République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

Master en Mathématiques

Option : Probabilités

Par

Hassouni Sabrina

Titre

Sur un problème d'optimisation stochastique : principe du maximum du Kushner

---

Membres du jurés :

Dr.	**Imad Eddine Lakhdari**	MC.A,	U.Biskra	**Président**
Pr.	**Mokhtar Hafayed**	Prof,	U.Biskra	**Encadreur**
Dr.	**Moufida Tabet**	MC.B,	U.Biskra	**Examinateur**

Juin 2022

Dédicace

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut, tous les mots ne sauraient

exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance mes chers parents

Je dédie ce modeste travail :

A mes parents.

A mes frères et sœurs et tous les membres de la famille Hassouni

A tous ceux qui ont veillés sur ma réussite durant les années d'étude.

A mes collègues sans exception.

HASSOUNI SABRINA ©2022

Remerciements

Je remercier Allah tout puissant qui nous donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce projet de fin d'étude.

Je tiens à présenter toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire **Pr. Mokhtar Hafayed** de m'avoir fait confiance pour travailler avec lui. Je le remercie infiniment pour sa

grande disponibilité et son soutien précieux.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à **Dr. Imad eddine Lakhdari** et **Dr. Moufida Tabet**, qui ont accepté d'être membres de jury de ce travail.

Je n'oublierais pas de remercier, tous ceux qui nous enseignés durant toutes notre études et en particuliers nos enseignants à l'université de Mohamed Khider Biskra.

Je tiens aussi à remercier tous les personnes qui nous ont encouragés pendant la réalisation de ce travail, famille, collège, amis, sans exception.

Résumé

Dans ce travail nous abordons une partie de la théorie de l'optimisation stochastique et le contrôle optimal stochastique. Notre étude principale est d'établir des conditions nécessaires d'optimalité sous forme du principe du maximum stochastique de type de Kushner. Plus précisement, on s'interesse par des systems stochastique avec des diffusions non controllée, c'est à dire, le coefficient de la diffusion σ ne contient pas la variable de contrôle $u(\cdot)$ et le domaine de contrôle n'est pas convexe.

Mots-clés : Equations différentielles stochastiques, équations adjoints, contrôle optimal, le principe de maximum stochastique.

Abstract

In this work, we touch on a part of the theory of stochastic optimization and stochastic optimal control. Our goal is to establish the necessary conditions of optimality in the form of a stochastic maximum principle of Kushner, for systems governed by stochastic differential equations. More precisely, we are interested in stochastic systems with uncontrolled diffusions, i.e, the coefficient of the diffusion σ does not contain the control variable $u(\cdot)$ and the control domain is not convex.

Keywords : Stochastic differential equations, adjoint equations, optimal contrôl, stochastic maximum principle.

Notations et symbols

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité filtré.
$\mathbb{L}^2$	:	L'espace des fonctions de carré intégrable.
$p.s$	:	Presque surement.
$\mathbb{P} - p.s$	:	Presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
càdlàg	:	Continue à droite admet une limite à gauche.
$W(t)$	:	Mouvement Brownien.
EDS	:	Èquation différentielle stochastique.
$J(u(\cdot))$	:	La fonction de coût à minimiser.
U_{ad}	:	Ensemble de contrôles admissibles.
$u(\cdot)$	:	Contrôle admissible.
u^*	:	Contrôle optimal.
u^ϵ	:	Contrôle perturbé.
$H(t, X, u, p)$	:	Hamiltonien.
$\mathbb{P} \otimes dt$	:	La mesure produit $\mathbb{P}$ avec la mesure de lebesgue sur $[0, T]$.
$\mathbb{M}^2$	:	$\begin{cases} \text{Espace des applications } \varphi \text{ mesurable, telque} \\ \varphi : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{E}\left(\int_0^T \varphi^2(s)\, ds\right) < \infty. \end{cases}$

1_B : L'indication sur B est noté : $1_B = \begin{cases} 1, \ x \in B, \\ 0, \ x \notin B \end{cases}$.

$p(t)$: Le processus adjoint.

min : Minimum.

lim : Limite.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques **(en abrégé EDSs)** à des multi applications importantes on réalité et qui produit de grands effets dans nombreux domaines, que ce soit la finance mathématique et le contrôle optimal. Alors il est naturel d'étudier le problème de contrôle optimal pour des systèmes gouverné par ce genre d'équations.

Dans ce travail, on s'interesse par un problème de contrôle optimal stochastique qui consiste a minimiser un fonction de coût donné comme suit

$$J\left(u\left(\cdot\right)\right)=\mathbb{E}\left[\gamma\left(X\left(T\right)\right)\right], \tag{1}$$

où $X(\cdot)$ est une solution d'un systeme gouverné par l'équation différentielle stochastique de la forme suivante :

$$\begin{cases} dX(t)=b\left(t,X(t),u(t)\right)dt+\sigma\left(t,X(t)\right)dW(t), \\ \\ X\left(0\right)=x, \end{cases} \tag{2}$$

où b s'appelle le drift et σ s'appelle le coefficient de diffusion et $W(t)$ un mouvement Brownien.

Dans le cadre de la théorie de contrôle optimal stochastique, notre objectif est d'obtenir des conditions nécéssaires d'optimalité, ces conditions sont connue ce le nom de principe de maximum stochastique de Kushner pour un systéme différentielle gouverné par une équation différentielle stochastique avec le drifte b contrôllé et le coefficient de diffusion σ ne contient pas le variable de contrôle. Le preuve de ce resultat est basé sur la perturbation fort et la formule d'Itô.

Ce travail est organisée de la maniére suivante :

1. Le premier chapitre est de nature introductif et permet d'introduire les concepts et résultats d'analyse stochastique outils essentiels pour les autres chapitres telles que, mouvement Brownien, l'integrale stochastique et les trois formules d'Itô.
2. Dans le deuxiéme chapitre, on s'intéresse au problème d'existence et d'unicité de solution et les differentes classe de contrôle stochastique telles que contrôle approchés, contrôle relaxé et contrôle singulier,...ect.
3. Dans le troisieme chapitre, nous commencons par présenter les résultats principaux des contrôles stochastiques de façons générales. Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de principe du maximum stochastique où le syteme différentielle est gouverné par des EDSs. Pour cela, on suppose que le contrôle optimal existe et que la fonction coût $J(u(\cdot))$, est différentiable et accepte une minimum en $u^*(\cdot)$ qu'on appelera contrôle optimal. L'intérêt de la perturbation du contrôle optimal $u^*(\cdot)$ est d'introduire un contrôle $u^\epsilon(\cdot)$ sur laquelle nous pourrons dériver la fonction de coût $J(u^\epsilon(\cdot))$. Le domaine de contrôle n'est pas supposé convexe. Les conditions nécéssaires vérifiées par le contrôle $u^*(\cdot)$ appelera Principe du maximum.

Chapitre 1

Généralités sur le calcul stochastique

$\mathcal{L}$'objectif de ce chapitre est d'étudier brièvement tous les outils mathématique consernant le calcul stochastique dont nous aurons besoin dans la suite du mémoire. Nous nous sommes utilisé les références [1, 9, 12], et le livre de Yong & Zhou [15] qui sont trés pédagogiques.

1.1 Mouvement Brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Définition 1.1.1 ***Mouvement Brownien [15] :*** *Un processus à valeur réelles est dit un mouvement Brownien standard (issu de* 0*) par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si et seulement si :*

i) $W_0 = 0$, $\mathbb{P} - p.s$ $W(t)$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$adapté à trajectoire continue.

ii) Les accroissement de mouvement Brownien sont indépendants de $\mathcal{F}_s$.

iii) $\forall 0 \leq s \leq t$, $W(t) - W(s) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, t-s)$.

Theoréme 1.1.1 *Le mouvement Brownien est un processus Markovien, c'est à dire pour f une application borélienne bornée,*

$$\mathbb{E}\left(f\left(W(u)\right) \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left(f\left(W(u)\right) \mid \sigma\left(W(t)\right)\right) \text{ pour } u > t.$$

Preuve. (Voir Monique [9] et livre de Yong & Zhou [15]). ■

Propriétés de mouvement Brownien :

Proposition 1.1.1 *Soit W un mouvement Brownien standard, alors*

1. $\left(-W\left(t\right)\right)_{t\succeq 0}$ est aussi un mouvement Brownien.
2. $\forall s > 0$, $\left\{W(t+s) - W(s)\right\}_{t\succeq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant de $\sigma\left\{W(r), r \leq s\right\}$.
3. $\forall \alpha > 0$, $\left\{\alpha W(\frac{t}{\alpha^2})\right\}_{t\geq 0}$ est aussi un mouvement Brownien.
4. Le processus défini par $W\left(0\right) = 0$ et $W\left(t\right) = tW\left(\frac{1}{t}\right)$ est un mouvement Brownien.

Propriétés des trajectoires :

Theoréme 1.1.2 *Si W est un mouvement Brownien, alors on a en $\mathbb{P}-$présque surement :*

1. $t \rightarrow W(t)$ n'est a variation finie sur aucun intervalle.
2. $t \rightarrow W(t)$ est localement hölderienne d'ordre a pour tout $a \prec \frac{1}{2}$.
3. $t \rightarrow W(t)$ n'est dérivable en aucun points ni localement hölderienne d'ordre $a \geqslant \frac{1}{2}$.

Preuve. (Voir [9]). ■

Proposition 1.1.2 *Si W est un mouvement Brownien, alors $(\Delta_t)_{t\geq 0} = (W^2(t) - t)_{t\geq 0}$ est $(\Theta_t)_{t\geq 0} = \left\{\exp\left(\alpha W(t) - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)\right\}_{t\geq 0}$ avec α un réel, sont des martingales.*

Preuve. (1) $(\Delta_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale ?

i) Comme$\forall t \geq 0$, Δ_t c'est une fonction continue de $W(t)$ alors $\forall t \geq 0$, Δ_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

ii) $\mathbb{E}\left|\Delta_t\right| \leq \mathbb{E}\left|W^2(t)\right| + t < \infty$.

iii) $\forall s \leq t$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\Delta_t \middle| \mathcal{F}_s\right) \\
&= \mathbb{E}\left((W(t) - W(s) + W(s))^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left((W(t) - W(s))^2 + 2W(s)(W(t) - W(s)) + W^2(s) - t\right) \middle| \mathcal{F}_s\right) \\
&= \mathbb{E}\left((W(t) - W(s))^2\right) + 2W(s)\,\mathbb{E}\left((W(t) - W(s)) \middle| |\mathcal{F}_s\right) + W^2(s) - t \\
&= t - s + 2W(s) \times 0 + W^2(s) - t. \\
&= W^2(s) - s = \Delta_s.
\end{aligned}$$

Alors $(\Delta_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $-$martingale.

2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (\Theta_t)_{t\geq 0}$ est martingale ?

i) Comme $\forall t \geq 0$, $\Theta_t = \exp\left(\alpha W(t) - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)$ c'est une fonction continue de $W(t)$ alors $\forall t \geq 0$, Θ_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

$ii)$ intégrabilité de Θ_t

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Theta_t\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha W(t) - \frac{\alpha^2}{2}t\right)\right], \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}t\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right) dx, \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}t - \frac{-x^2}{2t}\right) dx, \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{\alpha^2 t^2 + x^2 - 2\alpha x t}{2t}\right) dx, \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-\alpha t)^2}{2t}\right) dx = 1 < \infty.
\end{aligned}$$

$iii)$ $\forall s \leq t,$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\Theta_t | \mathcal{F}_s\right] &= \Theta_s \mathbb{E}\left(\left.\frac{\Theta_t}{\Theta_s}\right| \mathcal{F}_s\right), \text{ car } \Theta_s \text{ est un processus non nul et adapté,} \\
&= \Theta_s \mathbb{E}\left(\left.\left(\exp\left(\alpha\left(W(t) - W(s)\right) - \frac{\alpha^2}{2}\left(t-s\right)\right)\right)\right| \mathcal{F}_s\right), \\
&= \Theta_s \mathbb{E}\left[\left(\exp\left(\alpha\left(W(t) - W(s)\right) - \frac{\alpha^2}{2}\left(t-s\right)\right)\right)\right], \\
&\text{(car } W(t) - W(s) \text{ indépendent à } \mathcal{F}_s, \text{)} \\
&= \Theta_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t-s\right)}} \exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}\left(t-s\right)\right) \exp\left(\frac{-x^2}{2\left(t-s\right)}\right) dx, \\
&= \Theta_s \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t-s\right)}} \exp\left(-\frac{\left(x - \alpha\left(t-s\right)\right)^2}{2\left(t-s\right)}\right) dx \\
&= \Theta_s \times 1 = \Theta_s,
\end{aligned}$$

alors $\left(\Theta_t\right)_{t\geq 0}$ est une $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}$ $-$martingale. $\blacksquare$

Définition 1.1.2 *[14, page 50]* ***La variation infinitésimale*** *d'ordre q d'un processus A_t associée à une subdivision $\Theta_n = (t_1^n, t_2^n..., t_n^n)$ est défini par*

$$V_T^q(\Theta_n) = \sum_{i=1}^{n} \left| A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n} \right|^q \qquad X_t \in [0, T].$$

Si $V_T^q(\Theta_n)$ admet une limite dans un certain sens (converge presque sûrement, converge $\mathbb{L}_q$) lorsque :

$$\Theta_n = ||\Theta_n||_\infty = \sup_{i \geq 1} \left| t_{i+1}^n - t_i^n \right| \underset{n \to \infty}{\to} 0.$$

Maintenant on note la variation d'ordre q de A_t sur $[0, t]$.

$$V_T^q = \lim_{||\Pi_n||_\infty \to 0} V_T^{qq}(\Theta_n), \text{ tel que } ||\Theta_n||_\infty = \sup_{i \geq 1} \left| t_{i+1}^n - t_i^n \right|, \tag{1.1}$$

en particulier :

Si $q = 1$, la limite 1.1 s'appelle **la variation totale** de A_t sur $[0, T]$.

Si $q = 2$, la limite 1.1 s'appelle **la variation quadratique** de A_t sur $[0, T]$ et on la note $V_T^2 = \langle A, A \rangle_T$.

Variation bornée : Un processus A_t est à variation bornée sur $[0, T]$ s'il est à variation bornée trajectoire par trajectoire, c'est à dire que

$$\sup_{\Theta_n} \sum_{i=1}^{n} \left| A_{t_i} - A_{t_{i-1}} \right| < +\infty, \qquad \mathbb{P}-p.s.$$

1. La variation quadratique d'un **mouvement Brownian** sur $[0, T]$ existe

dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et vaut T, c-à-d

$$V_T^2 = \langle W, W \rangle_T = T, \qquad \mathbb{P}-p.s.$$

2. Si A est à variations bornée et à trajectoire continue alors

$$V_T^2 = \langle A, A \rangle_T = 0, \qquad \mathbb{P}-p.s.$$

1.2 L'intégrale stochastique

$\mathcal{L}$e but de ce section est de définir integrale $\int_0^t \alpha(s)dW(s)$. Ceci n'est pas évident car les trajectoires du mouvement Brownien ne sont pas à variation total finie.

1.2.1 L'integrale de Wiener

[9] $\mathcal{S}$oient $(W(t))_t$ est un mouvement Brownien et α une fonction de temps t. L'integrale $\beta_t(\alpha) = \int_0^t \alpha(s)dW(s)$ s'appelle l'intégrale de Wiener. On definie maintenant l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+)$: l'ensemble des tout applications mesurable défini sur $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^t \alpha(s)^2 ds < +\infty$.

Le cas d'une fonction étagée

Si $\alpha(t) = \sum_{i=1}^n \alpha(i-1) 1_{]t_{i-1},t_i[}$, alors on a toujours

1. $\beta_t : \alpha \longrightarrow \int_0^t \alpha(s) dW(s)$. est linéaire,
2. $t \longrightarrow \beta_t(\alpha) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \int_0^t \alpha(s)^2 ds = ||\alpha||^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+)}\right)$.
3. $\beta_t(\cdot)$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale,
4. Le processus $\beta_t^2(\alpha) - \int_0^t \alpha(s)^2 ds$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale.

Preuve.

1. On va montrer $\beta_t(\alpha_1+\alpha_2)=\beta_t(\alpha_1)+\beta_t(\alpha_2)$.

2. $\mathbb{E}\left[\beta_t(\alpha)\right]=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha(i-1)\,\mathbb{E}\left[W(t_i)-W(t_{i-1})\right]=0.$

Maintenant on va montrer que $\mathbb{VAR}(\beta_t(\alpha))=\mathbb{E}\left(\int_0^t\alpha(s)^2\,ds\right)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{VAR}\left(\beta_t(\alpha)\right)&=\mathbb{E}\left[\beta_t^2(\alpha)\right]\\&=\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{i=n}\alpha(i-1)\left(W(t_i)-W(t_{i-1})\right)\right)^2\right],\\&=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha^2(i-1)\,\mathbb{E}\left(\left(W(t_i)-W(t_{i-1})\right)^2\right),\\&=\sum_{i=1}^{i=n}\alpha^2(i-1)\left(t_i-t_{i-1}\right)=\int_0^t\alpha^2(s)\,ds.\end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 *Si f et g sont des fonction en escalier, on a*

(a)

$$\mathbb{E}\left[\beta_t(f)\,\beta_t(g)\right]=\int_0^t f(s)\,g(s)\,ds=\langle f,g\rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+)}.$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{VAR}\left(\beta_t(f+g)\right)&=\mathbb{VAR}\left(\beta_t(f)\right)+\mathbb{VAR}\left(\beta_t(g)\right)+2\mathbb{E}\left[\beta_t(f)\,\beta_t(g)\right],\\&=\int_0^t f(s)^2\,ds+\int_0^t g(s)^2\,ds+2\int_0^t f(s)\,g(s)\,ds,\\&=\int_0^t\left(f(s)+g(s)\right)^2ds=\left|\left|f+g\right|\right|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Le cas d'une fonction quelconque

Si on a une fonction $g \in \mathbb{L}^2([0,T])$ alors il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier tel que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t |g_n(s) - g(s)|^2 \, ds = 0, \text{ dans } \mathbb{L}^2([0,T]).$$

La suit $\beta_t^n(g_n) = \int_0^t g_n(s)\, dW(s)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Comme $\mathbb{L}^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert alors il existe $\beta_t(g) = \int_0^t g(s)\, dW(s) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$. Alors :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^t g_n(s)\, dW(s) = \int_0^t g(s)\, dW(s), \text{ dans espace } \mathbb{L}^2(\Omega).$$

Proposition 1.2.2 *Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+)$, $\Theta(f) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$.*

1. L'application $g \longrightarrow \beta_t(g)$ est linéaire et isométrique de $\mathbb{L}^2([0,T])$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ telle que

$$\beta_t(f+g) = \beta_t(f) + \beta_t(g) \text{ et } ||\beta_t(g)||_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = ||g||_{\mathbb{L}^2([0,T])}.$$

2. $\mathbf{E}[\beta_t(f)\beta_t(g)] = \int_0^t f(s)\, g(s)\, ds$.
3. Soit $g \in \mathbb{L}^2([0,T])$, alors $\beta_t(g) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \int_0^t |g(s)|^2 \, ds\right)$.
4. $\mathbf{E}\left[W(t)\int_0^t g(s)\, dW(s)\right] = \int_0^t g(s)\, ds$.

1.2.2 Intégrale stochastique d'Itô

$\mathcal{M}$aintenant en généralisant l'intégrale de Wiener. L'objectif dans ce paragraphe est de definir $\int_0^t \theta(s)\, dW(s)$ avec $(\theta(s))_s$ un processus processus donnés (Voir [15]).

Cas des processus étagé

Définition 1.2.1 *Un processus* $(\theta(t))_{0\leq t\leq T}$ *est dit élémentaire s'il existe une subdivision* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ *et un processus discret* $(\alpha(i))_{0\leq i\leq n-1} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ *telque* $\alpha(i)$ *est* $\mathcal{F}_{t_i}-$*mesurable et que* $\theta(t,\omega) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha(i)\, \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}[}(t)$*. L'integrale* $\pi = \int_0^t \theta(s)\, dW(s)$ *d'un processus élémentaire* $\alpha(i)$ *est un variable aléatoire telque*

$$\pi_t = \sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha(i)\left(W\left(\min(t,t_{i+1})\right) - W\left(\min(t_i,t)\right)\right).$$

Maintenant nous associons à un processus θ élémentaire le processus

$$\pi_t = \left(\int_0^t \theta(s)\, dW(s)\right)_{0\leq t\leq T}.$$

Proposition 1.2.3 *Si* $(\theta(t))_{0\leq t\leq T}$ *est un processus élémentaire, alors* $\mathbb{E}(\pi_t) = 0$ *et* $\mathbb{VAR}(\pi_t) = \mathbf{E}\left(\int_0^t \theta^2(s)\, ds\right) = ||\theta||^2_{\mathbb{L}^2([0,T])}$.

Cas général

Soit Γ espace des processus θ càglàd "continue à gauche avec une limite à droite" tel que $\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta^2(s)\, ds\right) < +\infty$.

Le processus étagé appartient a Γ, on dit que $\theta^n \to \theta$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega\times[0,T])$ si $\mathbb{E}\int_0^t |\theta^n(s) - \theta(s)|^2\, ds \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. On sait que $\mathbb{L}^2(\Omega\times[0,T], \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert (donc complet).

Donc on peut définir pour tout $\theta\in\Gamma$, $\int_0^t \theta(s)\, dW(s)$. Si $\theta\in\Gamma$, il exist un processus étagés θ^n : telle que $\theta^n(s) = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\theta}_j^n 1_{[t_j,t_{j+1}[}$; $\tilde{\theta}_j^n$ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{t_j}$,tel que $\lim_{n\to\infty} \theta^n(s) = \theta(s)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega\times[0,T])$.

On sait que $\int_0^t \theta^n(s)\, dW(s)$ existe est égale à $\sum_{j=0}^{n-1} \tilde{\theta}_j^n\left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)$.

On définit $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^t \theta^n(s)\,dW(s) \triangleq \int_0^t \theta(s)\,dW(s)$ dans espace $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Alors

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta(s)\,dW(s)\right) = 0,\ \mathbb{VAR}\left(\int_0^t \theta(s)\,dW(s)\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta^2(s)\,ds\right),$$

puisque

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \theta^n(s)\,dW(s)\right) = 0,\ \mathbb{VAR}\left(\int_0^t \theta^n(s)\,dW(s)\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t (\theta^n(s))^2\,ds\right).$$

On note Λ l'ensemble $\mathbb{L}^2_{loc}(\Omega\times[0,T]) = \left\{\theta \text{ adapté càglàd, } \forall t>0,\ \mathbf{E}\left(\int_0^t \theta^2(s)\,ds\right) < \infty\right\}$.

Proposition 1.2.4 *Soit $\theta \in \Lambda$ et $\beta \in \Lambda$ deux processus, soit a et b deux constants*

$$\int_0^t (a\theta(s) + b\beta(s))\,dW(s) = a\int_0^t \theta(s)\,dW(s) + b\int_0^t \beta(s)\,dW(s).$$

Propriéte de martingale

Proposition 1.2.5 *Soit $M_t = \int_0^t \theta(s)\,dW(s)$, $\theta \in \Lambda$.*

a) $(M_t)_t$ est une martingale continue.

b) $N_t = \left(\left(\int_0^t \theta(s)\,dW(s)\right)^2 - \int_0^t \theta^2(s)\,ds\right)_t$ est une martingale.

Corollaire 1.2.1 1) $\mathbb{E}(M_t) = 0$, $\mathbb{VAR}(M_t) = \mathbb{E}\int_0^t \theta^2(s)\,ds$.

2) $\mathbf{E}\left(\int_0^t \theta(s)\,dW(s) \times \int_0^t \sigma(s)\,dW(s)\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t \theta(s)\,\sigma(s)\,ds\right)$, *pour tout θ, $\sigma \in \Lambda$.*

3) $\left(\int_0^t \theta(s)\,dW(s) \times \int_0^t \sigma(s)\,dW(s) - \int_0^t \theta(s)\,\sigma(s)\,ds\right)_t$ *est une martingale, pour tout θ, $\sigma \in \Lambda$.*

1.2.3 Intégrale par rapport a un processus d'Itô

Processus d'Itô (Voir [9])

Définition 1.2.2 *On dit que un processus* $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ *à valeur réelle est un processus d'itô si :*

$$\forall 0\leq s\leq t,\ X(t)=x+\int_0^t b(s)\,ds+\int_0^t \sigma(s)\,dW(s),\qquad \mathbb{P}-p.s, \tag{1.2}$$

avec x *est* $\mathcal{F}_0-$*mesurable,* b *et* σ *sont deux processus progressivement mesurable vérifiant :*

$$\int_0^T |b(s)|ds<+\infty \ \ et \ \int_0^T ||\sigma(s)||^2 ds<+\infty,\ \ avec\ ||\sigma||=trace(\sigma\sigma^*),$$

le coefficient b *est le drift,* σ *est le coefficient de diffusion.*

Remarque 1.2.1 *En peut écrire l'equation* (1.2) *d'une maniére différentiale comme :*

$$\begin{cases} dX(t)=b(t)\,dt+\sigma(t)\,dW(t),\\ X(0)=x. \end{cases}$$

Définition 1.2.3 *Soitent* $X(t)$ *et* $Y(t)$ *des processus d'Itô definie par*

$$\begin{cases} dX(t)=b(t)\,dt+\sigma(t)\,dW(t),\\ \qquad\qquad et\\ dY(t)=b'(t)\,dt+\sigma'(t)\,dW(t). \end{cases}$$

Alors, les variation quadratiques sur $[0,t]$ *sont donnée par*

$$\langle X,X\rangle_t=\int_0^t \sigma(s)^2\,ds,\qquad \langle Y,Y\rangle_t=\int_0^t (\sigma'(s))^2\,ds,$$

et la covariation quadratique entre $X(t)$ et $Y(t)$ est donnée par :

$$\langle X, Y\rangle_t = \int_0^t \sigma(s)\,\sigma'(s)\,ds.$$

Définition 1.2.4 *Soit $\theta \in \Lambda$ et $X(t)$ est un processus d'itô, alors*

$$\int_0^t \theta(s)\,dX(s) \triangleq \int_0^t \theta(s)\,b(s)\,ds + \int_0^t \theta(s)\,\sigma(s)\,dW(s).$$

1.3 Formule d'Itô

La premiére formule d'Itô : (Voir **[10, page 49]).**

Theoréme 1.3.1 *Soit $(X(t))_{0\leq t\leq T}$ un processus d'Itô, telque :*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s)\,ds + \int_0^t \sigma(s)\,dW(s),$$

et $f \in \mathbb{C}^2$ c'est à dire est une fonction deux foix continûement différentiabl, alors

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))\,dX(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))\,d\langle X, X\rangle_s,$$

oú, par définition

$$\int_0^t f'(X(s))\,dX(s) = \int_0^t f'(X(s))\,b(s)\,ds + \int_0^t f''(X(s))\,\sigma(s)\,dW(s),$$

et la variation quadratique

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t \sigma(s)^2\,ds.$$

La deuxiéme formule d'Itô : (Voir [**10, page 50**]).

Theoréme 1.3.2 *Si $(t, x) \to f(t, x)$ est une fonction deux foix continûement différentiable en x et une fois continûement différentiable en t cés dérivées étant continus en (t, x), $f \in \mathcal{C}^{1,2}$, ona :*

$$
\begin{aligned}
f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) + \int_0^t f'_s(s, X(s))\, ds + \int_0^t f'_x(s, X(s))\, dX(s) \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X(s))\, d\langle X, X\rangle_s, \\
&= f(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X(s))\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))\, dX(s) \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}(s, X(s))\, d\langle X, X\rangle_s.
\end{aligned}
$$

La troisiéme formule d'Itô : (Voir [**10, page 51**])

Theoréme 1.3.3 *Soient X^1 et X^2 deux processus d'Itô issus de x_1 (resp de x_2) de coefficient de dérive b^1 (resp b^2), de coefficient de diffusion σ^1(resp σ^2) et portées respectivement par deux Browniens W^1 et W^2 corrélés avec coefficient ρ. On suppose que b^i, σ^i sont $\left(\mathcal{F}_t^{Bi}\right)$-adaptés.*

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^2$ à dérivées bornées. On a :

$$
\begin{aligned}
f\left(X^1(t), X^2(t)\right) &= f(x_1, x_2) + \int_0^t f'_1\left(X^1(s), X^2(s)\right) dX^1(s) + \int_0^t f'_2\left(X^1(s), X^2(s)\right) dX^2(s) \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \{ f''_{11}\left(X^1(s), X^2(s)\right) \left(\sigma^1(s)\right)^2 \\
&+ 2\rho f''_{12}\left(X^1(s), X^2(s)\right) \sigma^1(s)\, \sigma^2(s) \\
&+ f''_{22}\left(X^1(s), X^2(s)\right) \left(\sigma^2(s)\right)^2 \} ds,
\end{aligned}
$$

où f'_i désigne la dérivée par rapport à x_i et f''_{ij} la dérivée seconde par rapport à x_j puis x_i, $i, j = 1, 2$.

Proposition 1.3.1 ***(Formule intégration par partie) :*** *Soient X et Y deux processus d'Itô, on a :*

$$\begin{cases} X(t) = X(0) + \int_0^t b(s)\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, dW(s), \\ Y(t) = Y(0) + \int_0^t \acute{b}(s)\, ds + \int_0^t \acute{\sigma}(s)\, dW(s). \end{cases}$$

Alors d'aprés la troisième formule d'Itô, on a :

$$X(t)\, Y(t) = X(0)\, Y(0) + \int_0^t X(s)\, dY(s) + \int_0^t Y(s)\, dX(s) + \int_0^t d\,\langle X, Y\rangle_s\,,$$

tel que : $\langle X, Y\rangle$ s'appele le crôchet de X et Y.

Remarque 1.3.1 *La formule d'integration par partie est une exemple d'application de la troisième formule d'Itô.*

Chapitre 2

Equation différentielle stochastique et classes de contrôle

2.1 Equation différentielle stochastique

Pour modèlisé un phénoméne mathématique qui exprime une équation différentielle perturbée par le bruit aléatoire, nous allons définir un nouveau type d'équation différentielle appelée équations différentielles stochastique.[1, 9]. Nous allons maintenant présenter une équation différentielle ordinaire de la forme :

$$dX(t) = b(X(t))dt.$$

cette type d'équation est utilisée pour exprimer l'évolution de certains systèmes. Si nous ajoutons le terme aléatoire représenté par $\sigma dW(t)$, où $W(t)$ désigne un mouvement Brownien et σ est une constante. On trouve une équation différentielle perturbée par le bruit aléatoire de la forme :

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma dW(t).$$

Par le même principe, on peut généraliser l'équation précédente en faisant des facteurs b et σ liés au temps t et aussi prend σ à dépendre de l'état à l'instant t, on obtient :

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \qquad 0 \leq t \leq T,$$

telle que : Le coefficient b s'appelle le drift et σ s'appelle la diffusion.

2.1.1 Existence et l'unicité d'solution

Notations

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet, $(W(t))_{t\geq 0}$ désigne un mouvement Brownien à valeur dans $\mathbb{R}^d$ et x une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^n$.

Soient n et m des entiers positif et soient aussi b et σ deux fonctions de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}$ donnée par :

$$b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } \qquad \sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{M}^{n\times m},$$

où $\mathbb{M}^{n\times m}$ désigne l'ensemble des matrices $n \times m$

Notre objective est de résoudre l'équation differentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \qquad 0 \leq t \leq T, \\ X(0) = x. \end{cases} \tag{2.1}$$

La solution de l'équation (2.1) est un processus X continue $\mathcal{F}_t$-adapté telle que les deux integrales suivantes :$\int_0^t b(s, X(s))ds$, et $\int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s)$ ont une sens et l'égalité

$$X(t) = x + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s), \qquad 0 \leq t \leq T.$$

est satisfaite $\forall t \ \ \mathbb{P}.p.s.$

Quelle sont les conditions doit on appliquer sur le drift b et le diffusion σ pour trouver une solution de l'équation (2.1) et de plus cette solution est unique.

Maintenant on donne le théoreme qui permet davoir l'existence et unicité d'une solution de (2.1) .

Théoreme d'existence et d'unicité

Conditions : On suppose que

$(\mathbf{H}_1)$ Les deux fonctions b et σ sont continues.

$(\mathbf{H}_2)$ Il existe un constante strictement positive C telle que $\forall t \in [0, T]$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} (i) \ \ |b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq C|x-y|, \\ (ii) \ \ |b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq C(1+|x|^2). \end{cases}$$

$(\mathbf{H}_3)$ la condition initiale $X(0) = x$ est indépendante de $(W(t))_{t\geq 0}$ et de carré intégrable i.e: $\mathbb{E}\left[X^2(0)\right] < +\infty$.

Theoréme 2.1.1 *Sous l'hypothése* $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ *et* $(\mathbf{H}_3)$, *l'équatios (*2.1) *posséde une unique solution à trajectoire continue pour tout* $t \leq T$. *De plus cette solution verifier* $\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |X(t)|^2) < +\infty$.

Preuve. L'existence : Pour obtenir l'existence d'solution il y'a deux méthode (itération de Picart et théorem de point fixe).

Nous avons décidé d'utiliser la méthode d'approximation de Picard dans la preuve. En définissant la suite $(X^n)_{n\geq 0}$ telleque $X^0 = x$ et $(X^{n+1})_{n\geq 0}$ est la solution du système de **l**'équations differentielle stochastique suivantes :

$$X^{n+1}(t) = x + \int_0^t b(s, X^n(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X^n(s))dW(s). \tag{2.2}$$

Vérifiant d'abord par récurrence sur n qu'il existe une constante C_n telle que pour tout $t \in [0, T]$:

$$\mathbb{E}\left|X^n(t)\right|^2 \leq C_n.$$

Supposons que $\mathbf{E}\left[\left|X^n(t)\right|^2\right] \leq C_n$. et nous montrons que $\mathbf{E}\left|X^{n+1}(t)\right|^2 \leq C_{n+1}$. On a

$$\left|X^{n+1}(t)\right|^2 = \left|x + \int_0^t b\left(s, X^n(s)\right)ds + \int_0^t \sigma\left(s, X^n(s)\right)dW(s)\right|^2.$$

Par l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$, on trouver l'estimation suivante :

$$\left|X^{n+1}(t)\right|^2 \leq 3\left(|x|^2 + \left|\int_0^t b\left(s, X^n(s)\right)ds\right|^2 + \left|\int_0^t \sigma\left(s, X^n(s)\right)dW(s)\right|^2\right).$$

Par passage a l'espérance mathématique, on obtient :

$$\mathbb{E}\left|X^{n+1}(t)\right|^2 \leq 3\left(\mathbb{E}|x|^2 + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \left|b\left(s, X^n(s)\right)\right|ds\right)^2\right]\right) + \mathbb{E}\left[\left(\left|\int_0^t \sigma\left(s, X^n(s)\right)dW(s)\right|\right)^2\right]. \tag{2.3}$$

Par l'isometrie d'Itô et l'hypothése $(H_2)\,(ii)$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\left|\int_0^t \sigma\left(s, X^n\left(s\right)\right) dW(s)\right|\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\sigma\left(s, X^n\left(s\right)\right)\right|^2 ds\right], \\
&\leq C^2 \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(1 + X^n\left(s\right)\right) ds\right], \qquad (2.4) \\
&= C^2 \int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\left[\left|X^n\left(s\right)\right|^2\right]\right) ds.
\end{aligned}$$

Et par l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t b\left(s, X^n\left(s\right)\right) ds\right)^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t ds\right)\left(\int_0^t \left|b\left(s, X^n\left(s\right)\right)\right|^2 ds\right)\right], \\
&\leq T\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|b\left(s, X^n\left(s\right)\right)\right|^2 ds\right], \\
&\leq TC^2\left[\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\left|X^n\left(s\right)\right|^2\right) ds\right]. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Retour à l'équation (2.3) et en substituant les deux estimations (2.4) et (2.5) dans (2.3), et comme x est un variable aléatoire de carré intégrable alors on trouve estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|X^{n+1}\left(t\right)\right|^2\right] &\leq 3\left(\mathbb{E}\left|x\right|^2 + TC^2\left[\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\left|X^n\left(s\right)\right|^2\right) ds\right] + C^2\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\left|X^n\left(s\right)\right|^2\right) ds\right), \\
&\leq 3\left(\mathbb{E}\left|x\right|^2 + C^2\left(T+1\right)\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\left|X^n\left(s\right)\right|^2\right) ds\right), \\
&\leq 3\left(\mathbb{E}\left|x\right|^2 + C^2\left(T+1\right)T\left(1 + C_n\right)\right) = C_{n+1}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve

$$\mathbb{E}\left|X_t^{n+1}\right|^2 < \infty.$$

Maintenat on va majorer par recurrence la quantité suivante : $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{t\in[0,t]} \left|X^{n+1}\left(t\right) - X^n\left(t\right)\right|^2\right]$.

En utilisant de l'équation (2.2) on obtient

$$
\begin{aligned}
X^{n+1}(t) - X^{n}(t) = & \int_0^t \left(b\left(s, X^{n}(s)\right) - b\left(s, X^{n-1}(s)\right)\right) ds \\
& + \int_0^t \left(\sigma\left(s, X^{n}(s)\right) - \sigma\left(s, X^{n-1}(s)\right)\right) dW(s).
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inegalité de Doob, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s) - X^{n}(s)\right|^2\right] \quad & \leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \left|b\left(s, X^{n}(s)\right) - b\left(s, X^{n-1}(s)\right)\right| ds\right)^2\right] \\
& +2\mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma\left|\left(s, X^{n}(s)\right) - \sigma\left(s, X^{n-1}(s)\right)\right|^2 ds\right].
\end{aligned}
$$

L'inégalité de **Cauchy-Schwartz** donne estimation suivante :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s) - X^{n}(s)\right|^2\right] \quad & \leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|b\left(s, X^{n}(s)\right) - b\left(s, X^{n-1}(s)\right)\right|^2 ds\right] \\
& +2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\sigma\left(s, X^{n}(s)\right) - \sigma\left(s, X^{n-1}(s)\right)\right|^2 ds\right],
\end{aligned}
$$

D'aprés l'hypothése $(H_2)(i)$, on obtient pour tout $s \in [0, t]$:

$$
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s) - X^{n}(s)\right|^2\right] \leq 2(T+1)C^2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|X^{n}(s) - X^{n-1}(s)\right|^2 ds\right].
$$

Par conséquance on trouver :

$$
\mathbb{E}\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s) - X^{n}(s)\right|^2 \leq \underbrace{2(T+1)C^2}_{=C}\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq s}\left|X^{n}(u) - X^{n-1}(u)\right|^2\right] ds, \tag{2.6}
$$

Nous réappliquons la même téchnique une autre fois, en appliquant l'inégalité de

Doob, à $\left|X^{n}(u)-X^{n-1}(u)\right|^{2}$ pour obtenir :

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq u\leq s}\left|X^{n}(u)-X^{n-1}(u)\right|^{2}\leq C\int_{0}^{s}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq u}\left|X^{n-1}(r)-X^{n-2}(r)\right|^{2}\right]dr. \quad (2.7)$$

en substituant l'estimation (2.6) à l'inégalité(2.7), on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|^{2}\right] &\leq C\int_{0}^{t}\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq u\leq s}\left|X^{n}(u)-X^{n-1}(u)\right|^{2}\right)ds,\\
&\leq C\int_{0}^{t}\left(C\int_{0}^{s}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq u}\left|X^{n-1}(r)-X^{n-2}(r)\right|^{2}\right]dr\right)ds,\\
&\leq C^{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq u}\left|X^{n-1}(r)-X^{n-2}(r)\right|^{2}\right]\int_{0}^{t}\left(\int_{0}^{s}dr\right)ds,\\
&\leq \frac{C^{2}T^{2}}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq r\leq u}\left|X^{n-1}(r)-X^{n-2}(r)\right|^{2}\right],
\end{aligned}$$

Nous réappliquons la même téchnique plusieur fois, on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|^{2}\right] &\leq \frac{C^{n}T^{n}}{n!}\sup_{0\leq s\leq T}\left[\left|X^{1}(s)-X^{0}(s)\right|^{2}\right],\\
&\leq A\times\frac{C^{n}T^{n}}{n!}.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de **Bienaymé-Tchebychev**, on a :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|^{2}>\frac{1}{2^{n+1}}\right]\leq\frac{A\times\frac{(CT)^{n}}{n!}}{\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{2}}=4A\times\frac{(4CT)^{n}}{n!}.$$

Il vient donc que :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|^{2}>\frac{1}{2^{n+1}}\right]\leq 4A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4CT)^{n}}{n!}=4A.\exp(4CT)<\infty.$$

Donc d'aprés le lemme de **Borel-Cantelli**, on trouver l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq T}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|^{2}>\frac{1}{2^{n+1}}\right]=0,$$

utilisant l'égalité $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ on obtient l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq T}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|\leq\frac{1}{2^{n+1}}\right]=1.$$

Donc,

$$\sup_{0\leq s\leq T}\left|X^{n+1}(s)-X^{n}(s)\right|\leq\frac{1}{2^{n+1}}, \qquad \forall n\geq n_0, \qquad \text{et } n_0\in\mathbb{N}.$$

En remarquant que la suite $(X^n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans un espace de Banach, donc elle converge dans le méme espace de Banach. Alors il existe un processus continu $(X(t))_{0\leq t\leq T}$, telque :

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|X^{n+1}(t)-X^{n}(t)\right|\longrightarrow 0, \qquad \text{quand} \qquad n\longrightarrow\infty.$$

Donc, $\mathbb{P}-p.s$, $(X^n)_{n\geq 0}$ converge vers processus continu $X(t)$.

L'unicité : Supposons que $(X(t))_{t\geq 0}$ et $(Y(t))_{t\geq 0}$ deux solutions de équation (2.1) pour tout $t\in[0,T]$:

$$X(t)-Y(t)=\int_0^t\left[b(s,X(s))-b(s,Y(s))\right]ds+\int_0^t\left[\sigma(s,X(s))-\sigma(s,Y(s))\right]dW(s).$$

D'aprés l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|X(t)-Y(t)\right|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left(b\left(s,X\left(s\right)\right)-b\left(s,Y\left(s\right)\right)\right)ds\right|^2\right] \\ &\quad + 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)-\sigma\left(s,Y\left(s\right)\right)dW(s)\right)\right|^2\right].\end{aligned} \tag{2.8}$$

Utilisant l'inégalité de **Cauchy-Schwarz** et l'hypothése $(H_2)\,(i)$ on trouver l'estimation suivant :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left(b\left(s,X\left(s\right)\right)-b\left(s,Y\left(s\right)\right)\right)ds\right|^2\right] &\leq T\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|b\left(s,X\left(s\right)\right)-b\left(s,Y\left(s\right)\right)\right|^2 ds\right], \\ &\leq TC^2\int_0^t \mathbb{E}\left(\left|X\left(s\right)-Y\left(s\right)\right|^2\right)ds.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Maintenant par utilisation la propriété d'isometrie d'Itô et la condition $(H_2)\,(i)$, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)-\sigma\left(s,Y\left(s\right)\right)dW(s)\right)\right|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)-\sigma\left(s,Y\left(s\right)\right)\right|^2 ds\right], \\ &\leq C^2\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X\left(s\right)-Y\left(s\right)\right|^2\right]ds.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Retour à l'équation (2.8) et en substituant les deux estimations (2.9) et (2.10) dans (2.8), on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|X\left(t\right)-Y\left(t\right)\right|^2\right] &\leq 2TC^2\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X\left(s\right)-Y\left(s\right)\right|^2\right]ds + 2C^2\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X\left(s\right)-Y\left(s\right)\right|^2\right]ds, \\ &\leq 2\left(TC^2+C^2\right)\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X\left(s\right)-Y\left(s\right)\right|^2\right]ds.\end{aligned}$$

Finalement en utilisant le **lemme de Granwall (Voir lemme 3.6.1)**, on trouve :

$$\mathbb{E}\left(|X(t) - Y(t)|^2\right) = 0.$$

■

2.2 Quelques classes de contrôle stochastique

Définition 2.2.1 ***Contrôle stochastique :*** *Un contrôle est un processus $(u_t)_{t>0}$ adaptè par rapport à une filtration, de carré integrable et prend ses valeurs dans un borèlien $U \subset \mathbb{R}^n$.*

1) Contrôle admissible : Un contrôle admissible est un processus $(u_t)_{t\in[0;T]}$ mesurable $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-adapté à valeurs dans un borèlien $U \subset \mathbb{R}^n$.

Notant par $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles

$$\mathcal{U} = \{u : [0,T] \times \Omega \longrightarrow U, \text{ tq } u \text{ soit mesurable et } (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} - \text{adapté}\}.$$

2) Contrôle optimal : On dit qu'un contrôle stochastique u^* est optimal si :

$$J(u^*) = \inf\{J(u); \forall u \in \mathcal{U}\}.$$

3) Contrôle feed-back : Soit $u(\cdot)$ un contrôle $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$-adapté, et soit $\mathcal{F}_t^X$ la filtration naturelle engendré par le processus X. On dit que $u(\cdot)$ est un controle feed-back si et seulement $u(\cdot)$ dépend de X.

4) ContrôIe singulier : Soit A_1 un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$ et $A_2 = [0, +\infty[$.

Soient $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ deux classes des processus mesurables définie comme suit :

$$\mathcal{U}_1 = \{u(\cdot) : [0,T] \times \Omega \to A_1; \mathcal{F}_t - \text{adaptés}\},$$
$$\mathcal{U}_2 = \{\eta(\cdot) : [0,T] \times \Omega \to A_2; \mathcal{F}_t - \text{adaptés}\}.$$

Un contrôle admissible est un paire de processus mesurable $(u(\cdot), \eta(\cdot))$, $\mathcal{F}_t-$adaptés à valeur dans $A_1 \times A_2$, telque : η est un processus à variation bornée, croissante et continue à gauche avec une limite à droite càglàd et $\eta(0_-) = 0$.

On note $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ l'ensemble de tous les contrôle admissibles. Notons que, depuis $d\eta(t)$ peut être singulier par rapport à la mésure de Lebesgue dt, nous appellons $\eta(\cdot)$.la partie

singulier de contrôle et le processus $u(\cdot)$ la partie absolûment continue.

5) Contrôle relaxé : Soit V l'espace des mesures aléatoire positives sur $[0,1] \times A$, dont les projections sur $[0,1]$ coïncident avec la mesure de Lebesgue et soit aussi la $\sigma-$algebre $\bar{V}$ comme la plus petit $\sigma-$algebre de sorte que les fonctions $\mu \to \int_{[0;1]} \int_A \phi(t,u) \mu_t(du)\, dt$ sont mesurable, avec ϕ est une fonction mesurable, borné et continue en a. Un contrôle relâxé sur l'espace de probabilité filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ est un variable aléatoire μ à valeur dans V telque $\mu(\omega, t, da)$ est progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et tel que pour chaque t : le processus $\mathbf{1}_{[0,t]}\mu$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

6) Contrôle approché : Soit $\epsilon > 0$, le contrôle u^ϵ est dit approché si pour tout contrôle $u \in U$ on a

$$J(u^\epsilon) \leq J(u) + \epsilon, \forall u \in U, \text{ c'est à dire } J(u^\epsilon) = \inf\{J(u); \forall u \in U\} + \epsilon.$$

Voir Hafayed et al. [3, 4, 5, 6, 7, 8]. pour ce type de contrôles.

Chapitre 3

Conditions necessaires d'optimalité de Kushner

$\mathcal{D}$ans la théorie du contrôle stochastique, il existe essentiellement deux méthodes majeures pour la résolution des problèmes des contrôles dans les cas déterministes ou stochastiques, *le principe de la programmation dynamique* [1] *et le principe du maximum de Pontryagin* [2]. Cette grande théorie a de nombreuses applications en gestion et en finance. Voir [3, 4, 5, 11].

Dans ce chapitre, on va étudier un problème de contrôle optimal stochastique qui consiste à minimiser une fonction de coût $J(u(\cdot))$. Notre but est d'établir des conditions nécessaires d'optimalité, *principe de maximum stochastique* de Kushner, pour minimiser une fonction de coût $J(u)$. Ce principe consiste à introduire l'équation différentielle stochastique rétrograde s'appelle l'équation adjointe.

[1] Bellman, R., Glicksberg, I., and Gross, O. *On some variational problems occurring in the theory of dynamic programming, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 3 (1954), 1-35.*

[2] L.S. Pontryagin, V.G. Boltanski and R.V. Gamkrelidze *(1962), The mathematical theory of optimal processes. Intersciene N.Y.*

3.1 Formulation de problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisè filtrè avec la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ qui satisfaite les conditions usuelles, $W = \{W(t), 0 \leq t \leq T\}$ un mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^d$, dèfinie sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$.

On considéré le problème de contrôle stochastique dans le cas où le domaine de contrôle n'est pas convexe et le système dynamique est gouverné par une équation différentielle stochastique contrôlée de type suivant :

$$\begin{cases} dX(t) = b\left(t, X\left(t\right), u\left(t\right)\right) dt + \sigma\left(t, X\left(t\right)\right) dW(t) \\ X\left(0\right) = x, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
$$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^{d \times n}\right),$$

tel que $\mathcal{M}\left(\mathbb{R}^{d \times n}\right)$ est un espace des matrice de dimention $d \times n$.

Afin de bien définir notre problème, on donne les hypothèses suivantes :

(C1) b et σ sont continuellement différentiables en x. Les dérivées de b et σ sont bornées, c'est-à-dire : $|\vartheta_x| \leq C$ pour $\vartheta_x = b_x$, b_u et σ_x.

(C2) Les coeffecients b et σ verifier la condition de la croissance linéaire c'est-à-dire :

$$|b\left(t, x, u\right)| \leq C\left(1 + |x| + |u|\right),$$
$$|\sigma\left(t, x\right)| \leq C\left(1 + |x|\right).$$

Theoréme 3.1.1 *Sous les hypothèses précédent l'EDS* (3.1) *admet une unique solution* $(X(t))_{t\in[0,T]}$ *pour tout contrôle admissible* $u(\cdot)\in\mathcal{U}$.

L'objectif de notre travail est de minimiser une fonction de coût donnée par :

$$J(u(\cdot)) = \mathbb{E}\left(\gamma(X(T))\right), \tag{3.2}$$

(C3) γ est une fonction tel que : $\gamma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 en x et

$$|\gamma_x| \leq C(1+|x|).$$

Remarque 3.1.1 *La fonctions* γ *est appelée le coût terminal.*

3.2 La perturbation fort de contrôle

Pour obtenir le principe de maximum stochastique (les conditions nécessaires d'optimalités), premiérement on suppose que la fonction coût $J(u)$ est différentiable et admet un minimum noté u^* qui vérifie :

$$J(u^*) = \inf\{J(u); \forall u \in \mathcal{U}\}.$$

Maintenant on compare le contrôle optimal u^* à des autres contrôles qui lui sont différents sauf sur un intervalle de longueur assez petit ϵ.

Soit X^* la solution de équation différentielle stochastiue correspondante à $u^*(\cdot)$ (c-à-d X^* est un trajectoire optimale), on définit la perturbation fort suivante :

$$u_t^\epsilon = \begin{cases} u_t \ si \ t \in [\tau, \tau+\epsilon], \\ u^*(t) \text{ si non}, \end{cases},$$

avec $u \in \mathbb{A}$, $\tau \in [0,T]$, ϵ assez petit.

Par définition le processus u^ϵ est un processus admissible et les deux processus u^ϵ et u^* sont égaux que sur l'intervalle de langeur trés petit ϵ.

Remarque 3.2.1 *Si on prend* $\epsilon = 0$ *on obtient* $u^\epsilon(t) = u^*(t)$.

Définition 3.2.1 *On appelle que le processus* u^ϵ *la perturbation fort de contrôle admissible* $u^*(t)$.

3.3 Estimation de solutions

Lemme 3.3.1 *Soit* $(u^\epsilon(\cdot), X^\epsilon(\cdot))$ *une solution du equation* 3.1 *alors*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|X^\epsilon(t) - X^*(t)\right|^2\right) \leq C\epsilon^2,$$

ce qui implique :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|X^\epsilon(t) - X^*(t)\right|^2\right) \underset{\epsilon\to 0}{\to} 0.$$

Preuve. D'aprés l'équation (3.1) on trouver :

$$\begin{aligned}
X^*(t) &= x + \int_0^t b(s, X^*(s), u^*(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, X^*(s))\,dW(s), \\
X^\epsilon(t) &= x + \int_0^t b(s, X^\epsilon(s), u^\epsilon(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, X^\epsilon(s))\,dW(s).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
X^\epsilon(t) - X^*(t) = &\int_0^t b(s, X^\epsilon(s), u^\epsilon(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, X^\epsilon(s))\,dW(s) \\
&- \left[\int_0^t b(s, X^*(s), u^*(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, X^*(s))\,dW(s)\right],
\end{aligned}$$

en déajoutant et en ajoutant le terme $\int_0^t b\left(s, X^\epsilon\left(s\right), u^*\left(s\right)\right) ds$, on obtient :

$$\begin{aligned} X^\epsilon(t) - X^*(t) &= \int_0^t \left[b\left(s, X^\epsilon\left(s\right), u^\epsilon\left(s\right)\right) - b\left(s, X^\epsilon\left(s\right), u^*\left(s\right)\right)\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[b\left(s, X^\epsilon\left(s\right), u^*\left(s\right)\right) - b\left(s, X^*\left(s\right), u^*\left(s\right)\right)\right] ds \\ &+ \int_0^t \left[\sigma\left(s, X^\epsilon\left(s\right)\right) - \sigma\left(s, X^*\left(s\right)\right)\right] dW(s), \end{aligned}$$

En utilisant l'espérience mathématique et l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$ on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|X^\epsilon(t) - X^*(t)\right|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}\left|\int_0^T \left[b\left(s, X^\epsilon\left(s\right), u^\epsilon\left(s\right)\right) - b\left(s, X^\epsilon\left(s\right), u^*\left(s\right)\right)\right] ds\right|^2 \\ &+ 3\mathbb{E}\left|\int_0^T \left[b\left(s, X^\epsilon\left(s\right), u^*\left(s\right)\right) - b\left(s, X^*\left(s\right), u^*\left(s\right)\right)\right] ds\right|^2 \\ &+ 3\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t \left[\sigma\left(s, X^\epsilon\left(s\right)\right) - \sigma\left(s, X^*\left(s\right)\right)\right] dW(s)\right|^2\right), \end{aligned}$$

maintenant en utilisant l'inégalité de **Burkhölder-Davis-Gandy** (Voir Théoreme 3.6.3), on trouver l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|X^\epsilon(t) - X^*(t)\right|^2\right) &\leq 3\mathbb{E}\left|\int_0^T \left[b\left(s, X^\epsilon\left(s\right), u^\epsilon\left(s\right)\right) - b\left(s, X^\epsilon\left(s\right), u^*\left(s\right)\right)\right] ds\right|^2 \\ &+ 3T\mathbb{E}\int_0^T \left|b\left(s, X^\epsilon\left(s\right), u^*\left(s\right)\right) - b\left(s, X^*\left(s\right), u^*\left(s\right)\right)\right|^2 ds \\ &+ 3C\mathbb{E}\int_0^T \left|\sigma\left(s, X^\epsilon\left(s\right)\right) - \sigma\left(s, X^*\left(s\right)\right)\right|^2 ds. \end{aligned}$$

D'aprés l'hypothése lipschitzienne pour le drift b et le coefficient de diffusion σ, on déduire l'inégalité suivante $\forall C > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|X^{\epsilon}(t)-X^{*}(t)\right|^{2}\right) \leq\; & 3\mathbb{E}\left(\int_{\tau}^{\tau+\epsilon}\left|b\left(s,X^{\epsilon}\left(s\right),u^{\epsilon}\left(s\right)\right)-b\left(s,X^{\epsilon}\left(s\right),u^{*}\left(s\right)\right)\right|ds\right)^{2}\\ & +3TC\mathbb{E}\int_{0}^{T}\left|X^{\epsilon}(s)-X(s)\right|^{2}ds\\ & +3C\mathbb{E}\int_{0}^{t}\left|X^{\epsilon}(s)-X(s)\right|^{2}ds,\end{aligned}$$

en utilisant le fait que b est borné et le théorem de Fubini, on trouver

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|X^{\epsilon}(t)-X^{*}(t)\right|^{2}\right)\\ &\leq(3TC+3C)\int_{0}^{t}\mathbb{E}\left(\left|X^{\epsilon}(s)-X(s)\right|^{2}\right)ds+3M\mathbb{E}\left(\int_{\tau}^{\tau+\epsilon}ds\right)^{2},\end{aligned}$$

D'aprés lemme de Gronwall en déduire l'estimation suivante :

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|X^{\epsilon}(t)-X^{*}(t)\right|^{2}\right)\leq 3M\epsilon^{2}\times\exp\left(3TC+3C\right)T=C\epsilon^{2}.$$

avec $C=3M\times\exp\left(3TC+3C\right)T$. Ce qui implique

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{E}\left(\sup_{t\leq T}\left|X^{\epsilon}(t)-X^{*}(t)\right|^{2}\right)=0.$$

■

3.4 La linéarisation de l'équation

Notation 3.4.1 *Nous utilisons la notation suivante dans ce travail :*

$$\Theta_x^* \triangleq b_x\left(t, X^*(t), u^*(t)\right), \qquad \Theta^*(u^*) \triangleq b(t, X^*(t), u^*(t))$$
$$\Theta(u^\epsilon) \triangleq b\left(t, X^\epsilon(t), u^\epsilon(t)\right),$$

Maintenant nous introduisons l'èquation differentielle stochastique linéaire suivante :

$$\begin{cases} d\Phi(t) = b_x\left(t, X^*(t), u^*(t)\right)\Phi(t)\,dt + \sigma_x\left(t, X^*(t)\right)\Phi(t)\,dW(t), \\ \Phi(0) = b\left(0, X^*(0), u(t)\right) - b\left(0, X^*(0), u^*(t)\right). \end{cases} \tag{3.3}$$

Remarque 3.4.1 *On peut trouver un unique solution* Φ *tel que* $\Phi \in \mathbb{M}^2$ *est-elle résoudre* (3.3).

On a l'estimation suivante :

Lemme 3.4.1 *Soient* X^* *et* X^ϵ *deux solution de système correspondant réspectivement au* u^* *et* u^ϵ *, alors on a l'estimation suivante :*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\frac{X^\varepsilon(t) - X^*(t)}{\epsilon} - \Phi(t)\right|^2\right) \underset{\epsilon\to 0}{\to} 0,. \tag{3.4}$$

Preuve. Par définition, et on ajouter et déajouter à la fois, on trouver :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon}\left(X^{\varepsilon}(t)-X^{*}(t)-\epsilon\Phi(t)\right)\\
&=\frac{1}{\epsilon}\int_0^t b\left(s,X^{\epsilon}(s),u^{\epsilon}(s)\right)ds+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \sigma\left(s,X^{\epsilon}(s)\right)dW(s)\\
&-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t b\left(s,X^{*}(s),u^{*}(s)\right)ds-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \sigma\left(s,X^{*}(s)\right)dW(s)\\
&-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \epsilon b_x\left(s,X^{*}(s),u^{*}(s)\right)\Phi(s)ds-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \epsilon\sigma_x\left(s,X^{*}(s)\right)\Phi(s)dW(s)\\
&+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t b\left(s,X^{*}(s)+\epsilon\Phi(s),u^{\epsilon}(s)\right)ds-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t b\left(s,X^{*}(s)+\epsilon\Phi(s),u^{\epsilon}(s)\right)ds\\
&+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \sigma\left(s,X^{*}(s)+\epsilon\Phi(s)\right)dW(s)-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \sigma\left(s,X^{*}(s)+\epsilon\Phi(s)\right)dW(s),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon}\left(X^{\varepsilon}(t)-X^{*}(t)-\epsilon\Phi(t)\right)\\
&=\frac{1}{\epsilon}\int_0^t b\left(s,X^{\epsilon}(s),u^{\epsilon}(s)\right)ds-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t b\left(s,X^{*}(s)+\epsilon\Phi(s),u^{\epsilon}(s)\right)ds\\
&+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \sigma\left(s,X^{\epsilon}(s)\right)dW(s)-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \sigma\left(s,X^{*}(s)+\epsilon\Phi(s)\right)dW(s)\\
&+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t b\left(s,X^{*}(s)+\epsilon\Phi(s),u^{\epsilon}(s)\right)ds\\
&-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \epsilon b_x\left(s,X^{*}(s),u^{*}(s)\right)\Phi(s)ds\\
&+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \sigma\left(s,X^{*}(s)+\epsilon\Phi(s)\right)dW(s)-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \sigma\left(s,X^{*}(s)\right)dW(s)\\
&-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t b\left(s,X^{*}(s),u^{*}(s)\right)ds-\frac{1}{\epsilon}\int_0^t \epsilon\sigma_x\left(s,X^{*}(s)\right)\Phi(s)dW(s).
\end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor avec reste intégrale (Voir Théoreme 3.6.1), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon}\left(X^{\varepsilon}(t)-X^{*}(t)-\epsilon\Phi(t)\right)\\
&=\frac{1}{\epsilon}\int_0^t[\int_0^1 b_x\left(s,X^{*}(s)+\epsilon\Phi(s)+\lambda(X^{\epsilon}(s)-X^{*}(s)-\epsilon\Phi(s)),u^{\epsilon}(s)\right)\\
&\times\left(X^{\epsilon}(s)-X^{*}(s)-\epsilon\Phi(s)\right)d\lambda]ds\\
&+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t\left[\int_0^1\sigma_x\left(s,X^{*}(s)+\epsilon\Phi(s)+\lambda(X^{\epsilon}(s)-X^{*}(s)-\epsilon\Phi(s))\right)(X^{\epsilon}(s)-X^{*}(s)-\epsilon\Phi(s))d\lambda\right]dW(\\
&+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t\left[\int_0^1\left[b_x\left(s,X^{*}(s)+\lambda\Phi(s),u^{\epsilon}(s)\right)-\epsilon b_x\left(s,X^{*}(s),u^{*}(s)\right)\right]\Phi(s)d\lambda\right]ds\\
&+\frac{1}{\epsilon}\int_0^t\left[\int_0^1\left[\sigma_x\left(s,X^{*}(s)+\lambda\Phi(s)\right)-\epsilon\sigma_x\left(s,X^{*}(s)\right)\right]\Phi(s)d\lambda\right]dW(s).
\end{aligned}$$

par simplification d'écriture on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{X^{\varepsilon}(t)-X^{*}(t)-\epsilon\Phi(t)}{\epsilon}\\
&=\int_0^t A_{\epsilon}(s)\frac{X^{\varepsilon}(s)-X^{*}(s)-\epsilon\Phi(s)}{\epsilon}ds+\int_0^t B_{\epsilon}(s)\frac{X^{\varepsilon}(s)-X^{*}(s)-\epsilon\Phi(s)}{\epsilon}dW(s)\\
&+\int_0^t C_{\epsilon}(s)ds+\int_0^t D_{\epsilon}(s)dW(s).
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
A_{\epsilon}(s)&=\int_0^1 b_x\left(s,X^{*}(s)+\epsilon\Phi(s)+\lambda(X^{\epsilon}(s)-X^{*}(s)-\epsilon\Phi(s)),u^{\epsilon}(s)\right)d\lambda,\\
B_{\epsilon}(s)&=\int_0^1\sigma_x\left(s,X^{*}(s)+\epsilon\Phi(s)+\lambda(X^{\epsilon}(s)-X^{*}(s)-\epsilon\Phi(s))\right)d\lambda,\\
C_{\epsilon}(s)&=\frac{1}{\epsilon}\int_0^1\left[b_x\left(s,X^{*}(s)+\lambda\Phi(s),u^{\epsilon}(s)\right)-\epsilon b_x\left(s,X^{*}(s),u^{*}(s)\right)\right]\Phi(s)d\lambda,\\
D_{\epsilon}(s)&=\frac{1}{\epsilon}\int_0^1\left[\sigma_x\left(s,X^{*}(s)+\lambda\Phi(s)\right)-\epsilon\sigma_x\left(s,X^{*}(s)\right)\right]\Phi(s)d\lambda.
\end{aligned}$$

En utilisant esperience mathématique, l'inégalité $(a+b+c+d)^2\leq 4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$, la propriéte d'isometrie et l'inégalité de **Cauchy-Schwartz**, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\frac{X^{\varepsilon}(t)-X^{*}(t)}{\epsilon}-\Phi(t)\right|^{2} \\
&\leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^t |A_\epsilon(s)|^2\,ds\int_0^t\left|\frac{X^{\varepsilon}(s)-X^{*}(s)}{\epsilon}-\Phi(s)\right|^{2}ds\right) \\
&+4\mathbb{E}\left(\int_0^t |B_\epsilon(s)|^2\,ds\int_0^t\left|\frac{X^{\varepsilon}(s)-X^{*}(s)}{\epsilon}-\Phi(s)\right|^{2}ds\right) \\
&+4\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t C_\epsilon(s)ds\right)^2+\left(\int_0^t D_\epsilon(s)dW(s)\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Comme b_x et σ_x sont borné alors on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\frac{X^{\varepsilon}(t)-X^{*}(t)}{\epsilon}-\Phi(t)\right|^{2} &\leq C\mathbb{E}\int_0^t\left|\frac{X^{\varepsilon}(s)-X^{*}(s)}{\epsilon}-\Phi(s)\right|^{2}ds \\
&+4\mathbb{E}\left\{\left(\int_0^t C_\epsilon(s)ds\right)^2+\left(\int_0^t D_\epsilon(s)dW(s)\right)^2\right\},
\end{aligned}$$

D'aprés lemme de Gronwall on trouver

$$\mathbb{E}\left|\frac{X^{\varepsilon}(t)-X^{*}(t)}{\epsilon}-\Phi(t)\right|^{2} \leq \mathbb{E}\left\{\left(\int_0^t C_\epsilon(s)ds\right)^2+\left(\int_0^t D_\epsilon(s)dW(s)\right)^2\right\}\exp(Ct),$$

en fin l'estimation (3.4) s'obtient facilement, car

$$\mathbb{E}\left\{\left(\int_0^t C_\epsilon(s)ds\right)^2+\left(\int_0^t D_\epsilon(s)dW(s)\right)^2\right\}=o\left(\epsilon^2\right).$$

■

3.5 Le dérivée de la fonction de coût

On défini maintenant l'équation différentielle stochastique (la resolvante) suivante :

$$\begin{cases} d\Phi\left(T,t\right)=b_{x}\left(t,X^{*}\left(t\right),u^{*}(t)\right)\Phi\left(T,t\right)dt+\sigma_{x}\left(t,X^{*}\left(t\right)\right)\Phi\left(T,t\right)dW(t), \\ \Phi\left(t,t\right)=I_{d}. \end{cases} \tag{3.5}$$

La fonction de coût $J(u)$ donné par la forme suivante

$$J(u(\cdot))=\mathbb{E}\left(\gamma(X\left(T\right))\right). \tag{3.6}$$

Lemme 3.5.1 *L'application $\epsilon\rightarrow J(u^{\epsilon})$ est dérivable au point $\epsilon=0$. De plus, on a :*

$$\left.\frac{dJ(u^{\epsilon}\left(\cdot\right))}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=\mathbb{E}\left(\gamma_{x}\left(X^{*}\left(T\right)\right)\Phi\left(T\right)\right),$$

et de plus cette quantité est positive.

Preuve. Par définition on a : $\left.\frac{dJ(u^{\epsilon}(\cdot))}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=\lim\limits_{\epsilon\rightarrow0}\frac{J(u^{\epsilon}(\cdot))-J(u^{*}(\cdot))}{\epsilon}$, avec

$$\frac{J(u^{\epsilon}\left(\cdot\right))-J(u^{*}\left(\cdot\right))}{\epsilon}=\frac{\mathbb{E}\left[\gamma\left(X^{\varepsilon}\left(T\right)\right)\right]-\mathbb{E}\left[\gamma\left(X^{*}\left(T\right)\right)\right]}{\epsilon}.$$

Puisque la fonction $\gamma\left(\cdot\right)$ est de classe C^{1} alors pour presque tout ω il existe $\lambda\left(\omega\right)\in\left]0,T\right[$ tel que :

$$\gamma\left(X^{\varepsilon}\left(t\right)\right)-\gamma\left(X^{*}\left(t\right)\right)=\gamma_{x}\left(X^{*}\left(t\right)+\lambda\left(X^{\varepsilon}\left(t\right)-X^{*}\left(t\right)\right)\right)\left(X^{\varepsilon}\left(t\right)-X^{*}\left(t\right)\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\frac{\gamma\left(X^{\varepsilon}\left(T\right)\right)-\gamma\left(X^{*}\left(T\right)\right)}{\epsilon}\right)\\
&=\mathbb{E}\left(\gamma_{x}\left(X^{*}\left(T\right)+\lambda\left(X^{\varepsilon}\left(T\right)-X^{*}\left(T\right)\right)\right)\frac{\left(X^{\varepsilon}\left(T\right)-X^{*}\left(T\right)\right)}{\epsilon}\right),
\end{aligned}$$

le fait que γ_x est borné c'est à dire : $|\gamma_x| \leq M$ et que $\frac{\left(X^{\varepsilon}(T)-X^{*}(T)\right)}{\epsilon} \underset{\epsilon\rightarrow 0}{\rightarrow} \Phi\left(T\right)$ et $X^{\varepsilon}\left(T\right)-X^{*}\left(T\right) \underset{\epsilon\rightarrow 0}{\rightarrow} 0$, dans espace $\mathbb{L}^{2}\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\frac{\mathbb{E}\left[\gamma\left(X^{\varepsilon}\left(T\right)\right)\right]-\mathbb{E}\left[\gamma\left(X^{*}\left(T\right)\right)\right]}{\epsilon}\\
&=\lim_{\epsilon\rightarrow 0}\mathbb{E}\left(\gamma_{x}\left(X^{*}\left(T\right)+\lambda\left(X^{\varepsilon}\left(T\right)-X^{*}\left(T\right)\right)\right)\frac{\left(X^{\varepsilon}\left(T\right)-X^{*}\left(T\right)\right)}{\epsilon}\right),\\
&=\mathbb{E}\left[\gamma_{x}\left(X^{*}\left(T\right)\right)\Phi\left(T\right)\right]. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

D'aprés la relation 3.7, on obtient :

$$\left.\frac{dJ(u^{\epsilon}\left(\cdot\right))}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=\mathbb{E}\left(\gamma_{x}\left(X^{*}\left(T\right)\right)\Phi\left(T\right)\right). \qquad (3.8)$$

Pour preuve que $\left.\frac{dJ(u^{\epsilon})}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}\geq 0$, nous utilisant le dévelopement de Taylor. Comme l'application $\epsilon\rightarrow J(u^{\epsilon})$ est dérivable au point $\epsilon=0$, on a

$$J(u^{\epsilon})=J(u^{*})+\epsilon\left.\frac{dJ(u^{\epsilon})}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}+O\left(\epsilon\right),$$

avec $O\left(\epsilon\right)$ est une fonction négligable dépend de ϵ. Alors

$$J(u^{\epsilon})-J(u^{*})=\epsilon\left.\frac{dJ(u^{\epsilon})}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}+O\left(\epsilon\right),$$

et comme u^* est optimal alors $J(u^\epsilon) - J(u^*) \geq 0$ pour tout $\epsilon \in [0, T]$, ce qui donne

$$\left.\frac{dJ(u^\epsilon)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \geq 0.$$

■

3.6 Le principe du maximum stochastique

Maintenant on peut annoncer le résultat principal de ce chapitre qui est le principe du maximum stochastique dans le cas où le domaine de contrôle est non convex.

L'équation adjointe :

Soit $u^*(t)$ un contrôle optimal et $X^*(t)$ la trajectoire optimale correspondante. Nous introduisons **l'équation adjointe** de façons suivante :

$$\begin{cases} dp\,(t) = -\left[b_x\,(t; X^*\,(t)\,, u^*\,(t))\,p\,(t) + \sigma_x\,(t; X^*\,(t))\,q\,(t)\right] dt + q\,(t)\,dW(t), \\ p\,(T) = -\gamma_x\,(X\,(T))\,, \end{cases} \tag{3.9}$$

on appeller $p\,(t)$ le processus adjoint.

Theoréme 3.6.1 *Si les conditions* $(C1)$, $(C2)$ *et* $(C3)$ *sont verifier, alors l'équations adjoint* (3.9) *admet une unique solution* $p\,(\cdot) \in \mathbb{M}^2(\mathbb{R})$.

Preuve. *L'equation* (3.9) *est une équation différentielle stochastique rétrograde, donc l'existence et l'unicité de solution est assure par le resultat de Pardoux & Peng en1990 [13].* ■

Maintenant en définit la fonction hamiltonien H par :

$$H(t; X\,(t)\,, u\,(t)\,, p\,(t)\,, q\,(t)) = b(t; X\,(t)\,, u\,(t))p\,(t) + \sigma(t, X\,(t))q\,(t)\,.$$

On utilise l'hamiltonien H pour écrire (3.9) comme suit :

$$\begin{cases} -dp_t = H_x\left(t, X^*\left(t\right), u^*\left(t\right), p\left(t\right), q\left(t\right)\right)dt - q\left(t\right)dW(t), \\ \\ p_T = -\gamma_x\left(X\left(T\right)\right), \end{cases} \tag{3.10}$$

Theoréme 3.6.2 *Soient* $(X^*(t), u^*(t))$ *une solution optimale de* (3.1), $p(t)$ *la solution correspondant à* (3.10) *et sous les hypothèses* $(C1)$, $(C2)$ *et* $(C3)$, *alors on a l'inégalité suivante :*

$$H(t, X^*\left(t\right), u^*\left(t\right), p, q) \leq H(t; X^*\left(t\right), u\left(t\right), p\left(t\right), q\left(t\right)), \tag{3.11}$$

$$\forall u \in \mathcal{U},\ \mathbb{P} - p.s.\ et\ dt - p.p$$

ce qui implique que :

$$H(t, X^*, u^*, p, q) = \min_{u \in \mathcal{U}} H(t, X^*, u; p, q).$$

Preuve. On suppose que la fonction de coût $J(u(\cdot)) = \mathbf{E}\left(\gamma(X_T)\right)$ admet une valeur optimale pour le contrôle u^*, on obtient

$$J(u^\epsilon\left(\cdot\right)) \geq J(u^*\left(\cdot\right)),$$

On suppose que $H(t, X\left(t\right), u\left(t\right), p\left(t\right)) = b(t; X\left(t\right), u\left(t\right))p\left(t\right)$. D'après l'inégalité précédente, l'étude de la dérivation de $J(u^\epsilon\left(\cdot\right))$ en $\epsilon = 0$ est donnée par le Lemme 3.5.1, c'est-à-dire :

$$\left.\frac{dJ(u^\epsilon\left(\cdot\right))}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \mathbb{E}\left(\gamma_x\left(X\left(T\right)\right)\Phi\left(T\right)\right) \geq 0. \tag{3.12}$$

où $\Phi(T) = \Phi(T,t)\,\Phi(t)$. Alors on déduit que

$$\left.\frac{dJ(u^{\epsilon}(\cdot))}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \mathbb{E}\left(\gamma_x(X(T))\,\Phi(T,t)\left[b(t;X^*(t),u(t)) - b(t;X^*(t),u^*(t))\right]\right) \geq 0.$$

On pose $p(t) = \mathbb{E}\left[\gamma_x(X(T))\,\Phi(T) \mid \mathcal{F}_t\right]$, qui est un processus stochastiques $\mathcal{F}_t-$mesurable pour $\forall t \in [0,T]$.

donc,

$$\mathbb{E}\left(p(t)\left[b(t;X^*(t),u(t)) - b(t;X^*(t),u^*(t))\right]\right) \geq 0.$$

Donc on obtient l'inégalité suivante

$$\mathbb{E}\left[p(t)b(t;X^*(t),u(t))\right] \geq \mathbb{E}\left[p(t)b(t;X^*(t),u^*(t))\right]$$

$$\forall u \in \mathcal{U}.$$

d'où le resultat cherché. ■

Conclusion

$\mathcal{D}$ans ce travail, nous avons traité un problème de contrôle optimal stochastique pour un systéme gouverné par une équation différentielle stochastique **(en abrégé EDSs)** dans le cas où le domaine du contrôle n'est pas convexe avec le coefficient de diffusion ne contient pas la variable du contrôle. Nous utilisons la méthode de perturbation forte "*Spike variation*" pour dériver ces conditions nécessaires d'optimalité sous forme d'un principe du maximum de Kushner.

Annexe : Quelques outils mathématique

Lemme de Gronwall

Lemme 3.6.1 *Soient* $T > 0$ *et* ϕ *une fonction positive bornée sur* $[0,T]$, *On suppose qu'il existe des constantes* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *telles que pour tout* $t \in [0,T]$ *on a :*

$$\phi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \phi(s)\, ds.$$

Alors

$$\forall t \in [0,T] \qquad \phi(t) \leq \alpha \int_0^t \exp(\beta s)\, ds.$$

Dévelopment de Taylor avec reste intégral

Définition 3.6.1 *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $C^{n+1}, (n \in \mathbb{N})$ *et* $a, x \in I$, *alors :*

$$f(x+a) = f(x) + f'(x)(a) + \frac{f''(x)}{2!}(a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(a)^n$$
$$+ 0(|a|^n) + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)}(a)^{n+1}\, dt.$$

L'inégalité de Young. On dit que deux nombres $p, q > 1$ sont conjugués au sens de Young, si :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

L'inégalité de Young dit que si p et q sont conjugués et si $a, b \geq 0$, alors :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

avec égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

Par exemple, si $p = q = 2$, on retrouve l'inégalité

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

L'inégalité de Hölder. L'inégalité de Hölder dit que si $p, q > 1$ sont conjugués au sens de Young, alors :

$$\int_D (f(x)\, g(x))\, d\mu(x) \leq \left(\int_D |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} . \left(\int_D |g(x)|^q \, d\mu(x) \right)^{1/q} .$$

L'inégalité Burkhölder-Davis-Gandy

Theoréme 3.6.3 *Il existe une constantes C telle que, pour toute martingale locale continue $\int_0^t \sigma(s, x(s))\, dW(s)$, nulle en zéro, on a :*

$$\mathbf{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \sigma(s, x(s))\, dW(s) \right|^2 \right] \leq C\mathbf{E} \int_0^T |\sigma(s, x(s))|^2 \, ds.$$

Bibliographie

[1] Briand, P. (2001). Equations différentielles stochastiques rétrogrades. Mars.

[2] Hafayed, M. (2009), Gradient généralisés et contrôle stochastique, *Université Mohamed khider Biskra*, pp 102.

[3] Hafayed, M. (2013). A mean-field necessary and sufficient conditions for optimal singular stochastic control. *Communications in Mathematics and Statistics*, 1(4), 417-435.

[4] Hafayed, M. (2013). A mean-field maximum principle for optimal control of forward–backward stochastic differential equations with Poisson jump processes. *International Journal of Dynamics and Control*, 1(4), 300-315.

[5] Hafayed, M., Tabet, M., & Boukaf, S. (2015). Mean-Field Maximum Principle for Optimal Control of Forward–Backward Stochastic Systems with Jumps and its Application to Mean-Variance Portfolio Problem. *Communications in Mathematics and Statistics*, 3(2), 163-186.

[6] Hafayed M, Abbas S.(2013) : *On Stochastic Near-optimal Singular Controls for Jumps Diffusions : Necessary and Sufficient Conditions* , Journal of Dynamical and Control Systems, Springer 19(4), 503-517.

[7] Hafayed M. Abbas S. : (2014) *On Near-optimal Mean-field stochastic*

singular controls : necessary and sufficient conditions for near-optimality. Journal of Optimization Theory and Applications, Springer Vol 160, 778–808.

[8] Hafayed M. Abbas S. Veverka P. (2013) : *On necessary and sufficient conditions for near-optimal singular stochastic controls,* Optimization Letters, Springer, Optim. Lett. (7)5, 949-966.

[9] Jeanblanc, M. (2006). *Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Evry.* Available at *http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.*

[10] Jeanblanc, M., & Simon, T. (2005). Eléments de calcul stochastique. IRBID, septembre.

[11] Lakhdari, I. E., Miloudi, H., & Hafayed, M. (2021). Stochastic maximum principle for partially observed optimal control problems of general McKean–Vlasov differential equations. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 47(4), 1021-1043.

[12] Nicolas Chopin. Introduction aux processus stochastiques Notes de cours : *https ://nchopin.github.io/files/poly_processus.pdf.*

[13] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems & control letters*, 14(1), 55-61.

[14] Romuald, E. L. I. E., & KHARROUBI, I. (2006). Calcul Stochastique Appliquéa la Finance. polycopié disponible sur *http ://www. ceremade. dauphine. fr/elie/elie.*

[15] Yong, J., & Zhou, X. Y. (1999). Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations (Vol. 43). *Springer Science & Business Media.*