République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : **Probabilités**

Présenté par :

Mr. Leslous Aymen

Titre :

Équations différentielles stochastiques rétrogrades à croissance logarithmique

Mr.	**Hafayed Mokhtar**	**Professeur**	U.Biskra	**Président**
Mr.	**Khelfallah Nabil**	**Professeur**	U.Biskra	**Encadreur**
Mr.	**Ghoul Abdelhak**	**M.A.A**	U.Biskra	**Examinateur**

Soutenu Publiquement le : 28/06/2022

Dédicace

♣

♣

♣ Je dédie ce travail à ♣

♣

♣ Ma mère et mon père ♣

♣

♣ Mes frères ♣

♣

♣ Mes amis ♣

LESLOUS AYMEN.

Remerciements

Avant tout, je remercie Dieu, le Tout-Puissant, de m'avoir donné la force,
de survivre, ainsi que l'audace de sur monter toutes les difficultés.
Je tiens à exprimer ma gratitude au directeur de recherche
$\int$ Pr. Khelfallah Nabil $\int$
pour sa supervision de ce travail,
et je le remercie pour sa présence et ses précieux conseils.
Mes remerciements vont également aux membres du jury :
$\int$ Pr. Hafayed Mokhtar & D.r. Ghoul Abdelhak $\int$
pour leur acceptation d'étudier ce travail.
Je remercie profondément :
$\int$ Ma famille $\int$
$\int$ Mes amis $\int$
ainsi que les personnes qui m'ont soutenu
de près ou de loin
lors de la réalisation de ce mémoire.

Merci.

Table des matières

Notations et symboles

Tout d'abord, nous précisons les abréviations, les symboles et les espaces utilisés tout au long de ce mémoire.

Abréviations		**La signification**
EDS	:	Équation(s) différentielle(s) stochastique(s).
EDSR	:	EDS-rétrograde(s).
$\mathscr{P}$-mesurable	:	Progressivement mesurable.
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
$\mathscr{N}$	:	La famille des ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathscr{F}$.
$(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_t, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité filtré.
$\mathscr{F} \vee \mathscr{G}$	:	La plus petite σ-algèbre contenant $\mathscr{F} \bigcup \mathscr{G}$.
$\mathscr{B}_d$	:	La σ-algèbre de Borel sur $\mathbb{R}^d$.
$a \wedge b$	:	$\min(a, b)$.
$a \vee b$	:	$\max(a, b)$, $(a^+ = \max(a, 0))$.
$\mathrm{Tr}(\cdot)$	:	$\mathrm{Trace}(\cdot)$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	:	Produit scalaire, ($\lvert\cdot\rvert$: La norme induite par $\langle \cdot, \cdot \rangle$).
$(\cdot) \otimes (\cdot)$	:	Produit tensoriel, (si $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x \otimes y = xy^*$).
$L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d)$	:	L'espace des variables aléatoires $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$, où $\mathbb{E}\lvert X\rvert^p = \mathbb{E}(\lvert X\rvert^p) < \infty$, $p > 0$.
Λ_d^p	:	L'espace des processus $\mathscr{P}$-mesurables $X : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$, où $\int_0^T \lvert X_t\rvert^2 \mathrm{d}t < \infty$, $\mathbb{P}$-$p.s.$ si $p = 0$, et $\mathbb{E}\left(\int_0^T \lvert X_t\rvert^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{p}{2}} < \infty$, si $p > 0$.
$\mathcal{S}_d^0$	:	L'espace des processus $\mathscr{P}$-mesurables et continus, $X : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$.
$\mathcal{S}_d^p$	:	L'espace des $X \in \mathcal{S}_d^0$ où $\mathbb{E}\left(\lVert X\rVert_T^p\right) = \mathbb{E}\sup_{t \in [0,T]} \lvert X_t\rvert^p < \infty$, si $p > 0$.
$\mathcal{M}_d^p$	:	L'espace des martingales continues $M : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d$, où $\mathbb{E}\lvert M_t\rvert^p < \infty$, $\forall\ t \in [0, T]$, $p \geq 1$.

Introduction

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré sur lequel on définit un mouvement brownien k-dimensionnel $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$. On suppose que pour tout $t \in [0, T]$

$$\mathscr{F}_t = \sigma(W_s : s \leq t) \vee \mathscr{N},$$

est la filtration naturelle de W. Soient $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times k} \to \mathbb{R}^m$, une fonction aléatoire, assumons que le processus $\{f(t, y, z)\}_{t\in[0,T]}$ est $\mathscr{P}$-mesurable pour chaque $(y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times k}$, et ξ une variable aléatoire $\mathscr{F}_T$-mesurable à valeur dans $\mathbb{R}^m$. L'équation différentielle stochastique rétrograde considérée est :

$$Y_s = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s,\ t \in [0, T].$$

Dorénavant l'équation précédente sera désignée par $\mathrm{Eq}(\xi, f)$. Les données ξ et f sont respectivement appelées la condition terminale et le coefficient ou le générateur de l'EDSR. Un fait généralement reconnu est que les équations différentielles stochastiques rétrogrades ont été introduites dans leur version linéaire par Bismut [8, 9] en 1973. Plus précisément, dans la formulation du principe stochastique maximal de Pontryagin pour les systèmes stochastiques dirigés par une EDS de type Itô, l'équation adjointe vérifiée une EDSR linéaire. Cependant, à peu près à la même époque, et très probablement un peu avant, Davis et Varaiya [18] ont également étudié ce qui peut être considéré comme un prototype de EDSR linéaire pour caractériser la fonction de valeur et les contrôles optimaux des problèmes de contrôle stochastique. Les premières versaient non linéaires de ce genre d'équation a été à nouveau introduites, sous la forme d'une équation de Riccati, par Bismut [10] et quelques années plus tard par Chitashvili [15] et Chitashvili et Mania [16, 17]. Néanmoins, la première étude qui présente un traitement systématique des EDSRs non linéaires est l'article fondateur de Pardoux et Peng [34]. Un résultat d'existence et unicité a été démontrer dans le cas où le générateur f uniformément Lipschitzien par rapport aux deux variables y et z, la condition terminale ξ et le processus $\left(f(t,0,0)\right)_t$ sont de carré intégrable.

Depuis, et notamment suite à l'article fondamental d'El Karoui, Peng et Quenez [23], les EDSRs sont devenues un domaine de recherche particulièrement actif, en raison de leurs nombreuses applications potentielles dans beaucoup de domaines tels que la finance mathématique, les équations aux dérivées partielles, la théorie des jeux, l'économie, et plus généralement le calcul et l'analyse stochastique. Grâce à leurs applications, les chercheurs ont fait beaucoup d'efforts pour affaiblir les hypothèses sur le générateur f (linéaire, Lipschitz, localement Lipschitz, monotone, à croissance quadratique, à croissance logarithmique,..., etc).

Les premiers résultats aller au-delà l'hypothèse de croissance linéaire en z, qui supposait une croissance quadratique, ont été obtenus indépendamment par Kobylanski [28, 29, 30], Dermoune, Hamadène et Ouknine [19], pour ξ borné et f Lipschitz en y. Ces résultats ont ensuite été approfondis par Eddhabi et Ouknine [20], et améliorés par Lepeltier et San Martin [32, 33], Briand, Lepeltier et San Martin [13], et revisités par Briand et Elie [12], mais toujours pour ξ borné. Un cadre quadratique spécifique avec uniquement des conditions terminales de carré intégrable a été considéré récemment par Bahlali, Eddahbi et Ouknine [6, 5], tandis qu'un résultat avec croissance logarithmique a également été obtenu par Bahlali et El Asri [4], et Bahlali, Kebiri, Khelfallah et Moussaoui [7].

Nous renvoyons le lecteur plus intéressé par la théorie des EDSRs au livre édité par El Karoui et Mazliak [22], au livre édité par Touzi et Tourin [39] et aux travaux de Hamadène [24, 25]. Le lecteur plus intéressé par les applications de l'EDSR en domaine de finance ou contrôle optimal stochastique peut consulter El Karoui, Peng et Quenez [23], El Karoui et Quenez [21], Karoui et Mazliak [22], Peng [37, 38], Hamadène et Lepeltier [26, 27].

Dans ce qui suit, on donne une brève description de ce mémoire.

Le premier chapitre de ce mémoire constitue une étude sur les équations différentielles stochastiques rétrograde. On commence par quelques rappels sur les processus stochastiques. Ensuite, on introduit, les équations différentielles de type Itô (EDS en abrégé), puis on donne une brève introduction à la théorie des EDSRs en soulignant le premier résultat d'existence et unicité dû à Pardoux-Peng en 1990 qui assure l'existence et l'unicité dans le cadre globalement Lipschitzien.

Dans le deuxième chapitre, on considère une EDSR unidimensionnelle $(m = 1)$ avec un générateur continu f qui est de croissance logarithmique de la forme :

$$\left|f\left(t,\omega,y,z\right)\right| \leq \eta_t + K\left|y\right|\left|\ln\left(\left|y\right|\right)\right| + c_0\,|z|\sqrt{|\ln(|z|)|}.$$

Ce type de générateurs se situe entre la croissance linéaire et la croissance quadratique. Ni la condition de continuité uniforme, ni la condition de monotonie locale (et donc ni la condition de Lipschitz local) ne seront requises pour le générateur. Nous traiterons cette situation par des méthodes de localisation utilisées dans [1, 2, 4]. En effet, on approxime f par une suite de fonctions lipchitziennes $\left(f_n\right)_n$. Ensuite, on construit une suite d'équations rétrogrades $\left(\mathrm{Eq}(\xi, f_n)\right)_n$ qui pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'EDSR correspondant à $\left(\xi, f_n\right)$ possède la propriété d'existence et unicité de la solution. Enfin, par passage à la limite, on montre l'existence et l'unicité de l'EDSR $\mathrm{Eq}(\xi, f)$.

Au troisième chapitre, on présente deux applications, la première concerne le contrôle stochastique et la seconde montre une relation entre ce dernier type d'équations et les EDSRs à croissance quadratique.

Chapitre 1

Rappel général de calcul stochastique

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les outils principaux du calcul stochastique, qui seront utiles tout au long de ce mémoire. On s'intéresse en particulier aux quelques résultats de base reposant sur la théorie des processus stochastiques, tels que les équations différentielles stochastiques de type Itô et les équations différentielles stochastiques rétrogrades. Le contenu de ce chapitre est principalement basé sur les livres [14, 31, 36, 39] et le polycopié de cours [11].

1.1 Préliminaires

Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et,

$$\mathscr{N} = \left\{A : A \subset \Omega,\ \exists\ N \subset \mathscr{F},\ \mathbb{P}(N) = 0 \text{ et } A \subset N\right\},$$

est la famille des ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathscr{F}$. L'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ est complet si $\mathscr{N} \subset \mathscr{F}$. Dans ce mémoire, l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ sera toujours considéré comme complété par la famille des ensembles $\mathbb{P}$-négligeables. Si $\mathbb{X}$ est un espace topologique, alors $\mathscr{B}_{\mathbb{X}}$ désigne la σ-algèbre de Borel sur $\mathbb{X}$, c'est-à-dire la σ-algèbre engendrée par la famille des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{X}$; en particulier; $\mathscr{B}_d \overset{déf}{=} \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$.

Une application $X : \Omega \to \mathbb{X}$ est une variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{X}$) si pour tout $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{X}}$

$$\{X \in B\} \overset{déf}{=} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathscr{F}.$$

- Si $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ alors X est appelé une variable aléatoire (réelle).
- Si $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ alors X est appelé un vecteur aléatoire d-dimensionnel (ou variable aléa-

toire d-dimensionnelle).

- Si $A \subset \Omega$ et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ donné par $X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) = \mathbb{1}_{\{\omega \in A\}} + 0 \times \mathbb{1}_{\{\omega \notin A\}}$, alors X est une variable aléatoire si et seulement si $A \in \mathscr{F}$.
- La mesure de probabilité $\mathbb{P}_X : \mathscr{B}_{\mathbb{X}} \to [0,1]$ définie par $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$ est appelée la loi (de probabilité) de X. On écrit $X \sim Q$ si $\mathbb{P}_X = Q$.
- Soit $X : (\Omega, \mathscr{F}) \to \mathbb{X}$ un vecteur aléatoire. Alors

$$\sigma(X) = \left\{X^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}_{\mathbb{X}}\right\},$$

est une σ-algèbre de sous-ensembles de Ω (appelée la σ-algèbre engendrée par X).

- Puisque X est une variable aléatoire, $\sigma(X) \subset \mathscr{F}$, et $\sigma(X)$ est la plus petite σ-algèbre qui rend X mesurable.
- On définit aussi,

$$\mathscr{F}^X = \sigma(X) \vee \mathscr{N},$$

comme la plus petite σ-algèbre qui contient à la fois $\sigma(X)$ et $\mathscr{N}$.

1.1.1 Quelques types de convergences

Soient X, $X_n : (\Omega; \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, des variables aléatoires.

Les types de convergence suivants seront utilisés dans ce mémoire :

- Convergence presque sûre $(p.s.)$: $X_n \longrightarrow X$ $p.s.$ si $\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1$.
- Convergence en probabilité (proba.) : $X_n \xrightarrow{proba.} X$ si $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.
- Convergence en moyenne d'ordre $p > 0$: $X_n \xrightarrow{L^p} X$, si X_n, $X \in L^p$ et $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X|^p = 0$.
- Convergence en loi : $X_n \xrightarrow{loi} X$ si pour toute fonction continue bornée $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}g(X_n) = \mathbb{E}g(X)$.

Remarque 1.1.1 *Il est bien connu que :*

$$\begin{array}{ccccc} X_n \xrightarrow{L^p} X & \Longrightarrow & X_n \xrightarrow{L^1} X & & \\ & & \Downarrow & & \\ X_n \xrightarrow{p.s.} X & \begin{array}{c} \Longrightarrow \\ \Longleftarrow \\ \textit{Sur une sous suite} \end{array} & X_n \xrightarrow{proba.} X & \Longrightarrow & X_n \xrightarrow{loi} X. \end{array}$$

Théorème 1.1.1 (Lemme de Fatou) *Soient Y, Y_n des variables aléatoires et $Y_n \geq 0$ p.s., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$\mathbb{E} \liminf_{n\longrightarrow\infty} Y_n \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E} Y_n.$$

1.1.2 Intégrabilité uniforme

Définition 1.1.1 *Une famille de variables aléatoires d-dimensionnelles* $\{X_i : i \in I\}$ *est dite uniformément intégrable si*

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sup_{i\in I}\mathbb{E}\left(|X_i|\mathbb{1}_{\{|X_i|\geq N\}}\right)\right)=0.$$

Proposition 1.1.1 (Le premier critère d'intégrabilité uniforme) *Soient* $X_i : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}^d$, $i \in I$, *des variables aléatoires, s'il existe* $Y \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *tel que pour tout* $i \in I$, $|X_i| \leq Y$ *p.s. alors* $\{X_i : i \in I\}$ *est uniformément intégrable.*

Proposition 1.1.2 *Soient* $X_i : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}^d$, $i \in I$, *des variables aléatoires. La famille* $\{X_i : i \in I\}$ *est uniformément intégrable si et seulement s'il existe une fonction borélienne* $H : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *telle que,*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{H(r)}{r}=\infty, \qquad et \qquad \sup_{i\in I}\mathbb{E}H(|X_i|)<\infty.$$

De plus, la fonction H *peut être choisie comme une fonction convexe continue et croissante telle que* $H(0) = 0$.

Théorème 1.1.2 (Théorème de Lebesgue-Vitali) *Soient* X, $X_n : (\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$, *des variables aléatoires et* $p > 0$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $X_n, X \in L^p\left(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d\right)$ *et* $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

ii) $X_n \longrightarrow X$ *en probabilité et* $\left\{|X_n|^p : n \in \mathbb{N}\right\}$ *est uniformément intégrable.*

1.2 Filtrations

On dit que $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ constitue une base stochastique (c'est-à-dire un espace de probabilité filtré vérifiant les conditions habituelles) si :

1) $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité complet.

2) $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ est une filtration (c'est-à-dire une famille croissante de sous-σ-algèbres de $\mathscr{F}$, i.e. $\forall\, s \leq t$, $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$) satisfaisant les conditions suivantes :

   i) $\mathscr{F}_t$ est une sous-σ-algèbre de $\mathscr{F}$ qui contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathscr{F}$,

   ii) $t \to \mathscr{F}_t$ est continue à droite, c'est-à-dire que $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t^+}$, où $\mathscr{F}_{t^+} \overset{déf}{=} \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$.

À une telle filtration, on associe la σ-algèbre $\mathscr{P}$ des sous-ensembles progressivement mesurables de $[0, T] \times \Omega$, définie comme suit :

Définition 1.2.1 *$\mathscr{P} = \mathscr{P}(\mathscr{F}_t)$ est la σ-algèbre des ensembles $A \subset [0,T] \times \Omega$ tels que pour tout $t \in [0,T]$*

$$A \cap ([0,t] \times \Omega) \in \mathscr{B}_{[0,t]} \otimes \mathscr{F}_t.$$

1.3 Processus stochastiques

Soit $\mathbb{X}$ un espace topologique.

Définition 1.3.1 (Processus stochastique) *Une application $X : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{X}$ est dite un processus stochastique (à valeurs dans $\mathbb{X}$) si, pour tout $t \in [0,T]$, $X(t,.)$ est une variable aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{X}$), c'est-à-dire que $X(t,.)$ est $(\mathscr{F}, \mathscr{B}_{\mathbb{X}})$-mesurable.*

i) *Les applications $t \to X(t,\omega)$, $\omega \in \Omega$, sont appelées les chemins (ou les trajectoires) du processus stochastique X.*

ii) *Un processus stochastique à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est appelé processus stochastique d-dimensionnel. Le terme "processus stochastique" désigne généralement un processus stochastique unidimensionnel.*

Définition 1.3.2 (Modification et indistinguabilité)

i) *Un processus stochastique $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ est dit une modification (version) de $(X_t)_{t\in[0,T]}$ si $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$, pour tout $t \in [0,T]$.*

ii) *Deux processus stochastiques X et Y sont dits indistinguables si*

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t : \forall\ t \in [0,T]) = 1.$$

Définition 1.3.3 (Mesurabilité) *Un processus stochastique à valeurs dans $\mathbb{X}$ est dit mesurable, si l'application $X : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{X}$ est $\left(\mathscr{B}_{[0,T]} \otimes \mathscr{F}, \mathscr{B}_{\mathbb{X}}\right)$-mesurable.*

Définition 1.3.4 (Continuité) *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est dit continu (resp. continu à droite, continu à gauche, croissant) si les trajectoires (chemins) $X(.,\omega) : [0,T] \to \mathbb{X}$ sont continues (resp. continues à droite, continues à gauche, croissantes) $\mathbb{P}$-p.s.*

Remarque 1.3.1 *Il est possible de prouver que si $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ est une modification de $(X_t)_{t\in[0,T]}$ et que X et Y sont continus à droite (ou à gauche), alors X et Y sont indistinguables.*

Définition 1.3.5 (Filtration naturelle) *La filtration naturelle (augmentée) associée à un processus stochastique $X : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{X}$ est définie comme suit*

$$\mathscr{F}_t^X = \sigma\{X_s : s \leq t\} \vee \mathscr{N},$$

où $\mathcal{N}$ désigne la famille des ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}$.

Définition 1.3.6 (Mesurabilité progressive) *Un processus stochastique $X : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{X}$ est dit progressivement mesurable, si X est $(\mathscr{P}, \mathscr{B}_{\mathbb{X}})$-mesurable ou de manière équivalente si pour tout $t \in [0,T]$, $(s,\omega) \to X(s,\omega) : [0,t] \times \Omega \to \mathbb{X}$, est $\left(\mathscr{B}_{[0,t]} \otimes \mathscr{F}_t, \mathscr{B}_{\mathbb{X}}\right)$-mesurable; X sera dit $\mathscr{P}$-mesurable.*

Définition 1.3.7 (Adaptation) *Un processus stochastique $X : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{X}$ est dit adapté par rapport à la filtration $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, si $\omega \to X_t(\omega) : \Omega \to \mathbb{X}$, est $(\mathscr{F}_t, \mathscr{B}_{\mathbb{X}})$-mesurable pour tout $t \in [0,T]$.*

Remarque 1.3.2 *Il est possible de prouver que :*

i) *Si X est progressivement mesurable, alors X est adapté.*

ii) *Si X est continu à droit (ou à gauche) et adapté alors X est progressivement mesurable.*

iii) *Il est à retenir que le critère de Kolmogorov consiste à prouver l'existence d'une version continue d'un processus stochastique.*

1.3.1 Temps d'arrêt

On fixe une base stochastique $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$.

Définition 1.3.8 (Temps d'arrêt) *Une variable aléatoire $\tau : \Omega \to [0,T]$ est dite temps d'arrêt si $\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$, $\forall\ t \in [0,T]$.*

Remarque 1.3.3 *Étant donné que $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t^+}$ (la filtration est continue à droite), nous avons τ est un temps d'arrêt si et seulement si $\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t$, $\forall\ t \in [0,T]$.*

Définition 1.3.9 (La σ-algèbre des événements antérieurs) *La σ-algèbre définie comme suit*

$$\mathscr{F}_\tau = \sigma\left\{A \in \mathscr{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t,\ \forall\ t \in [0,T]\right\},$$

est appelée la σ-algèbre des événements antérieurs au temps d'arrêt τ.

Notation 1.3.1 (Processus arrêté) *Soient X un processus stochastique et $\theta : \Omega \to [0,T]$ un temps d'arrêt, on désigne par X_θ la variable aléatoire $\omega \longrightarrow X_{\theta(\omega)}(\omega)$, ainsi que par $(X_{t\wedge\theta})_{t\in[0,T]}$ le processus X arrêté à θ, c'est-à-dire, $X_{t\wedge\theta}(\omega) = X(t \wedge \theta(\omega), \omega)$ pour tout $t \in [0,T]$.*

Proposition 1.3.1 (Mesurabilité du processus arrêté) *Soient $(X_t)_{t\in[0,T]}$ un processus stochastique $\mathscr{P}$-mesurable et $\tau : \Omega \to [0,T]$ un temps d'arrêt. Alors :*

1) *X_τ est $\mathscr{F}_\tau$-mesurable.*

2) *$(X_{t\wedge\tau})_{t\in[0,T]}$ est progressivement mesurable par rapport à la filtration $\{\mathscr{F}_{t\wedge\tau}\}_{t\in[0,T]}$.*

1.3.2 Martingales continues

Dans cette sous-section, $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ est une base stochastique donnée.

Définition 1.3.10 (Martingale) *Un processus stochastique d-dimensionnel $\mathscr{P}$-mesurable $(M_t)_{t\in[0,T]}$ est appelé,*

i) *une $\mathscr{F}_t$-sous-martingale (resp. $\mathscr{F}_t$-surmartingale) si* $\mathrm{d} = 1$ *et*

$$\mathbb{E}|M_t| < \infty, \text{ pour tout } t \in [0,T],$$
$$\mathbb{E}(M_t|\mathscr{F}_s) \geq (\text{resp. } \leq)\ M_s,\ \mathbb{P}\text{-p.s. pour tout } s \leq t.$$

ii) *une $\mathscr{F}_t$-martingale si*

$$\mathbb{E}|M_t| < \infty, \text{ pour tout } t \in [0,T],$$
$$\mathbb{E}(M_t|\mathscr{F}_s) = M_s,\ \mathbb{P}\text{-p.s. pour tout } s \leq t.$$

iii) *une $\mathscr{F}_t$-martingale locale s'il existe une suite croissante $\{\tau_n\}_n$ de temps d'arrêt telle que $\tau_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ p.s., et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_{.\wedge\tau_n}$ est une martingale.*

Théorème 1.3.1 (Arrêt optionnel; Doob) *Soient $(M_t)_{t\in[0,T]}$ une $\mathscr{F}_t$-martingale continu à droit et τ, θ, σ sont des temps d'arrêt avec $0 \leq \tau \leq \theta \leq T$ p.s. Alors*

$$M_\tau = \mathbb{E}(M_\theta|\mathscr{F}_\tau),$$

et $(M_{t\wedge\sigma})_{t\in[0,T]}$ est une $\mathscr{F}_t$-martingale.

Corollaire 1.3.1 *Soient $(M_t)_{t\in[0,T]}$ un processus stochastique d-dimensionnel continu $\mathscr{P}$-mesurable et $(\theta_k)_{k\geq 0}$ une suite de temps d'arrêt définie par*

$$\theta_k = \inf\{t \in [0,T] : |M_t| \geq k\},\ k \in \mathbb{N}.$$

Alors $(M_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale locale si et seulement si $\left(M_{t\wedge\theta_k}\right)_{t\in[0,T]}$ est une martingale pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1.3.3 Fonctions à variation bornée et martingales continues

Soient $[a,b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, $k : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ est une fonction et $\mathscr{D}_{[a,b]}$ est l'ensemble de toutes les partitions

$$\triangle : a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b,\ n = n_\triangle \in \mathbb{N}.$$

Soit

$$\mathrm{V}_{\triangle}(k) = \sum_{i=0}^{n_{\triangle}-1} |k(t_{i+1}) - k(t_i)|,$$

est la variation de k correspondant à la partition $\mathscr{D}_{[a,b]}$.

Définition 1.3.11 (Variation totale) *La variation totale d'une fonction $k : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ est définie par*

$$\updownarrow k \updownarrow_{[a,b]} \;=\; \sup_{\triangle \in \mathscr{D}_{[a,b]}} \mathrm{V}_{\triangle}(k) = \sup_{\triangle \in \mathscr{D}_{[a,b]}} \left\{ \sum_{i=0}^{n_{\triangle}-1} |k(t_{i+1}) - k(t_i)| : \triangle \in \mathscr{D}_{[a,b]} \right\}.$$

Définition 1.3.12 (Variation bornée) *Une fonction $k : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ est dite à variation sur $[a,b]$ si $\updownarrow k \updownarrow_{[a,b]} < \infty$. L'espace des fonctions à variation bornée sur $[a,b]$ sera noté $\mathrm{V}B([a,b];\mathbb{R}^d)$.*

Définition 1.3.13 (Semi martingale) *Un processus stochastique $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est appelé une semi martingale continue si X est de la forme $X = M + V$, où M est une martingale locale continue avec $M_0 = 0$, et V est un processus stochastique continu $\mathscr{P}$-mesurable tel que $V_{\cdot}(\omega) \in \mathrm{V}B([0,T];\mathbb{R})$, $\mathbb{P}$-p.s. $\omega \in \Omega$.*

Corollaire 1.3.2 *Soient $X = M + V$ et $\tilde{X} = \tilde{M} + \tilde{V}$ deux semi martingales. Alors $X = \tilde{X}$ si et seulement si $M = \tilde{M}$ et $V = \tilde{V}$.*

Théorème 1.3.2 (Doob-Meyer) *Si M est une martingale locale continue de dimension d, alors il existe un unique processus stochastique continu croissant $\mathscr{P}$-mesurable $(< M >_t)_{t\in[0,T]}$ tel que :*

$$\begin{aligned} < M >_0 \; &= 0 \; p.s., \\ |M|^2 - \; < M > \; &\text{ est une martingale locale continue.} \end{aligned}$$

En particulier, si $M \in \mathcal{M}^2_d$, alors $|M|^2 - < M > \in \mathcal{M}^1 \cap \mathcal{S}^1$.

Théorème 1.3.3 (Extension du théorème de Doob-Meyer) *Si M est une martingale locale continue de dimension d, alors il existe un unique processus stochastique continu croissant $\mathscr{P}$-mesurable $(<< M >>_t)_{t\in[0,T]}$ à valeur dans $\mathbb{S}^d$ ($\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d\times d}$ est l'ensemble des matrices symétriques) tel que :*

$$\begin{aligned} << M >>_0 \; &= 0 \; p.s., \\ M \otimes M - \; << M >> \; &\text{ est une martingale locale continue.} \end{aligned}$$

De plus, si $M \in \mathcal{M}^2_d$, alors $M \otimes M - << M >> \in \mathcal{M}^1_{d\times d} \cap \mathcal{S}^1_{d\times d}$.

Théorème 1.3.4 (Inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy (BDG)) *Soit M une martingale locale continue avec $M_0 = 0$. Alors, pour tout $p > 0$, il existe deux constantes $c_p > 0$ et $C_p > 0$ telles que* $\forall\ T > 0$:

$$c_p \mathbb{E}\left(< M >_T^{\frac{p}{2}} \right) \leq \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |M_t|^p \right) \leq C_p \mathbb{E}\left(< M >_T^{\frac{p}{2}} \right).$$

1.3.4 Mouvement brownien

Rappelons qu'une variable aléatoire X est dite gaussienne si sa distribution possède une densité de la forme

$$g_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right], \ (\mu,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*.$$

La loi de probabilité correspondante sur $\mathbb{R}$ est notée $N(\mu,\sigma)$, et nous écrivons $X \sim N(\mu,\sigma)$.

Définition 1.3.14 (Vecteur gaussien) *Un vecteur aléatoire d-dimensionnel $X = (X_1, \cdots, X_d)^*$ est dit gaussien si pour tout $a \in \mathbb{R}^d$,*

$$\sum_{i=1}^{d} a_i X_i,$$

est une variable aléatoire gaussienne.

Définition 1.3.15 (Processus gaussien) *Un processus stochastique d-dimensionnel $(X_t)_{t\in[0,T]}$ est dit gaussien si pour tout $k \geq 2$, $t_1, \cdots, t_k \in [0,T]$, le vecteur aléatoire $d \times k$-dimensionnel $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_k})$ est un vecteur gaussien.*

Définition 1.3.16 (Mouvement brownien) *Un mouvement brownien (M.B.) (unidimensionnel) $(W_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus stochastique continu tel que :*

i) $W_0 = 0$,

ii) $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$ *pour tout $s \in [0,t]$,*

iii) $W_{t_1} - W_{t_0}$, $W_{t_2} - W_{t_1}, \cdots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ *sont des variables aléatoires indépendantes pour chaque $k \geq 2$ et $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$.*

Définition 1.3.17 (M.B. d-dimensionnel) *Un processus stochastique $(W_t)_{t\in[0,T]}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est appelé un mouvement brownien d-dimensionnel si ses composantes $(W_t^1)_{t\in[0,T]}, \cdots$, $(W_t^d)_{t\in[0,T]}$ sont des mouvements browniens mutuellement indépendants.*

Exemple 1.3.1 *Soit $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien. Alors $(W_t)_{t\in[0,T]}$ et $\left(W_t^2 - t\right)_{t\in[0,T]}$ sont des $\mathscr{F}_t^W$-martingales. Par conséquent*

$$< W >_t \ = \ t, \qquad \mathbb{E}\left(W_\theta^2\right) = \mathbb{E}(\theta),$$

pour tout temps d'arrêt borné θ.

Remarque 1.3.4 *La filtration naturelle du M.B. d-dimensionnel* $(W_t)_{t\in[0,T]}$ *est continue à droite.*

Définition 1.3.18 ($\mathscr{F}_t$–M.B. d-dimensionnel) *Soit* $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ *une base stochastique donnée. Un processus stochastique d-dimensionnel continu* $\mathscr{P}$*-mesurable* $(W_t)_{t\in[0,T]}$ *est appelé un* $\mathscr{F}_t$*-M.B. d-dimensionnel si pour tout* $0 \le s < t$,

$$\begin{aligned} &W_t - W_s \text{ est indépendant de } \mathscr{F}_s, \\ &W_t - W_s \sim N\left(0, (t-s)\, I_{d\times d}\right). \end{aligned}$$

Remarque 1.3.5 *Un* $\mathscr{F}_t$*–M.B. d-dimensionnel est un M.B. d-dimensionnel. Un M.B. d-dimensionnel est un* $\mathscr{F}_t^W$*–M.B. d-dimensionnel, où* $\mathscr{F}_t^W$ *est la filtration naturelle du M.B. d-dimensionnel* W.

1.4 Le calcul stochastique d'Itô

Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ une base stochastique donnée, et $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un $\mathscr{F}_t$ – M.B. k-dimensionnel. Considérons l'intégrale stochastique d'Itô

$$\mathbb{B}_t(X) = \int_0^t X_r \mathrm{d}W_r, \;\; t \in [0,T].$$

Nous avons :

i) $\mathbb{B} : \Lambda^p_{d\times k} \to \mathcal{S}^p_d$ est un opérateur linéaire continu pour tout $p \ge 0$.

ii) $\mathbb{B}(X) \in \mathcal{M}^p_d$ pour tout $X \in \Lambda^p_{d\times k}$ et $p \ge 1$.

iii) $\mathbb{B} : \Lambda^2_{d\times k} \to \mathcal{M}^2_d$, est une isométrie, i.e. un opérateur linéaire continu tel que $\|\mathbb{B}(X)\|_{\mathcal{M}^2_d} = \|X\|$.

iv) Pour tout $X, Y \in \Lambda^1_{d\times k}$, $s \in [0,t]$ tel que $\mathbb{E}\int_s^t \left|X_r Y_r^*\right| \mathrm{d}r < \infty$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\int_s^t X_r \mathrm{d}W_r \middle| \mathscr{F}_s\right) = 0, \\ &\mathbb{E}\left(\int_s^t X_r \mathrm{d}W_r \otimes \int_s^t Y_r \mathrm{d}W_r \middle| \mathscr{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_s^t X_r Y_r^* \mathrm{d}r \middle| \mathscr{F}_s\right). \end{aligned}$$

v) Pour tout X, $Y \in \Lambda^2_{d\times k}$:

$$M_\cdot = \left|\int_0^\cdot X_r \mathrm{d}W_r\right|^2 - \int_0^\cdot |X_r|^2 \mathrm{d}r \in \mathcal{M}^1_d,$$
$$N_\cdot = \int_0^\cdot X_r \mathrm{d}W_r \otimes \int_0^\cdot Y_r \mathrm{d}W_r - \int_0^\cdot X_r Y_r^* \mathrm{d}r \in \mathcal{M}^1_{d\times d}.$$

vi) Pour tout $X \in \Lambda^0_{d\times k}$ et $\eta : \Omega \to \mathbb{R}^{m\times d}$ (une variable aléatoire $\mathscr{F}_s$-mesurable) :

$$\int_s^t \eta X_r \mathrm{d}W_r = \eta \int_s^t X_r \mathrm{d}W_r,\ p.s.$$

vii) Soient $X \in \Lambda^p_{d\times k}$, $p \geq 0$, et τ un temps d'arrêt. Alors $\mathbb{1}_{[0,\tau]} X \in \Lambda^p_{d\times k}$ et $p.s.$:

$$\int_0^{t\wedge\tau} X_s \mathrm{d}W_s = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s)\, X_s \mathrm{d}W_s,\ t \in [0,T].$$

viii) Pour tout $p > 0$, il existe deux constantes $c_p > 0$ et $C_p > 0$, telles que pour tout $X \in \Lambda^p_{d\times k}$ et pour tout temps d'arrêt borné $0 \leq \tau \leq \sigma$ $p.s.$:

$$c_p \mathbb{E}\left(\left(\int_\tau^\sigma |X_s|^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}} \middle| \mathscr{F}_\tau\right) \leq \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[\tau,\sigma]} \left|\int_\tau^t X_s \mathrm{d}W_s\right|^p \middle| \mathscr{F}_\tau\right)$$
$$\leq C_p \mathbb{E}\left(\left(\int_\tau^\sigma |X_s|^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}} \middle| \mathscr{F}_\tau\right),\ p.s.$$

ix) Soit $X \in \Lambda^2_{d\times k}$, alors :

$$<<\mathbb{B}>>_t \ = \int_0^t X_s X_s^* \mathrm{d}s, \qquad \text{et} \qquad <\mathbb{B}>_t \ = \int_0^t |X_s|^2 \mathrm{d}s,$$

de plus $\mathbb{B}(X) \in \mathcal{S}^p_d$ si et seulement si $X \in \Lambda^p_{d\times k}$.

Remarque 1.4.1 *On déduit à partir de* (iv) *que*

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_s^t X_r \mathrm{d}W_r\right|^2 \middle| \mathscr{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_s^t |X_r|^2 \mathrm{d}r \middle| \mathscr{F}_s\right),\ \forall\ X \in \Lambda^2_{d\times k},$$

et pour tout s, $t \in [0,T]$, X, $Y \in \Lambda^1_{d\times k}$, *tel que* $\mathbb{E}\int_0^t |X_r Y_r^*|\, dr < \infty$:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^s X_r \mathrm{d}W_r \otimes \int_0^t Y_r \mathrm{d}W_r\right] = \mathbb{E}\int_0^{s\wedge t} X_r Y_r^* \mathrm{d}r,$$
$$\mathbb{E}\left\langle \int_0^s X_r \mathrm{d}W_r, \int_0^t Y_r \mathrm{d}W_r \right\rangle = \mathbb{E}\int_0^{s\wedge t} \mathrm{Tr}(X_r Y_r^*)\mathrm{d}r.$$

1.4.1 Formule d'Itô

Soit $X \in \mathcal{S}_d^0$ de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_s \mathrm{d}W_s, \ \forall t \in [0,T], \ p.s., \tag{1}$$

où $(W_t)_{t\in[0,T]}$ est un $\mathscr{F}_t$−M.B. k-dimensionnel et

$$b : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^d, \qquad \sigma : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^{d\times k},$$

sont des processus stochastiques progressivement mesurables tels que $\int_0^T |b_s| ds < \infty$, $p.s$ et $\sigma \in \Lambda^0_{d\times k}$.

Définition 1.4.1 (Processus d'Itô) *Un processus stochastique $X \in \mathcal{S}_d^0$ de la forme (1) sera appelé processus d'Itô. Le coefficient b est appelé "dérive", et $\sigma\sigma^*$ la matrice des coefficients de diffusion de X. De manière plus simple, on va écrire,*

$$\mathrm{d}X_t = b_t \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}W_t.$$

Théorème 1.4.1 (Formule d'Itô) *Soient $\varphi \in C^{1,2}\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$ et*

$$\mathscr{A}\varphi(t,x) = \left\langle b_t, \varphi'_x(t,x)\right\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma_t\sigma_t^*\varphi''_{xx}(t,x)),$$

alors pour tout $t \in [0,T]$

$$\varphi(t,X_t) = \varphi(0,X_0) + \int_0^t \left(\varphi'_t(s,X_s) + \mathscr{A}\varphi(s,X_s)\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \left\langle \varphi'_x(s,X_s), \sigma_s \mathrm{d}W_s\right\rangle, \ \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Remarque 1.4.2 *Si on utilise un calcul linéaire symbolique intuitif basé sur*

$$\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}t = 0, \qquad \mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}W_t = 0, \qquad \mathrm{d}W_t\otimes\mathrm{d}W_t = I_{k\times k}\mathrm{d}t,$$

alors la formule d'Itô peut être réécrite comme suit

$$\mathrm{d}\varphi(t,X_t) = \varphi'_t(t,X_t)\,\mathrm{d}t + \left\langle \varphi'_x(t,X_t), \mathrm{d}X_t\right\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\varphi''_{xx}(t,X_t)\,(\mathrm{d}X_t\otimes\mathrm{d}X_t)\right).$$

1.4.2 Théorème de représentation des Λ^2-martingales

Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ une base stochastique donnée et $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien k-dimensionnel. La principale hypothèse dans cette sous-section est que la filtration $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ est la filtration naturelle de $(W_t)_{t\in[0,T]}$.

Théorème 1.4.2 *Si $M \in \mathcal{M}^2_d$, alors il existe un unique $Z \in \Lambda^2_{d\times k}$ tel que*

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s,\ t \in [0,T].$$

1.5 Théorème de Girsanov

Dans cette section, nous supposons que l'on donne une base stochastique $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_t, \mathbb{P})$ telle que $\mathscr{F} = \sigma\left(\bigcup_{t\in[0,T]} \mathscr{F}_t\right)$ et $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un M.B. k-dimensionnel.

Soit $X \in \Lambda^0_k$, et définissons le processus,

$$Z_t = \exp\left[\int_0^t \langle X_s, \mathrm{d}W_s\rangle - \int_0^t |X_s|^2\,\mathrm{d}s\right],\ t \in [0,T].$$

$(Z_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus stochastique continu positif et, de plus, une martingale locale puisque par la formule d'Itô

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s \langle X_s, \mathrm{d}W_s\rangle,$$

alors

$$\mathbb{E}\left(\frac{Z_t}{Z_s}\middle|\mathscr{F}_s\right) \le 1,\ \forall\ 0 \le s < t \implies (Z_t)_{t\in[0,T]} \text{ est une sous-martingale.}$$

En particulier, $\mathbb{E}Z_t \le \mathbb{E}Z_s \le \mathbb{E}Z_0 = 1, \forall\ 0 \le s < t$.

Lemme 1.5.1 *Soit $T > 0$. Alors $\mathbb{E}(Z_T) = 1$ si et seulement si $Z \in \mathcal{M}^1$ (c'est-à-dire que $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ est une martingale continue).*

Proposition 1.5.1 *Soit $X \in \Lambda^0_k$. Supposons que l'une des hypothèses suivantes soit satisfaite :*

i) *Il existe deux constantes $c, \gamma > 0$ telles que*

$$\mathbb{E}\exp\left(\gamma|X_t|^2\right) \le c,\ p.p.\ t \in [0,T].$$

ii) (*Novikov*) $X \in \Lambda^1_d$ *et*

$$\mathbb{E}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \langle X_s, \mathrm{d}W_s\rangle\right) < \infty.$$

iii) (*Kasmaki*)

$$\mathbb{E}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T |X_s|^2\,\mathrm{d}s\right) < \infty.$$

Alors $\mathbb{E}Z_t = 1$ *pour tout* $t \in [0,T]$ *(et* $Z \in \mathcal{M}^1$ *en utilisant le lemme précédent).*

Théorème 1.5.1 (Girsanov) *Supposons que* $\mathbb{E}(Z_t) = 1$ *pour tout* $t \in [0,T]$. *Alors il existe une probabilité unique* $\mathbb{Q}$ *sur* $(\Omega,\mathscr{F})$, $\mathscr{F} = \sigma\left(\bigcup_{t\in[0,T]}\mathscr{F}_t\right)$, *telle que pour chaque* $A \in \mathscr{F}_t$, $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}(Z_t \mathbb{1}_A) = \int_A Z_t \mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad \textit{i.e.} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}|\mathscr{F}_t}{\mathrm{d}\mathbb{P}|\mathscr{F}_t} = Z_t,$$

et le processus stochastique $(\bar{W}_t)_{t\in[0,T]}$ *défini par*

$$\bar{W}_t = W_t - \int_0^t X_s \mathrm{d}s,\ \ t \in [0,T],$$

est un $\mathscr{F}_t$*-mouvement brownien à valeur dans* $\mathbb{R}^k$ *sous* $\mathbb{Q}$.

1.6 Équations différentielles stochastiques

Soient $(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]},\mathbb{P})$ une base stochastique donnée, et $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un $\mathscr{F}_t$ – M.B. k-dimensionnel. Notre objectif dans cette section est de présenter le résultat d'existence et unicité des solutions aux équations différentielles stochastiques (EDS) du type :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b(t,X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t,X_t)\,\mathrm{d}W_t, \\ X_0 = \eta, \end{cases} \tag{2}$$

où $\eta \in \mathbb{R}^d$ est la condition initiale et les coefficients b et σ sont des fonctions données

$$b : [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \qquad \sigma : [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times k},$$

$b(t,X_t)$ est appelé la "dérive" (en anglais, "drift") de X et $\sigma(t,X_t)\sigma^*(t,X_t)$ est la matrice des coefficients de diffusion de X. On rappelle les conditions bien connues suivantes :

- η est un vecteur aléatoire $\mathscr{F}_0$-mesurable,
- les fonctions b et σ sont $\mathscr{P}\otimes\mathscr{B}_d$-mesurables.

Définition 1.6.1 (Solution forte) *Un processus stochastique* $X \in \mathcal{S}_d^0$ *est une solution* (*forte*) *de* (2) *si pour tout* $T > 0$

$$\int_0^T |b(s,X_s)|\,\mathrm{d}s + \int_0^T |\sigma(s,X_s)|^2\,\mathrm{d}s < \infty,\ \ p.s.,$$

et

$$X_t = \eta + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,\mathrm{d}W_s,\ \forall t \in [0, T],\ p.s.$$

On obtient sous certaines conditions de Lipschitz l'existence et l'unicité de la solution en utilisant le théorème du point fixe de Banach.

A_1) Condition de Lipschitz : il existe deux constantes positives L_1, L_2 telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L_1|x-y| + L_2|x-y|.$$

A_2) Condition d'intégrabilité :

$$\int_0^T \left(|b(s,0)| + |\sigma(s,0)|^2\right)\mathrm{d}s < \infty,\ p.s.$$

1.6.1 Théorème du point fixe de Banach

Nous donnons une variante du théorème du point fixe de Banach. Soit $\{(\mathbb{V}_a, d_a) : a \geq 0\}$, une famille d'espaces métriques complets telle que pour tout $0 \leq a \leq b : \mathbb{V}_b \subset \mathbb{V}_a$ avec une immersion continue "Continuous embedding". Soit

$$\mathbb{V} = \cap_{a \geq 0} \mathbb{V}_a = \cap_{a \in \mathbb{N}} \mathbb{V}_a,$$

et supposons que $\mathbb{V} \neq \emptyset$. Alors $\mathbb{V}$ est un espace métrique complet par rapport à la métrique :

$$\sum_{a \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^a} \frac{d_a(x,y)}{1 + d_a(x,y)},$$

et si x_n, $x \in \mathbb{V}$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ dans $\mathbb{V} \iff x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ dans $\mathbb{V}_a\ \forall\ a \geq 0$.

Lemme 1.6.1 *Soit $\Gamma : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ une application satisfaisant : il existe $a_0 \geq 0$ et pour tout $a \geq a_0$ il existe $\delta_a \in]0,1[$ tel que*

$$d_a\left(\Gamma(x), \Gamma(y)\right) \leq \delta_a d_a(x,y)\ \textit{pour tout}\ x, y \in \mathbb{V}.$$

Alors Γ possède un point fixe unique, c'est-à-dire qu'il existe un unique $x \in \mathbb{V}$ tel que $\Gamma(x) = x$. (Le théorème du point fixe de Banach correspond au cas $(\mathbb{V}_a, d_a) = (\mathbb{V}_0, d_0)$, $\forall\ a \geq 0$).

Théorème 1.6.1 *Si $X \in \mathcal{S}_d^0$ et les hypothèses $(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2)$ sont satisfaites alors l'EDS (2) admet une unique solution $X \in \mathcal{S}_d^0$.*

1.7 Équations différentielles stochastiques rétrogrades

Notre but dans cette section n'est pas de développer une théorie générale sur ce grand problème (EDSR), puisque nous traiterons ce problème dans le chapitre deux, ainsi que de ne faire aucun effort pour affaiblir les conditions de l'énoncé principal publié par [34]. En effet, nous préférerons simplifier l'idée et ne donner que l'idée générale, afin que les idées principales soient aussi transparentes que possible.

1.7.1 Motivation

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ une base stochastique donnée. Le problème de contrôle que nous allons présenter (en bref) est déterminé par l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dW_t, \\ X_0 = x, \end{cases} \quad t \in [0, T], \tag{3}$$

où W est un M.B. d-dimensionnel et u est un contrôle admissible c'est-à-dire u est un processus $\mathscr{P}$-mesurable à valeur dans un espace compact A de $\mathbb{R}^n$, nous désignons par $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous contrôles admissibles, σ, b sont deux fonctions boréliennes satisfaisant :

$$b : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}^d, \qquad \sigma : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d},$$

de plus, vérifiant les conditions du théorème 1.6.1. A cette équation nous associons la fonction de coût

$$\mathrm{J}(v) = \mathbb{E}\left(\int_0^T l(s, X_s, u_s)\,ds + g(X_T)\right),$$

où g est une fonction de coût final, X est la solution de (3). En outre, l et g sont deux fonctions boréliennes bornées telles que :

$$l : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}, \qquad g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}.$$

Remarque 1.7.1 *Les fonctions b, σ, l et g sont dérivables en x et à dérivées continues et bornées.*

Définition 1.7.1 *Un contrôle optimal $\hat{u}$ est un contrôle admissible qui satisfait :*

$$\mathrm{J}(\hat{u}) = \min_{u\in\mathcal{U}} \mathrm{J}(u).$$

L'objectif du contrôle optimal est de minimiser (*ou de maximiser*) *la fonction de coût* J *sur* $\mathcal{U}$. *Avant d'énoncer le théorème de principe de maximum, nous définissons l'EDS*

$$\begin{cases} d\phi_t = b'_x(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)\phi_t dt + \sigma'_x(t,\hat{X}_t)\phi_t dW_t, \\ \phi_0 = 1, \end{cases}$$

en effet, cette équation étant linéaire avec des coefficients bornés, alors elle admet une solution unique. Par ailleurs, cette solution est inversible et son inverse vérifie l'EDS

$$\begin{cases} \left(\psi_s \sigma'_x(t,\hat{X}_t)\sigma'^*_x(t,\hat{X}_t) - \psi_t b'_x(t,\hat{X}_t,\hat{u}_s)\right) ds - \psi_t \sigma'_x(t,\hat{X}_t) dW_t, \\ \psi_0 = 1. \end{cases}$$

Afin de vérifier que ψ *est l'inverse de* ϕ *il faut vérifier que,* $\psi\phi = \phi\psi = 1$ *et ceci en application de la formule d'Itô.*

Théorème 1.7.1 *Soient* $\hat{u}$ *un contrôle optimal et* $\hat{X}$ *la solution de* (3) *relative à* $\hat{u}$. *Alors il existe un processus* (*adjoint*) Y *continu et* $\mathscr{P}$*-mesurable, tel que :*

$$\begin{cases} \text{i)} \quad Y_t = \mathbb{E}\left(\psi^*_t \phi^*_T g'_x(\hat{X}_T) \middle| \mathscr{F}_t\right) + \psi^*_t \int_t^T \phi^*_s l'_x(s,\hat{X}_s,\hat{u}_s) ds, \\ \text{ii)} \quad \mathcal{H}(t,\hat{X}_t,v_t,Y_t) \leq \mathcal{H}(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t,Y_t), \forall\ v \in A,\ \mathbb{P}\text{-}p.s, \end{cases}$$

où (*l'hamiltonien*) $\mathcal{H}$ *est défini par*

$$\mathcal{H}(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t,Y_t) = l(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t) + Y_t b(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t).$$

Corollaire 1.7.1 *Si la base stochastique est brownienne alors le processus* (*adjoint*) $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ *est une solution de l'EDS à condition terminale suivante*

$$\begin{cases} dY_t = -\left(b'_x(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)Y_t + \sigma'^*_x(t,\hat{X}_t)\gamma_t + l'_x(t,\hat{X}_t,\hat{u}_t)\right) dt + \gamma_t dW_t, \\ Y_T = g'_x(\hat{X}_T), \end{cases} \tag{4}$$

où

$$\gamma_t = \psi^*_t \zeta_t - \sigma^{*\prime}_x(t,\hat{X}_t) Y_t,$$

et ζ *vérifie l'équation suivante :*

$$\int_0^t \zeta_s dW_s = \mathbb{E}\left(\phi^*_T g'_x(\hat{X}_T) + \int_0^T \phi^*_s l'_x(s,\hat{X}_s,u_s) ds \middle| \mathscr{F}_t\right) - \mathbb{E}\left(\phi^*_T g(\hat{X}_T) + \int_0^T \phi^*_s l'_x(s,\hat{X}_s,\hat{u}_s) ds\right).$$

Finalement on trouve une équation différentielle stochastique à caractère nouvelle (4), appelée équation adjointe, il reste à prouver l'existence d'une solution pour cette EDSR, E. Pardoux et S. Peng en 1990 qui ont établi le premier résultat d'existence et unicité de la solution d'une EDSR dans le cas général. Pour plus de détails, voir par exemple [14, 39].

1.7.2 Résultats classiques sur les EDSRs

Dans cette sous-section, nous supposons étant donné une base stochastique $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ avec $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un M.B. k-dimensionnel et la filtration $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ étant la filtration naturelle de $(W_t)_{t\in[0,T]}$. Notre objectif principal dans cette sous-section est de présenter les équations différentielles stochastiques rétrogrades (en abrégé EDSR) de la forme

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f(t, Y_t, Z_t)\,\mathrm{d}t + Z_t \mathrm{d}W_t, \\ Y_T = \xi, \end{cases} \quad t \in [0, T], \tag{5}$$

ou, de manière équivalente, $\mathbb{P}$-$p.s.$ pour tout $t \in [0, T]$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s,$$

dont la solution $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times k}$, et où on suppose dans cette sous-section que :

- $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^m$, la condition finale, est un vecteur aléatoire $\mathscr{F}_T$-mesurable.
- $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times k} \to \mathbb{R}^m$, le générateur, est une fonction aléatoire tel que :
- ◦ $f(.,., y, z) : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$, est $\mathscr{P}$-mesurable $\forall\ (y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times k}$.
- Nous désignions l'EDSR (5) par $\mathrm{Eq}(\xi, f)$.

Définition 1.7.2 *Une solution de* $\mathrm{Eq}(\xi, f)$ *est un processus* $(Y, Z) \in \mathcal{S}^0_m \times \Lambda^0_{m\times k}$ *tel que* (Y, Z) *satisfait l'équation* (5) *en* $\mathbb{P}$-$p.s.$ *pour chaque* $t \in [0, T]$ *et* $\int_0^T \left|f(s, Y_s, Z_s)\right| \mathrm{d}s < \infty$, $\mathbb{P}$-$p.s.$

Théorème 1.7.2 (E. Pardoux, S. Peng) *Supposons que le générateur f est Lipschitzien par rapport à (y, z) uniformément en (t, ω) i.e., $\exists\ L_1, L_2 \in \mathbb{R}^*_+$, $\forall\ y,\ \bar{y},\ z,\ \bar{z}$, $\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}\mathbb{P}$-$p.s.$*

$$|f(t, y, z) - f(t, \bar{y}, \bar{z})| \leq L_1|y - \bar{y}| + L_2|z - \bar{z}|.$$

De plus si

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T |f(s, 0, 0)|^2 \mathrm{d}s + |\xi|^2\right) < \infty.$$

Alors l'EDSR $\mathrm{Eq}(\xi, f)$ *possède une solution unique* $(Y, Z) \in \mathcal{S}^2_m \times \Lambda^2_{m\times k}$.

Preuve. Nous utilisons un argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{S}_m^2 \times \Lambda_{m\times k}^2$ en construisant une application Γ de $\mathcal{S}_m^2 \times \Lambda_{m\times k}^2$ en lui-même telle que $(Y,Z) \in \mathcal{S}_m^2 \times \Lambda_{m\times k}^2$ est une solution de l'EDSR (5) si et seulement si elle est un point fixe de Γ.

i) **La première étape** : Dans le cas où f ne dépend pas de y et z, l'existence et l'unicité de la solution sont données par le théorème de représentation martingale 1.4.2.

ii) **La deuxième étape** : On construit une application :

$$\begin{array}{rccc} \Gamma: & \mathcal{S}_m^2 \times \Lambda_{m\times k}^2 & \to & \mathcal{S}_m^2 \times \Lambda_{m\times k}^2 \\ & (U,V) & \to & \Gamma(U,V) = (Y,Z), \end{array}$$

définie par :

$$Y_t = \xi - \int_t^T f(s, U_s, V_s)\, \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s,\ t \in [0,T]. \tag{6}$$

Il est clair que l'équation (6) possède une solution unique grâce à la première étape. Nous devons montrer que l'application Γ est contractante ce qui prouve l'existence et l'unicité d'un point fixe (Y,Z) comme solution unique de l'EDSR (5). Pour plus de détails, le lecteur peut consulter l'une des références citées au début du chapitre. ■

Il sera très utile de conclure ce chapitre en rappelant le théorème de comparaison qui joue un rôle très important dans la preuve de l'existence d'une solution pour les EDSR unidimensionnels avec un générateur continu ou seulement continu à droite ou à gauche ainsi que dans de nombreux domaines d'application.

Théorème 1.7.3 (Théorème de comparaison) *Soient (ξ, f) et $(\hat{\xi}, \hat{f})$ vérifiant les hypothèses du théorème 1.7.2 pour $m = 1$. Soient (Y,Z) et $(\hat{Y}, \hat{Z})$ désignent les solutions associées aux équations $\mathrm{Eq}(\xi, f)$ et $\mathrm{Eq}(\hat{\xi}, \hat{f})$, respectivement. Supposons que*

(i) $\xi \le \hat{\xi}$ $\mathbb{P}$*-p.s et*

(ii) $f(t, Y_t, Z_t) \le \hat{f}(t, Y_t, Z_t))\ d\mathbb{P} \otimes dt - p.p.$

Alors $\mathbb{P}$*-p.s* $\omega \in \Omega$, $Y_t \le \hat{Y}_t\ \forall\ t \in [0,T]$.

Preuve. Voir, par exemple, à [11, 22, 35]. ■

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques rétrogrades à croissance logarithmique

Dans ce chapitre, nous considérons une EDSR unidimensionnelle avec un générateur continu f qui présente une croissance logarithmique de la forme $(|y|\left|\ln\left(|y|\right)\right| + |z|\sqrt{|\ln(|z|)|})$. Ce type de croissance se situe entre la croissance linéaire et la croissance quadratique. Dans ce cas, l'intégrabilité carrée de la donnée terminale n'est pas suffisante pour assurer l'existence de solutions alors que l'intégrabilité exponentielle semble assez forte. Dans notre situation, on devrait exiger une certaine p-intégrabilité sur la donnée terminale ξ avec $p > 2$. Il faut noter que nous n'avons pas besoin du théorème de comparaison dans nos preuves. Ce chapitre est principalement basé sur [7].

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous supposons que le quadruplet $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ est une base stochastique, $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien k-dimensionnel et la filtration $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ est la filtration naturelle de $(W_t)_{t\in[0,T]}$, i.e. pour tout $t \in [0,T]$:

$$\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_t^W = \sigma\{W_s : s \leq t\} \vee \mathscr{N}.$$

Notre objectif principal dans ce chapitre est d'étudier les équations différentielles stochastiques rétrogrades (en abrégé EDSR(s)) de la forme

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f(t, Y_t, Z_t)\,\mathrm{d}t + Z_t \mathrm{d}W_t, \\ Y_T = \xi, \end{cases} \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

ou, de manière équivalente, $\mathbb{P}$-$p.s.$ pour tout $t \in [0,T]$

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s,$$

dont la solution $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$, et

- $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, est une variable aléatoire $\mathscr{F}_T$-mesurable.
- $f : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, le générateur, est une fonction aléatoire tel que :
- $f(.,.,y,z) : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$, est $\mathscr{P}$-mesurable $\forall\,(y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$.
- Nous désignions l'EDSR (1) par $\mathrm{Eq}(\xi, f)$.

Nous allons prouver l'existence et l'unicité des solutions de l'EDSR $\mathrm{Eq}(\xi, f)$ sous les hypothèses suivantes :

H_1) **La condition d'intégrabilité de la solution en temps final**

Il existe une constante λ positive suffisamment grande telle que

$$\mathbb{E}|\xi|^{e^{\lambda T}+1} < \infty.$$

H_2) **La condition de continuité et de croissance logarithmique du générateur**

i) f est continue en (y,z) pour presque tout (t,ω).

ii) Il existe une constante positive c_0 et un processus positif $\mathscr{P}$-mesurable $(\eta_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant,

$$\mathbb{E}\int_0^T |\eta_s|^{e^{\lambda T}+1}\mathrm{d}s < \infty,$$

et tels que pour tout t, ω, y, z :

$$|f(t,\omega,y,z)| \le \eta_t + K|y||\ln(|y|)| + c_0|z|\sqrt{|\ln(|z|)|}.$$

H_3) Il existe un processus positif $\mathscr{P}$-mesurable $(v_t)_{t\in[0,T]}$, une suite réelle $(A_N)_{N>1}$, et des constantes $M \ge 1$, $r > 0$, $q > 0$ tels que :

i)

$$\mathbb{E}\int_0^T |v_s|^q\,\mathrm{d}s < \infty.$$

ii) Pout tout $N \in \mathbb{N}^*$, $1 < A_N \le N^r$ et

$$\lim_{N\to\infty} A_N = \infty.$$

iii) Pout tout $N \in \mathbb{N}^*$ et pour tout y, $\bar{y}$, z, $\bar{y}$ tels que $|y|$, $|\bar{y}|$, $|z|$, $|\bar{z}| \leq N$:

$$\begin{aligned}
&\left(y-\bar{y}\right)\left(f\left(t,\omega,y,z\right)-f\left(t,\omega,\bar{y},\bar{z}\right)\right)\mathbb{1}_{\{v_t(\omega)\leq N\}}\\
&\leq M|y-\bar{y}|^2\ln\left(A_N\right)\\
&+M|y-\bar{y}|z-\bar{z}|\sqrt{\ln\left(A_N\right)}\\
&+M\frac{\ln\left(A_N\right)}{A_N}.
\end{aligned}$$

2.2 Estimations a priori

Pour prouver le théorème 2.3.1, nous avons besoin des lemmes suivants. Notez que le premier lemme est assez technique. Nous supposons sans perte de généralité que $|Y_t|$ est suffisamment grand.

2.2.1 Lemmes techniques

Lemme 2.2.1 (Lemme technique) *Soit $\left(y,z\right) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$ tel que y est suffisamment grand. Alors, pour tout $C_1 > 0$, il existe $C_2 > 0$ tel que,*

$$C_1|y||z|\sqrt{|\ln\left(|z|\right)|} \leq \frac{|z|^2}{2}+C_2|y|^2\ln\left(|y|\right). \tag{2}$$

Preuve. Si $|z| \leq |y|$, l'inégalité (2) est évidente. On suppose maintenant que $|z| > |y|$. Le nombre $a = \frac{|z|}{|y|}$ est alors strictement supérieur à 1. Comme nous supposons que y est suffisamment grand et que $|z| > |y|$, alors $|z|$ est également suffisamment grand, et nous obtenons

$$C_1|y||z|\sqrt{\ln\left(|z|\right)} \leq C_1 a|y|^2\left(\sqrt{\ln\left(a\right)}+\sqrt{\ln\left(|y|\right)}\right),$$

et

$$\frac{|z|^2}{2}+C_2\ln\left(|y|\right)|y|^2 = |y|^2\left(\frac{a^2}{2}+C_2\ln\left(|y|\right)\right).$$

Et par conséquent,

$$C_1 a\sqrt{\ln\left(|y|\right)} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}+2C_1^2\ln\left(|y|\right)\right).$$

De sorte que nous devons simplement prouver que,

$$\frac{a^2}{4}+C_1 a\sqrt{\ln\left(a\right)}+C_1^2\ln\left(|y|\right) \leq \frac{a^2}{2}+C_2\ln\left(|y|\right).$$

Soit r une constante telle que

$$r = \max\left\{z \in \mathbb{R} : C_1 \sqrt{\ln(z)} = \frac{z}{4}\right\}.$$

Si $a \geq r$, alors

$$C_1 a \sqrt{\ln(a)} \leq \frac{a^2}{4}.$$

Si $a < r$, alors on obtient

$$C_1 a \sqrt{\ln(a)} \leq C_1 r \sqrt{\ln(r)} \leq C_1' \leq C_1' \ln\left(|y|\right).$$

Cela termine la prouve l'inégalité (2). ■

Le lemme suivant (établi dans [4]) est une conséquence directe des inégalités de Hölder et de Schwarz et de Young.

Lemme 2.2.2 (Lemme technique) *Pour tout $\beta \in]1,2]$, $A > 0$, $y \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ et $z \in \mathbb{R}^{m\times k}$ on a,*

$$A|y||z| + \frac{2-\beta}{2}|y|^{-2}\left|z^* y\right|^2 - \frac{1}{2}|z|^2 \leq \frac{1}{\beta-1}A^2|y|^2 - \frac{B-1}{4}|z|^2.$$

2.2.2 Estimation a priori de la solution

Lemme 2.2.3 (Estimation de Y) *Soit (Y,Z) une solution de l'EDSR (1). Soit $\lambda \geq 2K+1$. Supposons en outre que $\left(\xi, f\right)$ vérifie les hypothèses (H_1) et (H_2). Alors, il existe une constante C_T, telle que :*

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^{e^{\lambda t}+1} \leq C_T \mathbb{E}\left(|\xi|^{e^{\lambda T}+1} + \int_0^T \left|\eta_s\right|^{e^{\lambda T}+1} \mathrm{d}s\right).$$

Preuve. Soit λ un nombre réel positif suffisamment grand. Soit $\varphi : [0,T] \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(t,x) = |x|^{e^{\lambda t}+1}$. Nous définissons l'application sgn : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\operatorname{sgn}(x) = -\mathbb{1}_{\{x\leq 0\}} + \mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\varphi_t'(t,x) &= \lambda e^{\lambda t} \ln(|x|)|x|^{e^{\lambda t}+1},\\
\varphi_x'(t,x) &= \left(e^{\lambda t}+1\right)|x|^{e^{\lambda t}} \operatorname{sgn}(x),\\
\varphi_{xx}''(t,x) &= \left(e^{\lambda t}+1\right) e^{\lambda t} |x|^{e^{\lambda t}-1} \operatorname{sgn}(x).
\end{aligned}$$

On définit une suite de temps d'arrêt $\{\tau_k\}_{k\geq 0}$ comme suit (voir le corollaire 1.3.1) :

$$\tau_k = \inf\left\{t \geq 0 : \left(\int_0^t \left(e^{\lambda s}+1\right)^2 |Y_s|^{2e^{\lambda s}} |Z_s|^2 \,\mathrm{d}s\right) \vee |Y_t| \geq k\right\}.$$

Par la formule d'Itô, on a, $\mathbb{P}$-$p.s.$ pour tout $t \in [t\wedge\tau_k, T\wedge\tau_k]$

$$\begin{aligned}
\varphi\left(t\wedge\tau_k, Y_{t\wedge\tau_k}\right) = \varphi\left(T\wedge\tau_k, Y_{T\wedge\tau_k}\right) &- \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} \varphi_t'(s, Y_s)\, ds \\
&- \frac{1}{2}\int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} \mathrm{Tr}(Z_s Z_s^* \varphi_{xx}''(s, Y_s))\mathrm{d}s \\
&+ \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} \left\langle \varphi_x'(s, Y_s), f(s, Y_s, Z_s)\right\rangle \mathrm{d}s \\
&- \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} \left\langle \varphi_x'(s, Y_s), Z_s \mathrm{d}W_s\right\rangle.
\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_2) on trouve

$$\begin{aligned}
\left|Y_{t\wedge\tau_k}\right|^{e^{\lambda(t\wedge\tau_k)}+1} &= \left|Y_{T\wedge\tau_k}\right|^{e^{\lambda(T\wedge\tau_k)}+1} - \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} \lambda e^{\lambda s} \ln(|Y_s|)|Y_s|^{e^{\lambda s}+1}\mathrm{d}s \\
&- \frac{1}{2}\int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} |Z_s|^2 \left(e^{\lambda s}+1\right) e^{\lambda s} |Y_s|^{e^{\lambda s}-1}\mathrm{d}s \\
&+ \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} \left(e^{\lambda s}+1\right)|Y_s|^{e^{\lambda s}} \mathrm{sgn}(Y_s) f(s, Y_s, Z_s)\mathrm{d}s \\
&- \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} \left(e^{\lambda s}+1\right)|Y_s|^{e^{\lambda s}} \mathrm{sgn}(Y_s) Z_s \mathrm{d}W_s \\
&\leq \left|Y_{T\wedge\tau_k}\right|^{e^{\lambda(T\wedge\tau_k)}+1} - \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} \lambda e^{\lambda s} \ln(|Y_s|)|Y_s|^{e^{\lambda s}+1}\mathrm{d}s \\
&- \frac{1}{2}\int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} |Z_s|^2 \left(e^{\lambda s}+1\right) e^{\lambda s} |Y_s|^{e^{\lambda s}-1}\mathrm{d}s \\
&+ \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} \left(e^{\lambda s}+1\right)|Y_s|^{e^{\lambda s}} \left(\eta_s + K|Y_s|\ln(|Y_s|)\right)\mathrm{d}s \\
&+ \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} c_0 \left(e^{\lambda s}+1\right)|Y_s|^{e^{\lambda s}} |Z_s| \sqrt{|\ln(|Z_s|)|}\mathrm{d}s \\
&- \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} \left(e^{\lambda s}+1\right)|Y_s|^{e^{\lambda s}} \mathrm{sgn}(Y_s) Z_s \mathrm{d}W_s.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Young ($|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q$, pour $p = e^{\lambda s}+1$, et $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$), fournit l'inégalité suivante

$$\left(e^{\lambda s}+1\right)|Y_s|^{e^{\lambda s}} \eta_s \leq |Y_s|^{e^{\lambda s}+1} + \left(e^{\lambda s}+1\right)^{e^{\lambda s}+1} \eta_s^{e^{\lambda s}+1}.$$

Pour $|Y_s|$ assez grand et grâce à la dernière inégalité on a

$$\begin{aligned}
\left|Y_{t\wedge\tau_k}\right|^{e^{\lambda(t\wedge\tau_k)}+1} \leq & \left|Y_{T\wedge\tau_k}\right|^{e^{\lambda(T\wedge\tau_k)}+1} - \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} \lambda e^{\lambda s} |Y_s|^{e^{\lambda s}+1} \ln(|Y_s|)\,\mathrm{d}s \\
& - \frac{1}{2}\int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} |Z_s|^2 \left(e^{\lambda s}+1\right) e^{\lambda s} |Y_s|^{e^{\lambda s}-1}\,\mathrm{d}s \\
& + \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} |Y_s|^{e^{\lambda s}+1}\,\mathrm{d}s \\
& + \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} \left(e^{\lambda s}+1\right)^{e^{\lambda s}+1} \eta_s^{e^{\lambda s}+1}\mathrm{d}s \\
& + \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} K\left(e^{\lambda s}+1\right) |Y_s|^{e^{\lambda s}+1} \ln(|Y_s|)\,\mathrm{d}s \\
& + \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} c_0\left(e^{\lambda s}+1\right) |Y_s|^{e^{\lambda s}} |Z_s| \sqrt{|\ln(|Z_s|)|}\mathrm{d}s \\
& - \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} \left(e^{\lambda s}+1\right) |Y_s|^{e^{\lambda s}} \operatorname{sgn}(Y_s) Z_s \mathrm{d}W_s.
\end{aligned}$$

Notons que pour $\lambda > 2K+1$, on a $(\lambda e^{\lambda s} - K\left(e^{\lambda s}+1\right) - 1) > 0$, et donc en utilisant le lemme 2.2.1, on déduit, pour λ assez grand, que :

$$c_0\left(e^{\lambda s}+1\right)|Y_s||Z_s|\sqrt{|\ln(|Z_s|)|} \leq \left(e^{\lambda s}+1\right)e^{\lambda s}\frac{|Z_s|^2}{2} + \left(\lambda e^{\lambda s} - K\left(e^{\lambda s}+1\right)-1\right)\ln(|Y_s|)|Y_s|^2.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\left|Y_{t\wedge\tau_k}\right|^{e^{\lambda(t\wedge\tau_k)}+1} \leq & \left|Y_{T\wedge\tau_k}\right|^{e^{\lambda(T\wedge\tau_k)}+1} + \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} \left(e^{\lambda s}+1\right)^{e^{\lambda s}+1} \eta_s^{e^{\lambda s}+1}\mathrm{d}s \\
& - \int_{t\wedge\tau_k}^{T\wedge\tau_k} \left(e^{\lambda s}+1\right) |Y_s|^{e^{\lambda s}} \operatorname{sgn}(Y_s) Z_s \mathrm{d}W_s.
\end{aligned}$$

Si on prend l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}\left|Y_{t\wedge\tau_k}\right|^{e^{\lambda(t\wedge\tau_k)}+1} \leq \mathbb{E}\left|Y_{T\wedge\tau_k}\right|^{e^{\lambda(T\wedge\tau_k)}+1} + \left(e^{\lambda T}+1\right)^{e^{\lambda T}+1}\mathbb{E}\int_0^T \eta_s^{e^{\lambda s}+1}\mathrm{d}s.$$

En passant à la limite en k et en utilisant le lemme de Fatou 1.1.1, on obtient

$$\mathbb{E}|Y_t|^{e^{\lambda t}+1} \leq \mathbb{E}|\xi|^{e^{\lambda T}+1} + \left(e^{\lambda T}+1\right)^{e^{\lambda T}+1}\mathbb{E}\int_0^T \eta_s^{e^{\lambda s}+1}\mathrm{d}s.$$

Pour compléter la preuve, on utilise l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy 1.3.4. ■

Lemme 2.2.4 (Estimation de Z) *Soient* (Y, Z) *une solution de l'EDSR* (1). *Alors, sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2), *il existe une constante positive* $C(T, c_0, K)$ *telle que :*

$$\mathbb{E}\int_0^T |Z_s|^2 \mathrm{d}s \leq C_{(T,c_0,K)}\mathbb{E}\left(|\xi|^2 + \sup_{s\in[0,T]} |Y_s|^{e^{\lambda s}+1} + \int_0^T \left|\eta_s\right|^2 \mathrm{d}s\right).$$

Preuve. La formule d'Itô montre :

$$\begin{aligned}|Y_t|^2 + \int_t^T |Z_s|^2 \mathrm{d}s &= |\xi|^2 + 2\int_t^T Y_s f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - 2\int_t^T Y_s Z_s \mathrm{d}W_s \\ &\leq |\xi|^2 + 2\int_t^T |Y_s|\left(\eta_s + K|Y_s|\,|\ln(|Y_s|)| + c_0|Z_s|\sqrt{|\ln(|Z_s|)|}\right)\mathrm{d}s \\ &\quad - 2\int_t^T Y_s Z_s \mathrm{d}W_s.\end{aligned}$$

Puisque $|Y_s|$ assez grand, on a pour tout $\varepsilon > 0$, $|Y_s|^2 |\ln(|Y_s|)| \leq |Y_s|^{2+\varepsilon}$, nous utilisons le lemme 2.2.1 pour montrer qu'il existe une constante positive K_1 dépendant de c_0 et K telle que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_t^T |Z_s|^2 \mathrm{d}s &\leq |\xi|^2 + T\sup_{s\in[0,T]} |Y_s|^2 + \int_t^T \left|\eta_s\right|^2 \mathrm{d}s + 2TK_1 \sup_{s\in[0,T]} |Y_s|^{2+\varepsilon} \\ &\quad - 2\int_t^T Y_s Z_s \mathrm{d}W_s.\end{aligned}$$

Puisque $|Y_s|^{2+\varepsilon} \geq |Y_s|^2$ pour $|Y_s|$ assez grande, alors il existe une constante positive $K_2 = K_2(T, c_2, K)$ telle que :

$$\int_t^T |Z_s|^2 \mathrm{d}s \leq K_2\left(|\xi|^2 + \sup_{s\in[0,T]} |Y_s|^2 + \int_t^T \left|\eta_s\right|^2 \mathrm{d}s + 2TK_1 \sup_{s\in[0,T]} |Y_s|^{2+\varepsilon} + \left|\int_t^T Y_s Z_s \mathrm{d}W_s\right|\right).$$

Si on choisit $\varepsilon = e^{\lambda T} - 1$, on obtient

$$\mathbb{E}\int_0^T |Z_s|^2 \mathrm{d}s \leq K_2\mathbb{E}\left(|\xi|^2 + \sup_{s\in[0,T]} |Y_s|^{e^{\lambda T}+1} + \int_t^T \left|\eta_s\right|^2 \mathrm{d}s + \sup_{t\in[0,T]}\left|\int_t^T Y_s Z_s \mathrm{d}W_s\right|\right).$$

Grâce à l'inégalité de Burkhölder-Davis-Gundy 1.3.4 et l'inégalité de Young $(|ab| \leq \frac{1}{2\varepsilon}|a|^2 +$

$\frac{1}{2}\varepsilon|b|^2$, $\varepsilon>0$), alors il existe une constante universelle $\ell'>0$ pour tout $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_t^T Y_sZ_s\mathrm{d}W_s\right| &\le \ell'\mathbb{E}\left(\int_0^T |Y_s|^2|Z_s|^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le \ell'\mathbb{E}\sup_{s\in[0,T]}|Y_s|\left(\int_0^T |Z_s|^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\le \frac{\ell'}{2\varepsilon}\mathbb{E}\sup_{s\in[0,T]}|Y_s|^2+\frac{\varepsilon\ell'}{2}\mathbb{E}\int_0^T|Z_s|^2\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Si l'on choisit ε suffisamment petit, on obtient le résultat souhaité. ∎

Lemme 2.2.5 (Estimation de f) *Si les hypothèses* (H_1) *et* (H_2)-(ii)*, sont vérifiées, alors*

$$\mathbb{E}\int_0^T\left|f(s,Y_s,Z_s)\right|^{\bar\alpha}\mathrm{d}s\le K\left(1+\mathbb{E}\int_0^T\left(\left|\eta_s\right|^2+|Y_s|^2\right)\mathrm{d}s+\mathbb{E}\int_0^T|Z_s|^2\,\mathrm{d}s\right),$$

où $\bar\alpha=\frac{2}{\alpha}$, $\alpha\in\,]1,2[$ *et* K *est une constante positive qui dépend de* c_0 *et* T.

Preuve. Observez que l'hypothèse (H_2) implique qu'il existe des constantes positives c_1, c_2 et α avec $\alpha\in\,]1,2[$ et un processus stochastique $\bar\eta=\eta+c_1$ tel que :

$$\begin{aligned}\left|f(t,\omega,y,z)\right| &\le \left|f(t,\omega,y,z)\right|+1\\ &\le \bar\eta_t+1+K|y|\left|\ln(|y|)\right|+c_0|z|\sqrt{|\ln(|z|)|} \qquad (3)\\ &\le \left(\bar\eta_t+1\right)+c_1|y|^{\alpha}+c_2|z|^{\alpha}.\end{aligned}$$

Nous utilisons successivement l'inégalité (3), l'inégalité $|a+b|^r\le\left(1\vee2^{r-1}\right)\left(|a|^r+|b|^r\right)$, $r>0$, pour montrer que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T|f(s,Y_s,Z_s)|^{\bar\alpha}\mathrm{d}s &\le \mathbb{E}\int_0^T\left(\left(\bar\eta_t+1\right)+c_1|Y_s|^{\alpha}+c_2|Z_s|^{\alpha}\right)^{\bar\alpha}\mathrm{d}s\\ &\le \left(1\vee2^{\bar\alpha-1}\right)^2\mathbb{E}\int_0^T\left(\left(\bar\eta_s+1\right)^{\bar\alpha}+c_1^{\bar\alpha}(|Y_s|)^{\alpha\bar\alpha}+c_2^{\bar\alpha}(|Z_s|)^{\alpha\bar\alpha}\right)\mathrm{d}s\\ &\le \left(1\vee2^{\bar\alpha-1}\right)^2\mathbb{E}\int_0^T\left(\left(\eta_s+c_1+1\right)^2+c_1^{\bar\alpha}|Y_s|^2+c_2^{\bar\alpha}|Z_s|^2\right)\mathrm{d}s\\ &\le \left(1\vee2^{\bar\alpha-1}\right)^2\mathbb{E}\int_0^T\left((1\vee2)^2\left(\left|\eta_s\right|^2+c_1^2+1\right)+c_1^{\bar\alpha}|Y_s|^2+c_2^{\bar\alpha}|Z_s|^2\right)\mathrm{d}s\\ &\le K\mathbb{E}\left(1+\int_0^T\left(\left|\eta_s\right|^2+|Y_s|^2+|Z_s|^2\right)\mathrm{d}s\right)<\infty.\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du lemme 2.2.5. ∎

2.2.3 Approximation par des EDSR lipschitziennes

Lemme 2.2.6 (Approximation de f) *Il existe une suite de fonctions (f_n) telle que,*

c$_1$) *Pour tout n, f_n est borné et globalement Lipschitz en (y,z), p.p. $t \in [0,T]$ et $\mathbb{P}$-p.s. $\omega \in \Omega$.*

c$_2$)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \left|f_n(t,\omega,y,z)\right| \le \eta_t + K|y|\left|\ln(|y|)\right| + c_0|z|\sqrt{|\ln(|z|)|},\ \mathbb{P}\text{-p.s., p.p. } t\in[0,T].$$

c$_3$) *Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\rho_N(f_n - f) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$,*

où

$$\rho_N(f) = \mathbb{E}\int_0^T \left(\sup_{\{|y|,|z|\le N\}} \left|f(s,y,z)\right|\right) \mathrm{d}s,$$

est une semi-norme c'est-à-dire que

$$\begin{cases} 1) & \rho_N(f+g) \le \rho_N(f) + \rho_N(g), \\ 2) & \rho_N(\lambda f) = |\lambda|\,\rho_N(f). \end{cases}$$

En particulier $\rho(0) = 0$ mais il manque la propriété "$\rho(f) = 0 \implies f = 0$" pour que ρ soit une norme.

Preuve. Soit $\alpha_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ une suite de fonctions lisses à support compacts qui approximent la mesure de Dirac en 0 et qui satisfont $\int \alpha_n(u)\,du = 1$.. Soit ψ_n de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^+$ une suite de fonctions lisses qui vérifie que $0 \le |\psi_n| \le 1$, $\psi_n(u) = 1$ pour $|u| \le n$ et $\psi_n(u) = 0$ pour $|u| \ge n+1$. On pose, $\varepsilon_{q,n}(t,y,z) = \int f(t,(y,z)-u)\,\alpha_q(u)\,du\psi_n(y,z)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $q(n)$ un entier tel que $q(n) \ge n + n^\alpha$. Il n'est pas difficile de voir que la suite $f_n := \varepsilon_{q(n),n}$ satisfait à toutes les assertions (c$_1$)-(c$_3$). ■

2.2.4 Convergence

En utilisant les mêmes arguments et les arguments standard des EDSRs utilisés dans les preuves du lemme 2.2.3, du lemme 2.2.4, du lemme 2.2.5 et du lemme 2.2.6, on peut prouver les estimations suivantes.

Lemme 2.2.7 (Estimation de $(f_n), (Y^{f_n}, Z^{f_n})$) *Considérons f et ξ comme indiqué dans le théorème 2.3.1. Soit (f_n) la suite de fonctions associées à f par le lemme 2.2.6. Soit (Y^{f_n}, Z^{f_n})*

une solution de $\mathrm{Eq}(\xi, f_n)$. *Alors il existe des constantes* $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$ *et* $\bar{K}_3$ *telles que :*

$$\begin{aligned}
&\text{i) } \sup_n \mathbb{E}\int_0^T |Z_s^{f_n}|^2 \mathrm{d}s \le \bar{K}_1,\\
&\text{ii) } \sup_n \mathbb{E}|Y_s^{f_n}|^{e^{\lambda T}+1} \mathrm{d}s \le \bar{K}_2,\\
&\text{iii) } \sup_n \mathbb{E}\int_0^T |f_n(s, Y_s^{f_n}, Z_s^{f_n})|^{\bar{\alpha}} \mathrm{d}s \le \bar{K}_3,
\end{aligned}$$

où $\bar{\alpha} = \frac{2}{\alpha}$, $\alpha \in]1,2[$.

2.2.5 Estimation entre deux solutions

Proposition 2.2.1 *Pour tout* $R \in \mathbb{N}$, $1 < \beta < \min(3-\alpha, 2)$, $\delta < \frac{\beta-1}{2M_2^2}\min\left(\frac{1}{2}, \frac{\kappa}{r\beta}\right)$, *et* $\varepsilon > 0$, *il existe* $N_0 > R$ *tel que pour tout* $N > N_0$ *et* $T' \le T$:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n,m\longrightarrow\infty} \mathbb{E} \sup_{t\in[(T'-\delta)^+, T']} |Y_t^{f_n} - Y_t^{f_m}|^\beta + \mathbb{E}\int_{(T'-\delta)^+}^{T'} \frac{\left|Z_s^{f_n} - Z_s^{f_m}\right|^2}{\left(|Y_s^{f_n} - Y_s^{f_m}|^2 + v_R\right)^{\frac{2-\beta}{2}}} \mathrm{d}s \\
\le \varepsilon + \frac{\ell}{\beta-1} e^{C_N\delta} \limsup_{n,m\longrightarrow\infty} \mathbb{E}|Y_{T'}^{f_n} - Y_{T'}^{f_m}|^\beta,
\end{aligned}$$

où

$$C_N = 2\frac{M^2\beta}{\beta-1}\ln(A_N), \qquad v_R = \sup\left\{(A_N)^{-1} : N \ge R\right\}, \qquad \kappa = 3-\alpha-\beta,$$

et ℓ *est une constante positive universelle. Pour* $N \in \mathbb{N}^*$, *on pose,*

$$\Delta_s = |Y_s^{f_n} - Y_s^{f_m}|^2 + (A_N)^{-1}, \qquad \textit{et} \qquad \Phi(s) = |Y_s^{f_n}| + |Y_s^{f_m}| + |Z_s^{f_n}| + |Z_s^{f_m}|.$$

Lemme 2.2.8 *Supposons que les hypothèses de la proposition 2.2.1 soient satisfaites et que* $\kappa = 3-\alpha-\beta$. *Alors, pour tout* $C > 0$, *on a,*

$$\begin{aligned}
e^{Ct}\Delta_t^{\frac{\beta}{2}} + C\int_t^{T'} e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}} \mathrm{d}s \le e^{CT'}\Delta_{T'}^{\frac{\beta}{2}} - \beta\int_t^{T'} e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1}\left\langle Y_s^{f_n} - Y_s^{f_m}, \left(Z_s^{f_n} - Z_s^{f_m}\right)\mathrm{d}W_s\right\rangle \\
-\frac{\beta}{2}\int_t^{T'} e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1}\left|Z_s^{f_n} - Z_s^{f_m}\right|^2 \mathrm{d}s \\
+\frac{\beta(2-\beta)}{2}\int_t^{T'} e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-2}|(Z_s^{f_n} - Z_s^{f_m})^*(Y_s^{f_n} - Y_s^{f_m})|^2 \mathrm{d}s \\
+\mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2 + \mathrm{J}_3,
\end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_1 &= \beta e^{CT'}\frac{1}{N^\kappa}\int_t^{T'} \Delta_s^{\frac{\beta-1}{2}}\Phi^\kappa(s)\,|f_n(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n})-f_m(s,Y_s^{f_m},Z_s^{f_m})|\mathrm{d}s,\\
\mathrm{J}_2 &= \beta e^{CT'}\left(2N^2+v_1\right)^{\frac{\beta-1}{2}}\left\{\int_t^{T'}\sup_{|y|,|z|\le N}\left|f_n(s,y,z)-f(s,y,z)\right|\mathrm{d}s\right.\\
&\quad\left.+\int_t^{T'}\sup_{|y|,|z|\le N}\left|f_m(s,y,z)-f(s,y,z)\right|\mathrm{d}s\right\},\\
\mathrm{J}_3 &= \beta M_2\int_t^{T'} e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1}\left(\Delta_s\ln(A_N)+|Y_s^{f_n}-Y_s^{f_m}||Z_s^{f_n}-Z_s^{f_m}|\sqrt{\ln(A_N)}\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Preuve. Pour simplifier les calculs, nous supposons (sans perte de généralité) que l'hypothèse $(\mathrm{H}_3)-(\mathrm{iii})$ est valable sans le terme multiplicatif $\mathbb{1}_{\{v_t(\omega)\le N\}}$. Soit $0<T'\le T$, $C>0$, alors pour tout $t\le T'$, en appliquant la formule d'Itô, on obtient,

$$
\begin{aligned}
e^{Ct}\Delta_t^{\frac{\beta}{2}}+C\int_t^{T'}e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}}\mathrm{d}s &= e^{CT'}\Delta_{T'}^{\frac{\beta}{2}}-\frac{\beta}{2}\int_t^{T'}e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1}\left|Z_s^{f_n}-Z_s^{f_m}\right|^2\mathrm{d}s\\
&\quad+\beta\int_t^{T'}e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1}\left(Y_s^{f_n}-Y_s^{f_m}\right)\left(f_n(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n})-f_m(s,Y_s^{f_m},Z_s^{f_m})\right)\mathrm{d}s\\
&\quad-\beta\int_t^{T'}e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1}\left\langle Y_s^{f_n}-Y_s^{f_m},\left(Z_s^{f_n}-Z_s^{f_m}\right)\mathrm{d}W_s\right\rangle\\
&\quad-\beta\left(\frac{\beta}{2}-1\right)\int_t^{T'}e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-2}|(Z_s^{f_n}-Z_s^{f_m})^*(Y_s^{f_n}-Y_s^{f_m})|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Posons maintenant, on va diviser l'intégrale suivante en quatre :

$$
\mathrm{J}=\beta\int_t^{T'}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1}e^{Cs}\left(Y_s^{f_n}-Y_s^{f_m}\right)\left(f_n(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n})-f_m(s,Y_s^{f_m},Z_s^{f_m})\right)\mathrm{d}s.
$$

Utilisons à présent le fait que $\Phi(s)=|Y_s^{f_n}|+|Y_s^{f_m}|+|Z_s^{f_n}|+|Z_s^{f_m}|$, pour diviser l'intégrale J en quatre morceaux, en écrivant

$$
\mathrm{J}=\mathrm{J}_1'+\mathrm{J}_2'+\mathrm{J}_3'+\mathrm{J}_4',
$$

où

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_1' &= \beta\int_t^{T'}e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1}\left(Y_s^{f_n}-Y_s^{f_m}\right)\left(f_n(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n})-f_m(s,Y_s^{f_m},Z_s^{f_m})\right)\mathbb{1}_{\{\Phi(s)>N\}}\mathrm{d}s,\\
\mathrm{J}_2' &= \beta\int_t^{T'}e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1}\left(Y_s^{f_n}-Y_s^{f_m}\right)\left(f_n(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n})-f(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n})\right)\mathbb{1}_{\{\Phi(s)\le N\}}\mathrm{d}s,\\
\mathrm{J}_3' &= \beta\int_t^{T'}e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1}\left(Y_s^{f_n}-Y_s^{f_m}\right)\left(f(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n})-f(s,Y_s^{f_m},Z_s^{f_m})\right)\mathbb{1}_{\{\Phi(s)\le N\}}\mathrm{d}s,\\
\mathrm{J}_4' &= \beta\int_t^{T'}e^{Cs}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1}\left(Y_s^{f_n}-Y_s^{f_m}\right)\left(f(s,Y_s^{f_m},Z_s^{f_m})-f_m(s,Y_s^{f_m},Z_s^{f_m})\right)\mathbb{1}_{\{\Phi(s)\le N\}}\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Nous procédons alors à l'estimation de J. Nous utilisons le fait que $|Y_s^{f_n} - Y_s^{f_m}| \leq \Delta_s^{\frac{1}{2}}$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_1' &\leq \beta e^{CT'} \int_t^{T'} \Delta_s^{\frac{\beta-1}{2}} |f_n(s, Y_s^{f_n}, Z_s^{f_n}) - f_m(s, Y_s^{f_m}, Z_s^{f_m})| \mathbb{1}_{\{\Phi(s)>N\}} \mathrm{d}s \\
&\leq \mathrm{J}_1,
\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{J}_2' + \mathrm{J}_4' \leq \mathrm{J}_2.$$

Finalement, en utilisant l'hypothèse (H$_3$), on a,

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_3' &\leq \beta M_2 \int_t^{T'} \Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1} e^{Cs} \left(\Delta_s \ln(A_N) + |Y_s^{f_n} - Y_s^{f_m}||Z_s^{f_n} - Z_s^{f_m}| \sqrt{\ln(A_N)} \right) \mathbb{1}_{\{\Phi(s)<N\}} \mathrm{d}s \\
&\leq \mathrm{J}_3.
\end{aligned}$$

Le lemme 2.2.8 est démontré. ■

Lemme 2.2.9 *Supposons que les hypothèses de la proposition 2.2.1 sont satisfaites et posons $\gamma = \frac{2M_2^2 \delta \beta}{\beta-1}$. Alors, il existe une constante universelle ℓ telle que,*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \sup_{t \in [(T'-\delta)^+, T']} |Y_t^{f_n} - Y_t^{f_m}|^\beta + \mathbb{E} \int_{(T'-\delta)^+}^{T'} \frac{\left| Z_s^{f_n} - Z_s^{f_m} \right|^2}{\left(|Y_s^{f_n} - Y_s^{f_m}|^2 + v_R \right)^{\frac{2-\beta}{2}}} \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{\ell}{\beta-1} e^{C_N \delta} \mathbb{E}|Y_{T'}^{f_n} - Y_{T'}^{f_m}|^\beta + \frac{\ell}{\beta-1} \frac{A_N^\gamma}{(A_N)^{\frac{\beta}{2}}} \\
&+ \frac{4\ell}{\beta-1} \beta K_3^{\frac{1}{\alpha}} (4TK_2 + Tv_R)^{\frac{\beta-1}{2}} (8TK_2 + 8K_1)^{\frac{\kappa}{2}} \frac{A_N^\gamma}{(A_N)^{\frac{\kappa}{r}}} \\
&+ \frac{\ell}{\beta-1} \beta e^{C_N \delta} \left(2N^2 + v_1 \right)^{\frac{\beta-1}{2}} \left(\rho_N(f_n - f) + \rho_N(f_m - f) \right).
\end{aligned}$$

Preuve. On choisit $C_N = 2\frac{M^2\beta}{\beta-1} \ln(A_N)$ dans le lemme 2.2.8. En utilisant le lemme 2.2.2, l'inégalité de Burkhölder et l'inégalité de Hölder (puisque $\frac{\alpha+\beta+\kappa-1}{2} = 1$), on montre qu'il existe une constante universelle $\ell > 0$ telle que pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{t\in[(T'-\delta)^+,T']}\left(e^{C_N t}\Delta_t^{\frac{\beta}{2}}\right)+\mathbb{E}\int_{(T'-\delta)^+}^{T'} e^{C_N s}\Delta_s^{\frac{\beta}{2}-1}|Z_s^{f_n}-Z_s^{f_m}|^2 ds\\
&\leq \frac{\ell}{\beta-1}e^{C_N T'}\left\{\mathbb{E}\left[\Delta_{T'}^{\frac{\beta}{2}}\right]+\frac{\beta}{N^\kappa}\left[\mathbb{E}\int_0^T\Delta_s ds\right]^{\frac{\beta-1}{2}}\left[\mathbb{E}\int_0^T\Phi^2(s)\,ds\right]^{\frac{\kappa}{2}}\times\right.\\
&\qquad\left[\mathbb{E}\int_0^T|f_n(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n})-f_m(s,Y_s^{f_m},Z_s^{f_m})|^{\bar{\alpha}}ds\right]^{\frac{1}{\bar{\alpha}}}\\
&\qquad\left.+\beta\left(2N^2+v_1\right)^{\frac{\beta-1}{2}}\left(\rho_N\left(f_n-f\right)+\rho_N\left(f_m-f\right)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

On utilise le lemme 2.2.6 et le lemme 2.2.7 pour obtenir pour tout $N > R$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{t\in[(T'-\delta)^+,T']}|Y_t^{f_n}-Y_t^{f_m}|^\beta+\mathbb{E}\int_{(T'-\delta)^+}^{T'}\frac{\left|Z_s^{f_n}-Z_s^{f_m}\right|^2}{\left(|Y_s^{f_n}-Y_s^{f_m}|^2+v_R\right)^{\frac{2-\beta}{2}}}ds\\
&\leq\frac{\ell}{\beta-1}e^{C_N\delta}\left\{\mathbb{E}|Y_{T'}^{f_n}-Y_{T'}^{f_m}|^\beta+(A_N)^{-\frac{\beta}{2}}\right.\\
&\quad+\frac{\beta}{N^\kappa}\left(4TK_2+Tv_R\right)^{\frac{\beta-1}{2}}\left(8TK_2+8K_1\right)^{\frac{\kappa}{2}}\left(4K_3^{\frac{\alpha}{2}}\right)\\
&\quad\left.+\beta\left(2N^2+v_1\right)^{\frac{\beta-1}{2}}\left(\rho_N\left(f_n-f\right)+\rho_N\left(f_m-f\right)\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{t\in[(T'-\delta)^+,T']}|Y_t^{f_n}-Y_t^{f_m}|^\beta+\mathbb{E}\int_{(T'-\delta)^+}^{T'}\frac{\left|Z_s^{f_n}-Z_s^{f_m}\right|^2}{\left(|Y_s^{f_n}-Y_s^{f_m}|^2+v_R\right)^{\frac{2-\beta}{2}}}ds\\
&\leq\frac{\ell}{\beta-1}e^{C_N\delta}\mathbb{E}|Y_{T'}^{f_n}-Y_{T'}^{f_m}|^\beta+\frac{\ell}{\beta-1}\frac{A_N^\gamma}{(A_N)^{\frac{\beta}{2}}}\\
&\quad+\frac{4\ell}{\beta-1}\beta K_3^{\frac{\alpha}{2}}\left(4TK_2+Tv_R\right)^{\frac{\beta-1}{2}}\left(8TK_2+8K_1\right)^{\frac{\kappa}{2}}\frac{A_N^\gamma}{(A_N)^{\frac{\kappa}{r}}}\\
&\quad+\frac{\ell}{\beta-1}e^{C_N\delta}\beta\left(2N^2+v_1\right)^{\frac{\beta-1}{2}}\left(\rho_N\left(f_n-f\right)+\rho_N\left(f_m-f\right)\right).
\end{aligned}$$

Le lemme 2.2.9 est démontré. ■

Preuve de la proposition 2.2.1. En prenant $\delta < \frac{\beta-1}{2M_2^2}\min\left(\frac{1}{2},\frac{\kappa}{r\beta}\right)$ on dérive

$$\lim_{N\to\infty}\frac{A_N^\gamma}{(A_N)^{\frac{\kappa}{r}}}=0=\lim_{N\to\infty}\frac{A_N^\gamma}{(A_N)^{\frac{\beta}{2}}}.$$

Pour terminer la preuve de la proposition 2.2.1 on passe à l'imite successivement en n et N en utilisant l'assertion (c_3) du lemme 2.2.6. ■

2.3 Existence et unicité de la solution

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses* $(\mathrm{H}_1-\mathrm{H}_3)$, *l'EDSR* $\mathrm{Eq}(\xi, f)$ *admet une solution unique* $(Y,Z) \in \mathcal{S}^{e^{\lambda T}+1} \times \Lambda^2$.

Preuve.

Existence. En prenant successivement $T' = T$, $T' = (T-\delta)^+$, $T' = (T-2\delta)^+$,..., dans la proposition 2.2.1, on montre que pour tout $\beta \in]1, \min(3-\alpha, 2)[$

$$\lim_{(n,m)\to\infty} \left(\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |Y_t^{f_n} - Y_t^{f_m}|^\beta + \mathbb{E}\int_0^T \frac{\left|Z_s^{f_n} - Z_s^{f_m}\right|^2}{\left(|Y_s^{f_n} - Y_s^{f_m}|^2 + v_R\right)^{\frac{2-\beta}{2}}} ds \right) = 0.$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz, nous avons,

$$\left[\mathbb{E}\int_0^T |Z_s^{f_n} - Z_s^{f_m}| ds\right]^2 \leq \mathbb{E}\int_0^T \frac{\left|Z_s^{f_n} - Z_s^{f_m}\right|^2}{\left(|Y_s^{f_n} - Y_s^{f_m}|^2 + v_R\right)^{\frac{2-\beta}{2}}} ds\, \mathbb{E}\int_0^T \left(|Y_s^{f_n} - Y_s^{f_m}|^2 + v_R\right)^{\frac{2-\beta}{2}} ds.$$

Du lemme 2.2.7, on obtient

$$\mathbb{E}\int_0^T \left(|Y_s^{f_n} - Y_s^{f_m}|^2 + v_R\right)^{\frac{2-\beta}{2}} ds < \infty.$$

Il s'ensuit que :

$$\lim_{n,m\to\infty} \left(\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |Y_t^{f_n} - Y_t^{f_m}|^\beta + \mathbb{E}\int_0^T |Z_s^{f_n} - Z_s^{f_m}| ds \right) = 0.$$

Alors, il existe (Y,Z) tel que

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^\beta + \mathbb{E}\int_0^T |Z_s| ds < \infty,$$

de plus

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |Y_t^{f_n} - Y_t|^\beta + \mathbb{E}\int_0^T |Z_s^{f_n} - Z_s| ds \right) = 0.$$

En particulier, il existe une sous-suite (Y^{f_n}, Z^{f_n}) telle que

$$\lim_{n\to\infty} \left(|Y_t^{f_n} - Y_t| + |Z_t^{f_n} - Z_t|\right) = 0, \;\; p.p.\ t \in [0,T],\ \mathbb{P}\text{-}p.s.\ \omega \in \Omega. \tag{4}$$

Il nous reste à prouver que

$$\int_0^T |f_n(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n}) - f(s,Y_s,Z_s)|\mathrm{d}s \xrightarrow[n\to\infty]{proba.} 0.$$

D'abord, l'inégalité triangulaire nous donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}^n &= \mathbb{E}\int_0^T |f_n(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n}) - f(s,Y_s,Z_s)|\mathrm{d}s \\
&\leq \mathbb{E}\int_0^T |f_n(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n}) - f(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n})|\mathrm{d}s + \mathbb{E}\int_0^T |f(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n}) - f(s,Y_s,Z_s)|\mathrm{d}s \\
&= \mathrm{I}_1^n + \mathrm{I}_2^n.
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que $\lim_{n\to\infty}\mathrm{I}^n = 0$. En utilisant le fait que

$$\mathbb{1}_{\left\{|Y_s^{f_n}|+|Z_s^{f_n}|\geq N\right\}} \leq \frac{(|Y_s^{f_n}|+|Z_s^{f_n}|)^{(2-\alpha)}}{N^{(2-\alpha)}}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_1^n &= \mathbb{E}\int_0^T |f_n(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n}) - f(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n})|\mathrm{d}s \\
&\leq \mathbb{E}\int_0^T |f_n(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n}) - f(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n})|\mathbb{1}_{\left\{|Y_s^{f_n}|+|Z_s^{f_n}|\geq N\right\}}\mathrm{d}s \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T |f_n(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n}) - f(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n})|\mathbb{1}_{\left\{|Y_s^{f_n}|+|Z_s^{f_n}|\leq N\right\}}\mathrm{d}s \\
&\leq \rho_N\left(f_n - f\right) + \frac{2\bar{K}_3^{\frac{\alpha}{2}}\left(T\bar{K}_2 + \bar{K}_1\right)^{(1-\frac{\alpha}{2})}}{N^{(2-\alpha)}}.
\end{aligned}$$

En passant aux limites premièrement sur n et ensuite sur N on obtient,

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{I}_1^n = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\int_0^T |f_n(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n}) - f(s,Y_s^{f_n},Z_s^{f_n})|\mathrm{d}s = 0.$$

Ensuite, on commence à démontrer que $\lim_{n\to\infty}\mathrm{I}_2^n = 0$. Comme $\left(Y^{f_n},Z^{f_n}\right)$ converge vers (Y,Z), $p.p$ $t\in[0,T]$, $\mathbb{P}$-$p.s.$ $\omega\in\Omega$, d'après (4) et en utilisant le fait que la fonction f est continue en $\left(y,z\right)$, $p.p.$ $t\in[0,T]$, on obtient,

$$\lim_{n\to\infty}|f(t,Y_t^{f_n},Z_t^{f_n}) - f(t,Y_t,Z_t)| = 0,\ \ p.p.\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{-}p.s.\ \omega\in\Omega.$$

D'autre part le lemme 2.2.5, les assertions (i) et (ii) du lemme 2.2.7 assurent que la famille

$$\left\{|f(t,Y_t^{f_n},Z_t^{f_n}) - f(t,Y_t,Z_t)|\ :n\in\mathbb{N}^*\right\},$$

est uniformément intégrable à partir de la proposition 1.1.2. Par conséquent, une application du théorème 1.1.2 permet d'obtenir

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}_2^n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T |f(s, Y_s^{f_n}, Z_s^{f_n}) - f(s, Y_s, Z_s)|\mathrm{d}s = 0.$$

L'existence de solutions à $\mathrm{Eq}(\xi, f)$ est démontrée.

Unicité. Soient (Y, Z) et $(\bar{Y}, \bar{Z})$ deux solutions de $\mathrm{Eq}(\xi, f)$. En raisonnant comme précédemment, on peut montrer que : Pour tout $R > 2$, $\beta \in]1, \min(3-\alpha, 2)[$, $\delta < \frac{\beta-1}{2M_2^2}\min\left(\frac{1}{2}, \frac{\kappa}{r\beta}\right)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 > R$ tel que pour tout $N > N_0$ et $T' \leq T$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{t\in[(T'-\delta)^+, T']} |Y_t - \bar{Y}_t|^\beta + \mathbb{E}\int_{(T'-\delta)^+}^{T'} \frac{\left|Z_s - \bar{Z}_s\right|^2}{\left(|Y_s - \bar{Y}_s|^2 + v_R\right)^{\frac{2-\beta}{2}}}\mathrm{d}s \\ \leq \varepsilon + \frac{\ell}{\beta - 1} e^{C_N\delta}\mathbb{E}|Y_{T'} - \bar{Y}_{T'}|^\beta.\end{aligned}$$

On prend successivement $T' = T$, $T' = (T-\delta)^+, \ldots$, pour compléter la preuve d'unicité. ■

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre, nous donnons deux applications. La première consiste à étudier l'existence d'une stratégie optimale pour un problème de contrôle stochastique de diffusion. Le problème est formulé comme une EDSR à croissance logarithmique et à valeur terminale $L^p(p>2)$-intégrable. Rappelons que dans le chapitre précédent nous avons démontré l'existence et l'unicité des solutions pour ce type d'équation, et maintenant nous appliquons directement ce résultat. Il est évident que le générateur de croissance logarithmique se situe entre le générateur de croissance quadratique et le générateur de croissance linéaire. Par conséquent, nous verrons également comment passer de la résolution d'une équation de croissance quadratique à la résolution d'une équation de croissance logarithmique. Dans ce chapitre, nous nous appuyons sur les références suivantes [3, 4, 7].

3.1 Introduction

Nous considérons dans ce chapitre une base stochastique brownienne $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_t, \mathbb{P})$ telle que $(W_t)_{t\in[0,T]}$ un M.B. k-dimensionnel, $\mathbb{R}^k$. Considérons une application $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k\times k}$ satisfaisant les hypothèses suivantes :

A$_1$) σ est $\mathscr{P}$-mesurable.

A$_2$) Condition de croissance linéaire : Il existe une constante C telle que :

$$\begin{cases} |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq C|x-y|, \\ |\sigma(t,x)| \leq C(1+|x|), \end{cases} \quad \forall (t,x,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k.$$

A$_3$) Pour tout $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k$, la matrice $\sigma(t,x)$ est inversible et

$$\left|\sigma^{-1}(t,x)\right|\leq C,$$

pour certaines constantes C.

Soient $X_0\in\mathbb{R}^k$ et $X=(X_t)_{t\in[0,T]}$ une solution de l'EDS suivante :

$$X_t=X_0+\int_0^t\sigma(s,X_s)\,\mathrm{d}W_s,\ t\in[0,T], \tag{1}$$

le processus $(X_t)_{t\in[0,T]}$ existe grâce au théorème 1.6.1, puisque σ satisfait (A$_1$–A$_3$). De plus, on a l'estimation suivante (voir par exemple dans [36])

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[0,T]}|X_s|^p<\infty,\ \text{pour tout } p\in[1,+\infty[.$$

3.2 Contrôle stochastique des diffusions

Soient A un espace métrique compact et $\mathcal{U}$ l'ensemble des processus $\mathscr{P}$-mesurables $u=(u_t)_{t\in[0,T]}$ à valeurs dans A. On dit que $\mathcal{U}$ désigne l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

Soit

$$f:[0,T]\times\mathbb{R}^k\times A\to\mathbb{R}^k,$$

tel que

M$_1$) Pour chaque $a\in A$, l'application $(t,x)\to f(t,x,a)$ est mesurable.

M$_2$) Pour chaque (t,x), l'application $a\to f(t,x,a)$ est continu.

M$_3$) Il existe une constante $K>0$ telle que

$$\left|f(t,x,a)\right|\leq K(1+|x|)\,,\ \forall\ (t,x,a)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k\times A. \tag{2}$$

Pour une stratégie de contrôle admissible donnée $u\in\mathcal{U}$, le processus exponentiel,

$$\Gamma_t^u=\exp\left[\int_0^t\sigma^{-1}(s,X_s)f(s,X_s,u_s)\,dW_S-\frac{1}{2}\int_0^t\left|\sigma^{-1}(s,X_s)f(s,X_s,u_s)\right|^2\mathrm{d}s\right],\ t\in[0,T],$$

est une $\mathscr{F}_t$-martingale sous les hypothèses précédentes et ceci grâce à la proposition 1.5.1. Par conséquent, $\mathbb{E}\left(\Gamma_T^u\right)=1$ en utilisant le lemme 1.5.1. Le théorème de Girsanov 1.5.1 garantit alors que le processus

$$W_t^u = W_t - \int_0^t \sigma^{-1}(s, X_s) f(s, X_s, u_s) \mathrm{d}s, \; t \in [0, T], \tag{3}$$

est un $\mathscr{F}_t$-mouvement brownien, sous la nouvelle mesure de probabilité

$$\mathbb{P}^u(B) = \mathbb{E}\left(\Gamma_T^u \mathbb{1}_B\right), \; B \in \mathscr{F}_T,$$

ce qui est équivalent à $\mathbb{P}$. En combinant (1) et (3), on peut écrire

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s, u_s) \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s) \mathrm{d}W_s^u, \; t \in [0, T].$$

Ce sera notre modèle pour une équation différentielle stochastique contrôlée, dont le cas où seulement le dérive est contrôlé.

Avant de spécifier l'objectif de notre jeu de contrôle stochastique, considérons deux applications h et g sous les hypothèses suivantes :

A_4) $h : [0, T] \times \mathbb{R}^k \times A \to \mathbb{R}$ est $\mathscr{P}$-mesurable et pour chaque (t, x) l'application $a \to h(t, x, a)$ est continue. De plus, il existe une constante positive $K > 0$ telle que

$$|h(t, x, a)| \leq K(1 + |x|), \; \forall \; (t, x, a) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times A.$$

A_5) $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et il existe une constante positive C telle que :

$$\left|g(x)\right| \leq C(1 + |x|), \; \forall \; x \in \mathbb{R}^k.$$

Nous allons étudier un contrôle stochastique avec un seul joueur. Le contrôleur doit choisir une stratégie de contrôle admissible $u \in \mathcal{U}$ pour minimiser la quantité suivante,

$$\int_0^T h(s, X_s, u_s) \mathrm{d}s + g(X_T). \tag{4}$$

On peut donc dire que le contrôleur a l'intérêt de rendre la quantité (4) la plus petite possible, au moins en moyenne. On arrive donc a définir la fonction de coût (ou aussi appelée un critère de performance) comme suit

$$\mathrm{J}(u) = \mathbb{E}^u\left(\int_0^T h(s, X_s, u_s) \mathrm{d}s + g(X_T)\right), \tag{5}$$

où $\mathbb{E}^u$ désigne l'espérance par rapport à $\mathbb{P}^u$.

L'objectif d'un problème de contrôle est de déterminer l'infimum pour le critère (5) de trouver une stratégie d'intervention $\hat{u}$ telle que pour tout $u \in \mathcal{U}$,

$$\mathrm{J}(\hat{u}) \leq \mathrm{J}(u).$$

Un tel contrôle $\hat{u}$ (s'il existe) est appelé un contrôle optimal pour le problème et $\mathrm{J}(\hat{u})$ est appelée le coût optimal (ou bien performance optimale). Soit $\mathcal{H}$ une application à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie comme suit

$$\mathcal{H}(t,x,z,u) = z\sigma^{-1}(t,x)\, f(t,x,u) + h(t,x,u), \ \forall \ (t,x,z,u) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times A. \tag{6}$$

La fonction $\mathcal{H}$ est appelée le Hamiltonien associé au contrôle stochastique tel que :

Pour tout $z \in \mathbb{R}^k$, le processus $\left(\mathcal{H}(t,x,x,u)\right)_{t\in[0,T]}$ est $\mathscr{P}$-mesurable.

Lemme 3.2.1 *Le hamiltonien $\mathcal{H}$ satisfait les conditions* (H_2) *et* (H_3).

Preuve. Pour (H_2), il n'est pas difficile de montrer que pour tout (t,x,z,u), il existe des constantes C et c_0 telles que :

$$|\mathcal{H}(t,x,z,u)| \leq C\exp(|x|) + c_0|z|\sqrt{|\ln(|z|)|}.$$

Ensuite, nous allons prouver que $\mathcal{H}$ satisfait également (H_3). En effet pour tout $|y|$, $|\bar{y}|$, $|z|$, $|\bar{z}| \leq N$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\left(y-\bar{y}\right)\left(\mathcal{H}(t,x,z,u) - \mathcal{H}(t,x,\bar{z},u)\right)\mathbb{1}_{\{v_t(\omega)\leq N\}}\\
&\leq \left|y-\bar{y}\right| |\mathcal{H}(t,x,z,u) - \mathcal{H}(t,x,\bar{z},u)|\,\mathbb{1}_{\{v_t(\omega)\leq N\}}\\
&\leq \left|y-\bar{y}\right| |z-\bar{z}| \left|\sigma^{-1}(t,x)\right| \left|f(t,x,u)\right| \mathbb{1}_{\{v_t(\omega)\leq N\}}.
\end{aligned}$$

On prend maintenant $v = \left(e^{|f(t,x,u)|^2}\right)_{t\in[0,T]}$ et comme σ^{-1} borné par une constante C, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\left(y-\bar{y}\right)\left(\mathcal{H}\left(t,x,z,u\right)-\mathcal{H}\left(t,x,\bar{z},u\right)\right)\mathbb{1}_{\{v_t(\omega)\leq N\}} \\
&\leq C\left|y-\bar{y}\right|\left|z-\bar{z}\right|\left|f\left(t,x,u\right)\right|\mathbb{1}_{\left\{\left|f(t,x,u)\right|^2\leq \ln N\right\}} \\
&\leq C\left|y-\bar{y}\right|\left|z-\bar{z}\right|\sqrt{\ln\left(A_N\right)}.
\end{aligned}$$

Pour compléter la preuve, nous allons montrer que $\left(e^{|f(t,X_t,u_t)|^2}\right)_{t\in[0,T]}$ appartient à $L^q\left([0,T]\times\Omega;\mathbb{R}^+\right)$ pour certain $q>0$, nous avons,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^T\left|\exp\left(\left|f\left(s,X_s,u_s\right)\right|^2\right)\right|^q \mathrm{d}s &\leq \mathbb{E}\int_0^T \exp\left(qK^2\left(1+\|X\|_T\right)^2\right)\mathrm{d}s \\
&\leq \exp\left(2qK^2\right)\mathbb{E}\int_0^T \exp\left(2qK^2\|X\|_T^2\right)\mathrm{d}s \\
&\leq T\exp\left(2qK^2\right)\mathbb{E}\exp\left(2qK^2\sup_{s\in[0,T]}|X_s|^2\right),
\end{aligned}$$

et, puisque σ est à croissance linéaire, il est bien connu que

$$\mathbb{E}\exp\left(2qK^2\sup_{s\in[0,T]}|X_s|^2\right)<\infty,$$

pour q assez petit. ■

Pour construire un contrôle stochastique, nous devons trouver une stratégie de contrôle admissible $\hat{u}\in\mathcal{U}$ pour notre contrôle stochastique. La fonction Hamiltonienne définie dans (6) atteint son "infimum" (l'infimum est le plus grand minimum) sur l'ensemble A à quelque $\hat{u}(t,x,p)\in\mathcal{U}$, pour tout $(t,x,p)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k$ donné, à savoir,

$$\inf_{u\in A}\mathcal{H}\left(t,x,u,p\right)=\mathcal{H}\left(t,x,\hat{u}\left(t,x,p\right),p\right).$$

Soit maintenant

$$\hat{\mathcal{H}}\left(t,x,z\right)=\inf_{u\in A}\mathcal{H}\left(t,x,u,z\right),$$

où X est la solution de (1). Soit $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ le processus construit comme dans le théorème 2.3.1 avec $(\hat{\mathcal{H}},g)$. En utilisant le théorème 2.3.1, alors il existe une paire unique $(Y_t,Z_t)_{t\in[0,T]}$ telle que

$$Y_t=g\left(X_T\right)+\int_t^T\hat{\mathcal{H}}\left(s,X_s,Z_s\right)\mathrm{d}s-\int_t^T Z_s\mathrm{d}W_s,\ t\in[0,T].$$

Théorème 3.2.1 *Le contrôle admissible $\hat{u}$ est optimal pour le contrôle stochastique, c'est-à-dire,*

$$\mathrm{J}(\hat{u}) = Y_0 \leq \mathrm{J}(u), \ \forall \ u \in \mathcal{U}.$$

De plus,

$$Y_0 = \inf_{u \in \mathcal{U}} \mathrm{J}(u) = \mathrm{J}(\hat{u}).$$

Preuve. Montrons que $Y_0 = \mathrm{J}(\hat{u})$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} Y_0 &= g(X_T) + \int_0^T \hat{\mathcal{H}}(s, X_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_0^T Z_s \mathrm{d}W_s \\ &= g(X_T) + \int_0^T h(s, X_s, \hat{u}(s, X_s, Z_s))\,\mathrm{d}s - \int_0^T Z_s dW_s^{\hat{u}}. \end{aligned}$$

Puisque $\left(\int_0^t Z_s dW_s^{\hat{u}}\right)_{t \in [0,T]}$ est une $\mathbb{P}^{\hat{u}}$-martingale, alors en prenant l'espérance on obtient

$$Y_0 = \mathbb{E}^{\hat{u}} Y_0 = \mathbb{E}^{\hat{u}} \left(g(X_T) + \int_0^T h(s, X_s, \hat{u}(s, X_s, Z_s))\,\mathrm{d}s \right),$$

car Y_0 est déterministe. Or $\mathbb{P}$-*p.s.*, et aussi $\mathbb{P}^{\hat{u}}$-*p.s.* (puisque ce sont des probabilités équivalentes), on a

$$Y_0 = \mathrm{J}(\hat{u}).$$

Montrons que $Y_0 \leq \mathrm{J}(u)$. Pour $u \in \mathcal{U}$, on a grâce au théorème de comparaison 1.7.3

$$\begin{aligned} Y_0 &= g(X_T) + \int_0^T \hat{\mathcal{H}}(s, X_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_0^T Z_s \mathrm{d}W_s \\ &\leq g(X_T) + \int_0^T \mathcal{H}(s, X_s, u_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_0^T Z_s \mathrm{d}W_s \\ &= g(X_T) + \int_0^T h(s, X_s, u(s, X_s, Z_s))\,\mathrm{d}s - \int_0^T Z_s \mathrm{d}W_s^u. \end{aligned}$$

Encore une fois $\left(\int_0^T Z_s \mathrm{d}W_s^u\right)_{t \in [0,T]}$ est une $\mathbb{P}^u$-martingale, alors en prenant l'espérance par rapport à $\mathbb{P}^u$ et en utilisant le fait que Y_0 est déterministe, on obtient

$$Y_0 = \mathbb{E}^u Y_0 \leq \mathbb{E}^u \left(g(X_T) + \int_0^T h(s, X_s, u(s, X_s, Z_s))\,\mathrm{d}s \right),$$

alors

$$Y_0 \leq \mathrm{J}(u).$$

Le théorème 3.2.1 est démontré. ■

3.3 Lien avec les EDSRs à croissance quadratique

Dans cette section, nous considérons une extension de la notion d'EDSRs au cas où la dépendance du générateur dans la variable z a une croissance quadratique. Le premier résultat d'existence et unicité dans ce contexte a été établi par M. Kobylanski dans sa thèse de doctorat en adaptant certaines techniques d'EDP. Les EDSRs quadratiques jouent un rôle important dans les applications. Dans cette section nous allons préciser une relation entre les EDSRs à croissance logarithmique et les EDSRs à croissance quadratique.

Définition 3.3.1 *Soient H, G deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant*

$$|G(z)| \leq b|z|^{\alpha}, \qquad et \qquad |H(y)| \leq a|y||\ln(|y|)|, \; a, \alpha, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

On dit alors que H a une croissance logarithmique en y et que G a une croissance :

i) *sous-linéaire en z si $\alpha \in]0,1[$,*

ii) *linéaire en z si $\alpha = 1$,*

iii) *sur-linéaire en z si $\alpha > 1$ (en particulière : quadratique pour $\alpha = 2$).*

Supposons dans ce qui suit que $\alpha = 2$ et $b = \frac{1}{2}$.

Considérons les deux EDSRs suivants :

$$Y_t = \xi + \int_t^T \left(aY_s + \frac{1}{2}|Z_s|^2 \right) \mathrm{d}s - \int_t^T Z_s \mathrm{d}W_s, \tag{7}$$

$$\bar{Y}_t = \exp(\xi) + \int_t^T a\bar{Y}_s \ln\left(\bar{Y}_s\right) \mathrm{d}s - \int_t^T \bar{Z}_s \mathrm{d}W_s, \tag{8}$$

où ξ est une variable aléatoire $\mathscr{F}_T$-mesurable et ξ, $\exp(\xi)$ sont L^p−intégrables pour $p = e^{\lambda T} + 1$. Dans la suite, nous allons montrer que pour résoudre une EDSR à croissance quadratique sous la forme (7), il est équivalent de résoudre une EDSR à croissance logarithmique en y.

Définition 3.3.2 *Le couple (Y, Z) est une solution de l'EDSR (7) si (Y, Z) satisfait l'EDSR (7) en $\mathbb{P}$-p.s. pour tout $t \in [0, T]$ et telle que $(Y, Z) \in \mathcal{S}^{e^{\lambda T}+1} \times \Lambda^2$.*

Théorème 3.3.1 *L'EDSR (7) admet une unique solution (Y, Z) si et seulement si l'EDSR (8) admet une unique solution $\left(\bar{Y}, \bar{Z}\right)$. De plus $\left(\bar{Y}, \bar{Z}\right) = \left(\exp(Y), Z\exp(Y)\right)$.*

Preuve.

Etape.1. Soit (Y,Z) une solution de l'EDSR (7). En appliquant la formule d'Itô à $y \to e^y$ on obtient

$$\begin{aligned} e^{Y_t} &= e^{Y_T} + \int_t^T e^{Y_s}(aY_s + \frac{1}{2}|Z_s|^2)\mathrm{d}s \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_t^T e^{Y_s}|Z_s|^2\mathrm{d}s - \int_t^T e^{Y_s}Z_s\mathrm{d}W_s \\ &= \exp(\xi) + a\int_t^T e^{Y_s}Y_s\mathrm{d}s - \int_t^T e^{Y_s}Z_s\mathrm{d}W_s \\ &= \exp(\xi) + \int_t^T a\bar{Y}_s\ln\bar{Y}_s\mathrm{d}s - \int_t^T \bar{Z}_s\mathrm{d}W_s. \end{aligned}$$

D'où

$$\bar{Y}_t = \exp(\xi) + \int_t^T a\bar{Y}_s\ln\bar{Y}_s\mathrm{d}s - \int_t^T \bar{Z}_s\mathrm{d}W_s.$$

Il est facile de voir que l'EDSR Eq$(\exp(\xi), y\ln y)$ satisfait les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) et donc d'après le théorème 2.3.1 elle possède une solution unique dans $\mathcal{S}^{e^{\lambda T}+1} \times \Lambda^2$.

Etape.2. Soit $(\bar{Y},\bar{Z})$ une solution de l'EDSR (8), on pose dans ce cas $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \longrightarrow \ln(x)$. On a alors

$$\varphi'_x(x) = \frac{1}{x}, \qquad \varphi''_{xx}(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Par la formule d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned} \ln(\bar{Y}_t) &= \ln(\bar{Y}_T) + \frac{1}{2}\int_t^T \frac{1}{\bar{Y}_s^2}|\bar{Z}_s|^2\mathrm{d}s \\ &\quad + a\int_t^T \frac{1}{\bar{Y}_s}\bar{Y}_s\ln\bar{Y}_s\mathrm{d}s - \int_t^T \frac{1}{\bar{Y}_s}\bar{Z}_s\mathrm{d}W_s \\ &= \xi + \frac{1}{2}\int_t^T |Z_s|^2\mathrm{d}s + a\int_t^T Y_s\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\mathrm{d}W_s \\ &= \xi + \int_t^T (aY_s + \frac{1}{2}|Z_s|^2)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\mathrm{d}W_s. \end{aligned}$$

C'est-à-dire que

$$Y_t = \xi + \int_t^T (aY_s + \frac{1}{2}|Z_s|^2)\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\mathrm{d}W_s.$$

Alors, de la 1ère étape et de la 2ème étape, le théorème est prouvé. ■

Conclusion

Le but de ce mémoire était d'étudier les équations différentielles stochastiques rétrogrades. Nous avons fait une étude simple pour le premier cas qui est dû à Pardoux et Peng [34] qui ont établi un résultat d'existence et unicité dans le cas où le générateur f uniformément Lipschitzien par rapport aux deux variables y et z et une condition terminale et le processus $\big(f(t,0,0)\big)_t$ de carré intégrable. La preuve est basée sur le théorème du point fixe. Le deuxième résultat a étudié le problème de l'existence et et l'unicité des solutions pour une EDSR dont le générateur f est de croissance logarithmique et continue en (y,z), et la condition terminale, L^p-intégrable pour certains $p>2$. La preuve est basée sur une procédure de localisation introduite dans [1, 2] et a été développée dans, [4]. L'idée de la preuve est d'approximer f par une suite de fonctions $(f_n)_n$ Lipschitziennes bornées en (y,z) et à croissance logarithmique qui converge en semi-normes vers f, ensuite, on va montrer que la solution (Y^{f_n},Z^{f_n}) de Eq(ξ,f_n), est converge dans $\mathcal{S}^\beta\times\mathcal{L}^1$ vers certain (Y,Z) qui est la solution de l'équation Eq(ξ,f_n) où $1<\beta<2$. De plus, nous étudions l'existence d'une stratégie optimale pour le contrôle stochastique de diffusion. Enfin, nous avons montré une relation liant les équations différentielles à croissance logarithmique avec les équations à croissance quadratique, ce qui signifie qu'on peut montrer l'existence d'une solution d'une EDSR à croissance quadratique via a solution d'une EDSR à croissance logarithmique.

Bibliographie

[1] Bahlali, K. (2001). Backward stochastic differential equations with locally Lipschitz coefficient. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics, 333 (5), 481 – 486.

[2] Bahlali, K. (2002). Existence and uniqueness of solutions for EDSRs with locally Lipschitz coefficient. Electronic Communications in probability, 7, 169 – 179.

[3] Bahlali, K. (2019). Solving unbounded quadratic BSDEs by a domination method. arXiv preprint arXiv :1903. 11325.

[4] Bahlali, K., & El Asri, B. (2012). Stochastic optimal control and EDSRs with logarithmic growth. Bulletin des Sciences Mathématiques, 136 (6), 617 – 637.

[5] Bahlali, K., Eddahbi, M. H., & Ouknine, Y. (2016). Quadratic BSDEs with L^2-terminal data. Krylov's inequality, Itô-Krylov's formula and some existence results. Annals of Probability.

[6] Bahlali, K., Eddahbi, M., & Ouknine, Y. (2013). Solvability of some quadratic BSDEs without exponential moments. Comptes Rendus Mathématique, 351 (5 – 6), 229 – 233.

[7] Bahlali, K., Kebiri, O., Khelfallah, N., & Moussaoui, H. (2017). One dimensional BSDEs with logarithmic growth application to PDEs. Stochastics, 89 (6 – 7), 1061 – 1081.

[8] Bismut, J. M. (1973). Analyse convexe et probabilités (Doctoral dissertation).

[9] Bismut, J. M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 44 (2), 384 – 404.4.

[10] Bismut, J. M. (1978). Contrôle des systemes linéaires quadratiques : applications de l'intégrale stochastique. In Séminaire de Probabilités XII (pp. 180 – 264). Springer, Berlin, Heidelberg.

[11] Briand, P. (2001). Equations différentielles stochastiques rétrogrades. Mars.

[12] Briand, P., & Elie, R. (2013). A simple constructive approach to quadratic BSDEs with or without delay. Stochastic processes and their applications, 123 (8), 2921 – 2939.

[13] Briand, P., Relepeltier, J. P., & San Martin, J. (2007). One-dimensional backward stochastic differential equations whose coefficient is monotonic in y and non-Lipschitz in z. Bernoulli, 13 (1),80 – 91.

[14] Buckdahn, R., Engelbert, H. J., & Yor, M. (2002). Stochastic Processes and Related Topics : Proceedings of the 12th Winter School, Siegmundsburg (Germany), February 27-March 4, 2000. CRC Press.

[15] Chitashvili, R. J. (1983). Martingale ideology in the theory of controlled stochastic processes. In Probability theory and mathematical statistics (pp. 73 – 92). Springer, Berlin, Heidelberg.

[16] Chitashvili, R. J., & Mania, M. G. (1987). Optimal locally absolutely continuous change of measure. Finite set of decisions. Part I. Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 21 (2) , 131 – 185.

[17] Chitashvili, R. J., & Mania, M. G. (1987). Optimal locally absolutely continuous change of measure. Finite set of decisions. Part II : optimization problems. Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 21 (3),187 – 229.

[18] Davis, M. H. A., & Varaiya, P. (1973). Dynamic programming conditions for partially observable stochastic systems. SIAM Journal on Control, 11 (2) , 226 – 261.

[19] Dermoune, A., Hamadene, S., & Ouknine, Y. (1999). Backward stochastic differential equation with local time. Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 66 (1 – 2) , 103 – 119.

[20] Eddahbi, M. H., & Ouknine, Y. (2002). Limit theorems for BSDE with local time applications to non-linear PDE. Stochastics and Stochastic Reports, 73 (1 – 2) , 159 – 179.

[21] El Karoui, N. E., & Quenez, M. C. (1997). Non-linear pricing theory and backward stochastic differential equations. In Financial mathematics (pp. 191 – 246). Springer, Berlin, Heidelberg.

[22] El Karoui, N., & Mazliak, L. (1997). Backward Stochastic Differential Equations. Pitman Research Notes in Mathematics Series 364. El-Karoui and S. Mazliak edts.

[23] El Karoui, N., Peng, S., & Quenez, M. C. (1997). Backward stochastic differential equations in finance. Mathematical finance, 7 (1) , 1 – 71.

[24] Hamadène, S. (1996). Equations différentielles stochastiques rétrogrades : Le cas localement lipschitzien. In Annales de l'IHP Probabilités et statistiques (Vol. 32, *No*.5, pp. 645–659). Gauthier-Villars.

[25] Hamadène, S. (2000). Multidimensional backward SDE's with uniformly continuous coefficient. Bernoulli, 9.

[26] Hamadene, S., & Lepeltier, J. P. (1995). Backward equations, stochastic control and zero-sum stochastic differential games. Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 54 (3 – 4) , 221 – 231.

[27] Hamadene, S., Lepeltier, J. P., & Peng, S. (1997). stochastic differential games. Backward stochastic differential equations, 364, 115.

[28] Kobylanski, M. (1997). Résultats d'existence et d'unicité pour des équations différentielles stochastiques rétrogrades avec des générateurs à croissance quadratique. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics, 324 (1) , 81 – 86.

[29] Kobylanski, M. (1998). Quelques applications de méthodes d'analyse non-linéaire à la théorie des processus stochastique (Doctoral dissertation, Tours).

[30] Kobylanski, M. (2000). Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth. the Annals of Probability, 28 (2) , 558 – 602.

[31] Laleuf, J. C. (2014). Processus et intégrales stochastiques : cours et exercices corrigés. Ellipses.

[32] Lepeltier, J. P., & Martín, J. S. (1998). Existence for BSDE with superlinear-quadratic coefficient. Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes,63 (3 – 4) , 227 – 240.

[33] Lepeltier, J. P., & San Martín, J. (2002). On the existence or non-existence of solutions for certain backward stochastic differential equations. Bernoulli, 123 – 137.

[34] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & Control Letters, 14 (1) , 55 – 61.

[35] Pardoux, E., & Peng, S. (1992). Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations. In Stochastic partial differential equations and their applications (*pp*. 200 – 217). Springer, Berlin, Heidelberg.

[36] Pardoux, E., & Râscanu, A. (2014). Stochastic differential equations, Backward SDEs, Partial differential equations (Vol. 69). Berlin : Springer.

[37] Peng, S. (1992, March). A nonlinear Feynman-Kac formula and applications. In Proceedings of Symposium of System Sciences and Control Theory (pp. 173 – 184). Singapore : World Scientific.

[38] Peng, S. (1993). Backward stochastic differential equations and applications to optimal control. Applied Mathematics and Optimization, 27 (2) , 125 – 144.

[39] Touzi, N., & Tourin, A. (2013). Optimal stochastic control, stochastic target problems, and backward SDE (Vol. 29). New York : Springer.

نُبْذَة مُخْتَصَرَة

نَهْتَمُّ فِي هَذِهِ الْمُذَكِّرَةِ بِدِرَاسَةِ الْمُعَادَلَاتِ التَّفَاضُلِيَّةِ ذَاتِ الْمُتَغَيِّرَاتِ الْعَشْوَائِيَّةِ وَالْمُزَوَّدَةِ بِقِيمَةٍ حَدِّيَّةٍ نِهَائِيَّةٍ حَيْثُ نَقُومُ بِدِرَاسَةِ وُجُودِ وَوَحْدَانِيَّةِ الْحَلِّ لِهَذَا النَّوْعِ مِنَ الْمُعَادَلَاتِ فِي حَالَةٍ مَا إِذَا كَانَ الْمَوَلِّدُ ذَا نُمُوٍ لُوغَارِيتْمِي وَالْقِيمَةُ الْحَدِّيَّةُ النِّهَائِيَّةُ عِبَارَةٌ عَنْ مُتَغَيِّرٍ عَشْوَائِي يَنْتَمِي لِلْفَضَاءِ $L^p(p>2)$. نُقَدِّمُ تَطْبِيقَيْنِ لِلنَّتِيجَةِ ، الْأَوَّلُ مُخَصَّصٌ لِمُشْكِلَةِ التَّحَكُّمِ الْعَشْوَائِيِّ الْأَمْثَلِ ، وَالثَّانِي عِبَارَةً عَنْ عَلَاقَةٍ بَيْنَ هَذَا النَّمَطِ الْأَخِيرِ مِنَ الْمُعَادَلَاتِ وَ الْمُعَادَلَاتِ ذَاتُ النُّمُوِّ التَّرْبِيعِيِّ.

Abstract

In this thesis, we are interested in the study of backward stochastic differential equations (BSDEs for short). More precisely, we establish an existence and uniqueness result for one type of BSDEs in the case were the generator is of logarithmic growth and an $L^p(p>2)$-integrable terminal condition. We give two applications for this result, the first is dedicated to the optimal stochastic control problem, and the second is a relation between BSDE with logarithmic growth and BSDE with quadratic growth.

Key words : BSDE, BSDE with logarithmic growth, Stochastic control, BSDE with quadratic growth.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSRs en abrégé). Plus précisément, nous établissons un résultat d'existence et unicité pour un type de EDSR dans le cas d'un générateur à croissance logarithmique et une condition terminale $L^p(p>2)$-intégrable. Nous donnons deux applications pour ce résultat, la première est dédiée au problème de contrôle stochastique optimal, et la deuxième est une relation entre les EDSRs à croissance logarithmique et à croissance quadratique.

Mots clés : EDSR, EDSR à croissance logarithmique, EDSR à croissance quadratique, contrôle stochastique.