République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option :Probabilité

Nacira LALMI

Titre :

Principe du maximum dans le cas non linéaire convexe

Devant le Jury :

Dr.	Abedelmajid ABBA	U. Biskra	Encadreur
Pr.	Adel CHALA	U. Biskra	Président
Dr.	Saloua LABED	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 26/06/2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents

Qui veillent sans cesse sur moi avec leurs prières et leurs recommandations. Que Dieu le tout puissant les protège et leur réserve une longue et meilleure vie.

Mes très chers frères et sœurs

Mes chères amies

$\mathcal{R}$emerciements

Au seuil de ce mémoire, je remercie ALLAH tout puissant de me donner la patience, la santé et le courage pour finir ce travail.

Je remercie mon encadreur Dr.ABBA Abedelmajid,d'avoir accepté

de diriger ce projet et pour sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce mémoire pour ses encouragements, et ses précieux conseils.

Mes remerciements les plus distingués sont adressés aux membres du jury

Dr.Adel CHALA et Dr.Saloua LABED qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir accepter d'évaluer ce modeste travail.

Enfin, je adresse mes plus sincères remerciments à tous mes proches et amis, qui nous ont toujours encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Notations et symbols

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	Filtration.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré.
$(B_t)_{t\geq 0}$	Movement Brwonien.
(EDS)	Equation difiérentielle stochastique.
$(EDSR)$	Equation difiérentielle stochastique retrogrede.
$\mathbb{R}^d$	Espace réel euclidien de dimension d.

$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
$\mathbb{E}[X]$	Espérance mathématique du processus stochastique X .
$J\left(.\right)$	La fonction de coût.
U	Ensemble des contrôles stricts admissibles.
u_t^{ε}	Contrôle perturbé.
u_t	Variable de contrôle strict.
$H(t, x(t), \mu, v, P, p)$	Hamiltonien.
$\langle ., . \rangle$	le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, nous intéressons à l'étude d'équations différentielles stochastiques dons la solution est donnée en temps initial. Ce type d'équations est appelé équations différentielles stochastiques (EDS).

Rappelons ici brièvement dans quel contexte la notion d'EDS a été introduite. On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'un mouvement Brownien B (d-dimensionnel) dont la filtration naturelle et augmentée est notée par $\mathcal{F}^B = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Une EDS à horizon initial est définie par une équation dont la forme générique est la suivante

$$Y_t = \xi + \int_0^t b(s, Y_s) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s) dB_s,\ 0 \leq t \leq T,$$

dont les paramètres sont la condition $Y_0 = \xi$.

L'objectif de ce mémoire est l'étude les conditions nécessaire d'optimalités pour contrôles convexes pour les EDS.

Ce travail est composé de deux chapitres

Le premier chapitre est consacré à la théorie du calcul stochastique, en donnant les défénitions et les propriétés des processus continues, ainsi que leurs résultats principaux (processus stochastiques, mouvement Brownien, martingales), qui nous permettre de défénir l'intégrale stochastique, et puis l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique (EDS) d'appre Guesraya, S. (2019). Université-biskra, et d'appre Kebbas, H. (2019). Université-biskra. Le deuxième chapitre a pour objectif l'etude du principe du maximum stochastique dans le cas où les coefficients de drifte b et de diffusion σ de l'équation d'état contient un terme de contrôle .On note par U l'ensemble de tous les contrôle admissible

$$\begin{cases} dx_t^v = b\left(t, x_t^v, v_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t^v, v_t\right) dB_t, \\ x_0^v = \xi, \end{cases}$$

où $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, satisfaisant les conditions habituelles. Notre objectif dans ce chapitre, est d'établir les conditions nécéssaire d'optimalités d'un principe de maximum stochastique, pour les contrôles convexe. Nous établissons les conditions nécéssair d'optimalités, en utilisant la perturbation convexe (faible). Nous obtenons l'équation variationnelle de l'équation d'état, et l'inégalité variationnelle d'après l'optimalité u c'est-à-dire

$$0 \leq J(\mu^\varepsilon) - J(\mu).$$

Chapitre 1

Généralité sur le calcul stochastique

Le but de ce chapitre est consacré à donner des définitions de base et des résultats principaux pour les utiliser aux prochains chapitres.

1.1 processus stochastique

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré.

Définition 1.1.1 ***Processus stochastique*** *Soit T un ensemble. On appelle processus stochastique sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, une famille $(X_t)_{t\in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$, pour tout $t \in T$, X_t soit une variable aléatoire.*

Remarque 1.1.1 *Les fonctions $t \to X_t(w)$ sont appelées les trajectoires du processus stochastique X_t.*

1.2 Filtration

On appelle filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$de $(\Omega,\mathcal{F})$ une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$.i.e $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F};\forall s\leq t$. Un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ est satisfaites conditions habituelles si

i. Les ensembles négligeables sont contenus dans $\mathcal{F}_0$.

ii. La filtration est continue à droite i.e. $\mathcal{F}_t=\bigcap\limits_{s\leq t}\mathcal{F}_s\forall t$.

La famille croissante de sous tribus $G_t=\sigma\left(X_s,s\leq t\right)$ s'appelle **la filtration naturelle** du processus stochastique X. Mais G_0 ne contient pas nécessairement les ensembles négligeables $\mathcal{N}$, c'est pour cela on introduit la filtration naturelle augmentée de X définie par $\mathcal{F}_t=\sigma\left(\mathcal{N}\cup G_t\right)$Lorsque nous parlerons de filtration naturelle, il s'agira toujours de la filtration naturelle augmentée.

1.3 Processus adapté

Définition 1.3.1 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\in T}$*est adapté par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$*si* $\forall t\geq0,X_t\in\mathcal{F}_t$*i.e.* X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*mesurable pour tout* t.

Définition 1.3.2 *Soient* $(X_t)_{t\geq0}$ *et* $(Y_t)_{t\geq0}$*deux processus stochastiques définis sur même espace* $(\mathcal{F},P)$

i) X *est une modification (ou une version) de* Y *si : pour tout* $t\geq0$, *les variables* X_t *et* Y_t *sont égales*

$$P-p.s.\forall t\quad P\left(X_t=Y_t\right)=1,$$

ii) X *et* Y*sont indistinguables si* $P-p.s$,*les trajectoires de* X*et* Y*sont les mêmes i.e :*

$$P(X_t=Y_t,\forall t\geq0)=1.$$

Définition 1.3.3 *Un processus stochastique* $(X_t)_{t\geq 0}$*est progressivement mesurable par rapport à* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si l'application* $(s,\omega) \longrightarrow X_t(\omega)$ *de* $[0,t] \times \Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$*est mesurable par rapport à* $B([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $B\left(\mathbb{R}^d\right)$*.*

Définition 1.3.4 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On note aussi que si* X *est processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable.*

Proposition 1.3.1 *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$*un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou à gauche), alors* X_t *est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

Les variables aléatoires $X_t - X_s, 0 \leq s \leq t$, sont appelées les accroissements du processus stochastique X_t,

$i)$ Processus à accroissement indépendants

$$(X_t - X_s) \perp \mathcal{F}_t^x = \sigma(X_r, 0 \leq r \leq s), \forall 0 \leq s \leq t.$$

$ii)$ Processus à accroissement stationnaires

$$X_t - X_s \rightsquigarrow X_{t-s} - X_0, \forall 0 \leq s \leq t.$$

Définition 1.3.5 *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in T}$ *est gaussien ssi toute combinaison linéaire de ses marginales* $\alpha_1 X_{t1} + ... + \alpha_n X_{tn}$ *suit une loi gaussienne* $(pour\ tout\ n \in \mathbb{N}, t_1, ..., t_n \in T, \alpha_1 ... \alpha_n \in \mathbb{R})$*.*

1.4 Mouvement Brownien

Définition 1.4.1 *On appelle Mouvement Brownien un processus stochastique $(B_t)_{t\geq 0}$ à valeurs réelles tel que :*

i) Continuité $P-p.s$; la fonction $s \to B_s(\omega)$ est une fonction continue.

ii) Indépendance des accroissements : si $0 \leq s \leq t, B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ et de loi gaussienne centrée de variance $t-s$.

iii) Stationnarité des accroissements : si $0 \leq s \leq t$ la loi de $B_t - B_s$ est identique à celle de $B_{t-s} - B_0 = B_{t-s}$.

On dit qu'un mouvement brownien par rapport à x si :$B_0 = x$.

Définition 1.4.2 *Un mouvement brownien est dit **standard** si :$B_0 = 0$ $P-p.s$, $\mathbb{E}[B_t] = 0$ et $\mathbb{E}[B_t^2] = t$.*

Dans la suite si on parlera de mouvement brownien sans précision, il s'agira d'un mouvement brownien standard.

Proposition 1.4.1 *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard, alors B_t est un processus gaussien i.e : pour tout n et tous $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq .... \leq t_n$, $(B_{t_1}, ...B_{t_n})$ est un vecteur gaussien.*

Proposition 1.4.2 *Soit B un mouvement brownien Standard, on a*

1. *$\{B_{t+T} - B_T\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $(B_u, u \leq T)$ pour tout $T > 0$.*
2. *$(-B_t)$ est aussi un mouvement Brownien.*
3. *Pour tout $c > 0, \left\{cB_{\frac{t}{c^2}}\right\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.*
4. *Le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tB_{\frac{1}{t}}$ est un mouvement brownien.*

Proposition 1.4.3 *Soit B un mouvement brownien on a :*

1. *$\forall t, P-p.s, B_t$ n'est pas différentiable en aucun point t.*
2. *B_t n'est pas à variation finie en aucun point t.*

1.5 Martingales

Définition 1.5.1 *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$est dit martingale si*

$i)$Pour tout $t \geq 0, X_t$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

$ii)$Pour tout $t \geq 0, X_t$ est intégrable $i.e$: $\mathbb{E}\left[|X_t|\right] < \infty$.

$iii)$Pour tout $\forall t \geq s \geq 0$,E$[X_t \backslash \mathcal{F}_s] = X_s.P-p.s.$

On définit de manière similaire une sous-martingale si $iii)$est remplacé par

$$\mathbb{E}\left[X_t \backslash \mathcal{F}_s\right] \geq X_s.P-p.s,\ \forall t \geq s$$

Et sur-martingale si $iii)$est remplacé par

$$\left(\mathbb{E}\left[X_t \backslash \mathcal{F}_s\right] \leq X_s.P-p.s, \forall t \geq s \geq 0\right).$$

Proposition 1.5.1 *Le mouvement brownien standard $(B_t, t \geq 0)$est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^\omega = \sigma\left(B_s, 0 \leq s \leq t\right)$.*

Proposition 1.5.2 *Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. Les processus suivants sont des martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t^\omega)$*

$i)$ $M_t = B_t^2 - t$.

$ii)$ $N_t = \exp\left[B_t - \frac{t}{2}\right]$.

1.6 Intégrale stochastique

Il s'agit d'une intégrale définie de façon similaire à l'intégrale de Riemann comme limite d'une somme de Riemann. Si on se donne un processus de Wiener (ou mouvement Brownien),$B_t : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ ainsi que $x : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ un processus stochastique adapté à la filtration naturelle associée à B_t, alors l'intégrale d'Itô : $\int_0^T \phi_s dB_s$ est définie par la limite en moyenne quadratique de $\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$un espace probabilité et B_t un mouvement Brownien sur cet espace, et la filtration naturelle du mouvement Brownien $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. L'objectif c'est définir l'intégrale$\int_0^t \phi_s dB_s$ pour des processus.

1. **Cas étagé** : On dit est un processus étagé(ou élémentaire) s'il existe une suite de réels t_i, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq .... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoire ϕ_i telle que ϕ_i est $\mathcal{F}_{t_i}-$mesurables de carré intégrables $\phi_t = \phi_i$ pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}]$, soit

$$\phi_s(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(s).$$

On définit

$$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right).$$

On sait que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] = 0 \text{ et } var\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] = \left[\int_0^t \phi_s^2 ds\right],$$

alors$\int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i \wedge t}\right)$.

2. **Cas général**

Soit l'ensemble $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ des processus ϕ $\mathcal{F}_t-$adaptés càglàd (continus à gauche limite à droite).

Si un meilleur processus, il existe(ϕ_s^n) une suite de processus étagés telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\phi_s^n - \phi_s)^2 \, ds\right] \to 0,$$

quand n tend vers ∞. Ainsi, pour tout $t > 0$ il existe une v.a $I_t(\phi) = \int_0^\infty \phi_s dB_s$ de carré intégrable. On va montrer que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] = 0.$$

On a

$$I_t(\phi) = \int_0^t \phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right),$$

$I_t(\phi)$ est gaussien, car (B_t) est un processus gaussien alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i \mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}\left[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right] = 0$ car $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ sont à accroissement indépendantes. Pour montrer que

$$var\left[I_t(\phi)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \phi_s^2 ds\right].$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
var\left[I_t(\phi)\right] &= \mathbb{E}\left[I_t(\phi)^2\right] - \mathbb{E}\left[I_t(\phi)\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[I_t(\phi)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s dB_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \phi_i\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i^2 \mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i^2\left(t_{i+1} - t_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \phi_i^2.
\end{aligned}$$

1.7 Formule d'Itô

Théorème 1.7.1 ***Première formule d'Itô***

Soit B un mouvement Brownien défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 et bornée. Alors

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds.$$

Exemple 1.7.1 *Calculer $\int_0^t B_s dB_s$ tel que : $f(x) = x^2$*

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + \int_0^t ds.$$

Ce qui donne, d'après l'intégration

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Théorème 1.7.2 ***Deuxième formule d'Itô***

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $C^{1,2}$, on a

$$f(t, B_t) = f(0, B_0) + \int_0^t f'_x(s, B_s)dB_s + \int_0^t f'_s(s, B_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, B_s)ds.$$

Théorème 1.7.3 ***Troisiém formule d'Itô***

Soient

$$X(t) = x_0 + \int_0^t f(s)dB_s + \int_0^t g(s)ds,$$
$$Y(t) = y_0 + \int_0^t h(s)dB_s + \int_0^t k(s)ds,$$

deux processus d'Itô, avec les fonctions $f, g, h, k \in \mathbb{L}^2$, d'après la formule d'Itô on a

$$\phi(X(t), Y(t)) = X(t)Y(t),$$

donc

$$dX(t)dY(t) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + d\langle X, Y\rangle_t,$$

et on obtient la formule d'intégration par parties suivantes

$$X(t)Y(t) = X(0)Y(0) + \int_0^t X(s)dY(s) + \int_0^t Y(s)dX(s) + \int_0^t g(s)k(s)ds.$$

1.8 Equations diﬁérentielles stochastiques(EDS)

Théorème 1.8.1 *Soit l'équation différentielle stochastique suivante*

$$\begin{cases} dx_t = b(t,x)dt + \sigma(t,x_t)dB_t, \\ x_0 = \xi, \end{cases} \tag{1.1}$$

vérifier les conditions suivantes

1. $$P(x_0 = \xi) = 1,$$

2. $$P\left(\int_0^t |b(s,x_s)| + \sigma^2(s,x_s)ds < \infty\right) = 1,$$

3. $$x_t = \xi + \int_0^t b(s,x_s)ds + \int_0^t \sigma(s,x_s)dB_s.$$

Le problème est, comme les équations différentielles stochastiques constituent une généralisation des équations différentielles ordinaires pour montrer que sous certaines conditions sur les coefficients b, σ, l'équation différentielle a une unique solution. Soit K est positive,on suppose que

$$|b(t,x) - b(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq k|x-y|^2, \tag{1.2}$$

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq k(1+|x|^2). \tag{1.3}$$

La preuve d'existence et d'unicité de la solution, est basée sur les deux lemmes suivants.

Lemme 1.8.1 ***Lemme de Gronwall***

Soit f une fonction intégrable et non négative définie pour $t \geq 0$ et vérifiant

$$f(t) \leq \beta + c \int_0^t f(s)ds,$$

où c et β sont des constantes positives. Alors on a

$$f(t) \leq \beta \exp(\int_0^t cs)ds.$$

Lemme 1.8.2 ***Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy***

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^T \sigma(s,X_s)dB_s\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^T |\sigma(s,X_s)|^2\, ds\right],$$

où C est constante positive.

Maintenant, on se donne ci-dessous le théorème d'existence et d'unicité

Théorème 1.8.2 ***Existence et unicité*** *: Si les coefficients b et σ vérifient les conditions (1.2) et (1.3). Alors l'équation (1.1) admet une solution forte unique $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$, $\mathcal{F}_t$-adapté et continue avec condition initiale $x_0 = \xi$ de plus cette solution est markovienne et vérifie*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right] \leq M, \quad \forall p > 1,$$

où M est une constante qui dépend de k, p, T et ξ.

Preuve.

1) **l'existence :** On montre l'existence d'une solution forte en étulisant la méthode des approximation successives et pour cela on pose

$$\begin{cases} X_t^n = \xi + \int_0^t b\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s, \\ X_s^0 = \xi. \end{cases}$$

Alors

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t \left[b\left(s, X_s^n\right) - b\left(s, X_s^{n-1}\right)\right] ds + \int_0^t \left[\sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right)\right] dB_s.$$

d'appre Cauchy, Lemme de Gronwall et Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy on obtient

$$\mathbb{E}\left[\left|X_s^{n+1} - X_s^n\right|^2\right] \leq c \int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2\right] ds,$$

oú $c = \max\left(2Tk; 2k\right)$ .D'aprés (1.3) on a

$$\mathbb{E}\left[\left|X_s^1 - X_s^0\right|^2\right] \leq 2cT\left(1 + \mathbb{E}\left[\left|X_s^0\right|^2\right]\right),$$

puisque

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|X_s^1 - X_s^0\right|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t b\left(s, X_s^0\right) ds\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^0\right) dB_s\right|^2\right] \\
&\leq 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|b\left(s, X_s^0\right)\right|^2 ds\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^0\right)\right|^2 ds\right] \\
&\leq 2Tk\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\left[\left|X_s^0\right|^2\right]\right) ds + 2k\int_0^t \left(1 + \mathbb{E}\left[\left|X_s^0\right|^2\right]\right) ds \\
&\leq (2Tk + 2k)\left(1 + \mathbb{E}\left[\left|X_s^0\right|^2\right]\right) T \\
&\leq 2cT\left(1 + \mathbb{E}\left[\left|X_s^0\right|^2\right]\right).
\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{E}\left[\left|X_s^1 - X_s^0\right|^2\right] \leq MT,$$

tel que $M = 2c\left(1 + \mathbb{E}\left[|X_s^0|^2\right]\right)$.

Par récurrence sur n il résulte que

$$\mathbb{E}\left[\left|X_s^{n+1} - X_s^n\right|^2\right] \leq \frac{(MT)^{n+1}}{(n+1)}.$$

On démontre que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+2} - X_t^{n+1}\right|^2\right] &\leq \frac{(MT)^{n+2}}{(n+2)} \\
&\leq c\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2\right] ds \\
&\leq c\int_0^t \frac{(MT)^{n+1}}{(n+1)} ds \\
&= c\frac{(MT)^{n+2}}{(n+2)}.
\end{aligned}$$

On obtient alors, lorsque $n \to \infty$ on obtient

$$\mathbb{E}\left[\left(|X_t^m - X_t^n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \to 0.$$

Alors on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\left(|X_t^m - X_t^n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] = 0. \tag{1.4}$$

Donc X_t^n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et par conséquant elle est convergente. Notons X_t sa limite ,c'est -à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} X_t^n \to X_t.$$

Maintenant, le processus X_t^n définit par

$$X_t^n = \xi + \int_0^t b\left(s, X_s^{n-1}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s.$$

D'aprés l'égalité (1.4) et lemme de Fatou on obtient

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t^m - X_t^n|^2\, ds\right] \leq \lim_{m\to\infty} \sup \mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t^m - X_t^n|^2\, ds\right] \to 0,$$

et

$$\mathbb{E}\left[\lim_{m\to\infty} \int_0^T |X_t^m - X_t^n|^2\, ds\right] \leq \lim_{m\to\infty} \sup_{t\leq T} \mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t^m - X_t^n|^2\, ds\right] \to 0.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t - X_t^n|^2\, ds\right] \to 0.$$

En utilisant l'isométrie d'Itô, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s^n\right) - \sigma\left(s, X_s^n\right) dB_s\right|^2\right] \leq C\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s^n - X_s\right|^2\right] ds \to 0,$$

et de plus

$$\int_0^t \sigma\left(s, X_s^n\right) dB_s \to \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s.$$

On applique l'inégalité de Hôlder

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|b\left(s, X_s^n\right) - b\left(s, X_s\right)\right|^2 ds\right] \leq cT\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s^n - X_s\right|^2\right] ds \to 0.$$

Et par la continuité de $b\left(t, .\right)$ on obtient

$$\int_0^t b\left(s, X_s^n\right) ds \to \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds; \left(n \to \infty\right).$$

En passant à la limite dans l'équation (1.4) on obtient

$$X_t = \xi + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s.$$

Donc X_t est une solution de l'équation (1.1), montrons que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|X_t\right|^p\right] < M, \quad \forall p > 1.$$

Par l'inégalité $\left(a+b+c\right)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$ et on passant de l'espérance et on appliquant holder et isometrie

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t\right|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[\left|\xi\right|^2\right] + 3T\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|b\left(s, X_s\right)\right|^2 ds\right] + 3\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\sigma\left(s, X_s\right)\right|^2 ds\right].$$

D'aprés (1.3) on trouve

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[|\xi|^2\right] + 3Tk\int_0^t \left(1+\mathbb{E}\left[|X_s|^2\right]\right)ds + 3k\int_0^t \left(1+\mathbb{E}\left[|X_s|^2\right]\right)ds.$$

Posant $M = 3\max(3Tk; 3k)$ et $c = \max(M; 2M)$ on obtient

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq c\left(1+\mathbb{E}\left[|\xi|^2\right]\right) + c\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s|^2\right]ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwall on obtient

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq c\left(1+\mathbb{E}\left[|\xi|^2\right]\right)\exp(ct); \forall t \in T.$$

Puisque $\mathrm{E}\left[|\xi|^2\right] < \infty$ alors on posant $\grave{M} = c\left(1+\mathbb{E}\left[|\xi|^2\right]\right)\exp(ct)$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq \grave{M}; \forall t \in T.$$

Ce qui implique

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right] < M.$$

D'où le résultat.

2) Unicité : Soient $X = (X_t)_{t\in T}$ et $Y = (Y_t)_{t\in T}$ deux solution de l'équation(1.1) tel que $X_0 = Y_0 = \xi$. En appliquant l'inégalité : $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$,en utilisant les formules de X_t et Y_t on obtient

$$|X_t - Y_t|^2 \leq 2\left|\int_0^t b(s,X_s) - b(s,Y_s)\,ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t \sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)\,dB_s\right|^2.$$

Passant à l'èspérance mathématique on obtient :

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t b(s, X_s) - b(s, Y_s)\, ds\right|^2 + 2\mathbb{E}\left|\int_0^t \sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)\, dB_s\right|^2.$$

Par les inégalités de Cauchy-Schawrtz et isometrie on obtient

$$\left\langle \int_0 g(s)\, dB_s \right\rangle_T = \int_0^t g^2(s)\, ds,$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq 2T\mathbb{E}&\left[\int_0^T |b(s, X_s) - b(s, Y_s)|^2\, ds\right] \\ &+ 2\mathbb{E}\left[\int_0^T |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)|^2\, ds\right].\end{aligned}$$

En appliquant la condition de lipshitz on obtient

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq c\int_0^T \mathbb{E}\left[|X_s - Y_s|^2\right] ds,$$

où $c = \max(2Tk; 2k)$.

En appliquant l'inégaité de Tchébychef on obtient :

$$\forall\, \varepsilon > 0; \left(\mathbb{P}\,|X_t - Y_t|^2 > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right]}{\varepsilon^2} \to 0.$$

Donc pour tout ensemble D dénombrable partout dense dans $[0; T]$ on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0;T]} |X_t - Y_t|^2 > 0\right) = 0,$$

enfin le processus X et Y sont continues. On concut que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0;T]}|X_t - Y_t|^2 > 0\right) = 0.$$

Ce qui prouve l'unicité forte de la solution.

■

Remarque 1.8.1 *Remarquant que la condition de Lipchitz* (1.2) *nous assure l'existence et l'unicité de la solution de l'equation* (1.1).

Exemple 1.8.1

$$\begin{cases} \frac{dx_t}{dt} = 3x_t^{\frac{2}{3}}, \\ x_0 = 0, \end{cases}$$

et

$$x_t = \begin{cases} 0: & si\ t \leq a, \\ (t-a)^3: & si\ t > a, \end{cases}$$

$b(x_t) = 3x_t^{\frac{2}{3}}$ *n'est pas Lipchitzienne car les dérivées n'est pas bornées, n'est pas dérivable au points* $x_0 = 0$.

Remarque 1.8.2 *La condition de croissance* (1.3) *nous évite l'éxplosition de la solution et si on n'a pas cette condition l'équation* (1.1) *admettra une solution unique mais seulement jusqu'au temps d'éxplosition.*

Exemple 1.8.2 *On considère l'équation différentielle suivante*

$$\begin{cases} \frac{dx_t}{dt} = x_t^2, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

C'est-à-dire $b(x) = x^2, \sigma = 0$, *sont Lipchitziennes donc, il existe une solution unique donnée par*

$$x_t = \frac{1}{1-t}; \quad 0 \leq t \leq 1,$$

car

$$\lim_{t \to 1} x_t = +\infty.$$

Chapitre 2

Principe de maximum de le cas non linéaire convexe

Dans ce chapitre on donne une généralisation du principe du maximum stochastique dans le cas où les coefficients de drifte b et de diffusion σ de l'équation d'état contiennent un terme de contrôle.

2.1 Formulation du problème

On note par U L'ensemble de tous les contrôle admissible.

$$\begin{cases} dx_t^v = b\left(t, x_t^v, v_t\right) dt + \sigma\left(t, x_t^v, v_t\right) dB_t, \\ x_0^v = \xi, \end{cases} \tag{2.1}$$

La fonction de côut à minimiser est de la forme

$$J\left(v(\cdot)\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^T l(t, x^v(t), v(t))dt + \alpha\left(x^v(T)\right)\right].$$

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v).$$

où

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n,$$
$$\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1,$$
$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n \times d},$$
$$l : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^1,$$

Hypothèse (H_1) : U convexe, b, σ, l sont continûment différentiable par rapport à (x,v). Ils sont majorées par $C(1+|x|+|v|)$ et leurs dérivées, par rapport à (x,v) sont continues et uniformément bornées et la fonction α est convexe.

Sous l'hypothèse (H_1) ci-dessus, l'équation (2.1) a une unique solution forte et le coût J est bien définie de$U$ dans $\mathbb{R}$.

Nous prenons **la perturbation convexe** (sous forme faible), suivante

$$u^{\varepsilon} = u + \varepsilon(v-u),\ 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Pour obtenons **l'équation variationnelle** suivante

$$J\left(u^{\varepsilon}\right) - J\left(u_t\right) \geq 0,$$

on a besoin de deux lemmes suivant

Lemme 2.1.1 *Sous l'hypothèse (H_1) on a*

$$\lim_{\eta \to 0} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left|x^{\varepsilon}(t) - x(t)\right|^2\right] = 0. \tag{2.2}$$

Preuve. *Ona*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|x^{\varepsilon}(t)-x(t)|^{2}\right]\leq\mathbb{E}\int_{0}^{t}|b^{\varepsilon}(s)-b(s)|^{2}ds+\mathbb{E}\int_{0}^{t}|\sigma^{\varepsilon}(s)-\sigma(s)|^{2}ds,$$

b et σ sont lipchitziennes par rapport a (x,v)

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|x^{\varepsilon}(t)-x(t)|^{2}\right]\leq C_{T}\mathbb{E}\int_{0}^{t}|x^{\varepsilon}(s)-x(s)|^{2}ds+C\varepsilon^{2}\mathbb{E}\int_{0}^{t}|v(s)|^{2}ds. \tag{2.3}$$

En utilisant (2.3), on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|x^{\varepsilon}(t)-x(t)|^{2}\right]\leq C_{T}\mathbb{E}\int_{0}^{t}\sup_{s\in[0,s]}|x^{\varepsilon}(s)-x(s)|^{2}ds+M_{T}\varepsilon^{2}.$$

D'aprés le lemme de Gronwall, d'aprés l'inégalité Burkholder-Davis-Gundy, d'où resultat. ■

Lemme 2.1.2

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}|\frac{x^{\varepsilon}(t)-x(t)}{\varepsilon}-Z(t)|^{2}=0, \tag{2.4}$$

où Z est la solution de l'équation linéaire

$$\left\{\begin{array}{c} dZ(t)=\{b_{x}(t)x_{1}(t)+b_{v}(t)v(t)\}\,dt+\{\sigma_{x}(t)x_{1}(t)+\sigma_{v}(t)v(t)\}dB(t), \\ Z_{0}=0. \end{array}\right. .$$

Preuve. Pour simplifier ona

$$x^{\rho,\varepsilon}(t)=x(t)+\rho\varepsilon(x^{\varepsilon}(t)+Z(t)),$$

$$x^{\rho,\varepsilon}(t)=x(t)+\rho\varepsilon(x^{\varepsilon}(t)+Z(t)),$$

$$u^{\rho,\varepsilon}(t)=u(t)+\rho\varepsilon v(t),$$

on pose $\bar{x} = \frac{x^{\varepsilon}(t)-x(t)}{\varepsilon} - Z\left(t\right)$, on a

$$d\bar{x}^{\varepsilon} = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}[\{b(t, x^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t)) - b(t, x(t), u(t))\}dt + \{\sigma(t, x^{\varepsilon}(t), u^{\varepsilon}(t)) - \sigma(t, x(t), u(t))\}dB_t \\ -[\{b_x(t)Z(t) + b_v(t)v(t)\}dt + \{\sigma_x(t)Z(t) + \sigma_v(t)v(t)\}dB(t)], \\ x^{\varepsilon}(0) = 0. \end{cases}$$

Développement d'ordre 1 avec un reste intégrale on obtient

$$d\bar{x}^{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \int_0^1 [b_x(t, x^{\rho,\varepsilon}(t), u^{\rho,\varepsilon}(t))(x^{\varepsilon}(t) + Z(t)) + b_v(t, x^{\rho,\varepsilon}(t), u^{\rho,\varepsilon}(t))v(t)]d\rho\}dt \\ + \int_0^1 [\sigma_x(t, x^{\rho,\varepsilon}(t), u^{\rho,\varepsilon}(t))(x^{\varepsilon}(t) + Z(t)) + \sigma_v(t, x^{\rho,\varepsilon}(t), u^{\rho,\varepsilon}(t))v(t)]d\rho\}dB_t. \end{cases}$$

On definie les quantités suinantes

$$\begin{aligned} \alpha_1^{\rho} &= \int_0^1 b_x(t, x^{\rho,\varepsilon}(t), u^{\rho,\varepsilon}(t))d\rho, \\ \alpha_2^{\rho} &= \left[\alpha_1^{\rho} - b_x(t)\right] Z(t) + \int_0^1 \{[b_v(t, x^{\rho,\varepsilon}(t), u^{\rho,\varepsilon}(t)) - b_v(t)]v(t)\}d\rho, \\ \alpha_4^{\rho} &= \int_0^1 \sigma_x(t, x^{\rho,\varepsilon}(t), u^{\rho,\varepsilon}(t))d\rho, \\ \alpha_5^{\rho} &= [\alpha_4^{\rho} - \sigma_x(t)]Z(t) + \int_0^1 \{[\sigma_v(t, x^{\rho,\varepsilon}(t), u^{\rho,\varepsilon}(t)) - \delta_v(t)]v(t)\}d\rho. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{cases} d\bar{x}^{\varepsilon}(t) = \left[\alpha_1^{\rho} x^{\varepsilon}(t) + \alpha_2^{\rho}\right] dt + \left[\alpha_4^{\rho} x^{\varepsilon}(t) + \alpha_5^{\rho}\right] dB_t, \\ x^{\varepsilon}(0) = 0. \end{cases}$$

On applique isométrie d'Itô $|x^{\varepsilon}(t)|^2$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\bar{x}^{\varepsilon}(t)|^2 &= \mathbb{E}\left[\int_0^T [\langle(2\bar{x}^{\varepsilon}(t), \alpha_1^{\rho} x^{\varepsilon}(t) + \alpha_2^{\rho})\rangle + |\alpha_4^{\rho} x^{\varepsilon}(t) + \alpha_5^{\rho}|^2 dt\right], \\ &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^T |x^{\varepsilon}(t)|^2 dt\right] + \sigma(\alpha). \end{aligned}$$

D'aprés le lemme de Gronwall, d'où résultat(2.4) . ■

Lemme 2.1.3 *Si u est un contrôle optimal alors on a*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T l_x(t)Z(t)+l_v(t)v(t)dt\right]+\mathbb{E}[\alpha_x(x(T))Z_T]\geq 0. \tag{2.5}$$

Preuve. *Si $u(\cdot)$ optimal control alors*

$$\frac{J(u^\varepsilon)-J(u_t)}{\varepsilon}\geq 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{J(u^\varepsilon)-J(u_t)}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}\left[\mathbb{E}\left[\alpha\left(x^\varepsilon\right)-\alpha\left(x_T\right)\right]+\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\int_0^T\left[(t)l^\varepsilon(t)-l\left(t\right)\right]dt\right],\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left[\mathbb{E}\left[\int_0^1\alpha_x\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_T^\varepsilon-x_T^\mu\right)\right)\left(x_T^\varepsilon-x_T^\mu\right)d\lambda\right]\right.\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^1 l_x\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right)d\lambda\right)dt\right]\Bigg]\\
&+l_v\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)\left(u_t^\varepsilon-u_t^\mu\right)d\lambda]\,dt\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\left[\mathbb{E}\left[\int_0^1\alpha_x\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_T^\varepsilon-x_T^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)\left(\frac{x_T^\varepsilon-x_T^\mu}{\varepsilon}\right)d\lambda\right]\right.\\
&\times\left(\frac{x_t^\varepsilon-x_t^\mu}{\varepsilon}\right)\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^1 l_x\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)d\lambda\right)dt\right]\Bigg]\\
&+l_v\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)\left(v_t-u_t\right)d\lambda]\,dt,\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_0^1\alpha_x\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_T^\varepsilon-x_T^\mu\right)\right)Z_T d\lambda\right]\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1 l_x\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)Z_t\\
&+l_v\left(x_T^\mu+\lambda\left(x_t^\varepsilon-x_t^\mu\right),u_t+\lambda\varepsilon\left(v_t-u_t\right)\right)\left(v_t-u_t\right)d\lambda dt
\end{aligned}$$

d'aprés lemme (1), *lemme* (2), l_x, l_ε , α_x *sont continue et bornée*

$$\alpha_x \left(x_T^\mu + \lambda \left(x_T^\varepsilon - x_T^\mu\right)\right) \to_{\varepsilon \to 0} \alpha_x \left(x_T^\mu\right),$$

$$l_x \left(x_t^\mu + \lambda \left(x_t^\varepsilon - x_t^\mu\right), u_t + \lambda\varepsilon \left(v_t - u_t\right)\right) \to_{\varepsilon \to 0} l_x \left(x_t^\mu, x_t^\mu, u_t\right),$$

$$l_v \left(x_T^\mu + \lambda \left(x_t^\varepsilon - x_t^\mu\right), u_t + \lambda\varepsilon \left(v_t - u_t\right)\right) \to_{\varepsilon \to 0} l_v \left(x_t^\mu, x_t^\mu, u_t\right),$$

$$0 \leq \frac{J\left(u^\varepsilon\right) - J\left(u_t\right)}{\varepsilon} = \mathbb{E}\left[\alpha_x \left(x_T^\mu\right) Z_T + \int_0^T l_x \left(x_t^\mu, x_t^\mu, u_t\right) Z_t + l_v \left(x_t^\mu, x_t^\mu, u_t\right) \left(v_t - u_t\right) dt\right].$$

■

2.2 Equation varitionnelle, processus adjoint et équation adjointe

À partir de l'inégalité varitionnelle on va établier les conditions nécessaires d'optimalité verifies par le contrôle optimale u.

Soit φ la solution fondamentale matricielle associée à l'équation linéaire,

$$\begin{cases} -d\varphi(t) = b_x \left(t, x, u\right) \varphi(t) dt + \varphi \left(t, x, u\right) \sigma_x \left(t\right) dB_t, \\ \varphi_0 = Id, \end{cases}$$

φ est inversible et son inverse ψ verifie

$$\begin{cases} -d\psi(t) = \left(D_t \psi D_t^* - A_t \psi_t\right) dt - D_t \psi_t dB_t, \\ \psi_0 = Id, \end{cases}$$

telque

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,T]} \left|\varphi_t\right|^2\right] < \infty,$$

et

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\psi_t|^2\right]<\infty.$$

On définie le Hamiltonien H de $[0,T]\times\mathbb{R}\times Q_2(\mathbb{R})\times U\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$H(t,x(t),\mu,v,P,p)=l(t,x,v)+b(t,x,v)p-\sigma(t,x,v)P.$$

On pose $p_t=\psi_t Y_t$, avec

$$dY_t=-\varphi_t^X l_x\left(t,x_t^u,u_t\right)dt+\varphi_t dB_t,$$

Pour obtenir l'équation adjointe vérifiée par le processus adjoint p, il suffit d'appliquent la formule d'Itô sur $p_t=\psi_t Y_t$

$$\begin{aligned}dp_t&=\psi_t dY_t+Y_t d\psi_t+\langle\psi_t,Y_t\rangle_t\\&=-H_x\left(t,x_t^u,u_t,p_t^u,P_t^u\right)dt-p_t dB_t,\end{aligned}$$

telque

$$H_x\left(t,x_t^u,u_t,p_t^u,P_t^u\right)=l_x\left(t,x_t^u,u_t\right)+p_t^u b_x\left(t,x_t^u,u_t\right)-P_t^u\sigma_x\left(t,x_t^u,u_t\right),$$

$$\begin{cases}\beta_t=\psi_t\left(x_t^v-x_t^u\right),\\ X=\varphi_T g_x\left(x_T^u\right)+\int_0^T\varphi_t^x h_x\left(t,x_t^u,u_t\right)dt,\\ p_t=\psi_t Y_t,\\ P=\sigma_x^X p_t-\psi_v\psi_t,\\ Y=\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_t\right]-\int_0^t\varphi_s l_x\left(t,x_t^u,u_t\right)dt,\end{cases}$$

$$p_0 = \psi_0 Y_0 = Y_0.$$

$$p_T = \psi_T Y_T = \psi_T \mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_T\right] - \psi_T \int_0^t \varphi_s l_x\left(t, x_t^u, u_t\right) dt.$$

X est $\mathcal{F}_T$ mesurable donc $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_T\right] = X$,

$$\begin{cases} dp = -H_x\left(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u\right) dt - P_t dB_t, \\ p_T = g_x x_T^u, \end{cases} \tag{2.6}$$

L'équation(2.6) est une équation stochastique rétrograde.

Théorème 2.2.1 *(sous forme faible) pour qu'un contrôle $u \in U$ soit optimal, il faut et il suffit que*

$$H_v\left(t, x_t^u, u_t, p_t^u, P_t^u\right)\left(v_t - u_t\right) \geq 0,$$

Où (p, P) est la solution unique de l'équation adjointe, C-à-d

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v) \Rightarrow H_v\left(v_t - u_t\right) \geq 0,\ \forall v \in U.$$

Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté le principe du maximum dans le cas non linéaire convexe. Plus précisément, nous utilisons lemme de Gronwall et Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy ainsi avec une technique on obtient un principe du maximum telque le domaine de contrôle est convexe, et pour étudé Les conditions nécessaire d'optimalités des contrôles convexes pour les EDS,et minimese la fonction de côut

Bibliographie

[1] Bismut, J.M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 44(2) ; 384 –404.

[2] Chassagneux, J.F, Chotai.H, and Muûls. M, (2017). A Forward-Backward SDEs Ap-proach to Pricing in Carbon Markets. Springer.

[3] Dellacherie, C et Mayer. P.A, (1980). Probabilités et Potentiel. Hermann.

[4] Guesraya, S. (2019). Principe du maximum pour les EDSs de type champ-moyen et application. Département de mathématiques. Université-biskra.

[5] Kebbas, H. (2019). Principe du maximum pour les problèmes de contrôle optimal partiellement observé et avec retard. Département de mathématiques. Université-biskra.

[6] Pardoux, E.& Peng, S. G. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems Control Lett., 14(1), 55 – 61.

[7] Philippe Briand, (2001). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. univ-savoie.fr.

[8] Skorokhod, A.V, (1965). Studies in theory of random processes. Reading Mass. Addi-son Wesley.

Résumé du mémoire

Cette mémoire est porte essentiellement sur les problèmes de contrôle optimal stochastique. On s'intéresse à problème de contrôle optimal stochastique pour des systèmes stochastiques gouvernés par des équations différentielles stochastiques (EDSs). Ce problème est consiste à minimiser une certaine fonction de coût.

Plus précisément, notre objectif est d'établir des conditions nécessaires d'optimalité sous forme d'un principe du maximum stochastique de Pontriyagin.

Abstract

This thesis is essentially about stochastic optimal control problems. We are interested in a stochastic optimal control problem for stochastic systems ticks governed by stochastic differential equations (EDSs). This problem is consists in minimizing some cost function. More precisely, our objective is to establish necessary conditions of optimality under form of a Pontriyagins stochastic maximum principle.

ملخص الأطروحة

تتعلق هذه الأطروحة أساسًا بمشكلات التحكم العشوائية المثلى. *نحن مهتمون بمسألة* التحكم الأمثل العشوائية للأنظمة العشوائية التي تحكمها المعادلات التفاضلية العشوائية.

هذه المسألة هي لتقليل بعض وظيفة التكلفة.

بتعبير أدق ، هدفنا هو تهيئة الظروف اللازمة لتحقيق الأمثل في شكل مبدأ أقصى عشوائي من Pontriagin