\rangle)\mathrm{d}t\right]\\
&- \mathbb{E}\left[\int_0^T (\langle h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t), z_t^v - z_t^u\rangle\right.\\
&- \left.\langle \mathbb{E}\left[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)\right], z_t^v - z_t^u\rangle)\mathrm{d}t\right]\\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T (\langle h_y(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t), y_t^v - y_t^u\rangle\right.\\
&+ \left.\langle \mathbb{E}\left[h_{\overline{y}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)\right], y_t^v - y_t^u\rangle)\mathrm{d}t\right]\\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T (\langle h_z(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t), z_t^v - z_t^u\rangle\right.\\
&+ \left.\langle \mathbb{E}\left[h_{\overline{z}}(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)\right], z_t^v - z_t^u\rangle)\mathrm{d}t\right]\\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \langle h_u(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t), v_t-u_t\rangle\,\mathrm{d}t\right]
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\langle J'(u), v-u\rangle &= \mathbb{E}\left[\int_0^T Q_t^u c_t(v_t-u_t)\mathrm{d}t + \int_0^T h_u(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)(v_t-u_t)\mathrm{d}t\right] \qquad (2.11)\\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T Q_t^u c_t(v_t-u_t)\mathrm{d}t\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T h_u(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)(v_t-u_t)\mathrm{d}t\right]
\end{aligned}$$

D'autre part, d'aprés (2.7) on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t, Q_t^u)(v_t-u_t)\mathrm{d}t\right] \qquad (2.12)\\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T (Q_t^u c_t(v_t-u_t)\mathrm{d}t\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T h_u(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t)(v_t-u_t)\mathrm{d}t\right]
\end{aligned}$$

d'aprés (2.11) (2.12), on trouve :

$$\langle J'(u), v-u\rangle = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t, Q_t^u)(v_t - u_t)\mathrm{d}t\right]$$

en utilisant l'équivalence (2.3) et l'égalité précédente, on obtient :

$$u \text{ minimise } J \Longleftrightarrow \mathbb{E}\left[\int_0^T H_u(t, y_t^u, \mathbb{E}[y_t^u], z_t^u, \mathbb{E}[z_t^u], u_t, Q_t^u)(v_t - u_t)\mathrm{d}t\right] \geq 0,\ \forall v \in U. \tag{2.13}$$

Ce qui prouve le résultat.(2.13) ■

Conclusion

Le but principal de ce mémoire est étudié les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires de type champ moyen. Ce travail est divisé en deux chapitres :

Dans le premier chapitre, on a donné généralités sur le calcul stochastique. Et dans la deuxième a étudié les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour un système gouverné par des équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires de type champ moyen. Où la méthode de démonstration est basée sur le principe d'optimisation convexe.

Bibliographie

[1] ALAYA, M. Z. (2010). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSRs) et Mathématiques Financières.

[2] Bismut, J. M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 44(2), 384-404.

[3] Bahlali, K., Gherbal, B., & Mezerdi, B. (2010). Existence and optimality conditions in stochastic control of linear BSDEs.

[4] Briand, P. (2001). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[5] Jeanblanc, M., & Simon, T. (2005). Eléments de calcul stochastique. IRBID, septembre.

[6] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[7] Lamberton, D. (1991). Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.

[8] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & Control Letters, 14(1), 55-61.

[9] Romuald, E. L. I. E., & KHARROUBI, I. (2006). Calcul Stochastique Appliquéa la Finance. polycopié disponible sur http ://www. ceremade. dauphine. fr/elie/elie.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq T}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité filtré.
$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$	:	Filtration.
$\mathcal{F}_t^X$	:	Filtration naturelle.
$(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\mathbb{E}, \varepsilon)$	:	deux espaces mesurables.
$\Gamma(s, t)$	:	fonction de covariance.
$\mathbb{E}[X]$	:	Espérance mathématique ou moyenne du v.a. X
$i.e$	:	C'est à dire.
MB	:	Mouvement Brownien.
$resp$	:	Respectivement.
$\mathbb{P}-p.s$	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$\mathbb{R}^k$	:	Espace réel euclidien de dimension k.
$\mathbb{R}^{k \times d}$	:	Ensemble des matrices réelles $k \times d$.

EDS	:	Equations différentielle stochastique.
$EDSR$	:	Equations différentielle stochastique rétrograde.
$EDSRL$	:	Equations différentielle stochastique rétrograde linéaire.
$J(.)$	:	Fonction de coût.
U	:	Ensemble des contrôles admissibles.
$\langle ., . \rangle$	:	Le produit scalaire.
$H(t, y_t, \overline{y_t}, z_t, \overline{z_t}, v_t, Q_t)$	:	Hamiltonien.
v_t	:	Variable de contrôle.
u^θ	:	Contrôle pertubé.

Résumé:

Dans ce mémoire, nous avons étudié les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour un système gouverné par des équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires (EDSRL) de type champ moyen. La méthode de démonstration est basée sur le principe d'optimisation convexe.

Mots clés : Equations différentielles stochastiques rétrogrades, équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires, équations adjointes, contrôle optimal, le principe d'optimisation convexe.

ملخص

في هذا العمل، درسنا الشروط اللازمة و الكافية التي يحققها التحكم العشوائي الزمني المتعلق بدراسة نظام معادلات تفاضلية عشوائية زمنية خطية من نوع الحقل المتوسط. طريقة البرهان تعتمد على قاعدة التحدب الأمثل.

الكلمات المفتاحيّة: المعادلات التفاضلية العشوائية الزمنية ، المعادلات التفاضلية العشوائية الزمنية الخطية، المعادلات المرافقة، التحكم الأمثل، قاعدة التحدب الأمثل.

Abstract

In this work , we have studied the necessary and sufficient condition of optimality for systems governed by a linear backward stochastic differential equation (LBSDE) of mean field type. The method of demonstration is based on the principle of convex optimization.

Keywords: backward stochastic differential equations, linear backward stochastic differential equations, optimal control, the principle of convex optimization.