République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilité**

Par :

Harzalah Rami

Titre :

Principe du maximum stochastique sous l'information partielle

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	Gherbel Boulakhras	UMKB	Président
Dr.	Bougherara Saliha	UMKB	Encadreur
Dr.	Ghoul Abdelhak	UMKB	Examinateur

Juin 2022

Dédicace

Je dédie cet humble travail à :

mon père, ma mère, ma mère et mes frères.

Toute ma famille et mes amis

et l'équipe de l'école Beit El-Hikma

REMERCIEMENTS

J'exprime d'abord mes profonds remerciements à mon "DIEU" qui m'a donné le courage et la volontè d'achènes ce travail.

Je tiens à remercier sincèrement mon encadreur **Dr. Bougherara Saliha,** pour ces conseils, sa grande disponibilité et sa générosité avec la quelle elle m'a fait partager ces travaux, ses idées et ses intuitions.

Je remercie également les membres du jury : **Pr. Gherbel Boulakhras** et **Dr.Ghoul Abdelhak.**pour accepté d'évaluer et de juger ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignants du département de Mathématiques qui ont contribué à ma formation.

A toutes mes amies et toute personne qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

RAMI.

Table des matières

Introduction

Les problèmes de contrôle optimal stochastique on un grand nombre d'applications dans les domaines de l'économie et à de la finance.

Il existe deux approches de résolution du problème de contrôle optimal, bien connues, qui sont :

- Principe de la programmation dynamique.
- Principe du maximum de Pontryagin sous le nom ** Conditions nécessaires d'optimalité**. Cette méthode, qui fera l'objet de ce travail. L'idée suivante **:** Si $\hat{u}$ est un contrôle optimal, on utilise l'approche de Lagrange en calcul des variations de la dérivée de la fonctionnelle par rapport à certain paramètre de perturbation ε doit être positive. Le principe de maximum stochastique a pour objectif de trouver l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes qui doit être satisfaites par ce contrôle.

◀ Dans le cas déterministe, le principe maximum a été établi par Pontryagin en **1950**.

◀ La première version du principe de maximum stochastique a été largement établie dans les années **1970**.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant les conditions habituelles, et $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien d-dimensionnel. On considère l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dx_t = b\left(t, x_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t, u_t\right) dW_t \\ x_0 = x, \end{cases},$$

tell que :

◁ x_t la trajectoire du système contrôlé par u.

◁ les fonctions boréliennes b et σ définies par $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$, et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times m}$.

◁ Le contrôle u est un processus mesurable.

la fonction de cout est donnée par :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, x_t, u_t)\, dt + g(x_T)\right].$$

L'objet du contrôle optimal stochastique est de maximiser un cout sur un ensemble $\mathcal{U}$ de tous les contrôles admissibles :

$$J(\hat{u}) = \sup_{u(.)\in\mathcal{U}} J(u(.))$$

Ce mémoire est contenu de deux chapitre

◀ Dans le premier chapitre, on présente des généralités sur les processus stochastiques, mouvement Brownien, martingale, formule d'Itô et l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation différentielle stochastique.

◀ Dans le dernière chapitre, on va étudier le problème du contrôle optimal par le principe du maximum stochastique sous l'information partielle.

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastiques

1.1 Processus stochastiques

On va s'intéresser à des phénomènes dépendant du temps. Ce qui est connu à la date t est rassemblé dans une tribu $\mathcal{A}_t$, c'est l'information à la date t .

Définition 1.1.1 *: Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in T}$ est une famille de variables aléatoires :*

a) *Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ un processus dépend de t (en générale le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.*

b) *Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \longmapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P})$.*

c) *Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \longmapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.*

Définition 1.1.2 *: Un processus stochastique $\{X(t,\omega),\ t \in T\}$ est dit à temps discret (respectivement à temps continu) si T est un ensemble infini dénombrable (respectivement un ou plusieurs intervalles).*

Définition 1.1.3 *: Un processus $(X_t)_{t\in T}$ est dit adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ si $\forall\ t \in T$, X_t est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_t$.*

Définition 1.1.4 *: Un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dit prévisible pour la filtration $\mathcal{F}_n$ ou $\mathcal{F}_n$-prévisible si pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.*

Définition 1.1.5 *: Un processus est dit continu si pour presque tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \longmapsto X_t(\omega)$ est continue (i.e. les trajectoires sont continues).*

Définition 1.1.6 *: Un processus est dit càdlàg (continu à droit, limité à gauche) si ses trajectoires sont continues à droit, pourvues de limites à gauche.*

Définition 1.1.7 *: Un processus $X = \{X_t\}_{t\in T}$ est dit mesurable si l'ensemble :*

$$\{(t,\omega) \in \mathbb{T}\times\Omega : X_t(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}} \otimes \mathcal{F}, \forall B \in \zeta,$$

c'est à dire l'application :

$$\begin{array}{ccc} (\Omega\times\mathbb{T}, \mathcal{F}\otimes\mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mathbb{P}) & \longrightarrow & (\mathbb{E}, \zeta) \\ (\omega, t) & \longmapsto & X(\omega, t) \end{array}$$

est mesurable.

Définition 1.1.8 *: Un processus X est dit progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si pour tout $t \geq 0$, l'application :*

$$\begin{array}{ccc} (\Omega\times[0,t], \mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}[0,t], \mathbb{P}) & \longrightarrow & (E, \zeta) \\ (\omega, s) & \longmapsto & X(\omega, s) \end{array}$$

est mesurable.

Exemple 1.1.1 *: On dit que $\{X_t,\ t \geq 0\}$ est un bon processus s'il est $(\mathcal{F}_t)$ -adapté, càdlàg, et si :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2 ds\right] < +\infty \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 1.$$

Définition 1.1.9 *: Soit une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est à variation finie si $\mathbb{P}$-presque toutes les trajectoires :*

$$t \longmapsto X_t(\omega)$$

sont à variation finie. Ou si la variation totale de $(X_t)_{t\geq 0}$ existe et est fini, ç'est dire :

$$V_{[0,T]}(X) = \sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{p_n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right| < +\infty,\ p.s,$$

où : $\Pi_n = \left(t_1^n, t_2^n, ..., t_{p_n}^n\right)$ une subdivision de $[0, T]$.

Définition 1.1.10 *: Un processus X est à variation bornée sur $[0, T]$ s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire :*

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^{p_n} \left| X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} \right| < +\infty,\ p.s.$$

Définition 1.1.11 *: Une suite aléatoire (X_n) est dite indépendante si la suite de tribus engendrées $(\sigma(X_n))$ est indépendante.*

Définition 1.1.12 *: Deux suites aléatoires sont dites indépendantes si toutes sous-suites finies extraite sont indépendantes.*

Définition 1.1.13 ***:*** *Deux processus X et Y sont dit équivalentes s'ils ont la même loi (égalité de toutes les lois fini-dimensionnelles). On écrira $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$.*

Définition 1.1.14 *: Un processus X est dite à accroissements indépendants si on a :*

a) $X_0 = 0$, *p.s,*

b) $\forall n \geq 1, \forall t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$, *tel que :* $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, *les variables aléatoires*

$$\left(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)$$

sont indépendantes.

Définition 1.1.15 *: Un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus accroissements indépendants stationnaires si : $\forall s,\ t \in \mathbb{R}_+$, tel que $0 \leq s < t$, la variable aléatoire $X_t - X_s$ a la même loi que X_{t-s}. Autrement dit :*

$$\forall h \geq 0 \ : \ X_{t+h} - X_{s+h} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_{t-s}.$$

(notation $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$ ssi X et Y ont la même loi).

Définition 1.1.16 *: On dit que $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ est un vecteur aléatoire gaussien si tout combinaison linéaire des X_{t_i} suit une loi normale.*

$$\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{n} (a_i X_{t_i})$$

est une variable aléatoire gaussienne.

Définition 1.1.17 *: Un processus X est gaussien si tout combinaison linéaire finie de $(X_t,\ t \geq 0)$ est une variable aléatoire gaussienne, c'est à dire si :*

$$\forall n, t_i \in \mathbb{R}_+, 1 \leq i \leq n, \forall a_i, \sum_{i=1}^{n} (a_i X_{t_i})$$

est une variable aléatoire gaussienne.

Définition 1.1.18 *: Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus stochastique intégrable, où T un ensemble d'indices. On dit que cet processus est uniformément intégrable si :*

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{t\in T}\mathbb{E}\left[|X_t|\,1_{\{|X_t|\geq n\}}\right]=0.$$

1.2 Mouvement Brownien

Le mouvement Brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau, observé par le botaniste **Robert Brown** en 1828. Le mouvement Brownien est en général noté $(W_t,\ t\geq 0)$ en référence à **Wiener** ou $(B_t,\ t\geq 0)$ en référence à **Brown**.

Définition 1.2.1 *(Mouvement Brownien) : On dit qu'un processus $(B_t)_{t\geq 0}$ à valeurs réelles est mouvement Brownien issu de x si $B_0=x$ et les accroissements de $(B_t)_{t\geq 0}$ sont gaussiens, centrés, stationnaires, et indépendants : c'est à dire que pour $t_0\leq t_1\leq ...\leq t_n, B_{t_1}-B_{t_0}, B_{t_2}-B_{t_1}, ..., B_{t_n}-B_{t_{n-1}}$suit une loi normale $\mathcal{N}\left(0,\ \sigma^2\left(t_i-t_{i-1}\right)\right)$ avec $1\leq i\leq n$, et*

$$\mathbb{E}\left[\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right)\left(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right)\right]=0,\quad \forall i\neq j \quad \text{où} \quad 1\leq i,j\leq n.$$

Définition 1.2.2 *(Mouvement Brownien standard) : On appelle mouvement Brownien standard un processus stochastique $(B_t)_{t\geq 0}$ à valeurs réelles tel que :*

a) $B_0=0$, *p.s ;*

b) *Si $t_0\leq t_1\leq ...\leq t_n$, les accroissements $\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}},\ 1\leq i\leq n\right)$ sont indépendants ;*

c) *Pour tout $s,\ t\geq 0$, tel que $s\leq t$, B_t-B_s suit une loi gaussienne centrée de variance $t-s$;*

d) $\mathbb{P}$*-p. s.* $t\longmapsto B_t(\omega)$ *est continue.*

Remarque 1.2.1 *: De cette définition, il suit que pour $t\geq s\geq 0$: i.e :*

- $B_t-B_s \backsim B_{t-s}\backsim \mathcal{N}(0,t-s)$.
- $\mathbb{E}\left[(B_t-B_s)\right]=0$ *et* $\mathbb{E}\left[(B_t-B_s)^2\right]=t-s$.

Proposition 1.2.1 *: Si $(B_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien :*

1. *Pour tout $s > 0$, $\{B_{t+s} - B_s\}_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien.*

2. *Le processus $(-B_t)$ est un mouvement Brownien.*

Preuve.

1. Posons : $Z_t = B_{t+s} - B_s$.

a) $Z_0 = B_0 - B_0 = 0$.

b) Puisque

$$\begin{aligned} Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}} &= (B_{t_k+s} - B_s) - \left(B_{t_{k-1}+s} - B_s\right) \\ &= B_{t_k+s} - B_{t_{k-1}+s}, \end{aligned}$$

et que : $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires :

$$\left(B_{t_1+s} - B_{t_0+s}\right),\ \left(B_{t_2+s} - B_{t_1+s}\right), ...,\ \left(B_{t_k+s} - B_{t_{k-1}+s}\right)$$

sont indépendantes, alors : $\forall\ 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires : $Z_{t_1} - Z_{t_0}$, $Z_{t_2} - Z_{t_1}, ..., Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}}$ sont indépendantes.

c) $\forall u,\, t \geq 0$, tel que : $u < t$,

$$\begin{aligned} Z_t - Z_u &= (B_{t+s} - B_s) - (B_{u+s} - B_s) \\ &= B_{t+s} - B_{u+s} \end{aligned}$$

est de distribution normale d'espérance 0 et de variance $(t + s) - (u + s) = t - u$.

d) $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \longmapsto Z_t(\omega) = B_{t+s}(\omega) - B_s(\omega)$ est continue puisque $t \longmapsto B_t(\omega)$ est continue.

2. Posons : $Y_t = -B_t$:

a) $Y_0 = -B_0 = 0$.

b) Puisque $Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}} = B_{t_{k-1}} - B_{t_k}$ et que $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires :

$$\left(B_{t_1} - B_{t_0}\right),\ \left(B_{t_2} - B_{t_1}\right), ...,\ \left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right)$$

sont indépendantes, alors : $\forall\ 0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les variables aléatoires :

$$(B_{t_0} - B_{t_1}),\ (B_{t_1} - B_{t_2}), ...,\ \left(B_{t_{k-1}} - B_{t_k}\right)$$

sont indépendantes, ce qui implique que :

$$Y_{t_1} - Y_{t_0}, Y_{t_2} - Y_{t_1}, ..., Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}$$

sont indépendantes. $\forall s,\ t \geq 0$, tel que $s < t$, $Y_t - Y_s = (B_s - B_t)$ est de distribution normale d'espérance 0 et de variance $t - s$.

d) $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire

$$t \longmapsto Y_t(\omega) = -B_t(\omega)$$

est continue puisque $t \longmapsto B_t(\omega)$ est continue.

■

Proposition 1.2.2 *: Si B un mouvement Brownien, alors presque sûrement, on a : $B_t(w)$ n'est dérivable en aucun point t et n'est pas à variation finie en aucun point t.*

1.3 Martingales

Définition 1.3.1 *: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration de cet espace. Une famille $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale si :*

a) *$(M_t)_{t\geq 0}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$;*

b) *$\forall t \geq 0$, M_t est intégrable, (c'est-à-dire vérifiant $\mathbb{E}\left[|M_t|\right] < \infty$ pour tout t) ;*

c) *$\forall 0 \leq s \leq t : \mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] = M_s$.*

Définition 1.3.2 *: De plus $(M_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sous-martingale si :*

$$\forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] \geq M_s,$$

et une sur-martingale si :

$$\forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] \leq M_s.$$

Remarque 1.3.1 *:*

- *Si* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale, la fonction* $t \longmapsto \mathbb{E}\left(M_t\right)$ *est constante :*

$$\mathbb{E}\left[M_t\right] = \mathbb{E}\left[M_0\right], \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

- *Si* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est une sous-martingale, la fonction* $t \longmapsto \mathbb{E}\left(M_t\right)$ *est croissante :*

$$\mathbb{E}\left[M_t\right] \geq \mathbb{E}\left[M_0\right], \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

- *Si* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est une sur-martingale, la fonction* $t \longmapsto \mathbb{E}\left(M_t\right)$ *est décroissante, i.e*

$$\mathbb{E}\left[M_t\right] \leq \mathbb{E}\left[M_0\right], \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Remarque 1.3.2 *: Si* M *est une sur-martingale, alors* $(-M)$ *est une sous-martingale.*

Proposition 1.3.1 *:* $(B_t)_{t\geq 0}$ *est un* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *-mouvement Brownien standard, alors :* (B_t) *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-martingale.*

Preuve. B_t est un processus adapté et intégrable ; comme il est centré et à accroissements indépendants, alors :

$$\mathbb{E}\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[B_t - B_s\right] = 0,$$

$$\mathbb{E}\left[(B_t - B_s) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[B_t \mid \mathcal{F}_s\right] - B_s,$$

alors :

$$\mathbb{E}\left[B_t \mid \mathcal{F}_s\right] = B_s, \; t \geq s.$$

■

Proposition 1.3.2 *:*

1. $\left(B_t^2 - t\right)$ *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *-martingale.*

2. $\left(\exp\left(\sigma B_t - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)\right)$ *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *-martingale.*

Proposition 1.3.3 ***(Décomposition de Doob)*** *: Soit* $(X_t)_t$ *un processus aléatoire intégrable. Alors il existe une martingale* $(M_t)_t$ *et un processus* $\mathcal{F}$*-prévisible* $(V_t)_t$*, tels que :*

$$M_0 = V_0 = 0,$$

et

$$X_t = X_0 + M_t + V_t, \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0.$$

De plus, cette décomposition est unique.

Définition 1.3.3 *: On dit qu'un processus* $M = (M_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt* $(T_t)_t$ *telle que :*

$$T_t \to \infty, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s,$$

et le processus arrêté M^{T_t} *est une martingale pour tout* t*.*

Définition 1.3.4 *: Une semi-martingale est un processus :*

$$X = X_0 + A + M,$$

où A *est un processus à variation finie,* X_0 *est une variable* $\mathcal{F}_0$*-mesurable et* M *est une martingale locale.*

1.4 Calcul d'Itô

1.4.1 Intégrale stochastique

Il s'agit d'une intégrale définie façon similaire à l'intégrale de Riemann comme limite d'une somme de Riemann. Si on se donne un processus de Wiener (ou mouvement Brownien), $B : [0,T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi que $X : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté à la filtration naturelle associée à B_t, alors l'intégrale d'Itô $\int_0^t \phi_s dB_s$ est définie par la limite en moyenne quadratique de

$$\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité et B_t un mouvement Brownien sur cet espace, et la filtration naturelle du mouvement Brownien $\mathcal{F}_t = \sigma\left(B_s, s \leq t\right)$. L'objectif c'est définir l'intégrale $\int_0^t \phi_s dB_s$ pour des processus ϕ :

◄ Cas étagé

On dit qu'un processus ϕ est étagé (ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_i, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoire ϕ_i telle que ϕ_i soit $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable de carré intégrable $\phi_t = \phi_i$ pour tout $t \in \left]t_i, t_{i+1}\right]$. Soit

$$\phi_s\left(\omega\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i\left(\omega\right) \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}\left(s\right).$$

On définit :

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

On sais que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}ar\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s^2 ds\right].$$

Alors :

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}\right).$$

◄ **Cas général**

Soit l'ensemble $\mathcal{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus ϕ est $\mathcal{F}_t$-adaptés càglàd (continus à gauche limite à droite). Si ϕ un meilleur processus, il existe (ϕ_s^n) une suite de processus étagés telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_s^n - \phi_s^2)\, ds\right] \to 0,$$

quand n tend vers ∞.

Ainsi, pour tout $t > 0$, il existe une v.a $I_t(\phi) = \displaystyle\int_0^\infty \phi_s dB_s$ de carré intégrable.

On va montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s dB_s\right] = 0.$$

On a :

$$I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right),$$

$I_t(\phi)$ est gaussien, car (B_t) est un processus gaussien, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) = 0$ cas $\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$ sont à accroissement indépendantes.

Pour montrer que :

$$\mathbb{V}ar\left[I_t(\phi)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left(I_t(\phi)^2\right) - \mathbb{E}\left(I_t(\phi)\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(I_t(\phi)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\infty} \phi_s dB_s\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_i)^2 \, \mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\phi_i)^2 \left(t_{i+1} - t_i\right) \\
&= \int_0^{\infty} \phi_s^2 ds.
\end{aligned}$$

1.4.2 Propriétés d'intégrale stochastique

Il y'a plusieurs propriétés sur l'intégrale stochastique les plus important sont :

- Linéarité :

$$\int_0^t \left(a\phi_s^1 + b\phi_s^2\right) dB_s = a\int_0^t \phi_s^1 dB_s + b\int_0^t \phi_s^2 dB_s.$$

- Additivité : Pour $0 \leq s < u < t \leq \mathbb{T}$

$$\int_s^t \phi_v dB_v = \int_s^u \phi_v dB_v + \int_u^t \phi_v dB_v.$$

- Propriétés de martingale : Pour tout processus ϕ, on a :

$$t \mapsto I_t(\phi) \quad \text{et} \quad t \mapsto I_t(\phi)^2 - \int_0^t \phi_s^2 ds$$

sont des $\left(\mathcal{F}_t^B\right)$-martingales continues on a :

$$\mathbb{E}\left[\left(I_t\left(\phi\right)-I_s\left(\phi\right)\right)^2 \mid \mathcal{F}_s^B\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_u^2 du \mid \mathcal{F}_s^B\right].$$

- Si $\left(X_t\right)_{t\in[0,\mathbb{T}]}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté et

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \mid X_s \mid^2 ds\right)<+\infty,$$

on a l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t \mid X_s \mid^2 dB_s\right|^2\right]\leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^t \mid X_s \mid^2 ds\right].$$

- Isométrie :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \phi_s dB_s\right)^2\right]=\mathbb{E}\left(\int_0^t \phi_s^2 ds\right).$$

1.4.3 Processus d'Itô

Définition 1.4.1 *: Un processus d'Itô est un processus de la forme :*

$$X_t=X_0+\int_0^t \varphi_s ds+\int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Avec X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, φ et θ deux processus $\mathcal{F}_t$-adapté vérifient les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^t |\varphi_s|\, ds<+\infty \quad et \quad \int_0^t \parallel \theta_s \parallel^2 ds<+\infty,$$

où le coefficient φ est le drifter ou la dérivée θ est le coefficient de diffusion. On note de manière infinitésimale :

$$dX_t=\varphi_s ds+\theta_s dB_s.$$

1.4.4 Formule d'Itô

Théorème 1.4.1 (Première formule d'Itô) *: Supposons f de classe $\mathbb{C}^2$. Alors :*

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\left\langle X,X\right\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\theta_s^2 ds. \end{aligned}$$

Théorème 1.4.2 (Deuxième formule d'Itô) *: Soient X un processus d'Itô et f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^1$ par rapport à t et de classe $\mathbb{C}^2$ par rapport à X, on a :*

$$\begin{aligned} f(t,X) &= f(0,X_0) + \int_0^t f_t'(s,X_s)ds + \int_0^t f_x'(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s,X_s)d\left\langle X,X\right\rangle_s \\ &= f(0,X_0) + \int_0^t f_t'(s,X_s)ds + \int_0^t f_x'(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s,X_s)\theta_s^2 ds. \end{aligned}$$

On peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$df\left(t,X\right) = \left[f_t'\left(t,X_t\right) + \frac{1}{2}f_{xx}''\left(t,X_t\right)\theta_t^2\right]dt + f_x'(t,X_t)dX_t.$$

Remarque 1.4.1 *: La formule d'Itô s'énonce également dans le cas multidimentionnel (ie $\varphi\left(t\right)$, $\theta\left(t\right), B\left(t\right)$ sont des matrices) :*

$$\begin{aligned} f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f_s(s,X_s)\varphi_s ds + \int_0^t f_x(s,X_s)\varphi_s ds \\ + \frac{1}{2}tr\left[\theta\left(s\right)^T f(s,X\left(s\right))\theta\left(s\right)\right] + \int_0^t f_x(s,X_s)\theta_s dB_s. \end{aligned}$$

Proposition 1.4.1 (Formule d'intégration par parties) *: Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P}\text{-}p.s \quad et \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Alors :

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \left\langle X,Y\right\rangle_t.$$

Cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

1.5 Equations différentielles stochastiques (EDS)

Equations différentielles stochastiques sont des généralisations des équations différentielles qui sont gouverner de plusieurs des phénomènes déterministes en physique, mécanique et biologie. Dans cette partie, on étudier l'existence et l'unicité d'une équation différentielle à coefficients Lipchitziens.

On définit l'espace S_c^2 par : les processus progressivement mesurables tel que :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right) < +\infty$$

continue, muni de

$$\| X \|= \mathbb{E}\left(\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty\right).$$

Définition 1.5.1 *: Une équation différentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = X, \end{cases} \tag{1.1}$$

où sous forme intégral

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \quad \forall t \geq 0,$$

où :

- b *:* $[0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *et* σ *:*$[0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times n}$ *sont deux fonctions mesurables bornées où* $(T > 0)$*et* $n \in \mathbb{N}$ *et* $n, d \in \mathbb{N}$*.*
- x *: la condition initiale à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*.*

- $\sigma\sigma^t$ *est dit matrice de diffusion, et :*

$$|\mathbf{b}| = \left(\sum_{i=1}^{d} b_i^2\right)^{1/2} \quad et \quad ||\sigma|| = (trace(\sigma\sigma^{\mathbf{t}}))^{1/2}.$$

- $\{B; t \geq 0\}$ *est un mouvement Brownien d-dimensionnel.*
- *Le coefficient* $b\,(t, X_t)$ *est appelé dérive et le coefficient* $\sigma(t, X_t)$ *de* dB_t *est appelé terme de diffusion.*

Définition 1.5.2 *: Une solution forte à l'équation* (1.1) *est un processus* $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ *continu qui est* $\mathcal{F}_t$*-adapté tel que :*

a) *Pour tout* $t \geq 0$*, les intégrales* $\int_0^t b(s, X_s)ds$ *et* $\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$ *sont bien définies :*

$$\int_0^t \mid b(s, X_s) \mid ds < +\infty \quad et \quad \int_0^t \mid \sigma(s, X_s) \mid^2 ds < +\infty, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

b) $(X_t)\,, t \geq 0$ *vérifie* $(1.1)\,.$ $X_t = X + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$

1.5.1 Existence et unicité

Le théorème suivant donne des conditions sur b et σ sous les quelles on peut avoir un résultat l'existence et d'unicité de la solution de l'équation $(1.1)\,.$

Théorème 1.5.1 (existence et Unicité) *: Si* b *et* σ *sont des fonctions continues telles qu'il existe* $K < +\infty$ *,* X, Y *dans* $\mathbb{R}^n$ *:*

i) Conditions de Lipchitz :

$$\mid b(t, X) - b(t, Y) \mid + \mid \sigma(t, X) - \sigma(t, Y) \mid \leq K|X - Y|.$$

ii) Conditions de croissance linéaire :

$$|b(t, X) \mid - \mid \sigma(t, X) \mid \leq K(1 + |X|).$$

iii) $\mathbb{E}\left(X^2\right) < +\infty$.

Alors pour tout $t \geq 0$ l'équation (1.1) admet solution unique dans l'intervalle $[0, T]$. D'autre part la solution $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ vérifie :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2\right) < +\infty.$$

Preuve. Existence. Pour $X \in S_c^2$, on pose pour tout $t \in [0, T]$:

$$\Psi(X_t) = X + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

le processus Ψ est bien définie et est continu si $X \in S_c^2$.

Soient X et Y deux éléments de S_c^2, on utilise le fait que $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ on a pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$,

$$\mid \Psi\left(X_t\right) - \Psi\left(Y_t\right) \mid^2 = \left| \int_0^t b(s, X_s) ds - b(s, Y_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) ds - \sigma(s, Y_s) dB_s \right|^2$$

$$\leq 2 \left| \int_0^t b(s, X_s) ds - b(s, Y_s) ds \right|^2 + 2 \left| \int_0^t \sigma(s, X_s) ds - \sigma(s, Y_s) dB_s \right|^2$$

$$\leq 2 \sup_{0 \leq t \leq u} \left| \int_0^t b(s, X_s) ds - b(s, Y_s) ds \right|^2 + 2 \sup_{0 \leq t \leq u} \left| \int_0^t \sigma(s, X_s) ds - \sigma(s, Y_s) dB_s \right|^2.$$

Ce que implique que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq u} |\Psi\left(X_t\right) - \Psi\left(Y_t\right)|^2\right]$$

$$\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq u} \left| \int_0^t b(s, X_s) ds - b(s, Y_s) ds \right|^2 + \sup_{0 \leq t \leq u} \left| \int_0^t \sigma(s, X_s) ds - \sigma(s, Y_s) dB_s \right|^2\right].$$

On utilise les propriétés (4 et 5) de l'intégrale stochastique, alors on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)|^2\right]$$

$$\leq 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t b(s,X_s)ds-b(s,Y_s)ds\right|^2\right]+2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}\left|\int_0^t \sigma(s,X_s)ds-\sigma(s,Y_s)dB_s\right|^2\right]$$

$$\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\mid\int_0^u b(s,X_s)ds-b(s,Y_s)ds\mid\right)^2\right]+2\mathbb{E}\left[4\left(\mid\int_0^u \sigma(s,X_s)ds-\sigma(s,Y_s)ds\mid\right)^2\right].$$

L'inégalité de Hölder donne alors la majoration :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)|^2\right]$$

$$\leq 2T\mathbb{E}\left[\left(\mid\int_0^u b(s,X_s)ds-b(s,Y_s)ds\mid\right)^2\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^u\mid\sigma(s,X_s)ds-\sigma(s,Y_s)\mid ds\right].$$

Comme les fonctions b et σ sont lipschitziennes :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)|^2\right] &\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^u K^2\mid X_s-Y_s\mid^2 ds\right]+8\mathbb{E}\left[\int_0^u K^2\mid X_s-Y_s\mid^2 ds\right]\\ &\leq 2TK^2\mathbb{E}\left[\int_0^u\mid X_s-Y_s\mid^2 ds\right]+8K^2\mathbb{E}\left[\int_0^u\mid X_s-Y_s\mid^2 ds\right]\\ &\leq 2K^2\left(T+4\right)\mathbb{E}\left[\int_0^u\mid\left(X_s-Y_s\right)\mid^2 ds\right].\end{aligned}$$

On pose $C=2K^2\left(T+4\right)$, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)|^2\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^u\mid X_s-Y_s\mid^2 ds\right]\\ &\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\int_0^u\mid X_s-Y_s\mid^2 ds\right].\end{aligned}$$

Alors on obtient l'inégalité suivante :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u}|\Psi\left(X_t\right)-\Psi\left(Y_t\right)|^2\right]\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\int_0^u\mid X_s-Y_s\mid^2 ds\right]. \tag{1.2}$$

Maintenant on va montrer que la fonction $\Psi\left(X\right)\in S_c^2$. Notant $\Psi\left(0\right)$ le processus nul, on a :

$$\Psi\left(0\right)=X+\int_0^t b\left(s,0\right)ds+\int_0^t\sigma\left(s,0\right)dB_s.$$

On a d'une part :

$$\mid\Psi\left(0\right)\mid^2\leq\left|X+\int_0^t b\left(s,0\right)ds+\int_0^t\sigma\left(s,0\right)dB_s\right|^2,$$

et comme :

$$\left(a+b+c\right)^2\leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right). \tag{1.3}$$

On a, pour tout $0\leq t\leq T$,

$$\mid\Psi\left(0\right)\mid^2\leq 3\mid X\mid^2+3\left|\int_0^t b\left(s,0\right)ds\right|^2+3\left|\int_0^t\sigma\left(s,0\right)dB_s\right|^2$$

$$\leq 3\left[\sup_{0\leq t\leq T}\mid X\mid^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t b\left(s,0\right)ds\right|^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\sigma\left(s,0\right)dB_s\right|^2\right].$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\mid\Psi\left(0\right)\mid^2\right]$$

$$\leq 3\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\mid X\mid^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t b\left(s,0\right)ds\right|^2+\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t\sigma\left(s,0\right)dB_s\right|^2\right],$$

on utilise l'inégalité de Doob et la croissance linéaire de b et σ, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi\left(0\right)|^2\right]\leq 3\left(\mathbb{E}\left[\mid X\mid^2\right]+T^2K^2+4K^2T\right),$$

et d'une autre part, l'inégalité (1.2) donne ce qui suit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi(X_t)-\Psi(0)|^2\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq s} \mid X_s - 0\mid^2 ds\right] \\ &\leq C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\mid X_s\mid^2 ds\right] \\ &\leq C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\mid X_s\mid^2\right] ds.\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi(X_t)|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi(0)|^2\right] + C\int_0^u \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s}\mid X_s\mid^2\right] ds.$$

Alors : $\Psi(X) \in S_c^2$, dés que le processus $X \in S_c^2$.

On définit alors par récurrence une suite de processus de S_c^2 en posant :

$$X^0 = 0, \quad \text{et} \quad X^{n+1} = \Psi(X^n), \quad \text{pour tout} \quad n \geq 0.$$

On voudrait montrer que la suite X^n converge vers une limite qui représente la solution de l'EDS (1.1). Pour cela, on a majorer : $\sup\limits_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1} - X_t^n|^2$ et montrer que la série de terme générale $X_t^{n+1} - X_t^n$ est uniformément convergente sur $[0,T]$. Alors on a :

$$|X_t^{n+1} - X_t^n|^2 = |\Psi(X_t^n) - \Psi\left(X_t^{n-1}\right)|^2.$$

Et on utilise la condition de Lipchitz, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|\Psi(X_t^n)-\Psi\left(X_t^{n-1}\right)|^2\right] \\ &\leq 2K^2(T+4)\,\mathbb{E}\left[\int_0^T \sup_{0\leq t\leq s_1}|X_t^n - X_t^{n-1}|^2 ds_1\right] \\ &\leq C\int_0^T \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s_1}|X_t^n - X_t^{n-1}|^2\right] ds_1.\end{aligned}$$

Et par récurrence, on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right]\le C^n\int_0^T\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}...\int_0^{s_n-1}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le s_n}|X_t^1|^2\right]ds_n...ds_2ds_1.$$

Donc on trouve que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right]\le\frac{C^nT^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\mid X_t^1\mid^2\right].$$

Ce qui signifie que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right]\le L\frac{C^nT^n}{n!},$$

avec L est le majorant de $\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\mid X_t^1\mid^2\right]$. Il résulte de cette dernière inégalité que :

$$\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right]\right)^2\le\left(L\frac{C^nT^n}{n!}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et comme :

$$\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2\right]\right)^2=\left\|\sup_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|\right\|_{L^2}.$$

Alors :

$$\left\|\sup_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|\right\|_{L^2}\le\sqrt{L}\frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}.$$

En sommant sur n, il vient :

$$\sum_{n\ge0}\left\|\sup_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|\right\|_{L^1}\le\sum_{n\ge0}\left\|\sup_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|\right\|_{L^2}\le\sqrt{L}\sum_{n\ge0}\frac{(CT)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}<\infty.$$

Alors le série $\sum_{n\ge0}\sup_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|$ converge $\mathbb{P}$-$p.s$, et donc, $\mathbb{P}$-$p.s$, X^n converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus continue. De plus $X\in S_c^2$. On vérifier que X est solution de l'EDS (1.1) en passant à la limite dans la définition

$$X^{n+1}=\Psi\left(X^n\right).$$

En effet :

$$\begin{aligned} X &= \lim_{n\to\infty}\left(X^{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\Psi\left(X^{n}\right) \\ &= \Psi\left(\lim_{n\to\infty}\left(X^{n}\right)\right) \\ &= \Psi\left(X\right). \end{aligned}$$

Unicité. Si X_t et Y_t deux solution de l'EDS avec les conditions initiales respectivement dans $X_0 = X$ et $Y_0 = Y$. On pose $f\left(t\right) = b\left(t, X_t\right) - b'\left(t, X_t\right)$ et $g\left(t\right) = \sigma\left(t, Y_t\right) - \sigma'\left(t, Y_t\right)$. Alors :

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] = \mathbb{E}\left[X - Y + \int_0^t f\left(s\right)ds - \int_0^t g\left(s\right)dB_s\right]^2.$$

On utilise l'inégalité (1.3), on trouve :

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}|X_t - Y_t|^2 + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t f\left(s\right)ds\right]^2 + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t g\left(s\right)dB_s\right]^2,$$

et d'après Cauchy Schwartz et le propriété (5) de l'intégrale stochastique

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] &\leq 3\mathbb{E}\left[\left(X - Y\right)^2\right] + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t ds\right]\mathbb{E}\left[\int_0^t f\left(s\right)^2 ds\right] + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t g\left(s\right)^2 dB_s\right] \\ &= 3\mathbb{E}\left[\left(X - Y\right)^2\right] + 3t\mathbb{E}\left[\int_0^t f\left(s\right)^2 ds\right] + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t g\left(s\right)^2 dB_s\right], \end{aligned}$$

et comme b et σ sont lipchitziennes, alors :

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[\left(X - Y\right)^2\right] + 3\left(1 + t\right)C^2\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s - Y_s|ds\right],$$

lemme de Gronwall, on donne :

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[\left(X - Y\right)^2\right]\exp\left\{3\left(1 + t\right)C^2 t\right\},$$

alors : $X_t = Y_t$. $\mathbb{P}$-$p.s$, ce qui montre l'unicité. ■

Chapitre 2

Principe du maximum stochastique sous l'information partielle

Il existe essentiellement deux méthodes majeures pour des problèmes des contrôles stochastiques, la programmation dynamique et le principe du maximum stochastique. la première méthode a elle été introduite par Bellman en **1953**, la deuxième méthode a elle été introduite par **Pontryagin** en **1956**. Par nature, le principe du maximum de Pontryagin est une condition nécessaire d'optimalité.

Dans ce chapitre, on va étudier le principe du maximum stochastique sous l'information partielle. Pour prouver ses conditions il est nécessaire que le processus de contrôle soit adapté à une sous-filtration $\mathcal{G}_t$ de la filtration complet $\mathcal{F}_t$ et avec le domaine des contrôles admissibles est convexe.

2.1 Problème de contrôle

La théorie du contrôle a été initialement développée dans le but d'obtenir des outils d'analyse et de synthèse des systèmes de contrôle et de système dynamique (c'est à dire l'évolution du système au cours du temps). Cette grande théorie a de nombreuses applications en gestion et en finance.

Un problème de contrôle se construit par les caractéristiques suivantes :

- **État du système :** Soit un système dynamique caractérisé par son état à tout instant, le temps peut être continu ou bien discret. L'horizon (l'intervalle de variation du temps) peut être fini ou infini. On notera X_t l'état du système à l'instant t.
- **Contrôle** : La dynamique X_t de l'état du système est agi par un contrôle que nous modélisons comme un processus u_t dont la valeur peut être décidée a tout instant t en fonction des informations disponibles à cet instant, c'est-à-dire que u_t est adapté par rapport à une certaine filtration, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle.
- **Critère de coût** : Le but principal du contrôle optimal est de minimiser (ou de maximiser selon le cas un gain ou bien une perte) une fonctionnelle :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, x_t, u_t)dt + g(x_T)\right],$$

sur l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

Classes des contrôles

- **Contrôle admissible**

Définition 2.1.1 *: On appelle un contrôle admissible tout processus $(u_t)_{t\in[0.T]}$ mesurable, intégrable et adapté à une valeur dans un borélien $A \subset \mathbb{R}$; notons par $\mathcal{U}$ l'ensemble tous les contrôles admissibles :*

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}[0,T] = \{u : [0,T] \times \Omega \to A \ : \ u \textit{ mesurable, intégrable et } \mathcal{F}_t \textit{ -adapté}\}.$$

- **Contrôle optimal**

Le problème du contrôle optimal consiste à minimiser une fonction de coût $J(u)$ sur un ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$.

Définition 2.1.2 *: On dit que le contrôle $\hat{u}$ est optimal (ex. s'il atteint le minimum) si :*

$$J(\hat{u}) \leq J(u) \quad ,\forall u \in \mathcal{U}.$$

- **Contrôle presque optimal**

Soit $\varepsilon > 0$, le contrôle u^{ε} est dit presque optimal ou bien ε-optimal si :

$$J(u^{\varepsilon}) \leq J(u) + \varepsilon \quad ,\forall u \in \mathcal{U}.$$

Remarque 2.1.1 *: Il existe de nombreux autres classes.*

2.2 Formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant les conditions habituelles, et $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement Brownien d-dimensionnel.

On considéré les équations différentielles stochastiques contrôlée suivante :

$$\begin{cases} dx_t = b(t, x_t, u_t)dt + \sigma(t, x_t, u_t)dB_t, \\ x_0 = x, \end{cases} \tag{2.1}$$

où : $x_0 \in \mathbb{R}^d$, b et σ sont des fonctions données telle que :

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n,$$

$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n\times d},$$

deux fonctions de classe C^1.

Soient T un nombre réel strictement positif, fixe et U est un sous-ensemble convexe. On définit un ensemble des contrôles admissibles, comme suit :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}[0, T] = \{u : [0, T] \times \Omega \to U \ : \ u \text{ est } (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} \text{ -adapté}\},$$

et $\mathcal{G}_t$ est une sous-filtration de la filtration complet $\mathcal{F}_t$ ($\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$).

On définit le coût fonctionnel comme suit :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, x_t, u_t)dt + g(x_T)\right], \tag{2.2}$$

où f et g deux fonctions de classe C^1, telle que :

$$f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R},$$

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

qui vérifient :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid f(t, x_t, u_t) \mid dt + \mid g(X_T) \mid\right] < \infty. \tag{2.3}$$

Alors un contrôle $\hat{u}$ est appelé contrôle optimal sous l'information partielle s'il atteint le maximum c'est à dire :

$$J(\hat{u}) = \sup_{u\in\mathcal{G}} J(u). \tag{2.4}$$

Ce principe consiste d'introduire

- L'équation adjointe est une équation différentielle stochastique rétrograde linéaire donner sous la forme :

$$\begin{cases} -dp_t & = [b_x(t, x_t, u_t)\, p_t + \sigma_x(t, x_t, u_t)\, q_t + f_x(t, x_t, u_t)]\, dt - q_t dB_t, \\ p_T & = g_x(x_T). \end{cases}$$

- On définie la fonction du Hamoltonien, comme suit :

$$H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \to \mathbb{R}$$

est défini par :

$$H(t, x_t, u_t, p_t, q_t) = f(t, x_t, u_t) + p_t b(t, x_t, u_t) + q_t \sigma(t, x_t, u_t). \tag{2.5}$$

On utilise la définition du Hamiltonien, on obtient l'équation adjoint suivante :

$$dp_t = -H_x(t, x_t, u_t, p_t, q_t)\, dt + q_t dB_t, \tag{2.6}$$

et

$$p_T = g_x(x_T). \tag{2.7}$$

On suppose les Hypothèses suivantes : $(\mathbf{H}_1)$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (\hat{x}_t - x_t)^T \hat{q}_t \hat{q}_t^T (\hat{x}_t - x_t) dt\right] < \infty. \tag{2.8}$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T p_t^T \{\sigma\sigma^T(t, x_t, u_t) p_t\right] < \infty \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathcal{U}. \tag{2.9}$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \mid H_u(t, x_t, u_t, p_t, q_t) \mid^2 dt\right] < \infty. \tag{2.10}$$

2.3 Conditions nécessaires sous l'information partielle

Dans cette partie, on étudie les conditions nécessaires d'optimalités sous l'information partielle. Voir l'article de Baghery & ∅ksendal [2].

Par Hypothèse :

◀ Pour tout t, r tell que $0 \leq t \leq t + r \leq T$, $\forall\ i = 1, ..., k$ et pour tout processus $\theta = \theta(w)$ est $\mathcal{G}_t$-mesurable, on définit le contrôle υ comme suit :

$$\upsilon(s) := (0, ..., \upsilon_i(s), 0, ..., 0) \in U \subset \mathbb{R}^k,$$

avec

$$\upsilon_i(s) = \theta_i \chi_{[t,t+r]}(s) \quad , \ s \in [0, T]$$

est un contrôle admissible.

◀ Pour tout u, $\upsilon \in \mathcal{U}$ avec υ est borné, $\exists \delta > 0 : u + \varepsilon \upsilon \in \mathcal{U}$, $\forall \varepsilon \in (-\delta, \delta)$.

◀ On donne u, $\upsilon \in \mathcal{U}$ avec υ borné. On définit le processus x_t par :

$$x_t^1 = x_t^{(u,\upsilon)} = \frac{d}{d\varepsilon} x_t^{(u+\varepsilon\upsilon)},$$

tell que x_t^1 est la forme linéaire de x qui est donné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} dx_t^1 & = (b_x(t, x_t, u_t)\, x_t^1 + b_u(t, x_t, u_t)\, \theta_t)\, dt \\ & +\sigma_x(t, x_t, u_t)\, x_t^1 + \sigma_u(t, x_t, u_t)\, \theta_t dB_t, \\ x_0^1 = 0. & \end{cases} \tag{2.11}$$

◀ Et on a : Les conditions $(\mathbf{H}_2)$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (\hat{x}_t^1)^T \hat{q}_t \hat{q}_t^T x_t^1 dt\right] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{p}_t^T \Phi\Phi^T(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t) \hat{p}_t\right] < \infty,$$

tel que :

$$\Phi_{i;j} = \sigma_x\left(t, x_t, u_t\right) x_t^1 + \sigma_u^i\left(t, x_t, u_t\right) \theta_t.$$

◀ On suppose que $\hat{u} \in \mathcal{G}$ est un maximum local pour $J(u)$, alors :

$$\varphi(\varepsilon) := J(\hat{u} + \varepsilon \upsilon).$$

Le théorème suivant donne les condition nécessaires d'optimalité :

Théorème 2.3.1 *(Conditions nécessaires) : Sous les conditions* $(\mathbf{H}_2)$, *on a* $\hat{u}$ *est un point stationnaire pour :*

$$\mathbb{E}\left[H_u\left(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t, \hat{p}_t, \hat{q}_t\right) \mid \mathcal{G}_t\right] = 0,\ \mathbb{P}\text{-}p.s..$$

Preuve. Puisque la dérivée d'un cout J par rapport ε égale 0 ($\frac{d}{d\varepsilon} J(\hat{u} + \varepsilon \upsilon) = 0$), on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
0 &= \acute{\varphi}(0) \\
&= \frac{d}{d\varepsilon} J(\hat{u} + \varepsilon \upsilon) \mid_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{d}{d\varepsilon} \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t) dt + g\left(\hat{x}_T\right)\right] \mid_{\varepsilon=0} \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \{f_x(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t)^T \frac{d}{d\varepsilon} x_t^{(\hat{u}+\varepsilon \upsilon)} + f_u(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t)^T \upsilon_t\} dt + g_x(x_T) \frac{d\hat{x}_T^{(\hat{u}+\varepsilon \upsilon)}}{d\varepsilon}\right] \mid_{\varepsilon=0} \\
&= \mathbb{E} \int_0^T f_x(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t)^T \hat{x}_t^1 dt + \mathbb{E} \int_0^T f_u\left(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t\right)^T \upsilon_t dt + \mathbb{E}\left(g_x\left(\hat{x}_T\right)^T \hat{x}_T^1\right),
\end{aligned}$$

alors :

$$0 = \mathbb{E} \int_0^T f_x(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t) \hat{x}_t^1 dt + \mathbb{E} \int_0^T f_u\left(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t\right) \upsilon_t dt + \mathbb{E}\left(g_x\left(\hat{x}_T\right)^T \hat{x}_T^1\right), \tag{2.12}$$

où :

$$\hat{x}_t^1 = \frac{d}{d\varepsilon} x_t^{(\hat{u}+\varepsilon \upsilon)}\ ,\ (x_t^1 \text{ est la forme linéaire de } x).$$

D'autre part, on applique la formule d'Itô à $(\hat{p}, \hat{x}^1)$ et on utilise la condition $\hat{p}_T = g_x^*(\hat{x}_T)$, on trouve la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g_x(\hat{x}_T)^T \hat{x}_T^1\right] &= \mathbb{E}\left[\hat{p}_T \hat{x}_T^1\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{p}_t^T d\hat{x}_t^1\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \hat{x}_t^1 d\hat{p}_t\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T d\left\langle \hat{p}_t, \hat{x}_t^1\right\rangle\right] \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \hat{p}_t\left(b_x(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\hat{x}_t^1 + b_u(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\upsilon_t\right)dt - \mathbb{E}\int_0^T \hat{x}_t^1 H_x(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t)\,dt \\
&+\mathbb{E}\int_0^T \hat{q}_t\left(\sigma_x(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\hat{x}_t^1 + \sigma_u(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\upsilon_t\right)dt.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

On remplace (2.13) dans l'égalité (2.12), on trouve :

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}\int_0^T f_x(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\hat{x}_t^1 dt + \mathbb{E}\int_0^T f_u(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\upsilon_t dt + \mathbb{E}\left(g_x(\hat{x}_T)^T \hat{x}_T^1\right) \\
&= \mathbb{E}\int_0^T f_x(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\hat{x}_t^1 dt + \mathbb{E}\int_0^T f_u(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\upsilon_t dt \\
&+\mathbb{E}\int_0^T \hat{p}_t\left(b_x(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\hat{x}_t^1 + b_u(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\upsilon_t\right)dt - \mathbb{E}\int_0^T \hat{x}_t^1 H_x(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t)\,dt \\
&+\mathbb{E}\int_0^T \hat{q}_t\left(\sigma_x(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\hat{x}_t^1 + \sigma_u(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\upsilon_t\right)dt.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

D'après la définition de l'Hamiltonien, on a :

$$H_x(t,x_t,u_t,p_t,q_t) = f_x(t,x_t,u_t) + p_t b_x(t,x_t,u_t) + q_t\sigma_x(t,x_t,u_t)$$

et

$$H_u(t,x_t,u_t,p_t,q_t) = f_u(t,x_t,u_t) + p_t b_u(t,x_t,u_t) + q_t\sigma_u(t,x_t,u_t)$$

On remplace cette dernière dans (2.14), il s'ensuit immédiatement que :

$$0 = \mathbb{E}\left[H_u\left(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t, \hat{p}_t, \hat{q}_t\right) \upsilon_t\right]. \tag{2.15}$$

On substitue υ_t par sa forme, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 = \quad & \mathbb{E}\left[H_u\left(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t, \hat{p}_t, \hat{q}_t\right)^T \upsilon_t\right] \\ & = \mathbb{E}\left[\int_0^T \frac{\partial}{\partial u_i} H\left(s, \hat{x}_s, \hat{u}_s, \hat{p}_s, \hat{q}_s\right) \theta_i \mathbf{1}_{[t,t+r]} ds\right] \\ & = \mathbb{E}\left[\int_t^{t+r} \frac{\partial}{\partial u_i} H\left(s, \hat{x}_s, \hat{u}_s, \hat{p}_s, \hat{q}_s\right) \theta_i ds\right]. \end{aligned}$$

Par la suite, on divise par r qui tends vers 0, on conclut que :

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial u_i} H\left(t, \hat{x}, \hat{u}_t, \hat{p}, \hat{q}_t, \hat{k}_t\right) \theta_i\right] = 0,$$

car :

$$\lim_{r \to 0} \frac{\int_t^{t+r} \frac{\partial}{\partial u_i} H\left(s, \hat{x}_s, \hat{u}_s, \hat{p}_s, \hat{q}_s\right) \theta_i}{r} ds = \frac{\partial}{\partial u_i} H\left(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t, \hat{p}_t, \hat{q}_t, \hat{k}_t\right) \theta_i.$$

Puisque l'égalité précédente est vraie pour tout θ_i est $\mathcal{G}_t$-mesurable borné, on trouve :

$$\begin{aligned} 0 \quad & = \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial u_i} H\left(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t, \hat{p}_t, \hat{q}_t\right) \theta_i \mid \mathcal{G}_t\right] \\ & = \theta_i \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial u_i} H\left(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t, \hat{p}_t, \hat{q}_t\right) \mid \mathcal{G}_t\right], \end{aligned}$$

alors :

$$\mathbb{E}\left[H_u\left(t, \hat{x}_t, \hat{u}_t, \hat{p}_t, \hat{q}_t\right) \mid \mathcal{G}_t\right], \quad \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Ce qu'il fallait à démontrer. ■

2.4 Conditions suffisantes sous l'information partielle

Dans cette partie, on étudie les conditions suffisantes d'optimalités sous l'information partielle pour l'équation différentielle stochastique. Voir l'article de Baghery & ∅ksendal [2].

Théorème 2.4.1 *: Sous l'hypothèses* (H_1). *Pour tout* $t \geq 0$, *on a :* H *et* g *sont concaves en* x, u *et*

$$\mathbb{E}\left[H(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t) \mid \mathcal{G}_t\right] = \max_{u\in\mathcal{U}} \mathbb{E}\left[H(t,\hat{x}_t,u_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t) \mid \mathcal{G}_t\right].$$

alors : $\hat{u}$ est un contrôle optimal sous l'information partielle.

Preuve. Soit $u \in \mathcal{U}$, on a :

$$\begin{aligned} J(u) - J(\hat{u}) &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \{f(t,x_t,u_t) - f(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\}dt\right] \\ &+\mathbb{E}\left[g(x_T) - g(\hat{x}_T)\right]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

On utilise la définition de l'Hamiltonien, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^T \{f(t,x_t,u_t) - f(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\}dt\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \{H(t,x_t,u_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t)\} - H(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t)\}dt\right] \\ &-\mathbb{E}\left[\int_0^T \{b(t,x_t,u_t) - b(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\}^T \hat{p}_t dt\right] \\ &-\mathbb{E}\left[\int_0^T tr\left[\{\sigma(t,x_t,u_t) - \sigma(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\}^T \hat{q}_t\right] dt\right]. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Par concavité, on trouve :

$$\begin{aligned} &H(t,x_t,u_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t)\} - H(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t) \\ &\leq H_x(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t)\left(x_t - \hat{x}_t\right) + H_u(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t)\left(u_t - \hat{u}_t\right). \end{aligned} \tag{2.18}$$

D'autre part, on a u_t, $\hat{u}_t$ sont mesurables, on peut écrit :

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \frac{\partial}{\partial u}\mathbb{E}\left[H(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t)) \mid \mathcal{G}_t\right]^T_{u=\hat{u}(t)}(u_t-\hat{u}_t) \\
&= \mathbb{E}\left[H_u(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t))^T(u_t-\hat{u}_t) \mid \mathcal{G}_t\right],
\end{aligned}
$$

alors :

$$
\mathbb{E}\left[H_u(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t))^T(u_t-\hat{u}_t) \mid \varepsilon_t\right] \leq 0. \tag{2.19}
$$

D'après (2.18) et (2.19), on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\int_0^T \{H(t,x_t,u_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t)\} - H(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t)\}dt\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\int_0^T H_x(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t))(x_t-\hat{x}_t)^T dt\right] \\
&= -\mathbb{E}\left[\int_0^T (x_t-\hat{x}_t)^T dp_t\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T (x_t-\hat{x}_t)^T q_t dB_t\right] \\
&= -\mathbb{E}\left[\int_0^T (x_t-\hat{x}_t))^T d\hat{p}_t\right],
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

où :

$$
H_x\left(t,x_t,u_t,p_t,q_t\right) = -dp_t + q_t dB_t \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\int_0^T (x_t-\hat{x}_t)^T q_t dB_t\right] = 0.
$$

D'autre part, on a g est concave et par formule d'Itô à $(x_t-\hat{x}_t)^T\hat{p}_t$, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g(x_T)-g(\hat{x}_T)\right] &\leq \mathbb{E}\left[g_x(\hat{x}_T)(x_T-\hat{x}_T)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[(x_T-\hat{x}_T)\hat{p}_T\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T (x_t-\hat{x}_t)^T(-H_x(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t,\hat{p}_t,\hat{q}_t))dt\right] \\
&+ \int_0^T \hat{p}_t^T\left\{b(t,x_t,u_t)-b(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\right\}dt \\
&+ \int_0^T tr\left[\left\{\sigma(t,x_t,u_t)-\sigma(t,\hat{x}_t,\hat{u}_t)\right\}^T\hat{q}_t\right]dt.
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

On additionne de tous les membres précédents [(2.20) − (2.21)] de (2.16), on trouve :

$$J(u) - J(\hat{u}) \leq 0.$$

Qui nous donne le résultat souhaité. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, on établi des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous l'information partielle pour l'équation différentielle stochastique dans le cas où le domaine du contrôles admissibles est convexe, on suppose que :

- $\mathcal{F}_t$: la filtration engendrée par B_t.
- Sous filtration $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$.
- le contrôl u_t est $\mathcal{G}_t$-adapté.

La preuve de ce résultat est basée sur la perturbation convexe.

Bibliographie

[1] Adel, C. H. A. L. A. (2013). Contribution a l'etude des controles optimales stochastique (Doctoral dissertation)

[2] Baghery, F., & ∅ksendal, B. (2007). A maximum principle for stochastic control with partial information. Stochastic Analysis and Applications, 25(3), 705-717.

[3] Bensoussan, A. (1982). Lectures on stochastic control. In Nonlinear filtering and stochastic control (pp. 1-62). Springer, Berlin, Heidelberg.

[4] Hafayed, M. (2009). Gradient généralisés et contrôle stochastique. Université Mohammed khider Biskra, 102

[5] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[6] Jeanblanc, M., & Simon, T. (2005). Eléments De Calcul Stochastique, IRBID.

[7] Le Gall, J. F. (2013). Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique. Heidelberg, Germany : Springer.

[8] Pham, H. (2007). Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance (Vol. 61). Berlin : Springer.

[9] Yong, J., & Zhou, X. Y. (1999). Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations (Vol. 43). Springer Science & Business Media.

Annexe A : Rappel

Inégalité de Cauchy-Schwartz intégrable. En se placant sur $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$) muni de produit scalaire $(f,g) \rightarrow \langle f \backslash g \rangle = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt$. On obtient :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \quad \left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \times \sqrt{\int_a^b g^2(t)dt} \ .$$

Inégalité de Hölder. Soient p et q deux nombres conjugués $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ avec $p,\ q \in]1, \infty[, X \in \mathcal{L}^p$ et $Y \in \mathcal{L}^q$.

Alors $XY \in \mathcal{L}^1$ et

$$\| XY \| \leq \| X \|_p \| Y \|_q,$$

pour $p = q = 2$, on obtient l'inégalité ce Cauchy-Schwartz

$$\mathbb{E}\left[\mid XY \mid\right] \leq \mathbb{E}\left[\mid X \mid^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\mid Y \mid^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Application lipschitzienne. Soit E une partie de $\mathbb{R}$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application et k un réel positif. On dit que f est k-lipschitzienne si :

$$\forall x,\ y \in E : \ \ |f(x) - f'y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

Fonction concave. Une fonction f d'un intervalle réel I vers $\mathbb{R}$ est dite concave lorsque, pour tous x_1 et x_2 de I et tout t dans $[0,1]$, on a :

$$f(tx_1 + (1-t)\,x_2) \geq tf\,(x_1) + (1-t)\,f\,(x_2)\,.$$

Inégalité de Doob (Inégalité maximale). Si X est une sous-martingale à temps continu, positive et càdlàge,alors pour $p > 1$et $q = p/p - 1$, on a :

$$||\sup_{s \leq t} X_s||_p \leq q||X_t||_p \quad \text{et} \quad ||\sup_t X_t||_p \leq q \sup_t ||X_t||_p$$

En particulier si X est une martingale càdlàg pour $p = 2$, $q = 2$ alors :

$$\mathbb{E}[\sup_{s \leq t} X_s^2] \leq 4\mathbb{E}(X_t^2) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\sup_t X_t^2] \leq 4 \sup_t \mathbb{E}(X_t^2).$$

Lemme de Gronwall. Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une application borélienne bornée tell que pour a, $b \geq 0$:

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Alors :

$$g(t) \leq a \exp{(bt)} \quad \forall t \in [0,T].$$

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	:	Espace de probabilité filtré.
$\mathbb{C}^2$	:	Ensemble des fonctions deux fois dérivable et dont la dérivée seconde est continue.
$\mathbb{C}^1$	:	Ensemble des fonctions une fois dérivable et dont la première dérivée est continue.
EDS	:	Equation différentielle stochastique.
$\mathbb{P}$-$p.s$	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité P.
$\mathcal{N}(0, t)$	:	Loi normale centre de varianece t.
u	:	Contrôle admissible.
$\hat{u}$	:	Contrôle optimal.