République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider - Biskra

– Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie –

— Département de Mathématiques —

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilité

Par

GUERROUF Khedidja

Titre :

L'existence, l'unicité des solutions des équation différentielles stochastique rétrogrades

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	CHALA Adel	UMKB	Président
Dr.	ROMEILI Nacira	UMKB	Encadreur
Dr.	BEROUIS Nassima	UMKB	Examinatrice

Juin 2021

Dédicace

À mes très chers parents avec tout mon amour et ma gratitude....

À mes frères et mes sœurs...

À mes amies...

Je dédie ce travail

Remerciements

Tout d'abord , je commence par remercier "Allah" qui m'a doté de la volonté , du courage et surtout de la patience pour produire ce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreuse Dr. ROMEILI Nacira pour son écote, son aide et pour les conseils qu'elle a pu me donner pour l'élaboration de ce travail.

Je tiens à remercier les membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon projet, et pour leur présence

Mes remerciements vont également à tous les enseignants du département de mathématiques qui ont contribué à ma formation

Table des matières

Introduction

l'objectif de ce mémoire de master est l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR en abrégé) ou en anglais BSDE (Backward Stochastic Differential Èquations). à partir des années 1990, le développement des équations différentielles stochastiques rétrogrades a connu un énorme développement. Ces équations sont apparues en 1973, dans un article de J.M. Bismut [1] dans le cas linéaire lorsqu'il Ètudie l'Èquation adjointe associée au principe du maximum stochastique en contrôle optimal, et en 1978, Bismut prolonge sa théorie et montre l'existence d'une solution unique bornée de l'EDSR de Riccati. Pourtant le premier résultat général concernant les EDSR ne date que de 1990 et est dû à E. Pardoux et S. Peng.[5]

Notre étude de ces equations se concentre sur la réponse aux questions suivantes :

1. quelle est la signification d'une Èquation différentielle stochastique rétrograde ?
2. Si ε est une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$-mesurable et de carré intégrable et $f = f\ (t; w; y; z)$ est une fonction progressivement mesurable donnée, l'EDSR

$$y_t = \varepsilon + \int_t^T f(s, y_s, z_s)dt - \int_t^T z_s dw_s, \quad t \in [0, T]$$

   avec w est un mouvement Brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, admet-elle une solution définie sur $[0; T]$? Et si une telle solution existe, est-elle unique ?

Résoudre cette EDSR, c'est déterminé un couple de processus noté $(Y_t; Z_t) \geq 0$ qui vérifie l'équation et qui est $\mathcal{F}$-adapté c'est-à-dire ne dépend que de l'information connue jusqu'à l'instant t. On peut dire que les EDSR sont des équations différentielles stochastiques où l'on se donne une condition terminale (c'est pourquoi on dit rétrograde). Dans le cas déterministe, par exemple les équations différentielles ordinaires (EDO en abrégé) il y'a équivalence entre la donnée d'une condition terminale et la donnée d'une condition initiale par inversion du temps, finalement on résoudra le même problème. Dans le cas aléatoire, les choses sont totalement différentes lorsqu'on cherche des solutions qui restent adaptées par rapport à une filtration donnée. Par exemple, si on inverse le temps pour se ramener au problème avec condition initiale et donc à revenir à la théorie des équations différentielles stochastiques "EDS en abrégé", on trouve une solution qui anticipe , c'est-à-dire à l'instant t elle dépend du futur, c'est exactement là où se présente la difficulté.

Le reste de ce mémoire est organisé comme suit :

Chapitre 1 : Rappels de calcul stochastique : Ce chapitre est une introduction pour mettre en évidence les outils de notre étude. On va présenter un ensemble de définitions, propositions, et théorèmes (sans démonstration), ainsi que des résultats de bases du calcul stochastique tel que les processus stochastiques, espérance conditionnelle, mouvement brownien,...etc.

Chapitre 2 : Calcul d'Itô : Ce chapitre est consacré au calcul d'Itô. Premièrement, nous présentons l'intégrale stochastique générale et ces différents cas particuliers tels que le cas de processus étage et le cas particulier de l'intégrale de Winer. puis nous présentons le processus d'itô et ces différentes formules.

Chapitre 3 L'existence, l'unicité des solutions des équation différentielles stochastique rétrogrades : Le but de ce chapitre est de montrer un premier résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR, ce résultat est dû à E.Pardoux et S.Peng et c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) dans le cas où le générateur f non linéaire sous des hypothèses lipschitiziennes en (y ; z).

Chapitre 1

Rappels de calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous décrivons les principales notions utilisées dans ce travail. Tout d'abord, nous commençons par présenter les processus stochastique, ensuite les mouvements brownien et martingale.

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 (Filtration)**.** *Une filtration* $\{\mathcal{F}_t, \leq t < +\infty\}$ *est une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *: pour* $0 \leq s \leq t < \infty$*,* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$

Définition 1.1.2 (Filtration continue)**.** *La filtration est continue à droite*

$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ *(à gauche* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-}$*)*

Définition 1.1.3 (Processus stochastique)**.**

- *Un processus stochastique à temp discret est une famille* $X = (X_n)_{n\in N}$ *de variable aleatroire. Dans ce cas, on note* $T = N$
- *Un processus stochastique à temp continue est une famille* $X = (X_t)_{t\in R_+}$ *de variable aleatroire. Dans ce cas, on note* $T = R_+$

Définition 1.1.4 (Processus adapté)**.** *Un processus* X *est adapté par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$*, si pour tout* t X_t *est* $\mathcal{F}_t$ *mesurable.*

Définition 1.1.5. *Soit* $(X_t)_{t\in I}$ *et* $(Y_t)_{t\in I}$ *deux processus stochastique dans* $(\omega, \mathcal{F}, P)$.

— *Les processus* X *et* Y *sont modification l'un de l'autre si* $P(X_t = Y_t) = 1 \forall t \in I$

— X *et* Y *sont indistinguables si et seulement si* $P(X_t = Y_t,\ t \in I) = 1$.

— *Si* X *et* Y *sont indistinguables, alors il peut modification l'un de l'autre (la réciproque est en generale n'est pas vrais)*

— *Si* X *et* Y *sont modification l'un de l'autre, alors ils ont la même distribution (loi finie dimensionnelle) (la réciproque est faux)*

Définition 1.1.6. *Le processus stochastique* X *est progressivement mesurable par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. *Si* $\forall s \in I$ *la fonction* $(\omega, t) \to X_t(\omega)$ *considérée comme une fonction de* $\omega \times [0, s] \to \mathbb{R}$ *est mesurable par rapport à* $\mathcal{F} \otimes \beta([0, s])$ *et* $\beta(\mathbb{R})$

Le processus progressivement mesurable est mesurable , adapté.

Définition 1.1.7. *Le processus* X *est dite mesurable si la fonction* $(\omega, t) \to X_t(\omega)$ *considerée comme une fonction de* $\omega \times I$ *dans* $\mathbb{R}$ *est mesurable par rapport* $\mathcal{F} \otimes \beta(I)$ *et* $\beta(R)$

Proposition 1.1.1. *Un processus adapté tel que touts les trajectoires sont continue à gauche (à droite) est progressivement mesurable.*

Définition 1.1.8 (Processus prévisible). *On dit qu'un processus* $\mathbb{F}$ *adapté* $(X_n)_{n\in N}$ *est un processus croissant prévisible si* $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \leq A_{n+1}$ *et si* A_{n+1} *est* $\mathcal{F}_n$ *mesurable* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in N}$ $(A_n)_{n\in N}$ *est* $\mathbb{F}$*-adapté* $\Leftrightarrow\ \forall n \in N,\ A_n$ *est* $\mathcal{F}_n$ *mesurable.*

Définition 1.1.9. *Soit* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *un processus stochastique*

— *Le processus* X *est continue si* $t \to X_t(\omega)$ *est continue* $\forall \omega \in \Omega$

— *Le processus* X *est càdlage (continue à droite, limitée à gauche) si* $t \to X_t(\omega)$ *est continue à droite, limitée à gauche* $\forall \omega \in \Omega$

— *Le processus* X *est càglad (continue à gauche, limitée à droite) si* $t \to X_t(\omega)$ *est continue à gauche, limitée à droite*

Définition 1.1.10 (temps d'arrêt)**.** *En appelle temps d'arrêt relatif à une filtration* $(\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N})$ *une variable aleatoire* T *a valeur dans* $N \cup \{+\infty\}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, l'évènement* $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ *et* $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ *équivaut* $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

Définition 1.1.11. *Soit* T *un* $\mathbb{F}$ *temps d'arrêt. L'ensemble*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} / \forall n \in N A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}\}$$

est une tribu sur ω *appelée tribu des évènements antérieurs à* T

Proposition 1.1.2.

1. *Si* S *et* T *deux temps d'arrêt alors* $S + T$*,* $S \wedge T$ *et* $S \vee T$ *sont des temps d'arrêt*
2. *Si* $(T_n)_{n \in N}$ *est une suite de temps d'arrêt, alors* $\sup\limits_{n \in N}$ *et inf* T_n *est un temps d'arrêt*
3. *Si* S *et* T *deux temps d'arrêt tel que* $S \leq T$ *alors* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$

Définition 1.1.12. *Si* T *temps d'arrêt et* $(X_n)_{n \in N}$ *un processus stochastique* $\mathbb{F}$*-adapté, alors la variable aléatoire* $X_T \nVdash$ *est* $\mathcal{F}$ *mesurable*

Proposition 1.1.3. *Soit* T *temps d'arrêt. Si* X *est progressivement mesurable, le processus arrêté* X^T *défini par* $X_t^T = X_{T \wedge t}$ *est progressivement mesurable*

1.2 Espérance conditionnelle

Soit $(\omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité si $A,\ B$ deux évènements de $(\omega, \mathcal{F}, P)$ tq $P(B) \neq 0$

$$P(A \backslash B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Définition 1.2.1 (L'espérance conditionnelle d'une v.a X p.r.à une tribu G)**.** *Soit* $(\omega, \mathcal{F}, P)$ *G sous-tribu de $\mathcal{F}$ alors, l'espérance conditionnelle de X sachant G est une variable aléatoire G-mesurable tel qu*

Théorème 1.2.1. *Soit G-sous tribu de $\mathcal{F}$ l'espérence conditionnelle X sachant que G est l'unique variable aleatoire G-mesurable*

$$\int_A E(x\backslash G)dP = \int_A XdP \quad \forall A \in G$$

Proposition 1.2.2 (propriété d'espérance conditionnelle)**.**
Soit X et Y deux variable aleatoire et G sous tribu de $\mathcal{F}$ tel que $H \subset G$ on a :

1. *Linéarité : soit a et b deux constantes alors :*

$$E(aX + bY\backslash G) = aE(X\backslash G) + E(Y\backslash G)$$

2. *Monotonie : soit X et y deux variables aléatoire tel que $X \leq Y$ alors*

$$E(X\backslash G) \leq E(Y\backslash G)$$

3. *Si X est indépendant de G alors :*

$$E(X\backslash G) = E(X)$$

4.

$$E(E(X/G)) = E(X)$$

5. *Si X est G-mesurable alors :*

$$E(X\ Y/G) = XE(Y/G)$$

6. *Si X est G-mesurable alors :*

$$E(X/G) = X$$

7. $$E(E(X/G)/H) = E(E(X/H)/G) = E(X/H)$$

1.3 Mouvement brownien

Définition 1.3.1. *On dit que $\mathbb{B} = (B_t,\ t > 0)$ est un mouvement brownien (réel nul en 0) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Les trajectoires $t \to B_t$ sont ps continues sur R_+*
2. $B_0 = 0$ *p.s*
3. *pour tout $0 \leq t, \ \leq t_2 \ \leq \cdots \leq t_n$, $B_{tn} - B_{tn-1} \ldots B_{t_2} - B_{t_1}$, B_t, soit indépendante*
4. *Pour tous $t \geq s \ \geq 0$ $B_t - B_s$ suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, t-s)$*

Proposition 1.3.1. *Si B est un mouvement brownien, alors les processus suivants sont aussi des mouvements brownien*

1. $X_t = -B_t \ \ t \geq 0$ *(symétrique)*
2. $X_t = t\ B_{1/t} \ \ t \geq 0 \ \ X_0 = 0$ *(inversion du temps)*
3. $a \geq 0$ *fixé* $X_t = \frac{1}{\sqrt{a}}\ B_{at} \ \ t \geq 0$
4. $s \geq 0$ *fixé* $X_t = B_{t+s} - B_s \ \ t \geq 0$
5. $r \geq 0$ *fixé* $X_t = B_r - B_{r-t} \ \ t \in [0, r]$ *(retournement du temps)*

On appelle MB standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, un vecteur $W = (w^1 \ldots W^d)$ où les W^i sont des MB réel indépendants

1.4 Martingale

Définition 1.4.1. *soit $(X_n)_{n\in N}$ un processus définis sur l'espace filtré*

$(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in N}, P)$ *alors X est une :*

1. *F martingale (ou martingale adapté à $\mathbb{F}$) si les trois conditions suivantes sont vérifiées*
   (a) *X est $\mathbb{F}$ adaté (i.e $\forall n \in N,\ X_n$) est $\mathcal{F}_n$ mesurable*
   (b) *X_n est intégrable pour tout n (i.e $E((X_n)) < +\infty$)*
   (c) *$\forall n \in \mathbb{N}$ $E(X_{n+1/\mathcal{F}_n}) = X_n$*
2. *$\mathbb{F}$ sous martingale si elle vérifie : a) et b) et c) $\forall n \in N$ $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \geq X_n$*
3. *$\mathbb{F}$ est sur martingale si elle vérifie : a) et b) et c) $\forall n \in N$ $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) \leq X_n$*

Remarque 1.4.1.

1. *La condition c) est équivalente à $E(X_{n+1} - X_n/\mathcal{F}_n) = 0$*
2. *Une martingale est à la fois une sous martingale et une sur martingale*
3. *Le processus $(X_n)_{n\in N}$ est une sous martingale ssi $(-X_n)_{n\in N}$ est une sur martingale*

1.4.1 Propriété des martingale

1. Si $(X_n)_{n\in N}$ est une $\mathbb{F}$ martingale alors $E(X_m/\mathcal{F}_n) = X_{m\wedge n}$ $\forall\ m, n \in \mathbb{N}$
2. Si $(X_n)_{n\in N}$ est une $\mathbb{F}$ martingale (resp $\mathbb{F}$ sous M, resp $\mathbb{F}$ sur M) alors la suite réel $E(X_n)_{n\in N}$ est constante (resp croissante, resp décroissante)
3. Si $(X_n)_{n\in N}$ est une $\mathbb{F}$ martingale et f est une fonction convexe tel que $E(|f(x_n)|) < +\infty\ \ \forall n \in N$ alors $(f(X_n))_{n\in N}$ est une sous martingale

Proposition 1.4.2 (Décomposition de DOOB)**.**

tout $\mathbb{F}$ sous martingale $(X_n)_{n\in N}$ s'écrit de façon unique sous la forme

$X_n = M_n + A_n$ où $(M_n)_{n\in N}$ est $\mathbb{F}$ martingale et A_n est un processus prévisible tel que $A_0 = 0$

Théorème 1.4.3 (Théorème de point fixe)**.**

Soit (E, d) un espace métrique complet et $\psi : E \to E$ une application contractante, c'est à dire lipchitzienne de rapport $k < 1$. Alors : ψ admet unique point fixe $a \in E$ tel que $\psi(a) = a$.

Théorème 1.4.4 (inegalité de Yoing)**.**

Soit $a, b \geq 0$ et $1 < p,\ q < \infty$ deux exposants conjugués , i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$a\ b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^a}{q}$$

Théorème 1.4.5 (inégalité de cauchy Schwartz)**.**

Soit $f, g \in\ C([0,1], R)$ alors :

$$\int_0^1 |fg| \leq \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Lemme 1.4.1 (lemme de Gronwall)**.**

Soit f une fonction intégrable et non-négative $t \geq 0$ et vérifiant

$$f(t) \leq \mathcal{B} + c\int_0^t f(s)ds$$

où c une constante positive. Alors :

$$f(t) \leq \mathcal{B}exp(cs)ds$$

Théorème 1.4.6 (Burkholder - davis - gundy "BDG")**.**

Soit $P\ \in]0, \infty]$ il existe deux constantes c_P et C_P tel que pour toute martingale *continue* X *nul en* 0

$$c_P \ E\left[\langle X, X\rangle_{\infty}^{\frac{P}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^P\right] \leq C_P E\left[\langle X, X\rangle_{\infty}^{\frac{P}{2}}\right]$$

Remarque : en particulier si $t > 0$:

$$c_P \ E\left[\langle X, X\rangle_{T}^{\frac{P}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^P\right] \leq C_P E\left[\langle X, X\rangle_{T}^{\frac{P}{2}}\right]$$

Chapitre 2

Calcul d'Itô

2.1 Introduction

Ce chapitre est dédié au calcul d'Itô. Nous commençons par présenter l'intégrale stochastique générale et ces différents cas particuliers tels que le cas de processus étage et le cas particulier de l'intégrale de Winer. puis nous présentons le processus d'itô et ces différentes formules

2.2 L'intégrale stochastique générale

On cherche à définir

$$\int_0^t \theta_s dB_s$$

quand $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique

Définition 2.2.1. *On dit que* $\{\theta_t, t \geq 0\}$ *est un bon processus s'il est* $(\mathcal{F}_t^B)-$*adapté, càglàd, et si*

$$E\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < +\infty$$

pour tout t > 0

2.3 Cas des processus étagés

Ce sont des processus du type

$$\theta_t^n = \sum_{i=0}^{P_n} \theta_i \ \mathbf{1}_{]t_i, t_i+1]}(t)$$

ou $P_n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 \cdots \leq t_{P_n}$ et $\theta_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t P)$ pour out $i = 0, \ldots P_n$ on définit

$$I_t(\theta^n) = \int_0^t \theta_s^n dB_s = \sum_{i=0}^{P_n} \theta_i (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t})$$

Propriété 2.3.1. $E[I_t(\theta^n)] = 0$

Var $[I_t(\theta^n)] = E[\int_0^t (\theta_s^n)^2 ds]$

les processus $I_t(\theta^n)$ *et* $I_t^2(\theta^n) - \int_0^t (\theta_s^n)^2 ds$ *sont des martingale.*

2.4 Cas générale

Si θ est un bon processus, il existe $\{\theta^n, \ n > 0\}$ suite de processus étagés telle que

$$E\left[\int_0^t (\theta_s - \theta_s^n)^2\right] \to 0$$

quand $n \uparrow +\infty$ il existe une variable aléatoire $I_t\ (\theta)$ de carrée intégrale telle que :

$$E\left[|I_t(\theta) - I_t(\theta^n)|^2\right] \to 0$$

quand $n \uparrow +\infty$. on pose

$$I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s$$

pour tout $t \geq 0$

Propriété 2.4.1.

1. $\int_0^t (a\theta_1 + b\theta_2)(s)dB_s = a\int_0^t (a\theta_1(s)dB_s + b\int_0^t \theta_2(s)dB_s$
2. $E[\int_0^t \theta(s)dB_s] = 0$
3. $E[(\int_0^t \theta(s)dB_s)^2] = E[\int_0^t \theta(s)^2 ds]$
4. $E[(\int_0^t \theta_1(s)dB_s)(\int_0^t \theta_2(s)dB_s)] = E[\int_0^{t\wedge t} \theta_1(u)\theta_2(u)du)]$

le processus $I_t(\theta_1)I_t(\theta_2).\int_0^t \theta_1\theta_2 du$ *est une* $(\mathcal{F}_t^B)$*-martingale.*

$$E\left[I_t(\theta) - I_t(\theta)^2|\mathcal{F}_s^B\right] = E\left[\int_0^t \theta_u^2 du|\mathcal{F}_s^B\right]$$

Proposition 2.4.1. *Pour tout* $t \geq 0$ *on a*

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t - t)$$

Il est possible de définir $I_t(\theta)$ *sous la seul condition*

$$\int_0^t \theta_s d_s \ < +\infty \ p.s$$

Cependant, $t \mapsto I_t(\theta)$ *n'est plus nécessairement une martingale.*

Définition 2.4.1. *On dit que* $\{\theta_t,\ t \geq 0\}$ *est un bon processus local s'il est càglàd* $(\mathcal{F}_t^B)-$*adapté, on dit que* X *est une* $(\mathcal{F}_t)$ *martingale local s'il existe une suite* $\{T_n\ n \geq 0\}$ *de* $(\mathcal{F}_t)-$*temps d'arrêt telle que*

$$P\left[T_n \to +\infty\right] = 1$$

et le processus $X^n : t \mapsto X_{t\wedge T_n}$ *est une martingale pour tout* $n \geq 0$

Définition 2.4.2. *On dit que* $\{\theta_t,\ t \geq 0\}$ *est un bon processus local s'il est càglàd* $(\mathcal{F}_t^B)-$*adapté, et si*

$$\int_0^t \theta_s^2 d_s \ < +\infty \ p.s$$

pour tout $t > 0$

soit θ un bon processus local. On peut définir $I_t(\theta)$ $\forall t > 0$ qui est martingale locale. De même, en prenant la même suite de temps d'arrêt. on montre que le processus

$$I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 d_s$$

est une martingale locale.

2.5 Cas particulier : intégrale de winer

Définition 2.5.1. *On note $L^2(R^+)$ l'ensemble de fonctions boréliennes f de R^+ dans R de carré intégrable. c'est à dire telle que $\int_0^{+\infty} |f(s)|^2 \, ds < \infty$*
c'est un espace de Hilbert pour la norme

$$||f||_2 = \left(\int_0^\infty f^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\langle f.g \rangle = \int_0^t f(s)g(s)ds$$

2.6 Cas de fonction en escalier

$f_n(t) = \sum_{i=0}^{P_n} \alpha_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}$ il est très facile de définir sont intégrale de winer par

$$I_t(f_n) = \int_0^t f_n(s)dB_s = \sum_{i=1}^{P_n} \alpha_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

La variable aléatoire $I_t(f_n)$ est une variable gaussienne d'espérance nulle et de variance

$$Var[I_t(f_n)] = \sum_{i=1}^{P_n} \alpha_i^2 Var(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \sum_{i=1}^{P_n} \alpha_i^2 (t_{i+1} - t_i) = \int_0^t f_n^2(s)ds$$

De plus que $f \mapsto I_t\,(f)$ est une fonction linéaire au sens où $I_t(af+bg) = aI_t(f)+bI_t(g)$ pour tout fonctions $f.g$ en escalier et tout $a.b \in R$

Si f et g sont deux fonctions en escalier on a :

$$\begin{aligned} E\left[I_t(f)I_t(g)\right] &= \frac{1}{2}(Var[I_t(f)+I_t(g)] - Var[I_t(f)] + Var[I_t(g)]) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^t (f+g)^2(s)ds + \int_0^t (f)^2(s)ds - \int_0^t (g)^2(s)ds\right) \\ &= \int_0^t f(s)g(s)ds \end{aligned}$$

Cette dernier égalité signifie que l'application $f \mapsto I_t(f)$ est une isometrie de $L^2([0,t],R)$ dans $L^2(\omega,P)$ alors la propriété d'isometrie de l'intégrale de Winer. ce qui signifie

$$\langle I_t(f).I_t(g)\rangle_{L^2(\omega)} = \langle f.g\rangle_{L^2(R)}$$

2.7 Cas générale

Si $f \in L^2(R^+)$ il existe une suite f_n de fonction en escalier qui converge (dans $L^2(R^+)$) vers f. c'est à dire qui vérifier

$$\int_0^\infty |f_x - f|^2(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Dans cas la suite f_n est de cauchy $L^2(R^+)$. La suite de v.a $F_n = \int_0^\infty f_n(s)dB_s$ est une suite de cauchy dans l'espace de Hilbert $L^2(\omega)$

(en effet $\parallel F_n - F_m \parallel_2 = \parallel \mathcal{F}_n - \mathcal{F}_m \parallel_2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$) donc elle est convergente.

On pose

$$I(f) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty f(s)dB_s = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(s)dB_s$$

La limite étant prise dans $L^2(\omega)$ on dit que $I(f)$ est intégrale stochastique (ou intégrale de Winer) de f par rapport à B

Propriété 2.7.1.

— *L'application* $f \mapsto I(f)$ *est linéaire*

$$I(f+g) = I(f) + I(g)$$

est isometrique de $L^2(R^2)$ *dans* $L^2(\omega)$

$$E(I(f)I(g)) = f(s)g(s)ds$$

— *La variable* $I(f)$ *est gaussienne centrée de variance* $\int_{R^+} f^2(s)ds$ *appartenant à l'espace gaussien engendré par* $(B_t,\ t \geq 0)$ *et elle est vérifiée pour tout* t

$$E\left(B_t \int_{R^+} f(s)dBs\right) = \int_0^t f(s)ds$$

2.8 L'intégrale de Winer vue comme processus gaussien

On note $L^2_{loc}(R^+.R)$ et on concéder $f \in L^2_{loc}(R^+.R)$ le processus

$$M_t = \int_0^t f(s)dB_s$$

a donc bien un sens pour tout $t \geq 0$

Théorème 2.8.1. *Le processus* $\{M_t,\ t \geq 0\}$ *est un processus guassien* $(\mathcal{F}_t^B)$*-adapté. centré, de fonction de covariance*

$$\tau = \int_0^{t \wedge s} f^2(u)du$$

de plus M est sens où $\{M_{t+s} - M_s,\ t \geq 0\} \perp \sigma(B_u,\ u < s)$ pour tout $s > 0$

preuve : Si on note M_t^n la suite d'integrales de winer associée la suite $\{f_n\}$ approchant f dans L^2, on voit que $t \to M_t^2$ est un processus gaussien comme le brownien.

Par stabilité dans $L2$ des espaces gaussiens on en déduit que $t \to M_t$ est un processus gaussien

L'expression de son espérance et de sa fonction de covariance découlent des calculs précédents. par construction M est $(\mathcal{F}_t^B)$-adapté .

Pour démontrer

$$M_{t+s} - M_s = \int_s^{t+s} f(u) dB_u = \int_s^{t+s} f(u) d_u(B_u - B_s) \in \sigma(B_u - B_s,\ u \in [s, t+s])$$

et on utilise l'indépendance des accroissente du processus B qui entraîne

$$\sigma(B_u - B_s,\ u \in [s, t+s]) \perp \sigma(B_u, u \leq s)$$

Corollaire 2.8.1. *Les processus $\{M_t,\ t \geq 0\}$ et $\{\widetilde{M_t},\ t \geq 0\}$ où*

$$\widetilde{M_t} = M_t^2 - \int_0^t f^2(s) ds$$

sont des $(\mathcal{F}_t^B)$ Martingales.

Théorème 2.8.2 (Formule d'intégration par parties)**.** *Soit $f \in C^1(R^+, R)$ alors*

$$I_t(f) = \int_0^t f(s) B_s = f(t) B_t - \int_0^t f\prime(s) B_s ds \quad \forall t \geq 0$$

preuve : *Fixons $t \geq 0$ par des propriétés des espaces gaussiens. Il suffit de vérifier que*

$$E(B_u I_t(f)) = E\left(B_u \left(f(t) B_t - \int_0^t f\prime(s) B_s ds\right)\right) \quad \forall u \leq t$$

En utilisant la formule d'IPP classique

$$\begin{aligned}
E\left(B_u\left(f(t)B_t - \int_0^t f\prime(s)B_s ds\right)\right) &= uf(t) - \int_0^t f\prime(s)(s \wedge u)ds \\
&= uf(t) - \left(u\int_u^t f\prime(s)ds + \int_0^u f\prime(s)sds\right) \\
&= uf(u) - \int_0^u f\prime(s)sds = \int_0^u f(s)ds \\
&= E(B_u I_u(f))
\end{aligned}$$

2.9 Processus d'Itô

Définition 2.9.1. *On appelle processus d'Itô un processus X à valeur réels*

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \quad \forall\ 0 \leq t \leq T$$

Où X_0 est $\mathcal{F}$-mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurable vérifient les condition p-p.s :

$$\int_0^T |b_s| ds < \infty \quad et \quad \int_0^T |\sigma|^2 ds < \infty$$

On utilise la notation plus concise suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Propriété 2.9.1.

$$E(X_t) = E(X_0) + \int_0^t E(b_s)ds$$

et

$$\forall t \geq s \; E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_0 + \int_0^s b_u du + E\left(\int_0^t b_u du/\mathcal{F}_s\right) + \int_0^s \sigma_u dB_u$$
$$= X_s + E\left(\int_0^t b_u du|\mathcal{F}_s\right)$$

Si $b \equiv 0$ et $\sigma \in A$ le processus X est une martingale continue. Le réciproque est vrais sous certaines condition d'intégrabilité.

A un processus à variation finie et une Martingale.

2.10 Intégrale par rapport à un processus d'Itô

Soit X un processus d'Itô de décomposition $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$. On note (sous préserver de condition d'intégrabilité)

$$\int_0^t \Theta_s dX_s \stackrel{def}{=} \int_0^t \Theta_s b_s ds + \int_0^t \Theta_s \sigma_s dB_s$$

2.11 Crochet d'un processus d'Itô

Soit Z une Martingale continue de carré intégrable. On peut montrer qu'il existe un processus croissant continue A tel que $(Z_t^2 - A_t, \; t \geq 0)$ est une Martingale. Le processus A est appelé le "crochet oblique", ou le crochet de Z. On le note trés souvent $A_t : \langle Z, Z\rangle_t$ ou aussi $\langle Z\rangle_t$.

2.12 Idée de la preuve

$$
\begin{aligned}
Z_t &= Z_0^2 + \sum (Z_{t\wedge t_{k+1}}^2 - Z_{t\wedge t_k}^2) \\
&= Z_0^2 + 2\sum Z_{t\wedge t_k}(Z_{t\wedge t_{k+1}} - Z_{t\wedge t_k}) + \sum (Z_{t\wedge t_{k+1}} - Z_{t\wedge t_k})^2 \\
&= Z_0^2 + 2\int_0^t Z_s dZ_s + A_t
\end{aligned}
$$

En utilisant ce vocabulaire cher aux probabilistes, nous établi que le crochet du brownien est t et que le crochet de l'intégrale stochastique ($M_t = \int_0^t \Theta_s dB_s$) est $\int_0^t \Theta_s^2 ds$

Si M et N sont deux Martingales locales continue, on définit leur crochet par

$$
\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{2}(\langle M+N, M+N \rangle_t - \langle M, M \rangle_t - \langle N, N \rangle_t)
$$

c'est l'unique processus à variation finie tel que le processus $MN - \langle M, N \rangle$ est une Martingale locale.

Le Crochet de deux intégrale stochastique $X_t = x + \int_0^t H_s dB_s$ et $Y_t = y + \int_0^t K_s dB_s$ est $\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s K_s ds$

Théorème 2.12.1 (première formule d'Itô). *Soit $(\mathcal{C})_{t t\geq 0}$ une semi-martingale continue et adapté et $f : R \to R$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ on a*

$$
f(X_t) = f(\varepsilon) + \int_0^t \frac{df}{dX}(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2 f}{dX^2}(X_s) d\langle X \rangle_s
$$

Théorème 2.12.2 (deuxième formule d'Itô). *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une semi martingale continue et adaptée, $(A_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté à variation bornée et $f : R \to R$ une application de classe $C^{1\ 2}$ on a :*

$$f(A_t, X_t) = f(A_0, \varepsilon) + \int_0^t \frac{df}{dt}(A_s, X_s) dA_s + \int_0^t \frac{df}{dX}(A_s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d^2 f}{dX^2}(A_s, X_s) d\langle X \rangle_s$$

Théorème 2.12.3 (troisième formule d'Itô)**.** *Soit* X, Y *deux processus d'Itô et* $X_0 = x$ *et* $Y_0 = y$ $f \in C^2$ *derivée bornée* $f : R^2 \to R.$ $\quad (x, y) \to f(x, y)$

$$\begin{aligned} f(X_t, Y_t) = & f(x, y) \\ & + \int_0^t \frac{df}{dX}(X_s, Y_s) dX_s \\ & + \frac{df}{dY}(X_s, Y_s) dY_s \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d^2 f}{dX^2}(X_s, Y_s) d\langle X \rangle_s \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d^2 f}{dY^2}(X_s, Y_s) d\langle Y \rangle_s \\ & + \int_0^t \frac{d^2 f}{dxdy}(X_s, Y_s) d\langle X, Y \rangle_s \end{aligned}$$

Chapitre 3

L'existence, l'unicité des solutions des équation différentielles stochastique rétrogrades

Le but de ce chapitre est de présenter et montrer le résultat d'existence et d'unicité de la solution des equation differentielles stochastique Retrogrades dont les cofficients sont globalement lipschiziens.

Le résultat a été obtenu par para-doux et peng en 1990 avec la génération g non linéaire et une donnée terminale de carré intégrable.

3.1 Équation différentielle stochastique (EDS)

Définition 3.1.1. *Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme :*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, x_s)ds + \int_0^t \sigma(s, x_s)dB_s$$

ou sous la forme

$$\begin{cases} dX_t = b(t,x_t)dt + \sigma(s,x_s)dB_t \\ x_0 = x \end{cases}$$

ou x et n dimensionnel et les fonctions :

$$b : [0,T] \times \omega \times R^n \to R^n$$

$$\sigma : [0,T] \times \omega \times R^n \to R^{n\times d}$$

sont $\mathcal{F}$ mesurables.

Théorème 3.1.1 (Existence et unicité)**.**

Si b et σ sont des fonctions continue telles qu'il existe $L < \infty$

1. $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L\,|x-y|$ *pour tout* $x, y \in R^n$
2. $|b(t,x) + \sigma(t,x)| \leq L(1+|x|)$
3. $E(|x|^2) < \infty$

alors pour tout $T \geq 0$ l'EDS possed une unique solution dans l'intervalle $[0,T]$.

3.2 Équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR)

3.2.1 Présentation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré et ε une variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t$ où T désigne un temps terminal

On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\dfrac{dy_t}{dt} = g(y_t)\ ; \quad t \in [0,T] \\ y_t = \varepsilon \end{cases}$$

pour tout instant t, y_t ne dépende pas du futur après t. c'est-à-dire que le processus y soit adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$

En prend l'exemple le plus simple $g \equiv 0$, le candidat naturel est $y_t = \varepsilon$ qui n'est pas adapté si ε n'est pas déterministe.

La meilleure approximation -disons dans L^2- adaptée est la martingale $y_t = E(\varepsilon \backslash \mathcal{F})$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien. Le théorème de représentation des martingales brownienne permet de construire un processus z de carré intégrable et adapté tel que

$$y_t = E(\varepsilon \backslash \mathcal{F}_t) = E(\varepsilon) + \int_0^t z_s dw_s$$

Un calcul élémentaire montre :

$$y_t = \varepsilon - \int_0^t z_s dw_s \quad t \in [0, t]$$

Ou de façon équivalente :

$$\begin{cases} -dy_t = \ -z dw_s \ ; \quad t \in [0, T] \\ \quad y_t = \varepsilon \end{cases}$$

On voit donc apparaitre sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Par conséquence, comme une seconde variable apparait. Pour obtenir la pus grand généralité ; on permet à g de dépendre du processus z. l'équation devient donc :

$$\begin{cases} -dy_t = \ g(t, y_t, z_t)dt - z_t dw_t \\ \quad y_t = \varepsilon \end{cases} \tag{3.1}$$

ou de façon equivalente sous forme intégrable

$$y_t = \varepsilon + \int_t^T g(t, y_s, z_s)ds - \int_t^T z_s dw_s \quad t \in [0, T]$$

3.3 Notation

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet et w un mouvement brownien (MB) d-dimensionnel sur cet espace. On montera $\mathcal{F}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du MBW . On travaillera avec deux espaces de processus :

— On note $\mathcal{S}^2(R^k)$: l'espace vectoriel formé des processus Y progressivement mesurables à valeur dans R^k tel que :

$$\| y \|_{S^2}^2 = E\left[\sup_{0\leq t\leq T} y_t\right] < \infty$$

et $\mathcal{S}^2(R^k)$ le sous espace formé par le processus continue.

— On suit $M^2(R^{k\times d})$ celui formé par le processus z progressivement mesurable à valeur dans $R^{k\times d}$ tel que :

$$\| z \|_{M^2}^2 = E\left[\int_0^T \| z_t \|^2 dt\right] < \infty$$

$M^2(R^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $M^2(R^{k\times d})$. Les espaces S^2, S_c^2, M^2 sont des espaces de Banache pour les normes.

On désigne par B^2 l'espace de Banache $S_c^2(R^{k\times d}) \times M^2(R^{k\times d})$

Définition 3.3.1.

La solution de l'EDSR (3.1) est un couple de processus $\{(y_t, z_t)\}_{0<t<T}$ vérifiant :

1. *y et z sont progressivement mesurable à valeur respectivement dans R^k et $R^{k\times d}$*

2. $P-Ps$

$$\int_0^T \{g(s,y_s,z_s)+ \parallel z_s \parallel^2\}ds < \infty$$

3. $P-Ps$ on a

$$y_t = \varepsilon + \int_t^T g(s,y_s,z_s)ds \ - \int_t^T z_s dw_s \ \ t \in [0,T]$$

remarque : Le processus y est une semi-martingale continue , car y écrit sous la forme $y_t = M_t + A_t$ tel que M_t est un martingale local et A_t est un processus stochastique à variation finie.

On a y est continue , car $y \in S_c^2(R^k)$ et

$$y_t = \varepsilon + \int_t^T g(s,y_s,z_s)ds \ - \int_t^T z_s dw_s \ \ t \in [0,T]$$

$A_t = \int_t^T g(s,y_s,z_s)ds$ est un processus stochastique à variation finie ou :

$$\left\langle \int_t^T g(s,y_s,z_s)ds, \int_t^T g(s,y_s,z_s)ds \right\rangle = 0 < \infty$$

$M_t = -\int_t^T z_s dB_s$ est un intégrale d'Itô alors est martingale et toute martingale est une martingale locale.

Hypothèse : (H1) Supposons qu'il existe un processus $\{g_t\}_{0<t<T} \in M^2$ est positif et k une constante positif telle que :

$$\forall (t,y,z) \in ([0,T] \times R^k \times R^{k\times d}) : |f(t,y,z)| \leq f_t + k(|y| + \parallel z \parallel)$$

.

Proposition 3.3.1.

Supposons qu'il existe un processus $\{g_t\}_{0<t<T} \in M^2(R)$ *positif et telle que :*

$$g(t, y_t, z_t) \leq g_t + k(|y| + \parallel z \parallel)$$

Si $\{(y_t, z_t)\}_{0<t<T}$ *est une solution de l'EDSR telle que* $z \in M^2(R^{k\times d})$ *alors* $y \in S_c^2$

preuve : y_0 est dèterministe, alors pour tout $t \in [0, T]$ on a

$$\begin{aligned} |y_t| &= \left| y_0 - \int_0^t g(s, y_s, z_s)ds + \int_0^t z_s dB_s \right| \\ &\leq |y_0| + \left| \int_0^t g(s, y_s, z_s) \right| ds + \left| \int_0^t z_s dB_s \right| \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse H1, on a :

$$\begin{aligned} |y_t| &\leq |y_0| + \int_0^t (g_s + k(|y_s| + \parallel z_s \parallel))ds + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t z_s dB_s \right| \\ &\leq |y_0| + \int_0^t (g_s + \parallel z_s \parallel)ds + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t z_s dB_s \right| + k \int_0^t |y_s|\, ds \\ &\leq \varepsilon + k \int_0^t |y_s|\, ds \end{aligned}$$

tel que

$$\varepsilon = |y_0| + \int_0^t (g_s + \parallel z_s \parallel)ds + \sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t z_s dB_s \right|$$

Si $z \in M^2$ donc $E\left(\int_0^t \parallel z_s \parallel^2 ds\right) < \infty$ et donc d'après l'inégalité de BDG on peut écrire :

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T} \left| \int_0^t z_s dB_s \right|^2\right) \leq KE\left(\int_0^t |z_s|^2\, ds\right) < \infty$$

On sait que y_0 et $\{g_t\}_{t\in[0,T]}$ sont déterministe et de carrée intégrable, et comme y_t est un processus continue et $|y_t| \leq \varepsilon + k\int_0^t |y_s|\, ds$, donc on peut appliquer le lemme de Gronwall

$$|y_t| \leq \varepsilon \exp(\lambda t)$$

donc

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}|y_t|\right]\le \varepsilon\exp(\lambda t)$$

on a :

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}|y_t|^2\right]\le \sup_{0\le t\le T}|y_t|\le \varepsilon\exp(\lambda t)<\infty$$

donc $y\in S^2$

Lemme 3.3.1.

Si $y\in S^2(R^k)$ et $z\in M^2(R^{k\times d})$ alors :

$$X_t=\left\{\int_0^t y_s z_s dB_s,\ t\in[0,T]\right\}$$

est une martingale uniformément intégrable.

preuve :

1. X_t est une intégrale d'Itô

   En effet y_s z_s est adapté et cadlog car $y\in S^2(R^k)$ et $z\in M^2(R^{k\times d})$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité Young $a\ b\le\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{2}$ on a :

$$\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t y_s z_s dB_s\right|\right] &\le cE\left[\left|\int_0^t |y_s|^2\parallel z_s\parallel^2 ds\right|\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\le cE\left[\left|\sup_{0\le t\le T}|y_s|^2\int_0^t\parallel z_s\parallel^2 ds\right|\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\le \frac{c^2}{2}E\left[\sup_{0\le t\le T}|y_s|^2\right]+\frac{1}{2}E\left[\int_0^t\parallel z_s\parallel^2 ds\right]\\
&\le c\prime E\left[\sup_{0\le t\le T}|y_s|^2\right]+\frac{1}{2}E\left[\int_0^t\parallel z_s\parallel^2 ds\right]\\
&<\infty
\end{aligned}$$

   car $y\in S^2(R^k)$ et $z\in M^2(R^{k\times d})$ alors X_t est une martingale.

2. X_t est uniformément intégrable

   D'après l'inégalité de BDG et l'inégalité de Young $a\ b \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$ on trouve

$$
\begin{aligned}
E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t y_s z_s dB_s\right|\right] &\leq cE\left[\left|\int_0^t |y_s|^2 \parallel z_s \parallel^2 ds\right|\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq cE\left[\left|\sup_{0\leq t\leq T}|y_s|^2\int_0^t \parallel z_s \parallel^2 ds\right|\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{c^2}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|y_s|^2\right] + \frac{1}{2}E\left[\int_0^t \parallel z_s \parallel^2 ds\right] \\
&\leq c\prime E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|y_s|^2\right] + \frac{1}{2}E\left[\int_0^t \parallel z_s \parallel^2 ds\right] \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

   Donc $E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|\right] \leq \infty$

   Donc X_t est uniformément intégrable.

3.4 Le cas Lipschitz

3.4.1 Résultat de Pardoux–Peng

Dans cette section, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité qui est dû à E. Pardoux et S. Peng [5] ; c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas où le générateur est non-linéaire. g est défini sur $[0,T]\times\omega\times R^k\times R^{k\times d}$ à valeur dans R^k, telle que pour tout $(y,z)\in R^k\times R^{k\times d}$, le processus $\{g(t,y,z)\}_{0<t<T}$ soit progressivement mesurable. On considère également ε une variable aléatoire, $\mathcal{F}_t-$mesurable, à valeurs dans R^k.

1. **Condition d'intégrabilité :**

$$E[|\varepsilon|^2 + \int_0^T g(t,0,0)^2 dt] \ < \infty$$

2. **Condition Lipschitz :** pour tout, $t,\ y,\ y\prime, z,\ z\prime$

$$|g(t,y,z)-g(t,y\prime,z\prime)| \leq K(|y-y\prime|+\parallel z-z\prime \parallel)$$

Ou début, nous commençons par le cas simple, celui où f ne dépend ni de y ni de z i.e : on se donne ε de carré intégrable et un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{0<t<T}\}$ dans $M^2(R^k)$ et on trouve une solution de l'EDSR

$$y_t=\varepsilon+\int_t^T Gds-\int_t^T z_s dw_s \quad 0\leq t\leq T$$

Lemme 3.4.1. *Soit* $\varepsilon \in L^2(\mathcal{N})$ *et* $\{F_T\}_{0\leq t\leq T}\in M^2(R^k)$

l'EDSR possed une unique solution (y,z) *tel que* $z\in M^2$

preuve : Supposons dans un premier temps que (y,z) soit une solution $z\in M^2$: Si on prend l'espérance conditionnel sachant $\mathcal{F}_t$ on a nécessairement :

$$y_t=\left[\varepsilon+\int_t^T G_s ds \ \ \backslash\mathcal{F}_t\right]$$

$$y_t=\left[\varepsilon+\int_0^T G_s ds \ \ \backslash\mathcal{F}_t\right]-\int_0^t G_s ds=M_t-\int_0^t G_s ds$$

M est une martingale brownienne : par le théorème de représentation des martingales Brownien, on construit un processus z appartenant à M^2 tel que

$$y_t=M_t-\int_0^t G_s ds=M_0+\int_0^t z_s dw_s-\int_0^t G_s ds$$

On vérifier facilement que (y,z) ainsi construit est une solution de l'EDSR étudie puisque comme $y_T=\varepsilon$

$$y_T-\varepsilon=M_0+\int_0^t z_s dw_s-\int_0^t G_s ds-\left(M_0+\int_0^T z_s dw_s-\int_0^T G_s ds\right)$$

finalement on obtient

$$y_t = \int_t^T G_s ds - \int_t^T z_s dw_s$$

L'unicité est evidente pour les solution verifiant $z \in M^2$

Théorème 3.4.1 (pardoux - peng).

l'EDSR 3.1 possède une unique solution (y, z) *tel que* $z \in M^2$

preuve : Nous utilisons un argument de point fixe 1.4.3dans l'espace de banache B^2 pour démontrer ce théorème, en construire une application ψ de B^2 dans lui-même de sorte que $(y.z) \in B^2$ est solution de l'ESDR si et seulement si c'est un point fixe de ε pour (n, e) élément de B^2, on définit $(y, z) = \psi(n, e)$ comme étant la solution de l'ESDR.

$$y_t = \varepsilon + \int_t^T g(s, n_s, e_s)ds - \int_t^T z_s dw_s; 0 < t < T$$

On remarque que cette derniere ESDR possed une unique solution qui est dans B^2 et $g(s, n_s, e_s)$ ce processus appartient à M^2 puisque g étant lipschitz

$$|g(t, n_t, e_t)| \leq |g(t, 0, 0)| + K|n_t| + K \parallel e_t \parallel$$

et ces trois processus sont de carré intégrable, et obtenir une unique solution y, z tel que $z \in M^2$ (y, z) apartient à B^2

Donc, l'application ψ de B^2 dans lui-meme est bien définie.

Soit (N, E) et $(N\prime, H\prime)$ de l'element de B^2 et $(y, z) = \psi(n, e)$, $(y\prime, z\prime) = \psi(n\prime, e\prime)$ posons $Y = y - y\prime$ et $Z = z - z\prime$ on a $Y_T = 0$ et

$$y_t = \varepsilon + \int_t^T g(s, n_s, e_s)ds - \int_t^T z_s dw_s$$

$$y\prime_t = \varepsilon + \int_t^T g(s, n\prime_s, e\prime_s)ds - \int_t^T z\prime_s dw_s$$

et $y - y\prime_t$ on obtient

$$dY_t = -\{g(t, n_t, e_t) - g(t, n\prime_t, e\prime_t)\}dt + Z_t dw_t \tag{3.2}$$

On applique la formule de Itô à $e^{\alpha t}|Y_t|^2$

$$d(e^{\alpha t}|Y_t|^2) = \alpha e^{\alpha t}|Y_t|^2 dt + e^{\alpha t} d|Y_t|^2$$

$$d\langle |Y_t|^2 \rangle = 2|Y_t| d|Y_t| + \langle Y_t, Y_t \rangle dt$$

on obtient

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2) = \alpha e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2 dt + e^{\alpha t}\left\|Z_t\right\|^2 dt - 2e^{\alpha t}\left|Y_t\right|\{g(t, n_t, e_t) - g(t, n\prime_t, e\prime_t)\}dt \\ + 2e^{\alpha t} Y_t Z_t dw_t \end{aligned} \tag{3.3}$$

Par conséquent, on integrant entre t et T on obtient

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}\left\|Z_s\right\|^2 ds = \int_t^T e^{\alpha s}(-\alpha\left|Y_s\right|^2 - 2Y_s\{g(t, n_t, e_t) - g(t, n\prime_t, e\prime_t)\})ds \\ - \int_t^T 2e^{\alpha s} Y_s Z_s dw_s \end{aligned}$$

et comme g est lipschitz, il vient, notant N et E pour $n - n\prime$ et $e - e\prime$ respectivement

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}\left\|Z_s\right\|^2 ds \leq \int_t^T e^{\alpha s}(-\alpha\left|Y_s\right|^2 + 2K\left|Y_s\right|\ \left|N_s\right| + 2K\left|Y_s\right|\left\|E_s\right\|)ds \\ - \int_t^T 2e^{\alpha s} Y_s\ Z_s dw_s \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$$

et donc l'inégalité donne :

$$e^{\alpha t} |Y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \|Z_s\|^2 ds \leq \int_t^T e^{\alpha s} \left[-\alpha + \frac{2K^2}{\varepsilon} \right] |Y_s|^2 ds + \varepsilon \int_t^T e^{\alpha s} [|N_s|^2 + \|E\|^2] ds$$
$$- \int_t^T 2e^{\alpha s} Y_s Z_s dw_s$$

On prend $\alpha = \dfrac{2K^2}{\varepsilon}$ l'intégrabilité précédente donne

$$e^{\alpha t} |Y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \|Z_s\|^2 ds \leq \varepsilon \int_t^T e^{\alpha s} [\ |N_s| + \|E_s\|^2] ds - \int_t^T 2e^{\alpha s} Y_s Z_s dw_s$$

On note

$$R_\varepsilon = \varepsilon \int_t^T e^{\alpha s} [|N_s|^2 + \|E_s\|^2] ds$$

on a si $a + b \leq c$ alors $a \leq c$ et $b \leq c$

Donc on obtient

$$e^{\alpha t} |Y_t|^2 \leq R_\varepsilon - \int_t^T 2e^{\alpha s} |Y_s| \|Z_s\| dw_s \tag{3.4}$$

$$\int_t^T e^{\alpha s} \|Z_s\|^2 ds \leq R_\varepsilon - \int_t^T 2e^{\alpha s} |Y_s| \|Z_s\| dw_s \tag{3.5}$$

En pronder l'espérence sur lequation $\int_t^T e^{\alpha s} \|Z_s\|^2 ds \leq R_\varepsilon - \int_t^T 2e^{\alpha s} |Y_s| \|Z_s\| dw_s$

on obtient

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s\right\|^2 ds\right) &\leq E(R_\varepsilon) - E\left(\int_t^T 2e^{\alpha s} Y_s Z_s\ dw_s\right) \\ E\left(\int_0^T e^{\alpha s} {Z_s}^2 ds\right) &\leq E(R_\varepsilon) \end{aligned} \tag{3.6}$$

et pour la 3.6 on utilise la théorème 1.4.6

On obtient

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2\right] \leq E(R_\varepsilon) + CE\left[\int_0^t (2e^{\alpha s}\left|Y_s\right|\left\|Z_s\right\|)^2 ds\right]^{\frac{1}{2}}$$

On utilise $a\ b \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$ on obtien

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2\right] \leq E(R_\varepsilon) + \frac{1}{2}E\left[\sup e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2\right] + \frac{C^2}{2}E\left(\int_0^t e^{\alpha s}\left\|Z_s\right\|^2\ ds\right) \tag{3.7}$$

et par l'addition de 3.6 et 3.7 on obtient

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2\right] + E\int_0^t e^{\alpha s}\left\|Z_s\right\|^2 ds \leq (3+C^2)E[R_\varepsilon]$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y\right|^2 + \int_0^t e^{\alpha s} ds\right] \leq \varepsilon(3+C^2)(1\vee T)E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|N_t|^2 + \int_0^t e^{\alpha s}\left\|E_s\right\|^2 ds\right]$$

Prenons ε tel que $\varepsilon(3+C^2)(1\vee T) = \dfrac{1}{2}$ de sorte que l'application ψ est alors une contraction de B^2 dans lui-même de la norme

$$\|(N,E)\|_{\alpha} = E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|N_t\right|^2 + \int_0^t e^{\alpha s}\left\|E_s\right\|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}}$$

Qui en fait un espace de Banach. Cette dernière norme étant équivalente à la norme correspondant au cas $\alpha = 0$

L'application ψ posse donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR dans B^2. On obtient ensuite une unique solution

Bibliographie

[1] Jean-Michel Bismut. Conjugate convex functions in optimal stochastic control. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 44(2) :384–404, 1973.

[2] Philippe Briand. Équations différentielles stochastiques rétrogrades. *Mars*, 2001.

[3] Monique Jeanblanc and Thomas Simon. Eléments de calcul stochastique. *IRBID, septembre*, 2005.

[4] Khelfallah .N. *cours de martingale.* deparrement de mathemathique, universite de biskra, 2020.

[5] Etienne Pardoux and Shige Peng. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems & Control Letters*, 14(1) :55–61, 1990.

Annexe A

Abréviation et notation

Les différentes abréviations et notation utilisé tout au long de ce mémoire sont expliqué ci-dessous

$(\omega, \mathcal{F}, F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$	espace de probabilité filtré
$L^2(\omega, \mathcal{F}_t)$	espace des fonctions défini sur ω de carré intégrable $\mathcal{F}_t$ mesurable
càdlag	continue à droite admet limite à gauche
P-P-S	presque sûrement pour la mesure de probabilité filtré
MB	mouvement Brownien
BDG	Burkholder -Davis- Gundy
S^2	espace vectoriel formé des processus progressivement mesurable à valeur dans R^k
S_c^2	un sous espace de S^2 formé les processus continue
$M^2(R^{k\times d})$	ensemble des classe d'équivalence de $M^2(R^{k\times d})$
B^2	espace de Banach
$E[\ ]$	l'espérance mathématique
$E[\backslash]$	l'espérance conditionnelle
L^2	espace des processus de carré intégrable
$S \wedge T$	$min(S, T)$
$EDSR$	équation différentielle stochastique rétrograde

Résume :

Le but de ce travail est de montrer le résultat de l'existence et d'unicité pour la solution de équations différentielles stochastique rétrogrades ($EDSR$). ce résultat est dû à Pardoux et Peng qui traite le cas lipschitzien en 1990 et Ablir en 1990.

Mots-clés: Équation différentielle stochastique rétrograde.

Abstract :

The aim of this work is to show the result of existence and uniqueness for the solution of backward stochastic differential equations (BSDE). this result is due to Pardoux and Peng who dealt with the Lipschitzian case in 1990 and Ablir in 1990.

Keywords: Stochastic retrograde differential equation.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو إظهار نتيجة الوجود والتفرد لحل المعادلات التفاضلية التراجعية العشوائية (متتع). تعود هذه النتيجة إلى باردو وبنغ الذين تعاملوا مع قضية ليبشيتزيان في عام ١٩٩٠ وأبلير في عام ١٩٩٠.

الكلمات المفتاحية: : المعادلات التفاضلية التراجعية العشوائية