République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : Probabilité

Par Mr Guitni Tahar Zaabi

Titre :

Existence du contrôle optimal pour les EDSRs linéaires

Devant le Jury :

Mr.	Abba AbdelMajid	Dr.	U. Biskra	président
Mme.	Berrouis Nassima	Dr.	U. Biskra	Encadreur
Mme.	Korichi Fatiha	Dr.	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 28/06/2022

Dédicace

Je dédie ce travail à la personne qui m'est très chère,

A ma mère OUAHIBA KADRI, et mon pére GUITNI MOULOUD Cher père,

que Dieu lui fasse miséricordeJ'espère qu'il est fier dans sa tombe .

Je dédie ce mémoire,

A ma fratrie :

GUITNI MOHAMMED

GUITNI FATIMA ZAHRAA

A mes tantes et oncles

Très chers, de vous je suis ravi,

Ainsi, que Dieu nous garde toujours uni.

Je dédie ce mémoire aussi au Dr. Berrouis Nassima,

En qui je vois un bienveillant mentor, je le remercie de tout mon être.

, .

Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'a donné la volonté et le courage et la possibilité pour la réalisation de ce travail,.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire,Dr BERROUIS NASSIMA. Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

La pertinence de ses questions et de ses remarques ont toujours su me motiver et me diriger dans mes recherches. Je lui témoigne enfin ma profonde reconnaissance pour m'avoir fait confiance en me proposant de venir travailler avec lui, et pour son soutien constant au cours de ces mois

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à tous les professeurs (ABBA ABDELMAJID et KORICHI FATIHA), qui a accepté d'être dans le jury de cette thèse. Elle apporte l'indispensable regard de l'analyste sur Existence du contrôle optimal pour les EDSRs linéaires.

Mes frères et en particuliers mohammed abdalllah rami foaud abdo pour leurs aides et encouragement multiples ;

Mes Frères et sœurs pour leurs encouragements durant tout mon parcours ; Mes camarades, amis et connaissances

Tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à l'accomplissement de ce travail.

GUITNI TAHAHR ZAÂBI.

Notations et symbols

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	:	Espace de probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$	:	Espace de probabilité filtré.
$\mathbb{R}^k$	:	Espace réel euclidien de dimension k.
$\mathbb{R}^{k\times d}$	:	Espace réel euclidien de dimension $k \times d$.
$E\left[X\right]$	:	L'espérance de la variable aléatoire X par rapport à une probabilité P.
$E\left[X \backslash B\right]$	:	L'espérance conditionnelle de X sachant B.
$v.a.r$	:	variable aléatoire rélle.
$B(\mathbb{R}^d)$	:	tribu borélienne.
$P - p.s$	:	Est la notation presque sûrement pour la mesure de probabilité P.
W_t	:	Le mouvement brownien
$EDSRs$	:	Les équation différentielle stochastique rétrograde.
sup	:	Désigne la superieur.
inf	:	Inférieur.
$\langle .,. \rangle$	:	Pr oduit scalaire dans $\mathbb{R}^d$.
$\Vert . \Vert$	:	Désigne la norme.
$\vert . \vert$	:	Désigne la valeur absolu.

Table des matières

Introduction

*L*es equations differentielles stochastiques retrogrades (notees EDSRs) ont été introduites pour la première fois en 1973 par J. M. Bismut [4] dans le cas linéaire lorsqu'il étudie l'équation adjointe associée au principe du maximum stochastique en contrôle optimal. Cinq ans plus tard, (Bismut, 1978) prolonge sa théorie et montre l'existence d'une solution unique bornée de l'EDSR de Riccati. Le premier résultat dans le cas général a été publié en 1990 par S. Peng et E. Pardoux.

La notion d'equation differentielle stochastique retrograde a été introduite par Pardoux-Peng dans [8]. Il s'agit de trouver un processus adapté $(Y_., Z_.)$ tel que,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s,$$

ou $W_.$ est un mouvement brownien sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et ξ une variable aleatoire $\mathcal{F}_T$ -mesurable $(\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ est la filtration naturelle de W.

Dans ce mémoire, on étudie le problème d'éxistence de contrôle optimal stochastique, où le système est gouvernés par des équations différentielles stochastique rétrogrades linéaire de la forme suivante

$$Y_t = \xi + \int_t^T (a_s Y_s + Z_s b_s + c_s u_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \tag{1}$$

Notre objective est de minimiser sur l'ensemble des contrôle admissible une fonction coût donneé par :

$$J(u) = E[g(Y_0) + \int_0^T h(t; Y_t; Z_t; u_t)dt]. \tag{2}$$

oú $h : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \times U \to \mathbb{R}$, et $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

Le contrôle qui résout ce problème est dit optimal.

L'organisation de ce travial est comme suit

Le premier chapitre : Divisè deux parties :

part 1(Outils fondamentaux) : Dans cette partie, nous allons expliquer la théorie du calcul stochastique, on va présenter une foule de défnitions, propositions et des résultats de bases du calcul stochastique.

part 2 : Dans cette partie, nous avons présenté brièvement le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR dont les coefficients sont globalement Lipschitziens.

La deuxième chapitre : Dans ce chapitre nous démontrons l'existence du contrôle optimal pour les équations diférentielles stochastiques rétrogrades linéaires. On suppose ici, que le domaine de contrôle est convexe ainsi que les fonctions h et g (de fonction de coût) sont convexes.

Chapitre 1

Calcul stochastique

L'objet de la théorie des processus stochastique (ou aléatoires) est l'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps.

Le but de ce chapitre est consacré à donner des défnitions de base et des résultats principaux. Pour plus de détails sur le calcul stochastique voir [1], [2], [3] et [10].

1.1 Généralités

Définition 1.1.1 (Tribu) *Une tribu (σ-algebra en Anglais) sur Ω est une famille de parties de Ω, contenant l'ensemble vide, stable par passage au complémentaire, union dénombrable et intersection dénombrable.*

Un espace mesurable est un espace muni d'une tribu.

Définition 1.1.2 (Probabilité) *une probabilité P est une application $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ qui possède les deux propriétés suivantes :*

– $P(\Omega) = 1$.

– Si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ sont disjoints, alors $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Définition 1.1.3 (Espace de probabilité) *Un espace probabilisable est un triple $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ formé d'un ensemble Ω, d'une tribu ou σ-algèbre $\mathcal{F}$ sur Ω et la probabilité P. L'ensemble Ω est appelé l'univers et les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés les évènements .*

Définition 1.1.4 (Espace de probabilité complet) *L'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est dit complet si pour tout $t \geq 0$ et pour tout $A \subset \Omega$ négligeable, A est contenu dans $\mathcal{F}$..*

Définition 1.1.5 (variable aléatoire) *Une variable aléatoire X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ vers $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$.*

On rappelle que X est mesurable si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $X^{-1}(B) = \{\omega / \ X(\omega) \in B\}$.
et $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ désigne la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.1.6 (Processus stochastique) *On appelle processus stochastique sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ indexé par un ensemble de temps $T \subset \mathbb{R}$ est une famille $X = (X_t)_{t \in T}$ des variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$.

. Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une $v.a$ sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

. Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles appelée trajectoire du processus.

On peut définir différentes relations d'équivalence entre deux processus ainsi :

Définition 1.1.7 *Les processus X et Y sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sont des modifications l'un de l'autre*

$$\forall t \geq 0,\ X_t(\omega) = Y_t(\omega)\ \ P - p.s.$$

Définition 1.1.8 *Les processus X et Y sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sont indistinguables si et seulement si*

$$\{\omega /\ \forall t \geq 0,\ X_t(\omega) = Y_t(\omega)\},$$

est mesurable et a pour probabilité 1.

Définition 1.1.9 (Filtration) *Une filtration (ou flot d'information) $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ i,e :*

$$\forall s, t \in T, s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t.$$

La famille croissante de sous tribus $G_t^x = \sigma(X_s; s \leq t, s \in T)$ s'appelle la filtration naturelle de X c'est à dire la plus petite sous tribu de $\mathcal{F}$ qui rend mesurable toutes les applications $\omega \mapsto X_s(\omega)$ pour tout $s \leq t, s \in T$.

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, P)$ est un espace probabilisé filtré , alors que l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in T}, P)$ complet si : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $A \subset \Omega$ négligeable, A est contenu dans $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.10 (Processus adapté) *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}-$adapté si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la variables aléatoires X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

Définition 1.1.11 (Processus progressivement mesurable) *Un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit progressivement mesurable si : $\forall T > 0$ l'application $X_t : \left([0,T], \beta_{[0,T]}\right) \times (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ est mesurable.*

Définition 1.1.12 *Un processus* $X = (X_t, t \geq 0)$ *est dit à variation finie sur* $[0, t]$ *si :*

$$\sup_{t_i} \sum_i \left| X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right| < \infty.$$

Théoréme 1.1.1 (de Fubini) *Soit* $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Alors, pour tout* $x \in E_1$*, la fonction*

$$y \in E_2 \mapsto \int f(x, y)\, dm_1(x)$$

est mesurable et

$$\int \left\{ \int f(x, y) dm_1(x) \right\} dm_2(y) = \int \left\{ \int f(x, y)\, dm_2(y) \right\} dm_1(x).$$

1.1.1 Espérence conditionnelle

Définition 1.1.13 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *et* $(\mathcal{F}_t)$ *une filtration et* G *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *l'espérance conditionnelle de* X *sachant* G *est l'unique variable aléatoire* $E(X \backslash G)$ $G-$*mesurable telle que*

$$\int_A E(X \backslash G) dp = \int_A X dp, \forall A \in G.$$

Propriété 1.1.1 *Soit* X, Y *de variable aléatoire appartenant à* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, soit* G *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$*, on a alors :*

1. Linéarité : soit a et b deux constantes :

$$E(aX + bY \backslash G) = aE(X \backslash G) + bE(Y \backslash G).$$

2. Croissance : soit X et Y deux v.a telles que : $X \leq Y$ alors

$$E(X \backslash G) \leq E(Y \backslash G).$$

3. Si X est $G-$mesurable alors :

$$E(X \backslash G) = X.$$

4. Si Y est $G-$mesurable alors :

$$E(XY \backslash G) = YE(X \backslash G).$$

5. Si X est indépendant de G alors :

$$E(X \backslash G) = E(X).$$

1.1.2 Mouvement brownien

Définition 1.1.14 *Fixons un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. On dit qu'un processus stochastique* $(W_t, t \geq 0)$ *est un mouvement brownien (standard) si :*

1. $P(W_0 = 0) = 1$.

2. $\forall s \leq t$, $W_t - W_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $(t-s)$ i.e : $W_t - W_s \sim N(0, t)$.

3. $\forall n$, $\forall t_i$, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, les variables $(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, ..., W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_0})$ sont indépendantes.

4. En dehors d'un ensemble de probabilité nulle, les trajectoires $t \rightarrow W(t)$ sont

continues. Notons que (1) et (2) implique que $W_t = W_t - W_0$ suit la loi gaussienne centrée de variancet dont la densité est :

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp^{\frac{-x^2}{2t}}.$$

Martingales

Définition 1.1.15 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace de probabilité filtré. Un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est dit martingale (respectivement une sous martingale, sur martingale) si pour tout $t \geq 0$:*

1. M_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.
2. M_t est intégrable ($i.e$: $E\,|M_t| < \infty$).
3. $\forall t \geq s \geq 0$, $E(M_t \backslash \mathcal{F}_s) = M_s$ (respectivement $E(M_t \backslash \mathcal{F}_s) \geq M_s$, $E(M_t \backslash \mathcal{F}_s) \leq M_s$).

Propriété 1.1.2 *Soit W_t est un mouvement brownien, alors :*

1. $(W_t, t \geq 0)$ est une martingale.
2. $\{W_t^2 - t,\ 0 \leq t < \infty\}$ est une martingale.

Théoréme 1.1.2 (Bukholder-Davis-Gundy) *Soit $p \in\ ]0, T[$. Il existe deux constantes c_p et C_p telle que, pour toute martingale continue M, nul en 0.*

$$c_p E\left[\langle M, M\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{t\geq 0} |M_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle M, M\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

En particulier, si $T > 0$,

$$c_p E\left[\langle M, M\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle M, M\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Théoréme 1.1.3 (Théorème de représentation des martingales) *Soit* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ *la filtration naturelle du mouvement brownien standard* $(W_t)_{0\leq t\leq T}$, *soit* M *une martingale continue de carré intégrable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$. *Alors il existe un processus adapté* H, *tel que :*

$$E(\int_0^T H_s^2 ds) < \infty,$$

et pour tout $t \in [0, T]$

$$M_t = M_0 + \int_0^T H_s dW_s \quad P - p.s.$$

1.1.3 L'intégrale stochastique

On se donne un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et un mouvement brownien W sur cet espace, on désigne par $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ la filtration naturelle du mouvement Brownien.

Définition 1.1.16 *On définit l'intégrale stochastique (L'intégrale d'Itô) de la forme :*

$$\int_0^t X_s dW_s$$

simultanément pour tous $t \in [0, T]$, *où* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est processus stochastique et* $(W_t)_{t\geq o}$ *est un mouvement Brownien.*

Propriété 1.1.3 *Soit* X *et* Y *des processus stochastiques et* W_t *mouvement Brownien, alors on a :*

1. Linéarité :

$$\int_0^t (X_s + Y_s) dW_s = \int_0^t X_s dW_s + \int_0^t Y_s dW_s \text{ et } \int_0^t (cX_s) dW_s = c \int_0^t X_s dW_s.$$

2. Si $\int_0^T E(X_t^2)dt < \infty$, alors pour tout

$$t \leq T : E(\int_0^t X_s dW_s) = 0 \text{ et } E((\int_0^t X_s dW_s)^2) = \int_0^t E(X_s^2)ds.$$

De plus, le processus $\left\{\int_0^t X_s dW_s\right\}_{t\geq 0}$ est une martingale.

1.1.4 Processus d'Itô

Définition 1.1.17 *On appelle processus d'Itô, un processus X à valeurs réelles tel que*

$$\forall 0 \leq t \leq T \quad X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \quad P - p.s,$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions

$$\int_0^t |b_s| \, ds < \infty \ \text{ et } \int_0^t \|\sigma_s\|^2 \, ds < \infty.$$

Le coefficient b est le drift ou la dérivée, σ est le coefficient de diffusion.

Théoréme 1.1.4 (Formule d'Itô) *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, à dérivées bornées, on a*

$$f(t,x) = f(0, X_0) + \int_0^t f_x(s, X_s) dX_s + \int_0^t f_s(s, X_s) ds + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(s, X_s)\sigma_s^2 ds.$$

Définition 1.1.18 (L'intégration par parties) *La formule d'intégration par parties est donnée par*

$$\begin{aligned} X_t^1 X_t^2 &= x_1 x_2 + \int_0^t X_s^1 dX_s^2 + \int_0^t X_s^2 dX_s^1 + \rho \int_0^t \sigma_s^1 \sigma_s^2 ds, \\ d\left(X^1 X^2\right)_t &= X_t^1 dX_t^2 + X_t^2 dX_t^1 + d\left\langle X^1, X^2\right\rangle_t . \end{aligned}$$

1.2 Equations différentielles stochastiques rétrogrades

La théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades (**EDSRs** en abrégé) a connu un grand développement, grâce notamment à ses diverses applications dans plusieurs domaines. Formellement, les **EDSRs** sont des équations différentielles stochastiques où l'on se donne la condition terminale.

Dans cette partie, on va donner un petit aperçu sur les **EDSRs**.

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet et W un mouvement Brownien d-dimensionnel sur cet espace. On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien W.

On note aussi :

$$M^2(\mathbb{R}^{k\times d}) := \left\{ \begin{array}{c} Z : [0,T]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times d}; Z \text{ est progressivement mesurabe :} \\ \left\|Z\right\|_{M^2} = E\int_0^T \left|Z_t\right|^2 dt < \infty \end{array} \right\},$$

$$S^2(\mathbb{R}^{k}) := \left\{ \begin{array}{c} Y : [0,T]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{k}; Y \text{ est progressivement mesurabe :} \\ \left\|Y\right\|_{S^2} = E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|Y_t\right|^2\right] < \infty \end{array} \right\},$$

$$S_c^2(\mathbb{R}^{k}) := \left\{ \begin{array}{c} Y : [0,T]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{k}; Y \text{ est progressivement mesurabe :} \\ \left\|Y\right\|_{S_c^2} = E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \left|Y_t\right|^2\right] < \infty, \\ \text{le sous espace formé par leprocessus continus.} \end{array} \right\},$$

où si $Z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\left\|Z_t\right\|^2 = trace(ZZ^*)$. $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ seront souvent omis, les espace S^2, S_c^2 et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons B^2 l'espace de Banach $S_c^2(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Définition 1.2.1 *Equation différentielle stochastique rétrograde est une équation de la forme :*

$$\begin{cases} -dY_t & = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t \\ Y_T & = \xi \end{cases} , \forall t \in [0, T] ,$$

ou se forme intégrale

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s, \;\; t \in [0, T] . \tag{1.1}$$

La fonction f s'appelle le générateur de l'EDSR.

a/ T : temps final.

b/ ξ : condition terminale ($v.a$ $\mathcal{F}_T-$mesurable).

c/ $(Y(t), Z(t))$: les inconnues adaptées.

Définition 1.2.2 *Une solution de l'EDSR (1.1) est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$.

2. $\int_0^T \left\{|f(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2\right\} ds < \infty$, $P-p.s.$

3. On : $Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s$, $0 \leq t \leq T$, $P-p.s.$

Remarque 1.2.1 *1. Les intégrales de l'équation (1.1) sont bien définies.*

2. Le processus Y est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier Y_0 est une quantité déterministe.

Proposition 1.2.1 *Supposons qu'il existe un processus* $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$*, positif, appartenant à* $M^2(\mathbb{R})$ *et une constante positive* λ *tels que :*

$$\forall(t,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}, |f(t,y,z)|\leq f_t+\lambda(|y|+\|Z\|).$$

Si $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *est une solution de l'EDSR (1.1) telle que* $Z\in M^2$*, alors* Y *appartient à* S_c^2.

Lemme 1.2.1 *Soient* $Y\in S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ *et* $Z\in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$*. Alors* $\left\{\int_0^t Y_s.Z_s dW_s,\ t\in[0,T]\right\}$ *est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. En appliquant l'inégalité B-D-G (1.1.2), il existe une constante positive C telle que :

$$\begin{aligned}E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right|\right] &\leq CE\left[\left(\int_0^T |Y_s|^2\|Z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\ &\leq CE\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|\left(\int_0^T\|Z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]\end{aligned}$$

et par suite en appliquant inégalité : $ab\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$, on obtient :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right|\right]\leq C'\left(E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right]+E\left[\int_0^T\|Z_s\|^2 ds\right]\right)$$

et comme $Y\in S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$, $Z\in M^2\left(\mathbb{R}^{K\times d}\right)$, Alors :

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right|\right]<\infty.$$

■

1.2.1 Le résultat d'existence et d'unicité

Ce résultat est dû à **E-Paradoux** et **S.Peng** [**9**].

Voici les hypothèses sous lesquelles nous travailler.

(**L**) : Il existe une constante λ telles que $P - p.s$

A. condition de Lipschitz en (Y, Z) : pour tout t, Y, Y', Z, Z'

$$|f(t, Y, Z) - f(t, Y', Z\prime)| \leq \lambda \left(|Y - Y'| + \|Z - Z'\|\right),$$

B.condition d'intégrabilité :

$$E\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s, 0, 0)|^2 \, ds\right] < \infty.$$

Nous commençons par un cas trés simple, celui où f ne dépend ni de y ni de z *i.e.* on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ dans $M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et on veut trouver une solution de l'**EDSR**

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{1.2}$$

Lemme 1.2.2 *Soient $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ et $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T} \in M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$. L'**EDSR** (1.2) possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve. Supposons dans un premier temps que (Y, Z) soit une solution vérifiant $Z \in M^2$.

Si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$,on a nécessairement ,

$$Y_t = E\left(\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right).$$

On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z. Remarquons que, d'aprés le théorème de Fubini (1.1.1), comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_s ds$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$; en fait dans S_c^2 puisque F est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0,T]$,

$$Y_t = E\left(\xi + \int_0^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_s ds := M_t - \int_0^t F_s ds.$$

M est une martingale brownienne ; via le théorème de représentation des martingales brownienne (1.1.3) on construit un processus Z appartenant à M^2 tel que :

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_s ds = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds.$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'**EDSR** étudiée puisque comme $Y_T = \xi$,

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds - \left(M_0 + \int_0^T Z_s dW_s - \int_0^T F_s ds\right) \\ &= \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s. \end{aligned}$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in M^2$. ■

Nous montrons à présent le théorème de Pardoux et Peng.

Théoréme 1.2.1 *Sous l'hypothèse (L), l'**EDSR (1.1)** possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve. Nous utilisons un argument du point fixe dans l'espace de Banach B^2 en construisant une application Ψ de B^2 dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in B^2$ est solution de l'**EDSR (1.1)** si et seulement si c'est un point fixe de Ψ.Pour (U, V)

élément de B^2, on définit $(Y,Z) = \Psi(U,V)$ comme étant la solution de l'**EDSR :**

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r)\,dr - \int_t^T Z_r dW_r, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

On remarqueque cette dernière **EDSR** possède une unique solution qui est dans B^2. En effet, posons $F_s = f(s, U_s, V_s)$. Ce processus appartient à M^2 puisque, f étant Lipschitz,

$$\mid F_s \mid \leq \mid f(s,0,0) \mid + \lambda \mid U_s \mid + \lambda \parallel V_s \parallel,$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme (1.2.2) pour obtenir une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in M^2.\,(Y,Z)$ appartient à B^2 : l'intégralité de Z est obtenue par construction et, d'aprés la proposition (1.2.1), Y appartient à S_c^2.

L'application Ψ de B^2 dans lui-même est donc bien définie. ■

Soient (U,V) et (U',V') deux éléments de B^2 et $(Y,Z) = \Psi(U,V), (Y',Z') = \Psi(U',V')$. Notons $Y = Y - Y'$ et $Z = Z - Z'$. On a $Y_T = 0$ et

$$dY_t = -\left\{ f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t') \right\} dt - Z_t dW_t.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t} \mid Y_t \mid^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} d\left(e^{\alpha t} \mid Y_t \mid^2\right) &= \alpha e^{\alpha t} \mid Y_t \mid^2 dt - 2e^{\alpha t} Y_t. \left\{ f(t, U_t, V_t) - f(t, U_t', V_t') \right\} dt \\ &\quad + 2e^{\alpha t} Y_t . Z_t dW_t + e^{\alpha t} \parallel Z_t \parallel^2 dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t et T, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \mid Y_t \mid^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \parallel Z_s \parallel^2 ds &= \int_t^T e^{\alpha s} (-\alpha \mid Y_s \mid^2 + 2Y_s \\ &. \{f(s, U_s, V_s) - f(s, U'_s, V'_s)\}) \, ds \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha s} Y_s . Z_s dW_s, \end{aligned}$$

et, comme f est Lipschitz, il vient, notant U et V pour $U - U'$ et $V - V'$ respectivement,

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \mid Y_t \mid^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \parallel Z_s \parallel^2 ds &\leq \int_t^T e^{\alpha s} (-\alpha \mid Y_s \mid^2 + 2\lambda \mid Y_s \mid\mid U_s \mid \\ &+ 2\lambda \mid Y_s \mid \|V_s\|) \, ds \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha s} Y_s . Z_s dW_s. \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $2ab \leq a^2/\varepsilon + \varepsilon b^2$, et donc, l'inégalité précédente donne

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \mid Y_t \mid^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \parallel Z_s \parallel^2 ds &\leq \int_t^T e^{\alpha s} (-\alpha 2\lambda^2/\varepsilon) \mid Y_s \mid^2 ds \\ &- \int_t^T 2e^{\alpha s} Y_s . Z_s dW_s + \varepsilon \int_t^T e^{\alpha s} (\mid U_s \mid^2 \\ &+ \parallel V_s \parallel^2) \, ds, \end{aligned}$$

et prenant $\alpha = 2\lambda^2/\varepsilon$, on a, notant $R_\varepsilon = \varepsilon \int_t^T e^{\alpha s} (\mid U_s \mid^2 + \parallel V_s \parallel^2) \, ds$,

$$\forall t \in [0, T],$$

$$e^{\alpha t} \mid Y_t \mid^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \parallel Z_s \parallel^2 ds \leq R_\varepsilon - 2 \int_t^T e^{\alpha s} Y_s . Z_s dW_s. \tag{1.3}$$

D'aprés le Lemme (1.2.1), la martingale locale $\left\{ \int_t^T e^{\alpha s} Y_s . Z_s dW_s . \right\}_{t \in [0,T]}$ en réalité est une martingale nulle en 0 puisque Y, Y' appartiennent à M^2.

En particulier, prenant l'espérance - ce qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente, on obtient facilement, pour $t=0$,

$$E\left[\int_0^T e^{\alpha s} \parallel Z_s \parallel^2 ds\right] \leq E\left[R_\varepsilon\right]. \tag{1.4}$$

Revenant à l'inégalité (1.3), les inégalités **BDG (1.1.2)** fournissent avec C universelle,

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid Y_t \mid^2\right] \leq E\left[R_\varepsilon\right] + CE\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha s} \mid Y_s \mid^2 \parallel Z_s \parallel^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

puis , comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid Y_t \mid^2\right] & \leq E\left[R_\varepsilon\right] + \tfrac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid Y_t \mid^2\right] \\ & + \tfrac{C^2}{2}E\left[\int_0^T e^{\alpha s} \parallel Z_s \parallel^2 ds\right] \end{aligned}$$

Prenant en considération l'inégalité (1.4), on obtient finalement

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid Y_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha s} \parallel Z_s \parallel^2 ds\right] \leq \left(3 + C^2\right) E\left[R_\varepsilon\right],$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε,

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid Y_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha s} \parallel Z_s \parallel^2 ds\right] & \leq \Big(\varepsilon\left(3 + C^2\right)(1 \vee T)\, E \sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid U_t \mid^2 \\ & E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid U \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha s} \parallel V_s \parallel^2 ds\right]\Big) \end{aligned}$$

Prenons ε tel que $\varepsilon\left(3 + C^2\right)(1 \vee T) = 1/2$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de B^2 dans lui-même si on le munit de la norme

$$\parallel (U, V) \parallel_\alpha = E\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} \mid U_t \mid^2 + \int_0^T e^{\alpha s} \parallel V_s \parallel^2 ds\right]^{\frac{1}{2}},$$

qui en fait un espace de Banach - cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0.\Psi$ possède donc un unique point fixe, ce qui assure l'existance et l'unicité d'une solution de l'**EDSR (1.1)** dans B^2. On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z \in M^2$ puisque la proposition (1.2.1) implique qu'un telle solution appartient à B^2.

Remarque 1.2.2 *A partir de maintenant et sans plus insister, l'expression ‹‹ la solution de l'**EDSR** ›› signifiera la solution de l'**EDSR** vérifiant $Z \in M^2$.*

Remarque 1.2.3 (Le rôle de Z) *Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_s dW_s$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.*

1.2.2 EDSR linéaires

On s'intéresse au cas particulier où le générateur f est linéaire en y et z. Pour simplifier les notations, on considére le cas unidimensionnel $m = 1$ et on a donc une EDSR de la forme :

$$\begin{gathered} -Y_t \;\; = (a_t Y_t + Z_t b_t + c_t)dt - Z_s dW_s, \\ Y_T = \xi, \end{gathered} \tag{1.5}$$

où a, b sont des processus bornés progressifs à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$ et c est un processus progressif de carré intégrable. Dans ce cas la solution de cette EDSR peut être explicitée.

Proposition 1.2.2 *La solution unique (Y, Z) de l'EDSR 1.5 est donnée par :*

$$\Gamma_t Y_t = E\left[\Gamma_t \xi + \int_t^T \Gamma_s c_s ds \mid \mathcal{F}_t\right], \tag{1.6}$$

où Γ est le processus adjoint (ou dual) donné par l'EDS

$$d\Gamma_t = \Gamma_t \left(a_t dt + b_t dW_t\right), \Gamma_0 = 1.$$

Preuve. Par la formule d'Itô 'a $\Gamma_t Y_t$:

$$d\left(\Gamma_t Y_t\right) = -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t \left(Z_t + Y_t b_t\right) dW_t,$$

soit

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_s c_s ds = Y_{0+} \int_0^t \Gamma_s \left(Z_s + Y_s b_s\right) dW_t. \tag{1.7}$$

Comme a et b sont bornés, on a que $E[\sup_t |\Gamma t|^2] < +\infty$ et en notant b_∞ la borne supérieure de b, on a :

$$E\left[\left(\int_0^t \Gamma_s^2 \left(Z_s + Y_s b_s\right)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq \frac{1}{2} E\left[\sup_t |\Gamma_t|^2 + 2\int_0^T |Z_t|^2 dt + 2b_\infty^2 \int_0^T |Y_t|^2 dt\right] < +\infty.$$

Par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, ceci prouve que la martingale locale dans 1.7 est une martingale uniformément intégrable. On en déduit que

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_s c_s ds = E\left[\Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_s c_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] = E\left[\Gamma_t \xi + \int_0^t \Gamma_s c_s ds \mid \mathcal{F}_t\right], \tag{1.8}$$

ce qui donne l'expression 1.6 de Y . Notons que Z est donné par la représentation d'Itô 1.7 de la martingale 1.8. ■

1.2.3 Rappels d'analyse

Définition 1.2.3 (l'ensemble compact) *Un ensemble A est compact si pour tout suite d'élément de A on peut extraire une sous-suite convergente faiblement* *vers un élément de A.*

Définition 1.2.4 (L'ensemble convexe) *Un ensemble A est dit convexe lorque pour tout x et y de A, le segment $[x; y]$est inclu dans A, c'est -à-dire*

$$\forall x; y \ \epsilon A; \forall \lambda \epsilon [0;1] \ ; \lambda x + (1-\lambda) \, y \ \epsilon A.$$

Définition 1.2.5 (Fonction convexe) *On dit qu'une fonction f défnie sur un ensemble convexe non vide A et à valeurs dans R est convexe si et seulement si*

$$\forall x; y \epsilon A; \forall \lambda \epsilon [0;1] \ ; f \ \ (\lambda x + (1-\lambda) \, y) \leq \lambda f \ \ (x) + (1-\lambda) f \ \ (y) \, .$$

De plus, la fonction f est dite strictement convexe si l'inégalité est stricte lorsque $x \neq y$ et $\lambda \epsilon]0;1[$.

Lemme 1.2.3 (Inégalité de Hölder) *Soit X et Y deux v.a. Si $X \in L^p, Y \in L^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :*

$$E\left[|XY|\right] \leq \|X\|_p \, \|Y\|_q \, .$$

Théoréme 1.2.2 (Théorème de Mazur) *Si x_n converge faiblement vers x alors il existe une suite de combinaisons convexes $c_n$telle que*

$$c_n = \sum_{i \geq 0} \alpha_{in} x^i, \ \ ou \ \alpha_i \geq 0 \ \ et \sum_{i \geq 0} \alpha_i = 1.$$

qui converge fortement vers x :

$$\|c_n - x\| \longrightarrow 0, \text{commen} \longrightarrow \infty.$$

Définition 1.2.6 (l'inégalité de Young) *Soient a et b deux réels positifs, et p*

et q des réels strictement positifs vérifiant : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Un cas simple (relativement fréquent) de l'inégalité de Young est l'inégalité avec des exposants 2 :

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

qui donne également l'inégalité de Young avec ε (valide pour tout $\varepsilon > 0$) :

$$ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2}.$$

Chapitre 2

Existence du contrôle optimal pour les EDSRs linéaires

L'existence du contrôle optimal pour les EDSRs linéaires a été étudié par K. Bahlali, B. Gherbal, B. Mezerdi [7].

2.1 Préliminaires

Soit $(W_t)_{0\leq t\leq T}$un mouvement Brownien de dimension r défnie sur un espace probabilisé complet $(\Omega,\mathcal{F},P)$, Soit $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ la filtration naturelle de (W_t) telle que $\mathcal{F}_0$ contienne tous les ensembles P-nuls de $\mathcal{F}$, soit ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable de carré integrable, soit a_t, b_t, c_t des processus progressivement mesurable bornès avec des valeurs dans $\mathbb{R}, \mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}$, respictivement.

On considére le problème de contrôle optimal gouvernés par l'EDSRs linéaire

$$Y_t = \xi + \int_t^T (a_s Y_s + Z_s b_s + c_s u_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s \ . \tag{2.1}$$

Définition 2.1.1 *Un contrôle admissible u est un processus de carré intégrable, progressivement mesurable à valeurs dans $U \subseteq \mathbb{R}^k$.*

On note U_{ad} l'ensemble des contrôles admissibles.

Notre problème est de choisir un contrôle admissible qui minimise la fonction de coût

$$J(u) = E[g(Y_0) + \int_0^T h(t; Y_t; Z_t; u_t)dt], \tag{2.2}$$

oú $h : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \times U \to \mathbb{R}$, et $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données.

Le contrôle qui résout ce problème est dit optimal.

Afin de résoudre le problème ci-dessus, nous considérons les hypothèses suivantes.

$(A1)$ l'ensemble $U \subseteq \mathbb{R}^k$est convexe et compact .

$(A2)$ h et g sont continues et convexes.

Laisse

$L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^k) := \left\{ f(t, w) \;\; \mathcal{F}_t - \text{adapté tel que : } \|f\|^2_T = E \int_0^T f(t, w)^2 dt < \infty \right\}.$

$U_{ad} = \left\{ u \in L^2_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d); u_t \epsilon U \;\forall t \in \; [0, T], p - a.s \right\}$ avec $U \subseteq \mathbb{R}^K$.

Remarque 2.1.1 *Notons que nous avons une contrainte supplémentaire selon laquelle un contrôle doit être carré intégrable juste pour assurer l'existence de solutions de 2.1 par u. Si U est borné. cette restriction est alors satisfaite automatiquement. Lorsque $(A1)$ et $(A2)$ sont supposés. Alors notre problème de contrôle est généralement appelé un problème de contrôle optimal linéaire-convexe stochastique, puisque le système contrôlé est linéaire et la fonctionnelle de coût est convexe*

.

2.2 Existence d'un contrôle optimal

Le résultat principal de cette section est donné par le théorème suivant.

Théoréme 2.2.1 *Supposons que (A1) et (A2)sont valides. Alors il existe un processus $\mathcal{F}_t$-adapté $\left(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t, \bar{u}_t\right)$ tels que :*

(i) $\left(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t\right)$ est la solution unique de l'EDSR 2.1 .

(ii) $\bar{u}_t$ minimise J .

Pour prouver le théorème nous avons besoin d'un lemme.

la solution unique de l'equastion 2.1 est donnée sur $[0, T]$ par :

$$Y_t = \Gamma_t^{-1} E\left(\xi \Gamma_T + \int_t^T u_s \Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t\right), \tag{2.3}$$

$$\Gamma_t = \exp\left\{\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds + \int_0^t a_s^2 ds\right\}.$$

Soit (Y^j, Z^j, u^j) une suite minimisante $\left(i.e \text{ tell que } \lim_{j\to\infty} J(u^j) = \inf_{u \, \epsilon U_{ad}} J(u) \text{ as } j \to \infty\right)$
Puisque U est un ensemble compact, il existe une constante positive k avec

$$E\int_0^T \left|u_i^j\right|^2 dt < k \quad \forall j \geq 0.$$

Ainsi,il existe une sous-suite (notée par u^j) telle que

$$u^j \longrightarrow \bar{u} \text{ faiblement dans } L_{\mathcal{F}}^2\left(0, T; \mathbb{R}^k\right).$$

D'après le théorème de Mazur, il existe une suite de combinaisons convexes

$$\tilde{u}^j = \sum_{i\ \geq 0} \alpha_{ij} u^{i+j} \text{ avec } \alpha_{ij} \geq 0 \text{ et} \sum_{i\ \geq 0} \alpha_{ij} = 1,$$

tell que

$$u^j \longrightarrow \bar{u} \text{ fortement dans } L^2_{\mathcal{F}}\left(0, T; \mathbb{R}^k\right). \tag{2.4}$$

L'ensemble $U \subset \mathbb{R}^k$ est convexe et compact, alors $\bar{u} \epsilon U_{ad}$

Théoréme 2.2.2 *Soit* $\left(\tilde{Y}^j, \tilde{Z}^j, \tilde{u}^j\right)$ *l'a solution uniqe de l'EDSR*

$$\tilde{Y}^j_t = \xi + \int_t^T (a_s \tilde{Y}_s + \tilde{Z}_s b_s + c_s \tilde{u}_s) ds - \int_t^T \tilde{Z}_s dW_s, \tag{2.5}$$

avec $\left(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t, \bar{u}_t\right)$ la solution unique de l'EDSR

$$\bar{Y}_t = \xi + \int_t^T (a_s \bar{Y}_s + \bar{Z}_s b_s + c_s \bar{u}_s) ds - \int_t^T \bar{Z}_t dW_s, \tag{2.6}$$

alors

$$\tilde{Y}^j_t \longrightarrow \bar{Y}_t \text{ fortement dans } C_{\mathcal{F}}\left(0, T; \mathbb{R}^k\right) \tag{2.7}$$

et

$$\int_t^T \tilde{Z}^j_s dW_s \longrightarrow \int_t^T \bar{Z}_s dW_s \text{ fortement dans } L^2_{\mathcal{F}}\left(0, T; \mathbb{R}^k\right), \tag{2.8}$$

Preuve. preuve de 2.7 nous avons

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^T \Gamma_t^2 dt\right] &= E\left[\int_0^T \exp\left\{\int_0^t 2b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t 2b_s^2 ds + \int_0^t 2a_s^2 ds\right\} dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T \exp\left\{\int_0^t 2b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t 4b_s^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t 2b_s^2 ds + \int_0^t 2a_s^2 ds\right\} dt\right] \\
&= E\left[\int_0^T \exp\left\{\int_0^t 2b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t 4b_s^2 ds\right\}.\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t 2b_s^2 ds + \int_0^t 2a_s^2 ds\right\} dt\right].
\end{aligned}$$

Soit

$$M := \sup_{t,w} |a_t(W)| \text{ et } k := \sup_{t,w} |b_t(W)|,$$

puisque $\exp\left\{\int_0^t 2b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t 4b_s^2 ds\right\}$est une martingale de moyenne 1, il n'est pas difficile pour voir ça :

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^T \Gamma_t^2 dt\right] &\leq E\left[\int_0^T \exp\left\{\int_0^t 2b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t 2b_s^2 ds\right\}.\exp\left\{Mt + 2kt\right\} dt\right] \\
&\leq \exp\left\{MT + 2kT\right\}.E\left[\int_0^T \exp\left\{\int_0^t 2b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t 2b_s^2 ds\right\} dt\right] \\
&= \exp\left\{MT + 2kT\right\}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

D'autre part,d'apés l'inigalite de Holder et puisque c_t, est borné, il existe une constante positive k' avec

$$E\left(\int_0^T |c_t|.\left|\tilde{u}_t^j - \bar{u}_t\right|\Gamma_t dt\right) \leq E\left[\int_0^T |c_t|^2.\left|\tilde{u}_t^j - \bar{u}_t\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}.E\left[\int_0^T \Gamma_t^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \acute{k}\left[\exp\left\{MT + 2kT\right\}\right]^{\frac{1}{2}} = \acute{k}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}MT + kT\right\}\right] < \infty,$$

ce qui implique que

$$\int_0^T c_t.\tilde{u}_t^j.\Gamma_t dt \longrightarrow \int_0^T c_t.\bar{u}_t.\Gamma_t dt \text{ fortement dans } L_{\mathcal{F}}^1\left(0, T; \mathbb{R}^k\right).$$

ainsi

$$E\left[\int_t^T c_s.\tilde{u}_s^j.\Gamma_s dt \mid \mathcal{F}_t\right] \longrightarrow E\left[\int_t^T c_s.\bar{u}_t.\Gamma_s dt \mid \mathcal{F}_t\right] \text{ fortement dans } L_{\mathcal{F}}^1\left(0, T; \mathbb{R}^k\right).$$

Depuis

$$\tilde{Y}_t^j = \Gamma_t^{-1} E\left(\xi \Gamma_T + \int_t^T c_s.\tilde{u}_s^j.\Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t\right),$$

et

$$\bar{Y}_t = \Gamma_t^{-1} E\left(\xi \Gamma_T + \int_t^T c_s.\bar{u}_s.\Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t\right),$$

on en deduit que

$$\tilde{Y}_t^j \longrightarrow \bar{Y}_t \text{ fortement dans } C_{\mathcal{F}}\left(0, T; \mathbb{R}^k\right).$$

Preuve de 2.8.

$$\tilde{Y}_t^n = \xi + \int_0^T (a_s \tilde{Y}_s^j + b_s \tilde{Z}_s^j + c_s \tilde{u}_s^n) ds - \int_t^T \tilde{Z}_s^j dW_s,$$

et

$$\bar{Y}_t = \xi + \int_0^T (a_s \bar{Y}_s + b_s \bar{Z}_s + c_s \bar{u}_s) ds - \int_t^T \bar{Z}_s dW_s,$$

on en deduit que

$$\left(\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right) = \int_t^T (a_s \left(\tilde{Y}_s^j - \bar{Y}_s\right) + b_s \left(\tilde{Z}_s^j - \bar{Z}_s\right) + c_s \left(\tilde{u}_s^j - \bar{u}_s\right)) ds - \int_t^T \left(\tilde{Z}_s^j - \bar{Z}_s\right) dW_s,$$

$$d\left(\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right) = -\left[a_t \left(\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right) + b_t \left(\tilde{Z}_t^j - \bar{Z}_s\right) + c_t \left(\tilde{u}_t^j - \bar{u}_t\right)\right] dt + \left(\tilde{Z}_t^j - \bar{Z}_t\right) dW_t.$$

On appliquent la formule d'Itô à $\left|\tilde{Y}_t^j - Y_t\right|^2$; on obtient

$$d\left|\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right|^2 = 2\left|\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right| d\left|\tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t\right| + \left\langle \tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t, \tilde{Y}_t^j - \bar{Y}_t \right\rangle,$$

$$d\left|\tilde{Y}_t^j-\bar{Y}_t\right|^2=2\left|\tilde{Y}_t^j-\bar{Y}_t\right|.\left[-a_t\left(\tilde{Y}_t^j-\bar{Y}_t\right)-b_t\left(\tilde{Z}_t^j-\bar{Z}_t\right)-c_t\left(\tilde{u}_t^j-\bar{u}_t\right)\right]dt$$
$$+2\left|\tilde{Y}_t^j-\bar{Y}_t\right|\left|\tilde{Z}_t^j-\bar{Z}_t\right|dW_t+\left\|\tilde{Z}_t^j-\bar{Z}_t\right\|^2dt,$$

passant à l'integrale , on a

$$\left|\tilde{Y}_t^n-\bar{Y}_t\right|^2=2\int_t^T\left\langle\tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s,a_s\left(\tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s\right)+b_s\left(\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right)+c_s\left(\tilde{u}^j-\bar{u}_s\right),\left(\tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s\right)\right\rangle ds$$
$$-2\int_t^T\left\langle\tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s,\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right\rangle dW_s-\int_t^T\left\|\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right\|^2ds,$$

donc

$$\begin{aligned}&\left|\tilde{Y}_t^j-\bar{Y}_t\right|^2+\textstyle\int_t^T\left\|\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right\|^2ds\\&=2\textstyle\int_t^T\left\langle\tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s,a_s\left(\tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s\right)+\left(\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right)b_s+c_s\left(\tilde{u}^j-\bar{u}_s\right)\right\rangle ds\\&+2\textstyle\int_t^T\left\langle\tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s,\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right\rangle dW_s,\end{aligned}$$

comme $\tilde{Y}^j,\bar{Y}$ sont dans S^2, et $\tilde{Z}^j,\bar{Z}$ sont dans M^2,

$$\int_t^T\left\langle\tilde{Y}_t^j-\bar{Y}_t,\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right\rangle dW_s,$$

une martingale de carré intégrable nulle en 0. Ainsi, prendre des espérances permet de montrer que

$$\begin{aligned}E\left[\textstyle\int_0^T\left\|\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right\|^2ds\right]\leq\ &2E\left[\textstyle\int_0^T|a_s|\left|\tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s\right|^2ds\right.\\&+\textstyle\int_0^T|b_s|\left|\tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s\right|.\left\|\tilde{Z}_s^j-\bar{Z}_s\right\|ds\\&\left.+\textstyle\int_0^T|c_s|\left|\tilde{Y}_s^j-\bar{Y}_s\right|.\left|\tilde{u}^j-\bar{u}_s\right|ds\right]\end{aligned}$$

Puisque a_t, b_t, c_t sont bornés, alors une application de l'inégalité de Young montre que

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T \left\|\tilde{Z}_s^j - \bar{Z}_s\right\|^2 ds\right] &\leq 2ME\left[\int_0^T \left|\tilde{Y}_s^j - \bar{Y}_s\right|^2 ds\right] \\ &+ kE\left[\int_0^T \left(\frac{1}{\alpha^2}\left|\tilde{Y}_s^j - \bar{Y}_s\right|^2 + \alpha^2\left\|\tilde{Z}_s^j - \bar{Z}_s\right\|^2\right) ds\right] \\ &+ \gamma E\left[\int_0^T \left|\tilde{Y}_s^j - \bar{Y}_s\right|^2 ds + \int_0^T \left|\tilde{u}_s^j - \bar{u}_s\right|^2 ds\right]. \end{aligned}$$

Choissez $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2k}}$pour obtenir

$$\frac{1}{2}E\left[\int_0^T \left\|\tilde{Z}_s^j - \bar{Z}_s\right\|^2 ds\right] \leq \left(2M + 2k^2 + \gamma\right) E\left[\int_0^T \left|\tilde{Y}_s^j - \bar{Y}_s\right|^2 ds\right] + \gamma E\left[\int_0^T \left|\tilde{u}_s^j - \bar{u}_s\right|^2 ds\right],$$

puisque les suits $\left(\tilde{Y}^j\right)$ et $(\tilde{u}^j)$ sont convergentes , on considere que

$$\begin{aligned} &E\left[\int_0^T \left\|\tilde{Z}_s^j - \bar{Z}_s\right\|^2 ds\right] \leq 2\left(2M + 2k^2 + \gamma\right) E\left[\int_0^T \left|\tilde{Y}_s^j - \bar{Y}_s\right|^2 ds\right] \\ &+2\gamma E\left[\int_0^T \left|\tilde{u}_s^j - \bar{u}_s\right|^2 ds\right] \longrightarrow 0 \text{ comme } j \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ainsi$\left(\tilde{Z}^j\right)_j$ est une suit de cauchy dans $M^2\left(\mathbb{R}^K\right)$ et donc il existe un processus progreressivement $\bar{Z}$ mesurable tel que :

$$E\left[\int_0^T \left\|\tilde{Z}_s^j - \bar{Z}_s\right\|^2 ds\right] \longrightarrow 0 \text{ comme } j \longrightarrow \infty,$$

ce qui implique que

$$\int_0^T \tilde{Z}_s^j dW_s \longrightarrow \int_0^T \bar{Z}_s dW_s \text{ fortement dans } L^2_{\mathcal{F}}\left(0, T; \mathbb{R}^k\right).$$

Donc il rest minimiser$J(u)$ dans U_{ad}Supposons que $(A1)$ et $(A2)$ soient vraies et posons

$$l \ = \inf_{u\epsilon U_{ad}} J\left(u\right).$$

Soit $\left(Y^j, Z^j, u^j\right)$ tel que

$$l = \lim_{j\to\infty} J\left(u^j\right) = \lim_{j\to\infty} E\left[g\left(y_0^j\right) + \int_0^T h\left(t, Y_t^j, Z_t^j, u_t^j\right) dt\right].$$

Nous avons

$$\begin{aligned} J\left(\bar{u}\right) &= E\left[g\left(\bar{y}_0\right) + \textstyle\int_0^T h\left(t, \bar{Y}_t, \bar{Z}_t, \bar{u}_t\right) dt\right] \\ &= E\left[g\left(\lim_{j\to\infty}\tilde{Y}_0^j\right) + \textstyle\int_0^T h\left(t, \lim_{j\to\infty}\tilde{Y}_t^j, \lim_{j\to\infty}\tilde{Z}_t^j, \lim_{j\to\infty}\tilde{u}_t^j\right) dt\right]. \end{aligned}$$

Comme g et h sont continues, il s'ensuit que :

$$J\left(\bar{u}\right) = \lim_{j\to\infty} J\left(\tilde{u}^j\right)$$

$$= \lim_{j\to\infty} E\left[g\left(\tilde{Y}_0^j\right) + \int_0^T h\left(t, \tilde{Y}_t^j, \tilde{Z}_t^j, \tilde{u}_t^j\right) dt\right]$$

$$= \lim_{j\to\infty} E\left[\sum_{i\geq 0} g\left(\alpha_{ij} Y_0^{i+j}\right) + \int_0^T h\left(t, \sum_{i\geq 0}\alpha_{ij} Y_t^{i+j}, \sum_{i\geq 0}\alpha_{ij} Z_t^{i+j}, \sum_{i\geq 0}\alpha_{ij} u_t^{i+j}\right) dt\right].$$

Comme g et h sont convex, il s'ensuit que

$$J\left(\bar{u}\right) \leq \lim_{j\to\infty}\sum_{i\geq 0}\alpha_{ij} E\left[g\left(Y_0^{i+j}\right) + \int_0^T h\left(t, Y_t^{i+j}, Z_t^{i+j}, u_t^{i+j}\right) dt\right]$$

$$= \lim_{j\to\infty}\sum_{i\geq 0}\alpha_{ij} j\left(u^{i+j}\right)$$

$$= \lim_{j\to\infty}\sum_{i\geq 0}\alpha_{ij}\max_{1\leq i\leq n} j\left(u^{i+j}\right)$$

$$= \lim_{j\to\infty} \max_{1\leq i\leq n} j\left(u^{i+j}\right) \sum_{\geq 0} \alpha_{ij}$$

$$= \lim_{j\to\infty} j\left(u^{i+\sigma(j)}\right)$$

$$= \inf_{u\epsilon U_{ad}} J\left(u\right).$$

En consequence

$$J\left(\bar{u}\right) \leq \inf_{u\epsilon U_{ad}} J\left(u\right).$$

■

Conclusion

Dans ce modeste travail, on a démontrer l'existence du contrôle optimal pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires où la fonction de coût non linéaire. La méthode de démonstration est basée sur le fait que l'ensemble des contrôles est convexe et compact et la fonction de coût est convexe ainsi que le théorème de Mazur.

Bibliographie

[1] B.Briand, P. (2001). Èquations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[2] Briand, Ph, (2011). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades.

[3] B.Berglund, N, (2011). Martingales et calcul stochastique. Université d'orléans

[4] B.Bismut, J. (1973). Théorie probabiliste du contrôl des diffusions. Mem. Amer

[5] C.Cristophe, J, (2018). Processus stochastiques. Université de Rennes 1

[6] D.Darling, R and Pardoux, E. Backwards SDE with random terminal time and applications to semilinear elliptic PDE, Ann. Probab, no. 3, 1135-1159.

[7] K. Bahlali, B. Gherbal, B. Mezerdi. (2010). *Existence and optimality conditions in stochastic control of linear BSDEs,* Random Oper. Stoch. Equ., Vol. 18, No 3, 185-197.

[8] E. PARDOUX et S. PENG, Adapted solution of a backward stochastic differential equation,Systems and control letters, vol. 14, 1990, p. 54-61.

[9] E. PARDOUX et S. PENG, Some backward stochastic differential equations with non-lipschitz coefficients, Preprint.

[10] H.Hamadene, S. (1996). Equations dfférentielles stochastiques rétrogrades : le cas localement Lipschitzien. In : Annales de l'IHP. Probabilités et Statistiques (Vol.32,No.5,pp.645-659).

[11] M.Mahieddine, Z, (2009 - 2010). Discrétisations et résolutions numériques des équations différentielles stochastiques rétrogrades. Mémoire de Magister. Université de Boumerdes.

[12] N. EL-KAROUI, S. PENG et M. C. QUENEZ, Backward stochastic differential equation, Finance and Optimization, Preprint...

[13] P.Pham, H, (2000). Optimisation et controle stochastique appliqués à la finance. Springer.

[14] P.Philippe,B.(2015). Calcul stochastique des martingales continues. Université pierre et marie curie, paris 6

[15] N. EL-KAROUI, S. PENG et M. C. QUENEZ, Backward stochastic differential equation, Finance and Optimization, Preprint.