République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Helal chourouk

Titre :

Èquations différentielles doublements stochastiques rétrogrades

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Tamer Lazhar**	UMKB	Président
Dr.	**Aoun Salima**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Romeili Nacira**	UMKB	Examinatrice

Juin 2022

DÈDICACE

Je dédie ce modeste travail à :

A le premier enseignant et éducateur, notre messager et notre bien-aimé, notre modèle et notre motivateur en tout lieu et à tout moment vers l'apprentissage : Mohamed bin Abdullah bin Abdul Muttalib, que la prière et la paix de Dieu soient sur lui , que Dieu nous rassemble avec lui au Paradis.

A symbole du don et de la joie de vivre, à symbole du sacrifice et de l'amour, à ceux qui sont restés debout, nous ont enseignés et encouragés à atteindre ce stade de réussite et d'excellence,à ma mère : Hamel mabrouka et Fatiha slimani

A mon soutien permanent, mon espoir constant, à celui qui a sacrifié sa santé et sa jeunesse pour faire couronner ses filles des plus belles couronnes , à ma fierté et mon honneur , à mon cher père : Tayeb.

A ma grand-mère,que Dieu lui fasse miséricorde : Arif Aisha

Aussi à ma tante : Nadjet et Soraya et Hayet et Yamina

Aussi à mon oncle : Abderrazak

A mon frére et mes soeurs : Mohamed lamine et Ilhem et wissale et Hams

A mes amies : Ilhem et khadidja et Dalel et Roumaisa et Rima

A vous chers mes frères et sœurs

A toute ma famille, et tous mes amis, qui de près ou de loin m'on supporte, soutenu et encourage tout au long de ces années.

REMERCIEMENTS

Je remercie dieu tout puissant de m'avoir donné la forces, le courage et la patience d'arrivé *finir mon mémoire.*

A mes chers parents, pour leur amour, leur sacrifices, leur tendresse, leur soutien

tout au long de mes étude.

Je tiens tout particulièrement à remercier **Dr. AOUN salima** qui a encadré mon travail, qu'il toujours montré à l'écoute et disponible tout au long de la réalisation de se mémoire, ainsi pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Un grand merci également pour les membres du jury (**Dr TAMER lazhar** et **Dr ROMEILI nacira**) qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail. Je présente tous mes remerciements aux enseignants du département -MATH- sans exceptions qui ont contribué à ma formation, ainsi que tous ce qui m'ont soutenue et m'ont aidée tout le long de cette étude et toutes les personnes qui ont contribué directement ou indirectement à ce travail et à tous ceux qui ont montré et disposé à mes questionnements.

Je remercie toute ma famille pour leur soutien moral et leur aide.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles doublements stochastiques rétrogrades (notée EDDSR) sont des équations différentielles stochastiques rétrograde où interviennent deux intégrales stochastiques l'un progressive et l'autre rétrograde. plus précisément, ce sont des équations de la forme :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)dB_S - \int_t^T Z_s dW_S, \quad t \in [0, T]$$

oú $\{W_t, \ 0 \leq t \leq T\}$ et $\{B_t, \ 0 \leq t \leq T\}$ sont deux mouvements Brownients standards indépendantes définis sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^l$. *Notre objectif est d'étudier une propriété des équations différentielles doublements stochastiques rétrogrades et de montrer* l'existence et l'unicité de leur solution *sous la condition de Lipschitz.* On *été introduits par Pardoux et Peng* [6] *; en 1994.*

Ce mémoire se composé de trois chapitres :

Chapitre 1 : (Outils fondamentaux)

Ce chapitre est essentiellement une sorte d'introduction, on fait un rappel sur quelques notions et les théorèmes préliminaires du calcul stochastique, et que nous aurons besoin à la suite de ce travail comme : Le processus stochastique, la notion de martingale, le mouvement Brownient puis l'intégrale stochastique progressives et rétrogrades.

Chapitre 2 : (Equations Différentielles Stochastique Rétrogrades)

Dans ce chapitre, nous allons montrer d'existence et d'unicité de la solution pour *l'EDSR* avec un générateur Lipschitzien, ce résultat à été obtenu par Pardoux et Peng $[5]$ en 1990.

chapitre 3 :(Quelques résultats sur les EDDSR's)

Dans le dernier chapitre, nous allons présenter la partie essentielle de notre étude qui s'intéresse aux équations différentielles doublements stochastiques dont les deux générateurs f et g sont Lipschitziens. Nous introduisons la théorie de ce genre d'équation puis nous allons étudier l'existence et l'unicité de leur solution.

Chapitre 1

Outils fondamentaux

Ce chapitre est essentiellement une sorte d'introduction, on donne quelques rappels de base concernant le calcul stochastique et les définitions des intégrales stochastiques progressives et rétrogrades.

1.1 Notations et définitions

Définition 1.1.1 ***(Processus stochastique)*** *Un processus stochastique est une famille* $\{X_t,\, t \in \mathbb{T}\}$ *des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité tel que l'indice* t *est souvent interprété comme le temps .*

- Si $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est un processus à temps discret.
- Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ où $\mathbb{T} = [0, T]$ le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est un processus à temps continu.

Définition 1.1.2 ***(Filtration)*** *On appelle filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\,\geq 0}$ *sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *une famille croissante de sous tribu de* $\mathcal{F}$ $(i.e.\ \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},\ \forall s \leq t)$.

1) L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\,\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ s'appelle espace de probabilité filtré.

2) Une filtration est $\mathbb{P}$–complète pour une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ si $\mathcal{F}_0$ contient tous les événements de mesure nulle $(i.e\ \ \mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F},\ \text{tel que } \mathbb{P}(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0)$.

Définition 1.1.3 ***(Processus adapté)*** *Un processus X est adapté par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ \geq 0}$ si, pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t -$ mesurable.*

Remarque 1.1.1

i) Si $N \subset \mathcal{F}_0$ et si X est adapté par rapport à $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ \geq 0}$, alors toute modification de X est encore adaptée.

ii) Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.

Définition 1.1.4 ***(Processus mesurable)*** *Un processus X est dite mesurable si l'application suivante :*

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \\ (t, w) &\longrightarrow X_t(w)\end{aligned}$$

est mesurable.

Définition 1.1.5 *Soient $(X_t)_{t\in T}$ et $(Y_t)_{t\in T}$ deux processus stochastique définis sur même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

1. X est une *modification* de Y si: pour tout $t \geq 0$ les variables aléatoires X_t et Y_t sont égales $\mathbb{P}-p.s$ $\ \forall t \geq 0$, $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.
2. X et Y sont *indistinguables* si: $\mathbb{P}-p.s$ les trajectoires de X et de Y sont les mêmes $(i.e\ \ \mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1)$.

Définition 1.1.6 *Les variables aléatoires $X_t - X_s$, $0 \leq s \leq t$ sont appelées les accroissements du processus stochastique X. On dit :*

1. Processus à *accroissements indépendants* si $(X_t - X_s) \perp \mathcal{F}_s$, $\forall 0 \leq s \leq t$.
2. Processus à *accroissements stationnaires* si $(X_t - X_s) \sim X_{t-s} - X_0$, $\forall 0 \leq s \leq t$.

Définition 1.1.7 ***(Processus prévisible)*** *Un processus X est dit prévisible si l'application $(w,t) \longrightarrow X_t(w)$ est mesurable par rappoort à la tribu prévisible qui est engendrée par les processus continus à gauche et adaptés à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

Définition 1.1.8 ***(Espéronce conditionnelle par rapport à une tribu)*** *Soit X une variable aléatoire réelle intégrable (i.e. $X \in L^1$) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu . L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X/\mathcal{G}]$ de X quand G est l'unique variable aléatoire, tel que :*

1. $\mathcal{G} - mesurable.$
2. $\int_A \mathbb{E}[X/\mathcal{G}]dP = \int_A Xd\mathbb{P}, \forall A \in \mathcal{G}.$

Propriété 1.1.1 ***(Propriétés de l'espérance conditionnelle)*** *Soient X, Y deux variables aléatoires réeles appartenant à $L^2(\Omega\ ,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$, soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. On a alors :*

- *Linéarité* **:** Soit a et b deux constantes

$$\mathbb{E}[aX + bY/\mathcal{G}] = a\mathbb{E}[X/\mathcal{G}] + b\mathbb{E}[Y/\mathcal{G}].$$

- *Croissance* **:** Si $X \geq Y \Longrightarrow \mathbb{E}[X/\mathcal{G}] \geq \mathbb{E}[Y/\mathcal{G}]$ $p.s.$
- Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, alors : $\mathbb{E}[X/\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.
- Si X est $\mathcal{G}-$mesurable, alors : $\mathbb{E}[X/\mathcal{G}] = X$.
- *Si* X est $\mathcal{G}-$mesurable, alors : $\mathbb{E}[XY/\mathcal{G}] = X\ \mathbb{E}[Y/\mathcal{G}]$.
- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X/\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.

Définition 1.1.9 ***(Martingale en temps continue)*** *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté par rapport une filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ et tel que pour tout $0 \leq s \leq t, X_t \in L^1$ est appelé :*

1. *martingale* si : $\mathbb{E}[X_t/\mathcal{F}_s] = X_s,\ \ \mathbb{P}-p.s.$

2. *sous martingale* si : $\mathbb{E}[X_t/\mathcal{F}_s] > X_s, \;\; \mathbb{P}-p.s.$

3. *sur martingale* si : $\mathbb{E}[X_t/\mathcal{F}_s] < X_s, \;\; \mathbb{P}-p.s.$

1.2 Mouvement Brownien

Définition 1.2.1 ***(Mouvement Brownien)*** *Le processus $(B_t)_{t\,\geq 0}$ est un mouvement Brownien, si :*

1. *Continuité* : $\mathbb{P} - p.s$, la fonction $s \longmapsto B_s(w)$ est une fonction continue.

2. *Indépendance des accroissements*, si $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u\ , u \leq s)$ et de loi gaussienne centré de variance $(t-s)$.

3. *Stationnarité des accroissements* : si $0 \leq s \leq t$, la loi de $B_t - B_s$ indentique à celle de $B_{t-s} - B_0 = B_{t-s}$.

Remarque 1.2.1 *un mouvement Brownien est dit* ***standard****, si*

i) $B_0 = 0 \;\; \mathbb{P} - p.s.$

ii) $\mathbb{E}[B_t] = 0.$

iii) $\mathbb{E}[B_t^2] = t.$

Proposition 1.2.1 *Soint $(B_t)_{t\,\geq 0}$ un mouvement Brownien standard, on a :*

1. Pour tout $T > 0; \{B_{t+T} - B_T\}_{t\,\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\sigma(B_u, u \leq T)$.

2. Pour tout $c > 0, \{cB_{\frac{t}{c^2}}\}_{t\,\geq 0}$: est un mouvement Brownien.

3. Le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tB_{\frac{1}{t}}$ est un mouvement Brownien.

1.3 Notions de processus simples

Soit $\left\{\tilde{\mathcal{F}}_t \ , t \geq 0\right\}$ une famille *monotone* de sous tribus de $\mathcal{F}$, telle que $\mathcal{F}_t \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_t$.

Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble de parties $\mathbb{P}$–négligeables de $\mathcal{F}$.

Pour tout $t \in [0, T]$, on définit :

$$\mathcal{F}_t \triangleq \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B \ .$$

Pour tout processus $(\eta_t)_{t\geq 0}$, $\mathcal{F}_{s,t}^{\eta} = \sigma \{\eta_r - \eta_s \ , \ s \leq r \leq t\} \vee \mathcal{N}$.

Définition 1.3.1 ***(Processus simple)*** *On appelle processus $\tilde{\mathcal{F}}_t-$simpel une processus elémentaire de la forme :*

$$X_t \ = \xi_0 \ \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t), \ \ 0 \leq t \leq \infty. \tag{1.1}$$

où $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$, $\lim_{n\longrightarrow +\infty} t_n = \infty$ et $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a $\tilde{\mathcal{F}}_{t_n}-$mesurable telle que :

$$\sup_{n\geq 0, w\in\Omega} |\xi_n(w)| \leq C, \ \ C \leq \infty.$$

i) X_t est dite $\tilde{\mathcal{F}}_t-$*simple progressif*, si la filtration $\{\tilde{\mathcal{F}}_t \ , t \geq 0\}$ est une croissante.

ii) X_t est dite $\tilde{\mathcal{F}}_t-$*simple rétrograde,* si la filtration $\{\tilde{\mathcal{F}}_t \ , t \geq 0\}$ est une décroissante.

Proposition 1.3.1 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ processus $\tilde{\mathcal{F}}_t-$simple, alors X est mesurable et $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}-$adapté (i.e. pour tout $t \geq 0$ X_t est $\tilde{\mathcal{F}}_t-$mesurable).*

Lemme 1.3.1 *Soit X un processus mesurable, $\tilde{\mathcal{F}}_t$ $-$adapté et de carré intégrable par rapport $\mathbb{P} \otimes \lambda$, où λ désigne la mesure de Le besgue. Alors, il existe une suite $(X^n)_{n\geq 0}$ de processus $\tilde{\mathcal{F}}_t-$simple progressif, telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \int_0^T \parallel X_s^n - X_s \parallel^2 ds = 0.$$

1.4 Intégrale stochastique d'Itô

On suppose :

i) $\{\mathcal{F}_t^1, t \geq 0\}$ une famille croissante de sous tribu de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_t^W \subseteq \mathcal{F}_t^1$, et $\sigma\{W_{t+s} - W_t; s \geq 0\}$ indépendante de $\mathcal{F}_t^1$, pour tout $0 \leq t \leq T$. (*i.e* $\mathcal{F}_t^1 = \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_{0,T}^B$).

ii) $\{\mathcal{F}_t^2, t \geq 0\}$ une famille décroissante de sous tribu de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_{t,T}^B \subseteq \mathcal{F}_t^2$ et $\sigma\{B_t - B_s, s \leq t\}$ indépendant de $\mathcal{F}_t^2$ pour tout $0 \leq t \leq T$, $\left(i.e\ \mathcal{F}_t^2 = \mathcal{F}_T^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B\right)$.

1.4.1 Intégrale stochastique progressive

Définition 1.4.1 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus $\mathcal{F}_t^1-$simple progressif, pour un tel processus, on définit l'intégrale stochastique progressive d'Itô par rapport à W comme étant le processus continu $\{I(X_t),\ 0 \leq t \leq T\}$ défini par :*

$$I(X_t) := \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \left(W_{(t_{i+1}\wedge t)} - W_{(t_i \wedge t)}\right)$$

ou encore si $t \in]t_m, t_{m+1}]$,

$$I(X_t) := \sum_{i=0}^{m-1} \xi_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right) + \xi_m (W_t - W_{t_m}).$$

On note $I(X_t) = \int_0^t X_s dW_s$, on obtient alors les propriétés suivantes :

Proposition 1.4.1 *Soit X et Y deux processus $\mathcal{F}_t^1-$simple progressif. Alors :*

(P1) $I(X_0) = 0$, *p.s.*

(P2) $(I(X_t))_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t^1-$martingale: $\mathbb{E}[I(X_t)/\mathcal{F}_s^1] = I(X_s)$, *p.s.* $s \leq t$.

(P3) $\mathbb{E}[|I(X_t)|^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s|^2 ds\right]$. (*Formule d'isométrie*).

(P4) $\mathbb{E}\left[\left|I\left(X_t\right)-I\left(X_s\right)\right|^2/\mathcal{F}_s^1\right]=\mathbb{E}\left[\int\limits_s^t\left|X_r\right|^2 ds/\mathcal{F}_s^1\right]$, *p.s.*

(P5) $I\left(\ \alpha X+\beta Y\ \right)=\alpha I\left(X\right)+\beta I\left(Y\right),\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.$

Définition 1.4.2 *Soit $\left(X_t\right)_{t\geq0}$un processus mesurable, $\mathcal{F}_t^1-$adapté et de carré intégrable par rapport $\mathbb{P}\otimes\lambda$. L'intégrale stochastique de X par rapport à W sur l'intervalle $[0,T]$ est l'unique $\mathcal{F}_t^1$ $-$martingale de carré intégrable $I\left(X\right)=\left\{I\left(X_t\right),\ 0\leq t\leq T\right\}$ vérifiant :*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\ \left[\ \left|I\left(X_t^n\right)-I\left(X_t\right)\right|^2\right]=0,\ \ 0\leq t\leq T,$$

pour toute suite $\left(X^n\right)_{n\geq0}$ de processus simples progressifs, telle que :

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\int_0^T\left|X_s^n-X_s\right|^2 ds=0.$$

Proposition 1.4.2 *Pour tout processus $\left(X_t\right)_{t\geq0}$ mesurable, $\mathcal{F}_t^1-$adapté et de carré intégrable par rapport $\mathbb{P}\otimes\lambda$, le processus $I\left(X_t\right)$ défini par $\int\limits_0^t X_s dW_s$ est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_t^1$ de carré intégrable vérifiant les propriétés (P1) à (P5).*

1.4.2 Intégrale stochastique rétrograde

Définition 1.4.3 *Soit $\left(X_t\right)_{t\geq0}$ un processus $\mathcal{F}_t^2-$simple rétrograde, on définit l'intégrale stochastique rétrograde d'Itô de $\left(X_t\right)_{t\geq0}$ par rapport à B comme étant le processus continu $\left\{J\left(X_t\right),\ 0\leq t\leq T\right\}$ défini par :*

$$J\left(X_t\right):=\sum_{i=0}^{\infty}\xi_{i+1}\left(B_{(t_{i+1}\wedge T)\ \vee t}-B_{(t_{i\wedge T})\vee t}\right)$$

ou encore si $t\in\left]t_{p-1},t_p\right]$ et $T\in\left]t_q,t_{q+1}\right]$, avec $p\leq q$

$$J\left(X_t\right):=\xi_p\left(B_{t_p}-B_t\right)+\sum_{i=p}^{q-1}\xi_{i+1}\left(B_{\ t_{i+1}}-B_{\ t_i}\right)+\xi_{q+1}(B_T-B_{t_q})$$

si $t_k < t \leq T \leq t_{k+1}$ et $J(X_t) = \xi_{k+1}(B_T - B_t)$. On note : $J(X_t) = \int_t^T X_s dB_S$, l'intégrale stochastique rétrograde d'Itô de $(X_t)_{t\geq 0}$ par rapport à B. On obtient alors directement à l'aide de cette définition les propriétés suivantes :

Proposition 1.4.3

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux processus simples rétrogrades. Alors :

($\grave{\text{P}}$1) $\mathbb{E}\left[\int_t^T X_s dB_S\right] = 0.$

($\grave{\text{P}}$2) $\mathbb{E}\left[\int_t^T X_s dB_S / \mathcal{F}_u^2\right] = \int_u^T X_s dB_S$, p.s. $t \leq u$.

($\grave{\text{P}}$3) $\mathbb{E}\left[\left|\int_t^T X_s dB_S\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_u^T \|X_s\|^2 ds\right]$ *(formule d'isométrie)*.

($\grave{\text{P}}$4) $\int_t^T (\alpha X_s + \beta Y_s) dB_S = \alpha \int_t^T X_s dB_S + \beta \int_t^T Y_s \, dB_S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Définition 1.4.4 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ processus mesurables, $\mathcal{F}_t^2-$adaptés et de carré intégrable par rapport $\mathbb{P} \otimes \lambda$. L'intégrale stochastique rétrograde de X par rapport à B est l'unique $\mathcal{F}_t^2-$martingale rétrograde de carré intégrable $J(X) = \{J(X_t);\ 0 \leq t \leq T\}$ vérifiant :*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mathbb{E}\left[|J(X_t^n) - J(X_t)|^2\right] = 0,\ 0 \leq t \leq T;$$

pour toute suite $(X^n)_{n\geq 0}$ de processus simples rétrogrades, telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \int_0^T \|X_s^n - X_s\|^2 ds = 0.$$

Proposition 1.4.4 *Pour tout processus X mesurable, $\mathcal{F}_t^2-$adapté et de carré intégrable par rapport $\mathbb{P} \otimes \lambda$, le processus $J(X)$ défini par $\int_t^T X_s dB_s$ est une martingale rétrograde par rapport à $\mathcal{F}_t^2$ de carré intégrable vérifiant les propriétés ($\grave{P}$1) à ($\grave{P}$4) .*

1.5 Formule d'Itô généralisée

Lemme 1.5.1 *(Pardoux–Peng) [6] Soient β et γ et δ des processus $\mathcal{F}_t-$adaptés respectivement à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^{k\times l}$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ tels que :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |\beta_t|^2 \, dt\right] < \infty,\ \mathbb{E}\int_0^T \left[\|\gamma_t\|^2 \, dt\right] < \infty \text{ et } \mathbb{E}\left[\int_0^T \|\delta_t\|^2 \, dt\right] < \infty.$$

Soit α un processus continu et $\mathcal{F}_t-$adaptés à valeur dans $\mathbb{R}^k$, tel que

$\mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T} |\alpha_t|^2\right] < \infty$ vérifiant :

$$\alpha_t = \alpha_0 + \int_0^t \beta_s ds + \int_0^t \gamma_s dB_S + \int_0^t \delta_s dW_S,\ 0 \leq t \leq T.$$

Alors :

$$|\alpha_t|^2 = |\alpha_0|^2 + 2\int_0^t (\alpha_s, \beta_s)\, ds + 2\int_0^t (\alpha_s, \gamma_s dB_s) + 2\int_0^t (\alpha_s, \delta_s dW_s) - \int_0^t \|\gamma_s\|^2 \, ds + \int_0^t \|\delta_s\|^2 \, ds.$$

Et

$$\mathbb{E}\,|\alpha_t|^2 = \mathbb{E}\,|\alpha_0|^2 + 2\mathbb{E}\int_0^t (\alpha_s, \beta_s)\, ds - \mathbb{E}\int_0^t \|\gamma_s\|^2 \, ds + \mathbb{E}\int_0^t \|\delta_s\|^2 \, ds.$$

Plus généralement, si $x \longrightarrow \phi(x)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^k$

$$\phi(\alpha_t) = \phi(\alpha_0) + \int_0^t \left(\phi'(\alpha_s), \beta_s\right) ds + \int_0^t \left(\phi'(\alpha_s), \gamma_s dB_s\right) + \int_0^t \left(\phi'(\alpha_s), \delta_s dW_s\right)$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^t Tr(\phi'(\alpha_s)\, \gamma_s \gamma_s^*) ds + \frac{1}{2}\int_0^t Tr(\phi''(\alpha_s)\, \delta_s \delta_s^*) ds.$$

1.6 Résultats utiles

Théorème 1.6.1 ***(Théorème de représentation des martingales Browniennes)*** *Soit $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ la filtration naturelle du mouvement Brownien $(W_t)_{0\le t\le T}$. Soit M une martingale continue de carré intégrable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$. Alors il existe un unique processus prévisible H vérifiant :*

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T H_s^2 ds\right] < \infty$$

tel que, $\forall t \in [0,T]$

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s, \, \mathbb{P} - p.s.$$

Théorème 1.6.2 ***(Inégalité de Burkholder–Davis–Gundy (BDG))*** *Pour tout $p > 0$, il existe des constantes positives c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale continue $X = (X_t)_{t\ge 0}$, nul en 0 :*

$$c_p\mathbb{E}\left[(X,X)_\infty^{\frac{P}{2}}\right] \le \mathbb{E}\left[\sup_{t\ge 0}|X_t|^p\right] \le C_p\mathbb{E}\left[(X,X)_\infty^{\frac{P}{2}}\right].$$

Remarque 1.6.1 *En particulier, si $T \ge 0$*

$$c_p\mathbb{E}\left[(X,X)_T^{\frac{P}{2}}\right] \le \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}|X_t|^p\right] \le C_p\mathbb{E}\left[(X,X)_T^{\frac{P}{2}}\right].$$

Lemme 1.6.1 ***(Lemme de Gronwall)*** *: $T > 0$ et soit g une fonction positive mesurable bornée sur l'intervalle $[0,T]$. Supposons qu'il existe deux constantes $a \ge 0$, $b \ge 0$ telles que pour tout $t \in [0,T]$:*

$$g(t) \le a + b\int_0^t g(s)ds.$$

Alors, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

Théorème 1.6.3 ***(Théorème du point fixe)*** *Soient (E, d) un espace métrique complet et $\varphi : E \longrightarrow E$ une application contractante, i.e. Lipschitzienne de rapport $k < 1$. Alors, φ admet un unique point fixe $a \in E$ tel que : $\varphi(a) = a$.*

Chapitre 2

Equations différentielles stochastique rétrogrades

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion d'équations différentielles stochastiques rétrogrades, *(EDSR's en abrégé)* et de présenter briévement le résultat classique d'existence et d'unicité de la solution.

2.1 Notations et définitions

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et $\{W_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien d–dimensionnel sur cet espace. On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ \geq 0}$ la filtration naturelle du MB $\{W_t\}_{t\geq 0}$.

On travaillera avec deux espace de processus :

on notera tout d'abord $\mathcal{S}^2([0,T]\,,\mathbb{R}^k)$: L'espace vectoriel formé des processus $(Y_t)_{t\geq 0}$, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, telle que :

$$\|Y\|^2_{\mathcal{S}^2} := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty$$

et $\mathcal{S}_c^2([0,T],\mathbb{R}^k)$ le sous–espace formé par les processus continus.

En suit $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$: L'espace voctoriel formé par les processus $(Z_t)_{t\geq 0}$, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, telle que :

$$\|Z\|_{\mathcal{M}^2}^2 := \mathbb{E}[\int_0^T \|Z_s\|^2 \, ds] < \infty$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|Z\|^2 = trace(zz^*)$.

$M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$: désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R}^{k\times d})$. Les espaces $\mathcal{S}^2, \mathcal{S}_c^2$ et M^2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons $\mathcal{B}^2$ l'espace de Banach $\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)\times$ $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

L'équation différentielle stochastique rétrograde :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t dW_t \ , \ 0 \leq t \leq T \\ \quad Y_T = \xi, \quad \mathbb{P}\text{−}p.s \end{cases}$$

ou, de façon équivalente sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s, Z_s\right) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T \tag{2.1}$$

la fonction f s'appelle le générateur est définie sur : $[0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ telle que : pour tout $(Y,Z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ le processus $\{f(t,Y,Z)_{0\leq t\leq T}\}$ soit progressivement mesurable. On considère également une variable aléatoire ξ, mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeur dans $\mathbb{R}^k$.

Définition 2.1.1 *Une solution de l'EDSR* (2.1) *est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ (resp) .

2. $\mathbb{P}-p.s.\ \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\{|f(s,Y_s,Z_s)| + \|Z_s\|^2\right\} ds\right] < \infty.$

3. $\mathbb{P}-p.s.\ Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s dW_s;\quad 0\le t\le T.$

2.2 Existence et unicité des solutions

Proposition 2.2.1 *Supposons qu'il existe un processus $\{f_t\}_{t\le 0\le T}$, positive appartenant à $M^2(\mathbb{R}^k)$ et une constante positive λ tels que : $0\le t\le T$*

$$\forall (t,y,z)\in[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d},\quad |f(t,y,z)|\le f_t+\lambda\left(|y|+\|z\|\right).$$

Si $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\le t\le T}$ est une solution de l'EDSR(2.1) telle que $Z\in M^2$ alors Y appartient à $\mathcal{S}_c^2$.

Preuve. *Le résultat se déduit principalement du lemme de Gronwall et du fait que Y_0 est déterministe. En effet, on a pour tout $t\in[0,T]$:*

$$\begin{aligned}
Y_t &= \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s dW_s \\
&= \xi + \left(\int_t^0 f(s,Y_s,Z_s)\,ds + \int_0^T f(s,Y_s,Z_s)\,ds\right) - \left(\int_t^0 Z_s dW_s + \int_0^T Z_s dW_s\right) \\
&= \xi + \left(-\int_0^t f(s,Y_s,Z_s)\,ds - \left(-\int_0^t Z_s dW_s\right)\right) + \left(\int_0^T f(s,Y_s,Z_s)\,ds - \int_0^T Z_s dW_s\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\xi + \int_0^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_0^T Z_s dW_s \right) - \int_0^t f(s, Y_s, Z_s)\, ds + \int_0^t Z_s dW_s$$
$$= Y_0 - \int_0^t f(s, Y_s, Z_s)\, ds + \int_0^t Z_s dW_s$$

et par suite, on a : $Z \in M^2$ *alors :*

$$|Y_t| = |Y_0| + \int_0^t |f(s, Y_s, Z_s)|\, ds + \sup_{0 \le t \le T} \left| \int_0^t Z_s dW_s \right|$$

utilisant l'hypothèse sur f, *donc*

$$|Y_t| \le |Y_0| + \int_0^t (f_s + \lambda \|Z_s\|)\, ds + \sup_{0 \le t \le T} \left| \int_0^t Z_s dW_s \right| + \lambda \int_0^t |Y_s|\, ds.$$
$$\le \varsigma + \lambda \int_0^t |Y_s|\, ds.$$

où

$$\varsigma = |Y_0| + \int_t^T (f_s + \lambda \|Z_s\|)\, ds + \sup_{0 \le t \le T} \left| \int_0^t Z_s dW_s \right|$$

par hypothèse, Z *appartient à* M^2 *et donc, vai l'inégalité de Doob :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \le t \le T} \left| \int_0^t Z_s dW_s \right|^2 \right] = \mathbb{E}\left[\sup_{0 \le t \le T} \int_0^t \|Z_s\|^2\, ds \right] \le 4 \sup_{0 \le t \le T} \mathbb{E}\left[\int_0^t \|Z_s\|\, ds \right]$$

alors le troisiéme terme de ς *est de carré intégrable ; il en de même pour* $\{f_t\}_{0 \le t \le T}$, *et* Y_0 *est déterministe donc de carré intégrable ; ils'en suit que* ς *est une variable aléatoire de carré intégrable.* Y *est un processus continue, le lemme de Gronwal fournit l'inégalité :*

$$\sup_{0 \le t \le T} |Y_t| \le \varsigma \exp(\lambda t)$$

qui montre que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right] \leq \infty \ (i.e; Y \ \text{appartient à} \ S_c^2).$$

■

Lemme 2.2.1 *Soient* $Y \in \mathcal{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ *et* $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. *Alors* $\left\{\int\limits_0^t Y_s.Z_s dW_s \ , t \in [0,T]\right\}$ *est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. On va montré que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s.Z_s dW_s\right|\right] < \infty$$

on a :

$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s.Z_s dW_s\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t |Y_s|^2 \|Z_s\|^2 ds\right]$

alors, les intégralités BDG donnent :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s.Z_s dW_s\right|\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^T |Y_t|^2 \|Z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\ &\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|\left(\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]\end{aligned}$$

et par suite, comme la majoration : $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t Y_s.Z_s dW_s\right|\right] &\leq C\left(\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int\limits_0^T \frac{\|Z_s\|^2}{2} ds\right]\right)\\ &\leq C'\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int\limits_0^T \|Z_s\|^2 ds\right]\right).\end{aligned}$$

Mais dernière quantité est finie ; d'où :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int\limits_0^t Y_s.Z_s dW_s\right|\right] < \infty.$$

D'où le résultat. ■

2.3 EDSR cas Lipschitz

2.3.1 Résultat de Pardoux-Peng

Nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité qui sera généralisé au chapitre suivant , En 1990, E. Pardoux et S. Peng leur célébre article [PP90] ont démontré l'existence et l'inicité des solutions des l'EDSR dans le cas où le générateur est non linéaire. Voici les hypothèses **(L) :**

i). *Condition de Lipshitz* en (y, z) : Pour tout t, y, y', z, z',

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq C\left(|y - y'| + \|z - z'\|\right)$$

où C est une constante independante de t, y, y', z et z'.

ii). *Condition d'intégrabilité* :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s, 0, 0|^2\, ds\right] < \infty.$$

Nous commençons par un cas très simple, celui où f ne dépend ni y ni de z i.e. on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $M^2\left(\mathbb{R}^K\right)$ et on veut trouver une solution de *l'EDSR*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f_s ds - \int_t^T Z_s dW_S; \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

Lemme 2.3.1 *Soient* $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{f_t\}_{0\leq t\leq T} \in M^2\left(\mathbb{R}^K\right)$. *L'EDSR* (2.2) *posséde une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$

Preuve.

L'existence : Supposons que la solution existe, telle que $Z \in M^2$, on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$.

$$Y_t = \mathbb{E}\left[Y_t/\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T f_s ds - \int_t^T Z_s dW_s/\mathcal{F}_t\right],\ 0 \leq t \leq T$$

puisque $\int_t^T Z_s dW_S$ est une martingale, on a :

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T f_s ds - \int_0^t f_s ds/\mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T Z_s dW_s - \int_0^t Z_s dW_s/\mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T f_s ds/\mathcal{F}_t\right] - \int_0^t f_s ds. \end{aligned}$$

On pose :

$$M_t = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T f_s ds\ /\mathcal{F}_t\right] = Y_t + \int_0^t f_s ds.$$

M_t est une martingale carré intégrable. D'aprés le théorème de représentation des martingales il existe un processus prévizible Z carré intégrable (*i.e.* $Z \in M^2$), telle que :

$$Y_t = M_t - \int_0^t f_s ds = \underbrace{M_0 + \int_0^t Z_s dW_s}_{M_t} - \int_0^t f_s ds.$$

On vérifiant que (Y, Z) est une solution de *l'EDSR*(2.2) comme $Y_T = \xi$, on a :

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= \left(M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t f_s ds\right) - \left(M_0 + \int_0^T Z_s dW_s - \int_0^T f_s ds\right) \\ &= \int_t^T f_s ds - \int_t^T Z_s dW_s,\ 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

L'unicité : Supposons que (Y^1, Z^1) et (Y^2, Z^2) sont deux solutions, soient $y = Y^1 - Y^2$, $z = Z^1 - Z^2$ alors :

$$y = \int_t^T z_s dW_s, \qquad t \in [0, T] .$$

Nous allons prouvés que $y = z = 0 \; dt \times d\mathbb{P} - p.s.$, on a :

$$y = \int_0^T z_s dW_s - \int_0^t z_s dW_s, \quad t \in [0, T] .$$

On applique l'inégalité martingale de Doob :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \le t \le T} |M_t|^p\right] \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|M_T|^P\right]$$

on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \le t \le T} |y_t|^2\right] &\le 4\mathbb{E}\left[|y_T|^2\right] \\ &\le 2\int_0^T |z_s|^2 ds \le \infty. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nous appliquations la formule d'Itô à $f(y_t) = |y_t|^2$ de t à T, on obtient :

$$y_T = \xi - \xi = 0$$

et

$$0 = |y_t|^2 + 2\int_t^T y_s dy_s + \int_0^T |z_s|^2 ds$$

où

$$y_s dy_s = -y_s z_s dW_s.$$

Donc :

$$|y_t|^2 + \int_t^T |z_s|^2 ds = 2\int_t^T y_s z_s dW_s. \tag{2.4}$$

Soit $N_t = \int_t^T y_s z_s dW_s$, alors pour tout $t \geq 0$ le processus à variation quadratique

$$(N)_t = \int_t^T |y_s z_s|^2 \, ds, \qquad t \in [0, T] \, .$$

On utilisant l'estimation (2.3) et l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$|(M, N)_t| \leq \sqrt{(M)_t} \sqrt{(N)_t}, t \geq 0.$$

Donc :

$$|(N)_t| = |(N, N)_t| = \mathbb{E} \left[\int_0^T |y_s z_s|^2 \, ds \right]^{\frac{1}{2}} \leq \mathbb{E} \left[|y_s|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E} \left[\int_0^T |y_s z_s|^2 \, ds \right]^{\frac{1}{2}} \leq \infty.$$

On peut montrer que la martingale locale $N_t = \{N\}_t$ est une martingale uniformément intégrable. On prenant l'espérance dans (2.4) et appliquant l'inégalité de Cauchy Schwars, on obtient que :

$$\mathbb{E} \left[|y_s|^2 + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^T |z_s|^2 \, ds = 0 \right]$$

ceci démontre que $y_s = 0$ et $z_s = 0$, donc l'unicité. ■

– **Cas où** $f(t, y, z)$ **dépend de** y **et de** z**.**

Théorème 2.3.1 *On considère l'EDSR* (ξ, f) *suivante :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) \, ds - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T \tag{2.5}$$

avec l'hypothèse ***(L)****, l'EDSR* (2.5) *admet une solution unique* (Y, Z) *dans* $\mathcal{B}^2 = \mathcal{S}_c^2 (\mathbb{R}^k) \times M^2 (\mathbb{R}^{k \times d})$.

Preuve. On utilise l'argument de point fixe dans l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$. Soit Ψ une application, telle que :

$$\begin{aligned} \Psi : \qquad & \mathcal{B}^2 \longrightarrow \mathcal{B}^2 \\ & (U, V) \mapsto (Y, Z), \end{aligned}$$

où $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ est une solution de *l'EDSR* (ξ, f) :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, U_s, V_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad t \in [0, T].$$

On pose :

$$f_s = f(s, U_s, V_s) \in M^2\left(\mathbb{R}^k\right)$$

donc :

$$\begin{aligned} |f_s - f(s, 0, 0)| &\leq |f(s, U_s, V_s) - f(s, 0, 0)| \leq \lambda |U_s - 0| + \lambda \|V_s - 0\| \\ &\leq \lambda |U_s| + \lambda \|V_s\| \end{aligned}$$

donc

$$|f_s| \leq |f(s, 0, 0)| + \lambda |U_s| + \lambda \|V_s\| \leq \infty$$

bien définie et ces trois derniers processus sont carré intégrables donc f_s est carré intégrable.

Soient (U^1, V^1) et (U^2, V^2) deux éléments de $\mathcal{B}^2$, et $(Y^1, Z^1) = \Psi(U^1, V^1)$ et $(Y^2, Z^2) = \Psi(U^2, V^2)$.

Notons : $y = Y^1 - Y^2$, $z = Z^1 - Z^2$, $u = U^1 - U^2$, $v = V^1 - V^2$.

On obtient :

$$\begin{aligned}
dy_t &= dY_t^1 - dY_t^2 \\
&= \left[-f\left(t, U_t^1, V_t^1\right) dt + Z_t^1 dW_t\right] - \left[-f\left(t, U_t^2, V_t^2\right) dt + Z_t^2 dW_t\right] \\
&= \left[-f\left(t, U_t^1, V_t^1\right) + f\left(t, U_t^2, V_t^2\right)\right] dt + \left(Z_t^1 - Z_t^2\right) dW_t
\end{aligned}$$

alors

$$dy_t = \left[-f\left(t, U_t^1, V_t^1\right) + f\left(t, U_t^2, V_t^2\right)\right] dt + z_t dW_t.$$

On applique la formule d'Itô à $\exp(\alpha t)\, |y_t|^2$, obtient :

$$\begin{aligned}
d\left(\exp(\alpha t)\, |y_t|^2\right) &= \alpha \exp(\alpha t)\, |y_t|^2 \, dt + 2\exp(\alpha t)\, |y_t|\, dy_t + \left(\exp(\alpha t)\, \|z_t\|^2\right) dt \\
&= \alpha \exp(\alpha t)\, |y_t|^2 \, dt + \exp(\alpha t)\, \|z_t\|^2 \, dt \\
&\quad - 2\exp(\alpha t)\, |y_t| \left[\left\{ f\left(t, U_t^1, V_t^1\right) - f\left(t, U_t^2, V_t^2\right)\right\} dt + 2\exp(\alpha t)\, |y_t| . z_t dW_t\right].
\end{aligned}$$

On intégrer entre t et T, on obtient :

$$\begin{aligned}
\exp(\alpha t)\, |y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)\, \|z_s\|^2 \, ds \qquad &= 2\, |y_s|^2 \left[f\left(s, U_s^1, V_s^1\right) - f\left(s, U_s^2, V_s^2\right)\right]) ds \\
&+ \int_t^T \exp(\alpha s)\, (-\alpha\, |y_s|^2 - \int_t^T 2\exp(\alpha s)\, |y_s|\, z_s dW s.
\end{aligned}$$

Et comme f est Lipschitz, il vient :

$$\left| f\left(s, U_s^1, V_s^1\right) - f\left(s, U_s^2, V_s^2\right)\right| \leq k\left[\left|U_s^1 - U_s^2\right| + \left|V_s^1 - V_s^2\right|\right]$$

donc

$$\begin{aligned}
2\, |y_s|\, f\left[\left(s, U_s^1, V_s^1\right) - f\left(s, U_s^2, V_s^2\right)\right] &\leq 2k\, |y_s| \left[\left|U_s^1 - U_s^2\right| + \left|V_s^1 - V_s^2\right|\right] \\
&\leq 2k\, |y_s|\, |u_s| \; + 2k\, |y_s|\, |v_s|\, .
\end{aligned}$$

On a : $\forall\varepsilon>0$, $2ab\leq\varepsilon a^2+\frac{1}{\varepsilon}b^2$, donc :

$$\begin{aligned}2\left|y_s\right|\left[f\left(s,U_s^1,V_s^1\right)-f\left(s,U_s^2,V_s^2\right)\right] &\leq \varepsilon k^2\left|y_s\right|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left|u_s\right|^2+\varepsilon k^2\left|y_s\right|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left|v_s\right|^2\\ &\leq 2\varepsilon k^2\left|y_s\right|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left|u_s\right|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left|v_s\right|^2.\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon=2$, on a :

$$\begin{aligned}&\exp\left(\alpha t\right)\left|y_t\right|^2+\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|z_s\right\|^2ds\\ &\leq\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left(-\alpha\left|y_s\right|^2+4k^2\left|y_s\right|^2+\frac{1}{2}\left|u_s\right|^2+\frac{1}{2}\left|v_s\right|^2\right)ds\\ &-\int_t^T2\exp\left(\alpha s\right)\left|y_s\right|\left\|z_s\right\|dWs.\\ &\leq\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left(\left[-\alpha+4k^2\right]\left|y_s\right|^2+\frac{1}{2}\left[\left|u_s\right|^2+\left|v_s\right|^2\right]\right)ds\\ &-\int_t^T2\exp\left(\alpha s\right)\left|y_s\right|\left\|z_s\right\|dWs.\end{aligned}$$

On pose $\alpha=1+4k^2$, alors :

$$\begin{aligned}\exp\left(\alpha t\right)\left|y_t\right|^2+\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|z_s\right\|^2ds &\leq\int_t^T-\exp\left(\alpha s\right)\left|y_s\right|^2ds\\ &+\frac{1}{2}\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left[\left|u_s\right|^2+\left|v_s\right|^2\right]ds\\ &-\int_t^T2\exp\left(\alpha s\right)\left|y_s\right|\left\|z_s\right\|dWs.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}&\exp\left(\alpha t\right)\left|y_t\right|^2+\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left\|z_s\right\|^2ds+\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left|y_s\right|^2ds\\ &\leq\frac{1}{2}\int_t^T\exp\left(\alpha s\right)\left[\left|u_s\right|^2+\left|v_s\right|^2\right]ds-\int_t^T2\exp\left(\alpha s\right)\left|y_s\right|\left\|z_s\right\|dWs\end{aligned}$$

On prend l'espérance :

$$\mathbb{E}\left[\exp(\alpha t)|y_t|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T\exp(\alpha s)\|z_s\|^2ds\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T\exp(\alpha s)|y_s|^2ds\right]$$
$$\leq\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T\exp(\alpha s)\left[|u_s|^2+|v_s|^2\right]ds\right]-2\mathbb{E}\left[\int_t^T\exp(\alpha s)|y_s|\|z_s\|dWs\right]$$

la martingale locale $\left[\int_0^T\exp(\alpha s)|y_s|\|z_s\|dWs\right]$ est une martingale nulle en 0 puisque $Y^1,Y^2\in\mathcal{S}_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et $Z^2,Z^2\in M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

Donc :

$$\mathbb{E}\left[|y_0|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp(\alpha s)\|z_s\|^2ds\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp(\alpha s)|y_s|^2ds\right]$$
$$\leq\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp(\alpha s)\left[|u_s|^2+|v_s|^2\right]ds\right].$$

Et

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\exp(\alpha s)\|z_s\|^2ds\right]+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)|y_t|^2\right]$$
$$\leq\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)|u_t|^2+\int_0^T\exp(\alpha s)|v_s|^2ds\right].$$

Alors

$$\|z\|_\alpha^2+\|y\|_\alpha^2\leq\frac{1}{2}\|u\|_\alpha^2+\|v\|_\alpha^2.$$

Donc l'application Ψ est une contraction de $\mathcal{B}^2$ dans $\mathcal{B}^2$ admet un point fixe (Y,Z) unique dite la solution unique de *l'EDSR*. ■

Chapitre 3

Quelques résultats sur les EDDSR's

Dans ce chapitre, on fait un rappel sur quelques résultats principaux sur les équations différentielles doublements stochastiques rétrogrades (f, g, ξ) dont nous aurons besoin dans la suite de ce chapitre. Ainsi, dans la section 3.2, nous présentons le théorème d'existence et d'unicité de Pardoux et Peng [6] obtenu sous les conditions de Lipschitz sur les coefficients f et g.

3.1 Notations et définitions

Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble de parties $\mathbb{P}$–négligeables de $\mathcal{F}$

Pour tout $n \in N$, on désigne par $\mathcal{M}^2\left(F, [0,T]\,; \mathbb{R}^n\right)$ l'ensemble des processus mesurables $\{\varphi_t,\ 0 \leq t \leq T\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tels que :

i) $\|\varphi\|^2_{\mathcal{M}^2} = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^T |\varphi_t|^2\, dt\right] < \infty.$

ii) φ_t est $\mathcal{F}_t$−mesurable , $\forall\ t \in [0,T]$. $\|.\|_{\mathcal{M}^2}$ est une norme sur $\mathcal{M}^2\left(F, [0,T]\,, \mathbb{R}^n\right)$.

De façon similaire, $\mathcal{S}^2\left(F, [0,T]\,; \mathbb{R}^n\right)$ désigne l'ensemble des processus continus $\{\varphi_t, 0 \leq t \leq T\}$

à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tels que :

i) $\|\varphi\|^2 = \mathbb{E}\left[\sup\limits_{0\leq t\leq T} |\varphi_t|^2 \, dt\right] < \infty.$

ii) ξ est $\mathcal{F}_t-$mesurable, $\forall t \in [0,T]$.

Définition 3.1.1 *Il s'agit des équations différentielles doublements stochastiques rétrogrades :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)dB_s - \int_t^T Z_s dWs, \qquad t \in [0,T] \tag{3.1}$$

où f et g sont des fonctions définies sur $\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times l}$ et ξ est une variable .

3.2 EDDSR's à coefficients lipschitziens

3.2.1 Hypothèeses

(H1) Les fonctions

$$f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$
$$g : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times d}$$

sont mesurables, telles que :

$f(.,0,0) \in \mathcal{M}^2\left(F, [0,T]; \mathbb{R}^k\right), \;\; g(.,0,0) \in \mathcal{M}^2\left(F, [0,T]; \mathbb{R}^{k\times d}\right).$

(H2) Il existe des constantes $C > 0$ et $0 < \alpha < 1$, telles que : $\forall (\omega, t) \in \Omega \times [0,T]$ et $\forall (y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$

$$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)|^2 \leq C\left(|y_1 - y_2|^2 + \|z_1 - z_2\|^2\right).$$
$$\|g(t, y_1, z_1) - g(t, y_2, z_2)\|^2 \leq C\,|y_1 - y_2|^2 + \alpha\,\|z_1 - z_2\|^2.$$

(H3) La valeur terminale ξ est dans $L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}, \mathbb{R}^k\right)$

Définition 3.2.1 *Un couple de processus* $(Y, Z) : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ *est appelé sotution de l'EDDSR*(3.1) *si* $(Y, Z) \in \mathcal{S}^2\left(F, [0, T]; \mathbb{R}^k\right) \times \mathcal{M}^2\left(F, [0, T]; \mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

3.2.2 Existence et unicité de la solution

D'abord, nous considérons *l'EDDSR* (3.1) où les coeffieients f et g dépend ni y ni de z

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s)\,ds + \int_t^T g(s)\,dB_s + \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \le t \le T. \tag{3.2}$$

A l'aide du théorème de représentation des martingales, on obtient, le résultat d'existence et d'unicité suivant du à Pardoux–Peng [6]. Nous en donnons tout de même la preuve.

Proposition 3.2.1 *Supposons que* $\xi \in L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}, \mathbb{R}^k\right), (f_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}^2\left(F, [0, T]; \mathbb{R}^k\right)$ *et* $(g_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{M}^2\left(F, [0, T]; \mathbb{R}^{k\times l}\right)$, *alors l'équation* (3.2) *a une unique solution* $\{(Y_t, Z_t), 0 \le t \le T\}$.

Preuve.

Existence : Pour tout $t \in [0, T]$, on définit la filtration $(\mathcal{G}_t)_{0\le t\le T}$ par :

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_{0,T}^B.$$

Posons :

$$M_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T f(s)\,ds + \int_0^T g(s)\,dB_s / \mathcal{G}_t\right), \;\; 0 \le t \le T.$$

Puisque, f et g sont de carré intégrable, le processus $\{M_t, \;\; 0 \le t \le T\}$ ainsi défini est une martingale de carré intégrable par rapport à $\mathcal{G}_t$.

En utilisant donc le théorème de représentation des martingales, on a l'existence d'un processus $(Z_t), \mathcal{G}_t-$progressivement mesurable à valeurs dans $\mathcal{M}^2([0,T], \mathbb{R}^{k\times d})$ tel que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right] < \infty$$

et

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s, \, \forall 0 \leq t \leq T$$

d'où

$$M_T = M_t + \int_t^T Z_s dW_s. \tag{3.3}$$

Par définition, on a :

$$\begin{aligned} M_t &= \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T f(s)\, ds + \int_0^T g(s)\, dB_s / \mathcal{G}_t\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T f(s)\, ds + \int_t^T g(s)\, dB_s / \mathcal{G}_t\right] + \int_0^t f(s)\, ds + \int_0^t g(s)\, dB_s \ . \end{aligned}$$

Par conséquent, de l'égalité (3.3), on obtient :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s)\, ds + \int_t^T g(s)\, dB_s - \int_t^T Z_s dW_s.$$

Il nous reste à montrer que Y_t et Z_t sont $\mathcal{F}_t-$mesurables pour tout $0 \leq t \leq T$.

Pour Y_t, on a :

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T f(s)\, ds + \int_t^T g(s)\, dB_s / \mathcal{G}_t\right], \ 0 \leq t \leq T.$$

Donc

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\theta(t) / \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^B\right]$$

où

$$\theta(t) = \xi + \int_t^T f(s)\, ds + \int_t^T g(s)\, dB_s$$

est $\mathcal{F}_t^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B-$mesurable.

La $\sigma-$algèbre $\mathcal{F}_t^B$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}_T^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B$, donc de $\mathcal{F}_t \vee \sigma\left(\theta\left(t\right)\right)$.

D'où

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\theta\left(t\right)/\mathcal{F}_t\right).$$

Maintenant, pour Z_t, on a :

$$\begin{aligned}\int_t^T Z_s dW_s &= \xi + \int_t^T f\left(s\right) ds + \int_t^T g\left(s\right) dB_s - Y_t \\ &= \theta(t) - Y_t\end{aligned}$$

où : $\theta\left(t\right) - Y\left(t\right)$ est $\mathcal{F}_T^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B-$mesurable.

Donc, d'aprés le théorème de représentation des martingales, $\{Z_s, t < s < T\}$ est $\left\{\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B\right\}-$adapté. Par conséquent, Z_s est $\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B-$mesurable pour tout $t < s < T$.

Il s'ensuit que Z_s est $\underset{t<s}{\wedge}\left(\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B\right)-$mesurable .

Puisque :

$$\underset{t<s}{\wedge}\left(\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B\right) = \mathcal{F}_s^W \vee \left(\underset{t<s}{\wedge}\mathcal{F}_{t,T}^B\right) = \mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{t,T}^B.$$

d'où, Z_s est $\mathcal{F}_s^W \vee \mathcal{F}_{s,T}^B-$mesurable pour tout $t < s < T$.

Unicité : Soient $\left(Y^1, Z^1\right), \left(Y^2, Z^2\right) \in \mathcal{S}^2\left(F, [0,T]; \mathbb{R}^k\right) \times \mathcal{M}^2\left(F, [0,T]; \mathbb{R}^{k\times d}\right)$ deux solutions de l'équation (3.1). Alors :

$$Y_t^1 - Y_t^2 + \int_t^T \left[Z_s^1 - Z_s^2\right] dW_s = 0. \tag{3.4}$$

En prenant le carré dans les deux membres de (3.4), on a trouve :

$$\left|Y_t^1 - Y_t^2\right|^2 + \left|\int_t^T \left\|Z_s^1 - Z_s^2\right\| dW_s\right|^2 = 2\left(Y_t^1 - Y_t^2, \int_t^T \left\|Z_s^1 - Z_s^2\right\| dW_s\right).$$

D'aprés la premiére partie de la preuve $Y_t^1 - Y_t^2$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable. Donc , en prenant l'espérance et en utilisant les propriétés (P1) et (P3), on a :

$$\mathbb{E}\left|Y_t^1 - Y_t^2\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^T \left\|Z_s^1 - Z_s^2\right\| ds = 0.$$

Par conséquent ,

$$Y_t^1 = Y_t^2, \quad \mathbb{P}-p.s$$

et

$$Z_t^1 - Z_t^2, \quad \mathbb{P}-p.s.$$

Enonçons maitenant le **(résultat de Pardoux–Peng[6])** à l'origine des **EDDSR's.** Ce résultat est obtenu en utilisant l'approximation **de Picard**, à l'aide de la proposition (3-2-1) ■

Cas où $f(t, y, z)$ dépend de y et de z .

Théorème 3.2.1 *(**Pardoux-Peng [6]**) Sous les hypothèses **(H1)-(H2)**, l'EDDSR (3.1) admet une unique solution* $(Y, Z) \in \mathcal{S}^2\left(F, [0, T]; \mathbb{R}^k\right) \times \mathcal{M}^2\left(F, [0, T]; \mathbb{R}^{k \times d}\right)$.

Preuve.

L'unicité : Soit $\{Y_t^1, Z_t^1\}$ et $\{Y_t^2, Z_t^2\}$ deux solution. On suppose :

$\overline{Y}_t = Y_t^1 - Y_t^2$, $\overline{Z}_t = Z_t^1 - Z_t^2$, $\quad 0 \leq t \leq T$. Alors :

$$\begin{aligned}\bar{Y}_t = &\int_t^T \left[f\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - f\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right)\right] ds + \int_t^T \left[g\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - g\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right)\right] dB_s \\ &- \int_t^T \bar{Z}_s dW_s.\end{aligned}$$

Et par suite, utilisant le lemme (1.5.1) sur $\bar{Y}$, on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\bar{Y}_t^2\right|\right] + \mathbb{E}\int_t^T \left\|\bar{Z}_s\right\|^2 ds = 2\mathbb{E}\int_t^T \left(\bar{Y}_s, f\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - f\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right)\right) ds \\ + \mathbb{E}\int_t^T \left\|g\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - g\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right)\right\|^2 ds.\end{aligned}$$

D'aprés **(H.2)** et l'inégalité $ab \leq \dfrac{1}{2(1-\alpha)}\alpha^2 + \dfrac{1-\alpha}{2}b^2$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\left|\bar{Y}_t^2\right|\right]+\mathbb{E}\int_t^T \left\|\bar{Z}_s\right\|^2 ds \leq c(\alpha)\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\bar{Y}_s\right|^2 ds\right]+\frac{1-\alpha}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|\bar{Z}_s\right\|^2 ds\right]+\alpha\mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|\bar{Z}_s\right\|^2 ds\right]$$

avec $0 \leq \alpha \leq 1$ est constante de **(H.2).**

Ce que implique :

$$\mathbb{E}\left[\left|\bar{Y}_t^2\right|\right] + \frac{1-\alpha}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|\bar{Z}_s\right\|^2 ds\right] \leq c(\alpha)\mathbb{E}\left[\int_t^T \left|\bar{Y}_s\right|^2 ds\right].$$

En appliquant le lemme de Gronwall, il vient $\mathbb{E}\left[\left|\bar{Y}_t^2\right|\right] = 0, \quad 0 \leq t \leq T$, et donc $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|\bar{Z}_t\right\|^2 ds\right] = 0$.

Existence : Nous définissons récursivement une suite $\{(Y_t^i, Z_t^i)\}_{i=0,1,\ldots}$ comme suit. Soit $Y_t^0 \equiv 0$, $Z_t^0 \equiv 0$. étant donné $\left\{(Y_t^i, Z_t^i), \left(Y_t^{i+1}, Z_t^{i+1}\right)\right\}$ est la solution unique, on utilise le même technique précedent pour Y_t^{i+1}, on a :

$$Y_t^{i+1} = \xi + \int_t^T \left(f\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right)\right) ds + \int_t^T \left(g\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right)\right) dB_s - \int_t^T Z_s^{i+1} dW_s$$

Notons $\bar{Y}_t^{i+1} := Y_t^{i+1} - Y_t^i$, $\bar{Z}_t^{i+1} := Z_t^{i+1} - Z_t^i$, $0 \leq t \leq T$. D'aprés le lemme (1.5.1) sur Y_t^{i+1}, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left|\bar{Y}_t^{i+1}\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|\bar{Z}_s^{i+1}\right\|^2 ds\right] &= 2\mathbb{E}\left[\int_t^T \left(f\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) - \left(f\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right), \bar{Y}_s^{i+1}\right) ds\right.\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left\|g(s, Y_s^i, Z_s^i) - g\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right)\right\|^2 ds\right].\end{aligned}$$

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Par l'intégration par parties, on obtient :

$$
\begin{aligned}
& e^{\beta t}\mathbb{E}\left[\left|\bar{Y}_t^{i+1}\right|^2\right] + \beta\mathbb{E}\int_t^T e^{\beta s}\left|\bar{Y}_t^{i+1}\right|^2 ds + \mathbb{E}\int_t^T e^{\beta s}\left\|\bar{Z}_s^{i+1}\right\|^2 ds \\
& = 2\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\beta s}(f\left(s, Y_s^i, Z_s^i\right) - \left(f\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right), \bar{Y}_s^{i+1}\right) ds\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\beta s}\left\|g(s, Y_s^i, Z_s^i) - g\left(s, Y_s^{i-1}, Z_s^{i-1}\right)\right\|^2 ds\right].
\end{aligned}
$$

Il existe $c, \gamma > 0$, tels que :

$$
\begin{aligned}
& e^{\beta t}\mathbb{E}\left[\left|\bar{Y}_t^{i+1}\right|^2\right] + (\beta - \gamma)\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\beta s}\left|\bar{Y}_s^{i+1}\right|^2 ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\beta s}\left\|\bar{Z}_s^{i+1}\right\|^2 ds\right] \\
& \leq \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\beta s}(c\left|\bar{Y}_s^i\right|^2 + \frac{1+\alpha}{2}\left\|\bar{Z}_s^i\right\|^2)ds\right].
\end{aligned}
$$

On notant $\beta = \gamma + \bar{c}$, où $\bar{c} = \dfrac{2c}{1+\alpha}$

$$
\begin{aligned}
& e^{\beta t}\left[\mathbb{E}\left|\bar{Y}_t^{i+1}\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\beta s}\left(\bar{c}\left|\bar{Y}_s^{i+1}\right|^2 + \left\|\bar{Z}_s^{i+1}\right\|^2\right) ds\right] \\
& \leq \frac{1+\alpha}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\beta s}(\bar{c}\left|\bar{Y}_s^i\right|^2 + \left\|\bar{Z}_s^i\right\|^2)ds\right].
\end{aligned}
$$

Ce qui implique que :

$$
\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\beta s}(\bar{c}\left|\bar{Y}_s^{i+1}\right|^2 + \left\|\bar{Z}_s^{i+1}\right\|^2)ds\right] \leq \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^i \mathbb{E}\int_t^T e^{\beta s}(\bar{c}\left|Y_s^i\right|^2 + \left\|Z_s^i\right\|^2)ds.
$$

Comme $\dfrac{1+\alpha}{2} < 1$, $\{(Y_t^i, Z_t^i)\}_{i=0,1,2\ldots}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{M}^2\left([0,T]\,;\mathbb{R}^k\right) \times \mathcal{M}^2\left([0,T]\,;\mathbb{R}^{k\times d}\right)$. Donc, on obtient facilement que $\{Y_t^i\}_{i=0,1,2\ldots}$ est aussi de Cauchy dans $\mathcal{S}^2\left([0,T]\,;\mathbb{R}^k\right)$, et que $\{(Y_t, Z_t)\} = \lim\limits_{i\longrightarrow\infty}\{(Y_t^i, Z_t^i)\}$ solution de l'équation (2.1) .

■

Bibliographie

[1] Briand, P. (2001). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[2] Guiol, H. (2006) : Calcul Stochastique Avancé. Laboratoire TIMB/TIMC–IMAG. Université de Joseph Fourier, France.

[3] Jeanblanc, M., Sinon, T. (Septembre 2005) : Eléments de Calcul Stochastiques. Université d'Evry Val d'Essonne, France.

[4] Lanberton, D.,Lapeyse, B. (2012) : *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance.* Ellipes.

[5] Pardoux, E., Peng, S (1990). A dapted Solution of a Backward stochastic Differential Equation. Systems and Control Letters, 14(1). 55–61.

[6] Pardoux, E., and Peng, S Backward Doubly Stochastic Differential Equations and Systèmes of Quasilinear SPDEs. Probab. Theory Related Fields.,98 :209–227,1994.

[7] Shi, Y., Gu,Y., and Liu, K. Comparison Theorem of Backward Doubly Stochastic Differential Equations and Applications. Stoch. Ana. App., (23)(1) :1–14,2005.

Annexe : Abréviations et Notations

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	$\rightarrow$	Espace de probabilité.
$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$	$\rightarrow$	Filtration.
$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$	$\rightarrow$	Espace de probabilité filtré.
EDS	$\rightarrow$	Equation différentielle stochastique .
$EDSR$	$\rightarrow$	Equation différentielle stochastique rétrograde.
$EDDSR$	$\rightarrow$	Equation différentielle doublement stochastique rétrograde.
$(B_t)_{t\geq 0}$	$\rightarrow$	Mouvement Brownien.
ξ	$\rightarrow$	La condition terminale de l'EDSR.
$\mathcal{N}$	$\rightarrow$	L'ensemble $\mathbb{P}-$négligeable.
$\mathbb{N}$	$\rightarrow$	L'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{F}$	$\rightarrow$	La filtration naturelle.
$\mathbb{E}[X]$	$\rightarrow$	Espérance mathématique du processus stochastique X.
$\mathbb{R}^d$	$\rightarrow$	L'espace réel euclidien de dimension d.
$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^d$	$\rightarrow$	L'ensemble des matrices réelles $n \times d$.
$\mathbb{P} - p.s$	$\rightarrow$	Presque surement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

z^*	$\longrightarrow$	Désigne la transposée du vecteur z .
$trace(zz^*)$	$\longrightarrow$	Désigne la trace la matrice carrée (zz^*) .
$\lvert . \rvert$	$\longrightarrow$	Désigne la valeur absolu.
$\lVert . \rVert$	$\longrightarrow$	Désigne la norme .
L^2	$\longrightarrow$	L'espace des fonctions de carré intégrable
$\mathcal{S}^2([0,T],\mathbb{R}^k)$	$\longrightarrow$	L'espace vectoriel formé des processus $(Y_t)_{t\geq 0}$
$\mathcal{S}_c^2([0,T],\mathbb{R}^k)$	$\longrightarrow$	le sous-espace formé par les processus continus
$\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$	$\longrightarrow$	L'espace voctoriel formé par les processus $(Z_t)_{t\geq 0}$
$M^2(\mathbb{R}^{k\times d}$	$\longrightarrow$	désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2([0,T],\mathbb{R}^{k\times d})$
$s \wedge t$	$\longrightarrow$	$\min(s,t)$

RÉSUMÉ

A travers ce travail, nous présentons une nouvelle classe des équations différentielles stochastiques rétrogrades. Ces équations comportent deux types des intégrales stochastiques, l'une progressive et l'autre rétrograde. D'abord, nous avons fait un passage sur quelques rappel général sur les résultats principaux du calcul stochastique et les définitions des intégrales stochastiques progressives et rétrogrades. Ainsi, nous avons étudié l'EDSR's.

En fin, on a terminé ce travail par l'étude d'existence et d'unicité de la solution d'EDDSR's à coefficients Lipschitziens.

Mots--clés: Mouvement Brownien, Intégrale stochastique progressive et rétrograde. Équation différentielle stochastique rétrograde, EDDSR's.

ABSTRACT

Through this work, we present a new class of retrograde stochastic differential equations. These equations have two types of stochastic integrals, one progressive and the other retrograde. First, we made a passage on some general recall on the main results of stochastic calculus and the definitions of progressive and retrograde stochastic integrals. Thus, we studied the EDSR's.

Finally, this work was completed by the study of the existence and uniqueness of the EDDSR's solution with Lipschitzian coefficients.

Keywords: Brownian motion, Progressive and retrograde stochastic integral. Retrograde stochastic differential equation, EDDSR's.

ملخص

من خلال هذا العمل، نقدم فئة جديدة من المعادلات التفاضلية العشوائية الرجعية. تحتوي هذه المعادلات على نوعين من التكاملات العشوائية، أحدهما تقدمي والآخر رجعي. حيث انتقلنا لبعض المفاهيم الأساسية في الحساب العشوائي وكذلك تطرقنا لتكاملات العشوائية المتقدمة والرجعية، وبعد ذلك قمنا بدراسة المعادلات التفاضلية العشوائية الرجعية. ثم أنهينا هذا العمل بدراسة وجود ووحدانية حل هذا النوع من المعادلات التفاضلية المضاعفة العشوائية.