

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

NOUI Fatma Zohra

Titre :

Modèle Stochastique et application

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	GHERBEL Boulakhras	UMKB	Président
Pr.	CHALA Adel	UMKB	Encadreur
Dr.	GHOUL Abdelhak	UMKB	Examineur

Juin 2021

Dédicace

Je tiens à dédier ce modeste travail à :

*Mes chers parents : **Mohamed & Rabia**, pour leur soutien moral et matériel, les sacrifices*

et les encouragements qu'ils m'ont

porté durant toute ma vie, que dieu les gardes pour nous.

*Aussi mes sœurs : **Nerdjes, Chahinez & Ridtej** et mes frères : **Saif, Imed, Dhia & Aymen***

A toute ma grande famille et toutes mes connaissances.

*A tous mes amis surtout : **Karima & Sabrina***

*A tout mes enseignants surtout à mon encadreur Monsieur **Chala Adel***

*Et mes collègues de la promotion **2021**.*

A toutes ces personnes et d'autre, je dédie mon mémoire.

Je leur présente mes respectes et sincères remerciement.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie "**DIEU**" le tout - puissant pour la volonté, la santé et la
patience
qu'il m'a donnée durant ma vie.

Je tiens à remercier particulièrement à mon encadreur, monsieur "**CHALA Adel**"
d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très
précieux

Je tiens remercier également les membres de nos familles qui nous ont offert soutien
moral et financier, plus particulièrement mes parents pour m'avoir soutenu et aidé
jusque là.

Je tiens à remercier mes enseignants du primaire, moyen, lycée et d'université

A tous ceux qui nous ont guidés avec gentillesse et efficacité.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce
travail.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	ii
Liste des figures	vi
Introduction	1
1 Introduction aux calcul Stochastique	3
1.1 Tribu	3
1.2 Filtration	4
1.3 Processus stochastique	5
1.4 Martingale	7
1.5 Espérance conditionnelle	7
1.5.1 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu	8
1.5.2 Espérance conditionnelle par rapport à une variable	8
1.6 Loi Normale (Gaussienne)	9
1.6.1 Théorème central limite	11
1.6.2 Vecteur Gaussien	11
1.7 Mouvement Brownien	13

1.8	Intégrale, Formule d'Itô	16
1.8.1	Intégrale de Wiener	17
1.8.2	Intégrale Stochastique	18
1.9	Propriétés de l'intégrale stochastique	18
1.10	Processus d'Itô	19
1.11	Equations Différentielles Stochastiques	20
2	Chaîne de Markov et processus de Poisson	23
2.1	Chaîne de Markov	23
2.1.1	Classification des états	24
2.2	Propriété de Markov	26
2.3	Processus de Poisson	27
2.3.1	Processus de Poisson homogène	27
2.3.2	Processus de Poisson non homogène	28
2.4	Modèle de Black–Scholes	29
3	Processus de naissance et de la mort processus stochastique associés à la mutation de la bactérie	30
3.1	Processus de naissance et de la mort	30
3.1.1	Régime transitoire	31
3.2	Modèle individu-centré	34
3.3	Processus de Markov homogène	34
3.3.1	Limite des mutations petites : diffusion canonique	35
3.3.2	Calcul du gradient de fitness	36
3.4	Processus stochastique associée à la mutation de la bactérie	37
3.4.1	Les equation fondamentale	37
3.4.2	Modèle Déterministe	38
3.4.3	Modèle Stochastique	38

3.5	Application biologie	38
3.6	Oncologie	40
	Conclusion	42
	Bibliographie	43
	Annexe B : Abréviations et Notations	45

Table des figures

1.1	La loi normale centrée réduit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$	10
1.2	Trajectoire d'un mouvement Brownien standard	14
2.1	Les trajectoires du Modèle de Black-Scholes avec $S_0 = 100, r = 0,05, \mu =$ $0,15$	29
3.1	Graphe des taux des naissances et des morts.	31
3.2	Trajectoire de mouvement de Poisson $t \rightarrow (X_t^1, X_t^2)$	39

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier le modèle stochastique et ses application dans le domaine Biologie.

En Biologie beaucoup de questions restent à ce jour, en suspens et en tant que scientifique cet état de fait m'interpelé et attirer mon attention.

C'est un domaine que je n'ai jamais exploité pouvant apporter un plus à ma formation et acquérir aussi de nouvelles compétences. Il représente un défi intellectuel.

Ce pas vers l'inconnu m'a incité à choisir ce sujet. Qui plus est pour analyser et comprendre des phénomènes biologiques, une approche mathématique est souvent souhaitable.

La modélisation est un outil de plus en plus utilisé en Ecologie, Agronomie et en Biologie moléculaire, donc il est très important pour les doctorants et post-doctorants en sciences de la vie. Pour cela, nous présenterons des exemples dans des domaines d'applications variés.

Dans ce mémoire ce compose trois chapitre :

- **Le premier chapitre**, on présente des rappels sur le calcul stochastique (définitions, généralité de processus stochastique "tribu, filtration, martingale, espérance conditionnelle, loi gaussienne, mouvement brownien", formule d'Itô,..., etc). On parlait aussi sur les équations différentielles stochastiques (EDS), l'existante et l'unicité de sa solution.

Le but de ce chapitre est de présenter brièvement les résultats de processus stochastique dont nous aurons besoin dans la suite du ce travail.

- **Le second chapitre** on a présenté premièrement la définition de la chaîne de Markov

dans la biologie, et on parlait aussi sur le processus de Poisson,

- **Le troisième chapitre** on se consacre l'étude de processus de naissance et de mort et processus stochastique associées à la mutation de la bactérie, en suit on conclure se travail par une application d'équations différentielles stochastiques, en Oncologie.

Chapitre 1

Introduction aux calcul Stochastique

.

On va s'intéresser à des phénomènes qui dépend du temps t . Ce qui est connu à la date t est rassemblé dans une tribu \mathcal{F}_t , c'est l'information à la date t .

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilités. Tout au long de ce chapitre, on se réfère aux : ([1],[3],[6], [8] et [9]).

1.1 Tribu

Soit Ω est un ensemble, Un élément $\omega \in \Omega$ est appelé une éventualité.

Définition 1.1.1 Tribu (ou *algebra en Anglais*) sur Ω est une famille \mathcal{F} de sous ensemble de Ω telle que :

i) $\Omega \in \mathcal{F}$.

ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$ (stabilité par passage au complémentaire).

iii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \in \mathcal{F}$ (stabilité par réunion dénombrable).

Exemple 1.1.1 1) $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ est une tribu la plus petite (tribu trivial).

2) $\mathcal{F} = \{\mathbb{P}(\Omega)\}$ est une tribu la plus grande (tribu grossière).

3) $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une tribu borélienne.

Proposition 1.1.1 1) Toute intersection des tribus $(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F})$ sur Ω est une tribu sur Ω .
 2) La réunion des tribus sur Ω n'est pas forcément une tribu sur Ω .

Définition 1.1.2 L'espace (Ω, \mathcal{F}) est dit un espace mesurable **si et seulement si** \mathcal{F} est une tribu sur Ω .

Définition 1.1.3 Une probabilité \mathbb{P} sur (Ω, \mathcal{F}) est une application de (Ω, \mathcal{F}) dans $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ tel que :

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

ii) Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille **dénombrable** d'ensembles **deux à deux disjoints** (c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), alors :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i).$$

1.2 Filtration

Définition 1.2.1 Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une famille croissante de sous tribus de \mathcal{F} , c'est-à-dire, telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour tout $s \leq t$.

Définition 1.2.2 (Filtration naturelle) La filtration naturelle d'un processus stochastique $X = \{X_t, t \geq 0\}$, notée \mathcal{F}^X , est la famille croissante de tribus engendrées par $\{X_s, 0 \leq s \leq t\}, t \geq 0$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}^X = \{ \mathcal{F}_t^X = \sigma(\{X_s, 0 \leq s \leq t\}), t \geq 0 \}.$$

Définition 1.2.3 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ le quadruplet est appelé la base stochastique (où l'espace de probabilité **filtré**).

Définition 1.2.4 Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est satisfait les conditions habituelles si :

i) Les ensemble négligeable sont contenu dans \mathcal{F}_0 .

ii) La filtration est continue à droite i.e : $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+$ tels que $\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{s \geq t} \mathcal{F}_s$.

1.3 Processus stochastique

Définition 1.3.1 *Un processus stochastique (ou fonction aléatoire) est une famille de variable aléatoire. $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$, définie sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesurable (E, ζ) , et indexée par un paramètre t appartenant un ensemble $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}_+$.*

$$\begin{aligned} X : \mathbb{T} \times \Omega &\rightarrow E \\ (t, \omega) &\rightarrow X_t(\omega) \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1 *Si on a $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ correspond aux processus à temps discret,*

$\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ ou $[0, 1]$ pour les processus à temps continue.

Définition 1.3.2 (Trajectoires d'un processus) *Les fonctions $t \rightarrow X_t(\omega)$ sont appelées les trajectoires du processus stochastique.*

Définition 1.3.3 (Processus mesurable) *Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est dit mesurable si, l'application :*

$$\begin{aligned} X : (\mathbb{T} \times \Omega) &\rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{T}) \times \mathcal{F} \\ (t, \omega) &\rightarrow X_t(\omega) \end{aligned}$$

est mesurable.

Définition 1.3.4 (Processus adapté) *Un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si X_t est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout t .*

Définition 1.3.5 (Processus continue) *On dit qu'un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est continue si les trajectoires $t \rightarrow X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω .*

Définition 1.3.6 (Modification et Indistinguable) *Soient $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ deux processus stochastiques définie sur un même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ on a :*

i) X est une modification (ou une version) de Y si : pour tout $t \geq 0$, les variables X_t et Y_t sont égales :

$$\mathbb{P} - p.s, \quad \forall t \quad \mathbb{P} (X_t = Y_t) = 1.$$

ii) X et Y sont indistinguables si $\mathbb{P} - p.s$, les trajectoires de X et Y sont les mêmes i.e :

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

Définition 1.3.7 (Processus croissant) Un processus $X = (X_t, t \geq 0)$ est un processus croissant si $X_0 = 0$ et $t \rightarrow X_t$ est une fonction croissant c'est -à-dire $X_t \leq X_s, \forall t \leq s$, $\mathbb{P} - p.s$: sauf mention du contraire, les processus croissant sont pris continus à droite.

Définition 1.3.8 Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastiques :

1) Pour $0 \leq s \leq t$, les variables aléatoires $X_t - X_s$ sont appelées des accroissements du processus $(X_t)_{t \geq 0}$.

2) Un processus $X = (X_t, t \geq 0)$ est à accroissements indépendants si pour toute suite $0 \prec t_1 \prec \dots \prec t_n$, les variables aléatoires $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

3) Un processus $X = (X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est à accroissements stationnaire si, la distribution de la variable $X_{t+s} - X_t$ ne dépend pas de t . En d'autre terme pour tout $t \geq 0, h \geq 0$ la loi de $X_{t+h} - X_t$ est égale à la loi de $X_s - X_0$.

4) Un processus $X = (X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est gaussien si, pour tous $t_0 \prec t_1 \prec \dots \prec t_n$, $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Définition 1.3.9 (Processus Gaussien) Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus Gaussien ssi $\forall n \geq 1 : \forall t_0, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+, \forall a_0, a_1, \dots, a_n : \sum_{i=1}^n a_i t_i = 1$ est un v.a Gaussien.

1.4 Martingale

Définition 1.4.1 Soient un processus $(M_t)_{t \in \mathbb{T}}$ définie sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$ est une \mathcal{F}_t -martingale si :

- 1- M_t est \mathcal{F}_t -adapté, pour tout t .
- 2- $M_t \in \mathbb{L}^1(\Omega)$, (i.e : $\mathbb{E}(|M_t|) < +\infty, \forall t$).
- 3- $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ pour tout $s \leq t$.

Une sur-martingale et une sous-martingale sont des processus qui vérifient les deux premiers propriétés et pour tout $s \leq t$ respectivement :

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s.$$

Proposition 1.4.1 Si M est une martingale alors : $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0], \forall t \leq \mathbb{T}$.

Preuve. On a pour tout $t \leq \mathbb{T}$:

$$\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_0)] = \mathbb{E}[M_0].$$

D'où la réponse. ■

Proposition 1.4.2 Soit M une \mathcal{F} -martingale et $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe mesurable, si $\Phi(M)$ est intégrable, alors $\Phi(M)$ une sous-martingale.

Proposition 1.4.3 Soit M une \mathcal{F} -martingale de carré intégrable (i.e : $\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$, pour tout t), alors pour $s \leq t$ on a,

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s].$$

1.5 Espérance conditionnelle

Ici $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité complet, (Voir [6]).

Définition 1.5.1 (*Probabilité conditionnelle*) La probabilité conditionnelle de A sachant B est $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ où $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

1.5.1 Espérance conditionnelle par rapport à une tribu

Soit X est une v.a.r (intégrable) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} .

Définition 1.5.2 L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ de X quand \mathcal{G} est l'unique variable aléatoire :

i) \mathcal{G} -mesurable,

ii) $\int_B \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] dP = \int_B X dP ; \forall B \in \mathcal{G}$. C'est aussi l'unique variable \mathcal{G} -mesurable telle que :

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] Y) = \mathbb{E}(XY).$$

Pour tout variable Y , \mathcal{G} -mesurable bornée. Il en résulte que si X est de carré intégrable. $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ est la projection de X sur l'espace des variables aléatoires \mathcal{G} mesurables, de carré intégrable, c'est-à-dire la variable aléatoire \mathcal{G} -mesurable qui minimise $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ parmi les v.a. Y , \mathcal{G} -mesurables.

1.5.2 Espérance conditionnelle par rapport à une variable

On définit l'espérance conditionnelle d'une variable X (intégrable) par rapport à Y comme étant l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu $\sigma(Y)$: On la note $\mathbb{E}(X | Y)$. C'est une variable mesurable par rapport à la tribu engendrée par Y , donc c'est une fonction de Y : Il existe de $\Psi : \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} borélienne telle que $\mathbb{E}(X | Y) = \Psi(Y)$.

Définition 1.5.3 L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X | Y)$ est caractérisée par la :

i) variable $\sigma(Y)$ mesurable.

ii) $\int_A \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] dP = \int_A X dP , \forall A \in \sigma(Y)$. La deuxième propriété est équivalente :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) \Psi(Y)] = \mathbb{E}[X \Psi(Y)],$$

pour tout fonction borélienne bornée, et pour tout $B \in \mathcal{G}$:

$$\int_{Y \in B} E[X | \mathcal{G}] dP = \int_{Y \in B} X dP.$$

Propriété 1.5.1 de l'espérance conditionnelle Soient X et Y deux v.a et \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 sous-tribus de \mathcal{F} tel que : $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1$, on a :

- 1) (**Linéarité**) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ alors : $\mathbb{E}[aX + bY | \mathcal{G}] = a \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] + b \mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]$.
- 2) (**Croissance**) Si $X \leq Y$, alors : $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y | \mathcal{G}]$.
- 3) Si X est \mathcal{G} -mesurable, alors : $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = X$.
- 4) $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{G})] = \mathbb{E}[X]$.
- 5) $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{G}_1) | \mathcal{G}_2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X | \mathcal{G}_2) | \mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_2]$.
- 6) Si X est indépendant de \mathcal{G} , $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.
- 7) Si Y est \mathcal{G} -mesurable et bornée, alors : $\mathbb{E}[XY | \mathcal{G}] = Y \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$.
- 8) (**Inégalité de Jensen**) Si Φ convexe et mesurable, $\mathbb{E}[\Phi(X) | \mathcal{G}] \geq \Phi(\mathbb{E}[X | \mathcal{G}])$.
- 9) Si X une v.a telle que $X \in \mathbb{L}^p_{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}$, $\forall p \geq 1$, alors : $\|\mathbb{E}(X | \mathcal{G})\|_{\mathbb{L}^p_{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}} \leq \|X\|_{\mathbb{L}^p_{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}}$.

1.6 Loi Normale (Gaussienne)

Dans tout ce qui suit, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité complet.

Définition 1.6.1 On dit qu'une v.a.r, X est une variable aléatoire gaussienne ou normale de paramètres (m, σ^2) , ($m \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$) si sa fonction de densité est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, sa loi F_X est donnée par :

$$\forall A \in B(\mathbb{R}), F_X(A) = \int_A f_X(x) dx,$$

et on note :

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2),$$

Si $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$, alors $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ est centré réduit où sa fonction de densité de probabilité et positive est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t)^2}{2}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

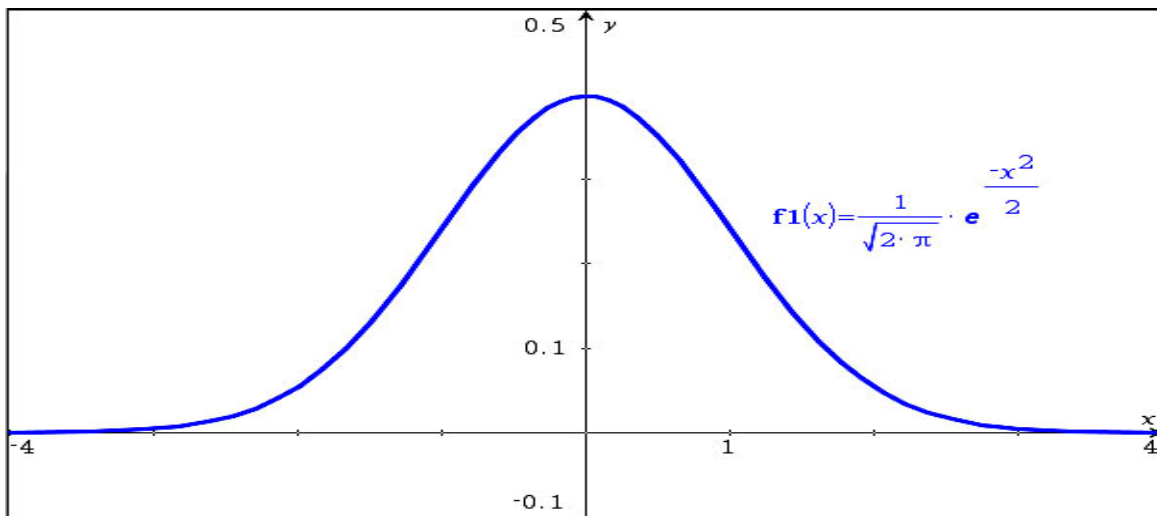


FIG. 1.1 – La loi normale centrée réduit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Si $m = 0$ le vecteur X est dit centré.

Remarque 1.6.1 Lorsque $\sigma = 0$, X est une variable constante i.e $X = m$, $\mathbb{P} - p.s.$

Proposition 1.6.1 Une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ a pour :

- Esperance : $\mathbb{E}[X] = m$.
- Variance : $\text{var}[X] = \sigma^2$.
- Fonction caractéristique : $\varphi_X(t) = \exp\left(\frac{imt - \sigma^2 t^2}{2}\right), \forall t \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.6.2 Soient $N_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $N_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ sont indépendantes,

alors :

$$N_1 + N_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

1.6.1 Théorème central limite

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoire indépendante identiquement distribuée de carré intégrable. On note $\mathbb{E}(X) = m$, $\text{var}(X) = \sigma^2$.

Définition 1.6.2 On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire

$$Z_n = \sqrt{n} \left(\frac{X_{t_1} + X_{t_2} + \dots + X_{t_n}}{n} - m \right).$$

Alors, $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi normale, où si Z suit cette loi

$$\mathbb{P}(Z_n \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z \leq x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

de façon équivalente la suite des fonctions caractéristique $(\varphi_{Z_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers φ_Z pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{Z_n}(t) = \mathbb{E}(\exp(itZ_n)) \rightarrow \mathbb{E}(\exp(itZ)) = \varphi_Z(t),$$

$\varphi_Z(t) = \exp\left(\frac{-\sigma^2 t^2}{2}\right)$, ce résultat est la base de la construction d'intervalles de confiance asymptotique.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{X_{t_1} + X_{t_2} + \dots + X_{t_n}}{n} \in \left[m - \sigma \frac{1,96}{\sqrt{n}}, m + \sigma \frac{1,96}{\sqrt{n}} \right] \right) \geq 0,95.$$

1.6.2 Vecteur Gaussien

Définition 1.6.3 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire Gaussien si toutes les combinaisons linéaires de ses composantes sont Gaussiennes i.e :

$$\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^n a_i X_i \text{ est une v.a.r, gaussienne.}$$

Proposition 1.6.3 *Si le vecteur (X_1, X_2) est Gaussien, les v.a X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$.*

On note : X^t matrice transposé.

Définition 1.6.4 *Un vecteur aléatoire X à valeur dans \mathbb{R}^n est dit Gaussien si toute les combinaisons linéaires de ses composantes est une variable aléatoire Gaussien si*

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^t$ est un vecteur Gaussien, on définit son vecteur moyenne $\mathbb{E}[X]$ par $\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n))^t = \mu$ et sa matrice de variance-covariance $\text{var}(X)$ par $\text{var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))) = \sum$.

Elle admet comme densité la fonction f , où $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ définie par :

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt[2n]{2\pi} \sqrt{\det \sum}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^t \sum^{-1} (x - \mu) \right\}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Propriété 1.6.1 d'un vecteur aléatoire

i) La linéarité : Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ n -variable aléatoire tel que chaque X_i suit la loi normale de moyenne μ_i et de variance σ_i^2 , $\sim (\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2))$.

En utilisant la règle des combinaisons linéaires pour n -variables aléatoires normale, on retrouve :

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2) = \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i^2\right).$$

Preuve. $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ où X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables aléatoires réelles $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$:

$$\begin{aligned} \varphi_{\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i}(x) &= \mathbb{E} \left[\exp jx \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i \right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E} [\exp jx \alpha_i \mu_i] = \prod_{i=1}^n \varphi_{\mu_i}(\alpha_i x) \\ &= \prod_{i=1}^n \exp \left(jx \alpha_i \mu_i - \frac{\alpha_i^2 \sigma_i^2}{2} \right) \\ &= \exp \left\{ jx \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \sigma_i^2}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i = \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2\right).$$

D'où le résultat. ■

ii) L'indépendance : Si les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes, alors la matrice de variance-covariance est une matrice diagonale de la forme :

$$\Sigma(x) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Propriété 1.6.2 En notant dans ce cas $\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n))^t$, la densité de probabilité s'écrit, alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \prod_{i=1}^n \sigma_i} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2\right\}, \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

1.7 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans un liquide, ce mouvement aléatoire, dû aux chocs successifs entre le pollen et les molécules du liquide, entraîne la dispersion ou la diffusion du pollen dans le liquide. Il a été observé pour la première fois en **1827** par le **botaniste Robert Brown**. (Voir [7]).

Définition 1.7.1 On appelle mouvement Brownien standard est un processus stochastique W à valeurs réelles tel que :

1. $\mathbb{P} - p.s, t \rightarrow W_t(\omega)$ est continue pour tout ω .

2. Pour $0 \leq s \leq t$, $W_t - W_s$ est indépendant de la tribu $\sigma \{W_u, u \leq s\}$ et de loi Gaussienne centrée de variance $t - s$.

3. $W_0 = 0 \quad \mathbb{P} - p.s.$,

Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $W(t)$ suit la loi Gaussienne centrée de variance t donc de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2t\pi}} \exp \left\{ \frac{-x^2}{2t} \right\}.$$

On dit qu'un mouvement Brownien (**MB** dans la suite) part d'un point x si $W(0) = x$.

Définition 1.7.2 Un mouvement Brownien est dit standard si :

$$W_0 = 0 \quad \mathbb{P} - p.s., \quad \mathbb{E}[W_t] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[W_t^2] = t,$$

où sa représentation est :

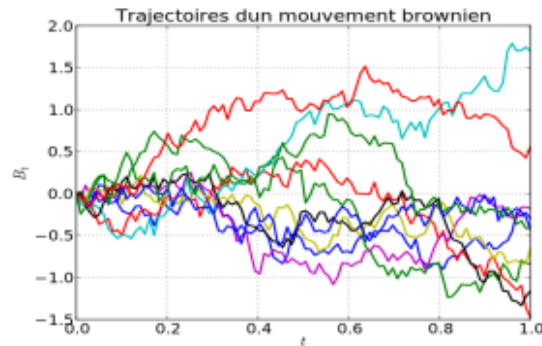


FIG. 1.2 – Trajectoire d'un mouvement Brownien standard

Théorème 1.7.1 W est un mouvement Brownien standard si et seulement si W est un processus Gaussien continu centré de fonction de covariance :

$$\text{cov}(W_s, W_t) = s \wedge t = \min(s, t).$$

Preuve. W est un mouvement Brownien standard $W_0 = 0$, alors

$$\begin{aligned} \text{cov}(W_s, W_t) &= \text{cov}(W_s - W_t + W_t, W_t) = \text{cov}(W_s - W_t, W_t) + \text{cov}(W_t, W_t) \\ &= \text{cov}(W_s - W_t, W_t - W_0) + \text{var}(W_t) \\ &= 0 + t = s \wedge t = \min(s, t) \text{ si } t \prec s \end{aligned}$$

D'où la réponse. ■

Proposition 1.7.1 Si $(W_t)_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -mouvement Brownien standard, alors :

1. $(W_t)_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -martingale.
2. $(W_t^2 - t)_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -martingale.
3. $(\exp(\sigma W_t - (\frac{\sigma^2}{2})t))_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F}_t -martingale.

preuve. C'est trois processus sont adapté \mathcal{F}_t . Il sont intégrables car $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$: Reste vérifier la dernière condition. Pour **le premier point**, notons que si $s \leq t$, et comme $W_t - W_s$ est indépendante de la tribu, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[W_t - W_s + W_s | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[W_t - W_s] + W_s \\ &= 0 + W_s = W_s. \end{aligned}$$

Pour démontrer **le deuxième point** remarquons que :

$$\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t^2 | \mathcal{F}_s] + W_s^2 - 2W_s \mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s].$$

Comme W_s est une martingale, on a $\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] = W_s$ et donc :

$$\mathbb{E}(W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(W_t^2 | \mathcal{F}_t) + W_s^2.$$

Notons, de plus, que comme $W_t - W_s$ est indépendant de \mathcal{F}_s , on a :

$$\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = \text{var}[W_t - W_s] = t - s.$$

Donc,

$$\mathbb{E}[W_t^2 | \mathcal{F}_s] - W_s^2 = t - s,$$

ou encore :

$$\mathbb{E}[W_t^2 - t | \mathcal{F}_s] = W_s^2 - s.$$

Pour prouver **le troisième point** notons, en utilisant l'indépendance des accroissements, que :

$$\mathbb{E}[\exp^{\sigma(W_t - W_s)} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\exp^{\sigma(W_t - W_s)}].$$

Mais la loi de $W_t - W_s$ est celle d'une Gaussienne centrée de variance $t - s$ (dont on peut calculer la transformée de Laplace) donc :

$$\mathbb{E}(\exp^{\sigma(W_t - W_s)}) = \exp\left\{\frac{\sigma^2}{2}(t - s)\right\}.$$

On a donc,

$$\mathbb{E}[\exp^{\sigma(W_t - W_s)} | \mathcal{F}_t] = \exp\left\{\frac{\sigma^2}{2}(t - s)\right\}.$$

La variable aléatoire W_s étant \mathcal{F}_t -mesurable on obtient donc :

$$\mathbb{E}\left[\exp^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t} | \mathcal{F}_t\right] = \exp\left\{\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2}s\right\}.$$

D'où la réponse. ■

1.8 Intégrale, Formule d'Itô

Définition 1.8.1 On définit l'intégrale suivant par cette formule :

$$\mathbf{I}(\theta) = \int_0^T \theta_s dW_s, \quad (1.1)$$

où $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est un certain processus et $\{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien. Le problème est bien sûr de donner un sens à l'élément différentiel dW_s puisque la fonction $s \rightarrow W_s(\omega)$ n'est pas dérivable.

1.8.1 Intégrale de Wiener

Définition 1.8.2 *L'intégrale de Wiener est simplement une intégrale du type (1.1) avec θ fonction déterministe, c'est à dire ne dépend pas de ω . On fixe un horizon $T > 0$ déterministe et on note*

$$\mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{R}) = \left\{ \theta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tel que } \int_0^T |\theta_s|^2 ds < \infty \right\}.$$

★ **En escalier** : Si θ^n est une fonction en escalier donné par $\theta^n(t) = \sum_{i=1}^{\tau_n} \alpha_i(t) \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}]}$ où $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $\{t_i^n\}$ une suite croissante de $[0, T]$. Il est très facile de définir l'intégrale de Wiener par :

$$\mathbf{I}(\theta^n) = \int_0^T \theta_s^n dW_s = \sum_{i=1}^{\tau_n} \alpha_i(t) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Remarque 1.8.1 *la variable aléatoire $\mathbf{I}(\theta^n)$ est une variable Gaussienne d'espérance nulle et de variance,*

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathbf{I}(\theta^n)) &= \sum_{i=1}^{\tau_n} \alpha_i^2(t) \text{var}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}), \\ &= \sum_{i=1}^{\tau_n} \alpha_i^2(t) (t_{i+1} - t_i) = \int_0^T (\theta_s^n)^2 dW_s. \end{aligned}$$

★ **En générale** : Soit $\theta \in \mathbb{L}^2([0, T], \mathbb{R})$, il existe une suite θ^n de fonction en escalier qui

converge vers $\theta : \int_0^T |\theta_n - \theta|(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, la limite prise dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. On dit que $\mathbf{I}(\theta^n)$ est l'intégrale stochastique (ou l'intégrale de Wiener) de θ par rapport à W .

1.8.2 Intégrale Stochastique

On cherche maintenant à définir l'intégrale (1.1), le caractère aléatoire de θ va exiger des conditions supplémentaire par rapport au cas de l'intégrale de Wiener.

★ **Processus étagées** : Ce sont les processus : $\mathbf{I}(\theta^n) = \sum_{i=1}^{\tau_n} \theta_i(t) 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ où $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{\tau_n}$ et $\theta \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour tout $i = 0, \dots, \tau_n$. On définit, alors

$$\mathbf{I}(\theta^n) = \int_0^T \theta_s^n dW_s = \sum_{i=1}^{\tau_n} \alpha_i(t) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}),$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{I}(\theta^n)) = 0 \text{ et } \text{var}(\mathbf{I}(\theta^n)) = \mathbb{E} \left(\int_0^T (\theta_s^n)^2 dW_s \right).$$

1.9 Propriétés de l'intégrale stochastique

1) $X \rightarrow \int_0^T X_s dW_s$ est linéaire.

2) Le processus $\left(\int_0^T X_s dW_s \right)_{t \in [0, T]}$ est à trajectoire continues.

3) Le processus $\left(\int_0^T X_s dW_s \right)_{t \in [0, T]}$ est adapté à $(\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$.

4) $\mathbb{E} \left[\int_0^T X_s dW_s \right] = 0$ et $\text{var} \left[\int_0^T X_s dW_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T X_s^2 dW_s \right]$.

5) On a pour $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T X_u dW_u \mid \mathcal{F}_s^W \right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T X_u dW_u \right)^2 \mid \mathcal{F}_s^W \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^T X_u^2 du \mid \mathcal{F}_s^W \right].$$

6) Le processus $\left(\int_0^t X_s dW_s \right)_{t \in [0, T]}$ est une $(\mathcal{F}_t^W)_{t \in [0, T]}$ martingale continue de carrée intégrable. De plus,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t X_s dW_s \right|^2 \right] \leq 4 \mathbb{E} \left[\int_0^T X_s^2 dW_s \right].$$

1.10 Processus d'Itô

Définition 1.10.1 *C'est un processus sous forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dW_s, \quad (1.2)$$

où b est un processus \mathcal{F}_t^W -adapté tel que : $\int_0^t |b(s)| ds < +\infty$ \mathbb{P} -p.s, pour tout $t \geq 0$, et σ un bon processus local. On utilise cette notation :

$$\begin{cases} dX_t = b(t)dt + \sigma(t)dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \quad (1.3)$$

Théorème 1.10.1 • 1^{ère} formule d'Itô : Supposons f de classe C^2 , alors:

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_{(s)}^2 ds. \quad (1.4)$$

Cette formule s'écrit sous forme :

$$\begin{aligned} df(X_t) &= f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \sigma_{(t)}^2 dt \\ &= f'(X_t) b(t) dt + \frac{1}{2} f''(X_t) \sigma_{(t)}^2 dt + f'(X_t) \sigma(t) dW_t \\ &= f'(X_t) b(t) dt + \frac{1}{2} f''(X_t) dX_t + f'(X_t) \sigma(t) dW_t. \end{aligned}$$

• **2^{ème} formule d'Itô** : Soit f définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t , de classe C^2 par rapport à x . On a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_t(s, X_s) ds + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) \sigma_{(s)}^2 ds. \quad (1.5)$$

Comme précédemment, on peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \left[f'_t(t, X_t) + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t) \sigma_{(t)}^2 \right] dt + f'_x(t, X_t) dX_t \\ &= f'_t(t, X_t) dt + f'_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t) d\langle X \rangle_t. \end{aligned}$$

1.11 Equations Différentielles Stochastiques

Nous commençons étudier les équations différentielles stochastiques de la forme :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s,$$

où sous forme condensées :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Définition 1.11.1 (Solution EDS)

Soit σ et b deux fonctions de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données. On se donne également un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration (\mathcal{F}_t) et un (\mathcal{F}_t) -mouvement Brownien W sur cet espace. Une solution est un processus X continue (\mathcal{F}_t) -adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s, X_s)ds$ et $\int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$ ont un sens, et définit par

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s,$$

est satisfait pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ \mathbb{P} -p.s.

Théorème 1.11.1 (Existence et unicité) *On suppose que*

1) *Les fonctions b et σ sont continues.*

2) *Il existe k tel que $\forall t \in [0, T], x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$:*

– *Condition lipschitzien : $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq k|x - y|$.*

– *Croissance linéaire : $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq k(1 + |x|)$.*

3) *La condition initiale X_0 est indépendante de $(W_t, t \geq 0)$ et est de carré intégrable. Alors, d'après (1, 2 et 3), il existe une unique solution à trajectoires continues pour $t \leq T$. De plus cette solution vérifie,*

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right) < +\infty.$$

Définition 1.11.2 (Mouvement Brownien géométrique)

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien réel μ et σ deux constantes. le processus :

$$X_t = X_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\},$$

est appelé *Mouvement Brownien géométrique*, ce processus appelé processus "**log-normale**" :

$$\log X_t = \log X_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t,$$

suit la loi normale.

Définition 1.11.3 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est le processus gaussien centré défini par :

$$U_t = \exp^{-\frac{t}{2}} W(\exp(t)),$$

où W est un mouvement Brownien. On montre facilement que $U_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ car $\text{var}(U_t) = 1$, ce processus est donc stationnaire. Sa fonction de covariance est donnée par :

$$\text{cov}(s, t) = \exp(-\frac{|t-s|}{2}).$$

En d'autre terme cas on considère l'équation de Langevin

$$V_t = V_0 - \int_0^t aV_s ds + \sigma W_t, \tag{1.6}$$

a pour unique solution

$$V_t = \exp^{-t\alpha} V_0 + \int_0^t \exp^{-(t-s)\alpha} \sigma W_s.$$

On écrit l'équation (1.2) sous forme condensée

$$dV_t + \alpha V_t dt = \sigma W_t \quad , V_0 \text{ donné.}$$

Les données du problème sont la variable aléatoire V_0 , le Brownien W et les constantes α et σ .

Pour plus des détails, nous allons au référence : [9].

Chapitre 2

Chaîne de Markov et processus de Poisson

Les processus de Markov sont des processus stochastiques tels que chaque instant leur comportement dans le futur dépend seulement de leur valeur présente et non de toutes leurs valeurs passées. Les chaînes de Markov sont des processus de Markov à temps discret. Ces processus permettent de modéliser de nombreux phénomènes, ils sont par exemple utilisés pour des problèmes de télécommunication, de théorie du signal, d'imagerie informatique, ainsi nous trouvons des applications dans la biologie, la génétique des populations, la recherche opérationnelle, les sciences de l'ingénierie, et les mathématiques financières,...., ces processus donnent des réponses qualitatives aussi bien que quantitatives aux problèmes posés. On utilise les références suivant : ([9],[11], [14] et [15]).

2.1 Chaîne de Markov

Définition 2.1.1 *Une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble au plus dénombrable E est une chaîne de Markov d'espace d'états E si et seulement si*

pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout (x_0, \dots, x_{n+1}) dans E , tels que $\mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) > 0$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n). \quad (2.1)$$

Définition 2.1.2 La chaîne est dite **homogène** si on a de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x et y dans E ,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = y \mid X_0 = x),$$

où le second membre de l'équation (2.1) ne dépend pas de n .

Définition 2.1.3 (Matrice de Transition de la chaîne) Une matrice $\mathbb{P} = (p_{x,y})_{x,y \in E}$ vérifiant :

$$\mathbb{P}_{x,y} \geq 0; \forall x, y \in E \text{ et } \sum_{y \in E} \mathbb{P}_{x,y} = 1, \forall x \in E,$$

s'appelle une matrice **stochastique**.

Définition 2.1.4 (Distribution Stationnaire) Une distribution de probabilité sur E (un ensemble dénombrable) est dite **stationnaire** si elle satisfait :

$$\pi_y = \sum_{x \in E} \pi_x \mathbb{P}_{x,y} \quad \forall y \in E.$$

Définition 2.1.5 (Distribution Initiale) La loi initiale de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ est la loi de X_0 où la variable X_0 est l'état initial, et sa distribution de probabilité v_0 est la distribution initiale :

$$v_0(x) = \mathbb{P}(X_0 = x), \quad x \in E$$

2.1.1 Classification des états

Soit P un noyau de transition, sur l'ensemble S fini ou dénombrable, P est fixé.

Définition 2.1.6 Si x et y sont deux états dans S , on dit que x **conduit (ou accessible)** à y . S'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $P^n(x,y) > 0$. On note alors $x \rightarrow y$.

Définition 2.1.7 Si x et y sont deux états dans S , on dit que x et y **communiquent** si x conduit à y et y conduit à x . On note alors :

$$x \leftrightarrow y \Leftrightarrow (x \rightarrow y \text{ et } y \rightarrow x),$$

où cette relation \leftrightarrow définie est réflexive, symétrique et transitive : c'est une relation d'équivalence.

lorsque $P_{(x,x)}^n = 1$ pour tout $x \in S$. Conséquence : pour tout $x \in S$ on a $x \rightarrow x$, la relation est réflexive.

Transitivité de la relation (conséquence de l'équation de **Chapman-Kolmogorov**) : $\forall x, y, z \in S, x \rightarrow y \text{ et } y \rightarrow z \Rightarrow x \rightarrow z$. La symétrie n'est pas automatique : $x \rightarrow y$ n'entraîne pas $y \rightarrow x$.

Proposition 2.1.1 (**Transitivité**) Si $(x \rightarrow y)$. et $(y \rightarrow z)$, alors $(x \rightarrow z)$.

Preuve. par hypothèse, il existe $n, m \geq 1$ tel que $P^n(x, y) \succ 0$ et $P^m(y, z) \succ 0$ or

$$P^{n+m}(x, z) = \sum_{l \in E} P^n(x, l)P^m(l, z) \geq P^n(x, y)P^m(y, z) \succ 0.$$

D'où le résultat. ■

La relation de Chapman-Kolmogorov

On note $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov homogène, dont l'ensemble des états est E et la matrice de transition $\mathbb{P} = (p_{xy})_{(x,y) \in E^2}$. Pour $n \geq 0$ et $x, y \in E$, on désigne par $p_{xy}^{(n)}$ la probabilité, partant de l'état x à l'instant 0, d'être dans l'état y à l'instant n , en d'autres termes on a :

$$p_{xy}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x).$$

Proposition 2.1.2 Pour tout $n \geq 0$ la matrice P^n est stochastique.

Preuve. En effet, pour tout $x \in E$, on a :

$$\sum_{y \in E} p_{xy}^{(n)} = \sum_{y \in E} \mathbb{P}(X_n = y \mid X_0 = x) = 1.$$

■

2.2 Propriété de Markov

Dans toute la suite, nous supposons l'existence et l'unicité d'une solution à l'EDS (1.3), au réfère ([13]).

Théorème 2.2.1 *Le processus X solution de l'EDS (1.3) est un processus de Markov homogène, c'est même un processus fortement markovien.*

Preuve. Fixons un temps fixe T . Nous considérons l'EDS suivante,

$$\begin{cases} dX'_t = b(X'_t)dt + \sigma(X'_t)dW_t^T \\ X'_0 = X_T, \end{cases} \quad (2.2)$$

où $W_t^T = W_{T+t} - W_T$. Le processus W^T est encore un mouvement Brownien, indépendant du passé avant T , et donc indépendant de X_T . Les coefficients dans l'équation (2.2) étant lipschitziens, la solution X' existe et est unique.

Définissons maintenant un nouveau processus X'' par $X''_t = X_t$ si $t < T$ et $X''_t = X'_{t-T}$ si $t \geq T$. Clairement, au vu de (2.2), X'' satisfait l'équation (1.2). Ainsi, par l'unicité, on obtient $X'' = X$, et $X_{T+t} = X'_t$ si $t \geq 0$.

Il s'en suit que la variable aléatoire X_{T+t} dépend seulement de X_T et de W^T , et la loi conditionnelle de X_{T+t} sachant que $X_T = x$ sera égale à la loi de X_t , quand la condition initiale est $X_0 = x$. Nous en déduisons, alors que X est un processus de Markov homogène.

Nous pouvons reproduire l'argument précédent en prenant comme temps T un temps d'arrêt fini au lieu d'un temps fixe, et nous obtenons aussi la propriété de Markov forte

pour X .

Dans la suite, nous noterons $(P_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe de transition de la solution X de l'EDS (1.3), satisfaisant pour toute fonction continue bornée f que :

$$P_t f(x) = \mathbb{E}(f(X_t) | X_0 = x).$$

Sous certaines hypothèses, on peut montrer que la loi de X_t sachant que $X_0 = x$ admet une densité. ■

2.3 Processus de Poisson

Définition 2.3.1 *Un processus de comptage est un processus qui compte le nombre d'occurrences d'un événement (l'effectif d'une population) à un instant t . On le note $N(t)$. par exemple le nombre d'apparition d'une maladie dans une population dans l'intervalle de temps $[0, t]$.*

- Soit $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un processus aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , tel que $N_0 = 0$. (Voir [11]).

2.3.1 Processus de Poisson homogène

Définition 2.3.2 *Processus de Poisson homogène $\{N_t, t \in [0, +\infty[$ si son intensité λ ne dépend pas du temps. De plus, il satisfait les conditions :*

1) *Le processus est sans mémoire : si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour t_1, t_2, \dots, t_n tel que $t_1 \prec t_2 \prec \dots \prec t_n$, les accroissements $N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont des variables aléatoires indépendantes. Autrement dit les nombres d'événements qui surviennent dans des intervalles de temps disjoints sont indépendants et l'occurrence d'événements avant l'instant t n'influe pas, l'occurrence d'événements après l'instant t .*

2) *Le processus est homogène dans le temps : Si pour tout s et t l'accroissement $N_{t+s} - N_s$ a même loi que N_t . Donc le processus stochastique N est dit stationnaire.*

3) La probabilité qu'il se produise plus d'un événement dans un intervalle infiniment petit d'amplitude h est quasiment nulle. On l'exprime que :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(N_{t-h} - N_t \succ 2) = \sigma(h), \\ \mathbb{P}(N_{t-h} - N_t = 1) = \lambda h + \sigma(h), \\ \mathbb{P}(N_{t-h} - N_t = 0) = 1 - \lambda h + \sigma(h). \end{cases} .$$

Définition 2.3.3 La variable aléatoire N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt , c'est-à-dire que pour tout entier n non négatif.

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t),$$

avec

$$\mathbb{E}[N_t] = \lambda t \quad \text{et} \quad \text{var}[N_t] = \lambda t.$$

2.3.2 Processus de Poisson non homogène

Définition 2.3.4 Processus de Poisson non homogène $\{N_t, t \in [0, +\infty[]$ si son intensité λ dépend du temps t de plus, il satisfait les conditions :

1) \mathbb{I} intervalle de \mathbb{R}_+ , et $N(\mathbb{I})$ le nombre d'événements survenus dans \mathbb{I} .

On dit que $\{N_t, t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de mesure de concentration α si pour tout partition de \mathbb{R}_+ , $(\mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2, \dots, \mathbb{I}_n)$, les variables aléatoires $N(\mathbb{I}_1), N(\mathbb{I}_2), \dots, N(\mathbb{I}_n)$ sont indépendantes.

$$2) \begin{cases} \mathbb{P}(N_{t-h} - N_t \succ 2) = \sigma(h), \\ \mathbb{P}(N_{t-h} - N_t = 1) = \lambda(t) h + \sigma(h), \\ \mathbb{P}(N_{t-h} - N_t = 0) = 1 - \lambda(t) h + \sigma(h). \end{cases} .$$

Définition 2.3.5 Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha(t)$:

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\alpha(t))^n}{n!} \exp(-\alpha(t)),$$

où $\alpha(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ est appelée mesure de concentration.

2.4 Modèle de Black–Scholes

Définition 2.4.1 *Le modèle de Black-Scholes modélise l'évolution temporelle du prix d'un actif, noté S_t , à l'aide d'une équation différentielle stochastique, i.e,*

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

où $\sigma > 0$ est la volatilité (écart type) et W_t un mouvement Brownien². Il est facile (mais admis car bien trop tôt pour vous) de montrer à l'aide de la formule d'Itô que la solution de cette équation différentielle stochastique est donnée par :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}.$$

Comme le mouvement Brownien est inconnu, on supposera juste qu'à temps $t > 0$ fixé, $W_t \sim \mathcal{N}(0, t^2)$.

La formule de Black-Scholes établit la valeur théorique d'une option européenne. (Voir [12]).

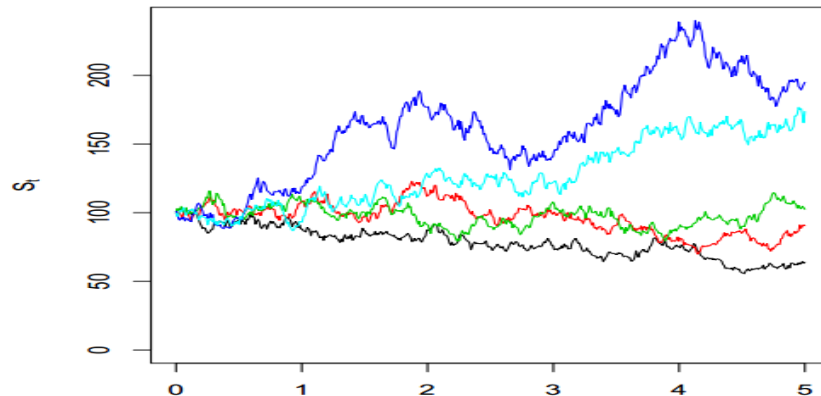


FIG. 2.1 – Les trajectoires du Modèle de Black-Scholes avec $S_0 = 100$, $r = 0,05$, $\mu = 0,15$.

Chapitre 3

Processus de naissance et de la mort processus stochastique associes à la mutation de la bactérie

Elle utilisent en biologie, démographie, physique, sociologie, pour rendre compte de l'évolution de la taille d'une population, (Voir [4],[5], [9], [12] et [15]).

3.1 Processus de naissance et de la mort

Définition 3.1.1 *Les processus de naissance et de la mort sont des processus de Markov continus ($\mathbb{T} = \mathbb{R}$) à valeurs dans $\mathbb{E} = \mathbb{N}$ tels que les seules transitions non négligeables possibles à partir de k soient vers $k + 1$ ou vers $k - 1$. Le générateur infinitésimal du processus est donc une matrice dite “**tridiagonale**” $A = (\alpha_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$, ce qui vérifier :*
 $a_{i,i} = -(\lambda_1 + \mu_1)$ sont des processus de naissance et de mort, $\alpha_{i,j} = 0$ si $|i - j| \geq 2$,

$\alpha_{k,k+1} = \lambda_k$ (le taux de naissance), et $\alpha_{k,k-1} = \mu_k$ (le taux de mort) pour $k \geq 1$,

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & \dots & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & \vdots \\ \vdots & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 \\ & & \mu_3 & \ddots \ddots \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots \ddots \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

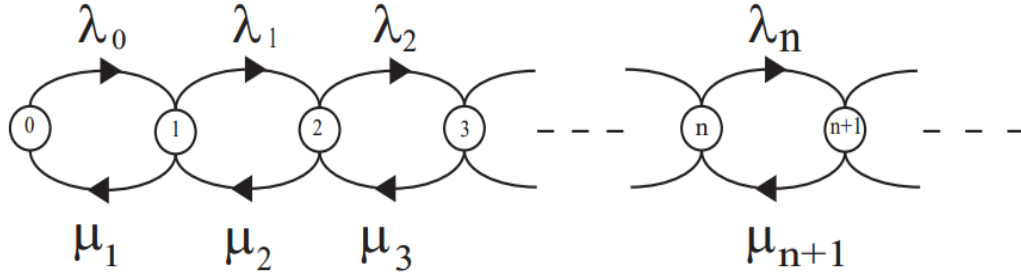


FIG. 3.1 – Graphe des taux des naissances et des morts.

3.1.1 Régime transitoire

Théorème 3.1.1 On considère $\mathbb{P}(h)$ lorsque $h \rightarrow 0$ grâce à $\mathbb{P}(h+t) = \mathbb{P}(t)P(h) = \mathbb{P}(h)\mathbb{P}(t)$ et à $\mathbb{P}(0) = I$ on a :

$$\frac{\mathbb{P}(h+t) - \mathbb{P}(t)}{h} = \frac{\mathbb{P}(t)\mathbb{P}(h) - \mathbb{P}(t)}{h} = \mathbb{P}(t) \left(\frac{\mathbb{P}(h) - I}{h} \right) = \left(\frac{\mathbb{P}(h) - I}{h} \right) \mathbb{P}(t).$$

Par la limite lorsque $h \rightarrow 0$, on a alors $\mathbb{P}'(t) = \mathbb{P}(t)A = A\mathbb{P}(t)$, et $\mathbb{P}(0) = I$. Cette équation différentielle matricielle admet l'unique solution est :

$$\mathbb{P}(t) = \exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

On sait que $\mathbb{P}(t) = \mathbb{P}(i_j(t))$ où $\mathbb{P}(i_j(t)) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ la loi de X_t est alors donnée par $\vec{\pi}(t) = \vec{\pi}(0) \mathbb{P}(t)$, pour résoudre cette équation de Kolmogorov :

Soit $\mathbb{P}_n(t) = \mathbb{P}(X_t = n)$. la probabilité que l'effectif de la population soit égal à n à l'instant t .

En effet

Pour $n = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(t+h) &= \mathbb{P}(X_{t+h} = 0, X_t = 0) + \mathbb{P}(X_{t+h} = 0, X_t \neq 0), \\ &= \mathbb{P}(X_{t+h} = 0 \mid X_t = 0) \mathbb{P}(X_t = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_{t+h} = 0 \mid X_t \neq 0) \mathbb{P}(X_t \neq 0). \end{aligned}$$

Par l'hypothèse on ne peut avoir qu'un seul événement dans un intervalle infinitésimal de longueur h . Par suite, on peut affirmer que $\mathbb{P}(X_t \neq 0) = \mathbb{P}(X_t = 1)$.

$$\mathbb{P}_0(t+h) = [1 - \mathbb{P}(X_{t+h} \neq 0 \mid X_t = 0)] \mathbb{P}_0(t) + \mathbb{P}(X_{t+h} = 0 \mid X_t = 1) \mathbb{P}_1(t),$$

ou encore

$$\mathbb{P}_0(t+h) = [1 - \lambda_0 h + \sigma(h)] \mathbb{P}_0(t) + [\mu_1 h + \sigma(h)] \mathbb{P}_1(t).$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}_0(t+h) - \mathbb{P}_0(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\lambda_0 h + \sigma(h)}{h} \mathbb{P}_0(t) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\mu_1 h + \sigma(h)}{h} \mathbb{P}_1(t) \\ \frac{d\mathbb{P}_0(t)}{dt} &= -\lambda_0 \mathbb{P}_0(t) + \mu_1 \mathbb{P}_1(t). \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_n(t+h) &= \mathbb{P}(X_{t+h} = 0, X_t = n) + \mathbb{P}(X_{t+h} = 0, X_t \neq n) \\
 &= \mathbb{P}(X_{t+h} = n, X_t = n) + \mathbb{P}(X_{t+h} = n, X_t = n+1) \\
 &\quad + \mathbb{P}(X_{t+h} = n, X_t = n-1) \\
 &= \mathbb{P}(X_{t+h} = n \mid X_t = n) \mathbb{P}(X_t = n) \\
 &\quad + \mathbb{P}(X_{t+h} = n \mid X_t = n+1) \mathbb{P}(X_t = n+1) \\
 &\quad + \mathbb{P}(X_{t+h} = n \mid X_t = n-1) \mathbb{P}(X_t = n-1) \\
 &= (1 - \mathbb{P}(X_{t+h} \neq n \mid X_t = n)) \mathbb{P}_n(t) \\
 &\quad + \mathbb{P}(X_{t+h} = n \mid X_t = n+1) \mathbb{P}_{n+1}(t) \\
 &\quad + \mathbb{P}(X_{t+h} = n \mid X_t = n-1) \mathbb{P}_{n-1}(t). \\
 &= (1 - (\lambda_n + \mu_n)h + \sigma(h)) \mathbb{P}_n(t) + ((\mu_{n+1}h + \sigma(h))) \mathbb{P}_{n+1}(t) \\
 &\quad + (\lambda_{n-1}h + \sigma(h)) \mathbb{P}_{n-1}(t).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}_n(t+h) - \mathbb{P}_n(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(\lambda_{n-1} + \mu_n + 1)h + \sigma(h)}{h} \mathbb{P}_n(t) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu_{n+1}h + \sigma(h)}{h} \mathbb{P}_{n+1}(t) \\
 &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lambda_{n-1}h + \sigma(h)}{h} \mathbb{P}_{n-1}(t).
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \frac{d\mathbb{P}_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n) \mathbb{P}_n(t) + \mu_{n+1} \mathbb{P}_{n+1}(t) + \lambda_{n-1} \mathbb{P}_{n-1}(t).$$

Ainsi les équations de Chapman-Kolmogorov sont donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}'_0(t) = -\lambda_0 \mathbb{P}_0(t) + \mu_1 \mathbb{P}_1(t). \\ \mathbb{P}'_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n) \mathbb{P}_n(t) + \mu_{n+1} \mathbb{P}_{n+1}(t) + \lambda_{n-1} \mathbb{P}_{n-1}(t). \end{array} \right. ,$$

3.2 Modèle individu-centré

On considère à tout instant $t \geq 0$ une population finie de N_t individus, chacun porteur d'un trait dans l'espace \mathcal{X} . On note x_1, \dots, x_{N_t} les valeurs de ces traits.(voir [2]).

Définition 3.2.1 *Le modèle individu-centré est un processus de Markov de saut pur à valeurs dans l'espace des mesures ponctuelles \mathcal{M}^1 dont l'état au temps t est la mesure :*

$$\nu_t = \sum_{i=1}^{N_t} \delta_{x_i}. \quad (3.2)$$

3.3 Processus de Markov homogène

Définition 3.3.1 *Le processus (3.2) est un processus de Markov homogène (CMH) dans \mathcal{M}^1 de générateur infinitésimal L , où pour toute fonction φ mesurable bornée sur \mathcal{M}^1 et pour tout $x, y \in \mathcal{X}$, $p(x)$ la probabilité de mutation d'un individu de trait x .*

$b(x) \in \mathbb{R}_+$ le taux de reproduction d'un individu de trait x .

$d(x) \in \mathbb{R}_+$ le taux de mort du trait x .

$m(x, h)dh$ la loi de la différence entre le trait x et un trait mutant $x + h$ né d'un individu de trait x , $h \in \mathbb{R}^l$.

$c(x, y) \in \mathbb{R}_+$ le noyau de compétition, représentant l'influence d'un individu de trait y sur la mortalité d'un individu de trait x ,

$$\begin{aligned} L\varphi(\nu) &= \int_{\mathcal{X}} (\varphi(\nu + \delta_x) - \varphi(\nu))(1 - p(x))b(x)\nu(dx) \\ &+ \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathbb{R}^l} (\varphi(\nu + \delta_{x+h}) - \varphi(\nu))p(x)b(x)m(x, h)dh\nu(dx) \\ &+ \int_{\mathcal{X}} (\varphi(\nu - \delta_x) - \varphi(\nu)) \left(d(x) + \int_{\mathcal{X}} c(x, y)(\nu(dy) - \delta_x(dy)) \right) \nu(dx). \end{aligned}$$

3.3.1 Limite des mutations petites : diffusion canonique

Définition 3.3.2 *L'équation canonique des dynamiques adaptatives, nous introduisons la matrice :*

$$\Sigma(x) = \int_{\mathbb{R}^d} hh^* m(x, h) dh,$$

c'est-à-dire la matrice de covariance des mutations lorsqu'elles sont centrées, et $\sigma(x)$ sa racine carrée symétrique, c'est-à-dire la matrice carrée symétrique positive telle que $\sigma(x)^2 = \Sigma(x)$.

Définition 3.3.3 *Le processus $(S_t^{\mu, \sigma}, t \geq 0)$ défini :*

$$S_t^{\mu, \sigma} = \sum_{n \geq 0} V_n \mathbf{1}_{\{T_n \leq t / \mu < T_{n+1}\}},$$

où $\tau_0 = 0$, et pour tout $n \geq 0$:

$T_n = \inf \{t \geq \tau_n : |\text{supp}(\nu_t^{\mu, \sigma})| = 1\}$, et $T_{n+1} = \inf \{t \geq T_n : |\text{supp}(\nu_t^{\mu, \sigma})| = 2\}$. Alors

$$\text{supp}(\nu_t^{\mu, \sigma}) = \{V_n\}.$$

Définition 3.3.4 *(converge en loi pour la topologie de Skorohod) On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans la topologie de Shorohod si et seulement si $\exists (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$ (Λ est un ensemble des fonctions de $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue) tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n(\lambda_n) - x\|_\infty = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\lambda_n - \lambda\|_\infty = 0$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$, alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x par rapport à la distance d .*

Théorème 3.3.1 *Soit $x \in \mathcal{X}$ fixé. Le processus $(S_{t/\sigma^2}^\sigma, t \geq 0)$ converge en loi quand $\sigma \rightarrow 0$ pour la topologie de Skorohod dans $D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^l)$ vers $(Z_t, t \geq 0)$ solution de*

l'EDS :

$$dZ_t = \frac{p(Z_t)b(Z_t)\theta(Z_t)}{1 - \exp^{-\theta(Z_t)}} \sum (Z_t) \nabla 1\chi(Z_t, Z_t) dt \quad (3.3)$$

$$+ \sqrt{p(Z_t)b(Z_t) \frac{\exp^{-\theta(Z_t)} - 1 + \theta(Z_t)}{\theta(Z_t)(1 - \exp^{-\theta(Z_t)})}} \sigma(Z_t) dW_t,$$

avec $Z_0 = x$, où $(W_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien l -dimensionnel standard et où $\nabla 1\chi(y, x)$ désigne le gradient de $\chi(y, x)$ par rapport à la première variable y .

On remarquons que la fonction $\chi(x, y) = \exp(-\theta(x)) \sum_{n \geq 1} \frac{\theta(x)^{n-1}}{(n-1)!}$ est de classe C_b^2 , où

$$\theta(x) = \frac{b(x)}{c(x, x)}.$$

Les coefficients de l'**EDS** (3.3) sont donc lipschitziens et il y a donc existence forte et unicité trajectorielle pour cette **EDS**.

3.3.2 Calcul du gradient de fitness

Définition 3.3.5 Tous les coefficients de (3.3) sont explicites, excepté le gradient de fitness. Afin de le caractériser, nous considérons une chaîne de Markov $((X_t, Y_t), t \geq 0)$ dans \mathbb{N}^2 de la matrice de taux $Q = (q_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}^2}$ avec :

$$q_{i,j} = \begin{cases} b_1 n & \text{si } i = (n, m) \text{ et } j = (n+1, m) & (\text{population résidente}) \\ b_2 m & \text{si } i = (n, m) \text{ et } j = (n, m+1) & (\text{population mutante}) \\ c_{11}n(n-1) + c_{12}nm & \text{si } i = (n, m) \text{ et } j = (n-1, m), \\ c_{21}mn + c_{22}m(m-1) & \text{si } i = (n, m) \text{ et } j = (n, m-1), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il s'agit d'un processus de naissance et de mort bidimensionnel tel que les processus $\nu^{0,\sigma}$ et $X\delta_x + Y\delta_y$ ont même loi si $\nu_0^{0,\sigma} = X_0\delta_x + Y_0\delta_y$, $b_1 = b(x)$, $b_2 = b(y)$.

3.4 Processus stochastique associée à la mutation de la bactérie

Définition 3.4.1 *La distribution du temps de division pour les bactéries normales un mode de croissance déterministe et pour les bactérie mutantes un mode de croissance markovien : on a pour $0 \leq \tau \leq +\infty$*

$$dG(\tau) = \exp(-\lambda\tau) \lambda d\tau,$$

et pour les deux types seraient des processus à phases multiples.

3.4.1 Les equation fondamentale

Soient m_t est le nombre des bactéries résistantes à l'instant t , et soit la fonction génératrice Ψ définie par : $\Psi(z, t) = \mathcal{E}z^{m_t}$, et pour l'équation intégrale fondamentale :

$$\Psi(z, t) = \int_0^t [p\varphi(z, t-u) + q\varphi(z, t-u)] \Psi(z, t-u) dG(u) + 1 - G(t),$$

où $1 - G(t)$ est la bactérie mère ,

$\varphi(z, t)$ est représente les bactérie résistantes parmi la postérité d'une bactérie mère mutante.

(voir [10]).

★ **Une équation différentielle** est une relation entre une fonction inconnue, ses dérivées successives et la variable dont elle dépend. Alors la modélisation par des équation différentielles, on retrouve deux type de modèles : des modèles déterministes et des modèles stochastiques.

Les modèles associées aux phénomènes biologique se présent généralement sous forme d'un système d'équation différentielles. Il est donc naturel de s'intéresser à ce genre d'équation.

3.4.2 Modèle Déterministe

- C'est un système d'équation différentielles qui décrit l'évolution dans le temps des concentration des espèces (les composantes en cause).

Les équations différentielles ordinaires

Définition 3.4.2 On note $E = \mathbb{R}^n$, $n > 0$ et $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un élément de E

Soit D un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f : D \rightarrow E$ une fonction continue, $\forall (X_t, t) \in D$: L'équations différentielle ordinaire (**EDO**) est de la forme :

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X_t, t)$$

Où la résolution analytique est possible.

3.4.3 Modèle Stochastique

- Ces modèles peuvent intégrer l'ensemble des sources d'hétérogénéité souhaitées (hétérogénéités spatiale, temporelle, comportementale ou autre). Il tiennent compte de la nature aléatoire des événements et de leurs comportements.

Les équation différentielles dans cette situation sont appelée équations différentielles stochastiques (**EDS**).

3.5 Application biologie

Voici quelques exemples de modèles développés très récemment en recherche en mathématiques pour la biologie. (Pour plus des détails voir [13]).

1 - Evolution d'un virus dans une cellule. Ce modèle est utilisé pour comprendre les premiers stades de l'infection virale où le virus entre dans la cellule et s'infiltrer jusqu'au noyau. Le mouvement du virus comporte une succession de phases balistiques le long de

microtubules (les autoroutes de la cellule), et de phases de diffusion pour passer d'un microtubule à l'autre. Le virus est absorbé dès qu'il arrive dans le noyau. La dynamique du virus peut être résumée par l'équation de diffusion :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sqrt{2D}dW_t,$$

plus un terme de dégradation du virus au cours du temps.

2 - Déplacement d'un poisson dans ce modèle, on identifie la mer à une surface. Le mouvement du poisson est décrit en utilisant trois variables : la position $X \in \mathbb{R}^2$, la vitesse angulaire $\theta \in \mathbb{R}$, et la courbure $K \in \mathbb{R}$. La dynamique est aléatoire et suit le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} dX_t = \tau(\theta_t, K_t)dt, \\ d\theta_t = K_t dt, \\ dK_t = -K_t dt + \sqrt{2\alpha}dW_t. \end{cases} .$$

Des simulations de ce modèle donne la figure ci dessous qui représente la trajectoire $t \rightarrow (X_t^1, X_t^2)$ avec $\alpha = 1$ et $\tau(\theta, K) = \frac{1}{1+2|K|}(\cos \theta, \sin \theta)$.

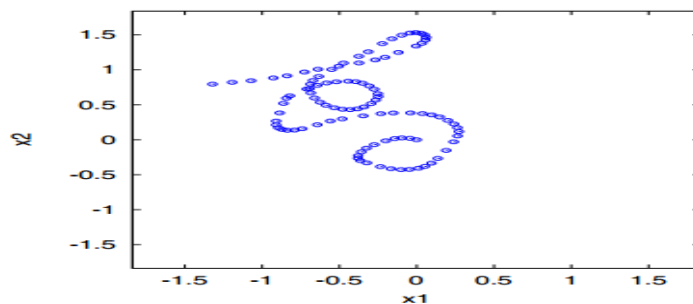


FIG. 3.2 – Trajectoire de mouvement de Poisson $t \rightarrow (X_t^1, X_t^2)$

3.6 Oncologie

★ L'objectif de cette formation pour étudier la modélisation de système dynamique (équation ou loi décrivant l'évolution temporelle d'un système). Nous présenterons des exemples dans des domaines d'applications variés allant de la biologie moléculaire à l'écologie, (Voir [4]).

- Le cancer est une maladie complexe, caractérisé par l'occurrence d'anomalies allant du niveau moléculaire au corps entier.
- La pharmacocinétique de l'agent de contraste est modélisée par un système différentiel bidimensionnel. Dans ce modèle pharmacocinétique, l'agent de contraste dans un voxel de tissu est supposé se trouver soit dans le compartiment plasma, soit à l'intérieur du compartiment interstitiel.

Les quantités d'agent de contraste dans un seul voxel unitaire au temps t sont notées respectivement $AIF(t)$, $Q_P(t)$ et $Q_I(t)$ pour artère, plasma et interstitiel compartiments où $F_T > 0$ est le débit perfusion sanguine tissulaire par unité de volume de tissu 0 (en $\mathbf{ml\ min^{-1}\ 100\ ml^{-1}}$) $V_b > 0$ est la partie du volume de sang totale ; $V_e > 0$ est la partie du volume fractionnaire de l'espace extracellulaire extravasculaire, P_s est le produit de surface de perméabilité par unité de volume de tissu (en $\mathbf{ml\ min^{-1}\ 100\ ml^{-1}}$),

Le délai avec lequel l'agent de contraste arrive des artères au plasma est noté δ , les deux t et δ sont mesurés en secondes d'où la cinétique de l'agent de contraste peut être modélisée par le modèle **EDO** suivant :

$$\begin{cases} \frac{dQ_P(t)}{dt} = \frac{F_T}{1-h} AIF(t-h) - \frac{P_s+F_T}{V_b(1-h)} Q_P(t) + \frac{P_s}{V_e} Q_I(t), \\ \frac{dQ_I(t)}{dt} = \frac{P_s}{V_b(1-h)} Q_P(t) + \frac{P_s}{V_e} Q_I(t), \end{cases} \quad (3.4)$$

avec les conditions initiales : $AIF(t_0) = Q_I(t_0) = Q_P(t_0) = 0$, ce modèle déterministe est incapable de capturer les fluctuations aléatoires observées dans le temps t .

Notre principale hypothèse est qu'un modèle plus réaliste peut être obtenu par une ap-

proche stochastique. Nous introduisons un modèle **EDS** en ajoutant des composants aléatoires :

$$\begin{cases} dQ_P(t) = \left[\frac{Ft}{1-h} AIF(t-h) - \frac{Ps+Ft}{Vb(1-h)} Q(t) + \frac{Ps}{Ve} Q_I(t) \right] dt + 0dW_t^1, \\ dQ_I(t) = \left[\frac{Ps}{V_i(1-h)} Q_P(t) + \frac{Ps}{Ve} Q_I(t) \right] dt + \sigma_2 dW_t^2, \end{cases}$$

où W_t^1 et W_t^2 sont deux processus de Wiener indépendants, et σ_1, σ_2 sont les déviations standard des perturbations aléatoires.

Notre contexte biologique, seule la somme $S(t) = Q_P(t) + Q_I(t)$ Mesures bruyantes et discordantes ($y_i, i = 0, \dots, \mathbb{N}$). Alors le modèle est :

$$y_i = S(t_i) + \gamma \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

où γ est l'écart type inconnu du bruit gaussien et ε_i sont indépendants. On note les paramètres de modèle **EDO** par : $(F_t, V_b, P_S, V_e, \delta, \gamma^2)$ et **EDS** par : $(F_t, V_b, P_S, V_e, \delta, \sigma_1, \sigma_2, \gamma^2)$ la solution du système différentiel (3.4) calculé en EDO pour le modèle EDO et comme l'espérance conditionnelle de Q_P et Q_I . (Pour plus comprendre cette application voir [4]).

Conclusion

L'objectif de notre travail a concerné le modèle stochastique. nous nous sommes intéressés par quelque exemples de modèle en mathématique pour la biologie comme l'évolution d'un virus dans une cellule, et déplacement d'un poisson. Et dans la finance mathématique : le modèle de Black- Scholes qui établit des relations entre les prix des actifs, les mouvements du marché et les taux d'intérêt.

La valorisation de notre travail est rechercher la généralisation de la formule de l'équation différentiel stochastique.

Bibliographie

- [1] Bouleau. N., Processus stochastiques et applications, Hermann, éditeurs des sciences et des arts, France, (2004).
- [2] Champagnant. N., Approches stochastiques et déterministes en biologie : dynamique adaptative, modélisation pour l'écologie, génétique des populations et dynamique moléculaire, caractère bien posé d'équations différentielles ordinaires et stochastiques. Probabilités. Université de Lorraine, fftel-01188203ff .(2015).
- [3] Jean-Christophe.B., Processus stochastiques, M2 Mathématiques, Université de Rennes 1. (Octobre Décembre 2020) .
- [4] Ditlevsen. S., and Samson. A., Introduction to Stochastic Models in Biology, Stochastic Biomathematical Models, Lecture Notes in Mathematics 2058, DOI 10.1007/978-3-642-32157-31, (2013).
- [5] Glaudie Hassenforder. Processus Stochastique Modélisation, Master 2-MI00451X, Université de Toulouse le Mirail.
- [6] Hafayad. M., Cours de probabilité approfondies. Université de Biskra, département de mathématique, master *I*, (2018).
- [7] Haneche. M., Processus stochastiques et équation aux dérivées partielles, Mémoire Magistère, Université m'hamed Bougara Boumerdès, (29-6-2009).
- [8] Jacky. C et Isabelle. G., Contributions au calcul des variations et au Principe du Maximum de Pontryagin en calculs time scale et fractionnaire, Thèse de doctorat, Université de pau et des pays de l'adour, (18-6-2013) .

- [9] Jeanblanc. M., Cours de calcul stochastique, Cours de master 7,(2006).
- [10] Kendall. D.,Les processus stochastique de croissance en biologie. Annales de l'I.H.P., tome 13,n^o1 (1952) ,p.43 – 108.
- [11] Khelifa. A., Modèle stochastique de phénomènes biologiques-Etude d'un réseau de réaction chimiques, Mémoire Magistère, Université Houari Boumediene (USTHB), (13 – 11 – 2014) .
- [12] Ribatet.M., Modélisation stochastique, Licence 3 de Mathématiques, Université de Montpellier.
- [13] Sylvie.M.,Modèles aléatoires en Ecologie et Evolution, Ecole Polytechnique.(2016).
- [14] Touzi.N.,Martingales en temps discret et chaîne de Markov, Ecole Polytechnique Paris, Département de Mathématiques Appliquées, (Septembre 2009).
- [15] Yueyun. H et Laurent .T., Processus stochastiques à temps discret, Cours de Macs 2, Institut Galilée, Université Paris 13.

Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

Notations	Signification.
$\mathbb{E}[X]$	Espérance mathématique ou moyenne du v.a X .
$\text{var}(X)$	Variance mathématique du X .
\exp	Exponentiel.
W_t	Mouvement Brownien.
$\mathbb{P} - p.s$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité P .
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$	La tribu borélienne sur \mathbb{R}^n .
EDS	Equation Différentielle Stochastique.
EDO	Equation Différentielle ordinaire.
\mathbb{R}_+	Ensemble des réels positifs $[0, +\infty[$.
S	Ensemble fini ou dénombrable.

b	La drift.
σ	La diffusion.
q_{ij}	Le gradient de fitness.
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturel.
MIC	Modèle individu centré.
$\Sigma(x)$	La matrice de covariance des mutations.
$\sigma(x)$	La racine carrée symétrique de $\Sigma(x)$.
I	L'opérateur identité.
$\alpha(t)$	Mesure de concentration.
CMH	Chaîne de Markov homogène.
\mathbb{P}	Mesure de probabilité.
$v.a$	Variable aléatoire .