République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : **Statistique**

Par

ZANOUDA Taous

Titre :

Sur les L-moments

Devant le Jury :

Mme.	**Chine Amel**	M.C.B	UMBK	Encadreur
Mr.	**Brahimi Brahim**	Pr	UMBK	Président
Mme.	**Soltane Louiza**	M.A.B	UMBK	Examinateur

Soutenu Publiquement le 28/06/2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

Á mon père Mostapha "QUE DIEU LE TOUT PUISSANT LUI ACCORDE LA PAIX À SON ÂME", j'aurais aimé qu'il soit aujourd'hui à mes cotés, j'en suis persuadé qu'il en serait très fière.

Á ma très chère maman Samia.

Á mon bras droit A.baki et A.rahmene.

Ma chère sœur Imane et son mari Saber et ses enfants A.Aziz & Céline.

Á une amie que je la considère plus qu'une sœur - ikram-

Touta

Remerciements

Je tiens premièrement à me prosterner, remerciant ‹‹**Allah**›› le tout
puissant de m'avoir donné la force et la volonté
pour terminer ce travail.

Deuxièmement, je remercie mon encadreur de mémoire Madame
‹‹**Chine Amel** ›› pour les
encouragements, la motivation et les précieux conseils
qu'il a fournis pour mener à bien ce travail.

Je remercie vivement les membres du jury monsieur **Brahimi Brahim** et
madame **Soltane Louiza**
pour leur présence et pour l'évaluation de ce travail.

Je tiens aussi à remercier tous les personnes qui nous ont encouragés pendant
la réalisation de ce travail, famille, collège, amis,
sans exception

Table des matières

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Table des matières **iii**

Table des figures **vi**

Liste des tableaux **vii**

Introduction **1**

1 Introduction aux statistiques d'ordre **3**

1.1 Moment d'ordre k 3

1.1.1 Moments non centrés et centrés d'une v.a. continue 5

1.1.2 Fonction génératrice des moments 7

1.2 Statistique d'ordre 7

1.2.1 Distributions des statistiques d'ordre 8

1.2.2 Densité conjointe de deux statistiques d'ordre 11

1.2.3 Distribution de quantile 13

1.3 Moment de la statistique d'ordre 14

2 L-moment **16**

2.1 Propriété de base et définition 16

2.1.1 L-Correlation, L-skewness et L-kurtosis 18

2.1.2 Propriétés de base des L-moments 20

2.2 Représentations des L-moments 21

2.2.1 Représentation de λ_r en tant que L-fonctionnelle et en termes de polynômes orthogonaux 21

2.2.2 Représentation de λ_r en tant que covariance et L-statistique 23

2.2.3 Représentation de L-moments en termes de moments de probabilités pondérés 25

2.3 Estimation 27

2.4 Diagramme de L-skewness et L kurtosis 32

3 L-moment de la loi de Gumbel **34**

3.1 Distribution de loi Gumbel 35

3.1.1 Graphe de densité 39

3.1.2 Application de loi Gumbel 40

3.2 Estimation 41

3.2.1 Par la méthode des moments 41

3.2.2 Par la méthode des L-moments 41

3.3 Simulation de loi Gumbel à l'aide du R 42

Conclusion **44**

Annex A **45**

Annex B **46**

Bibliographie **47**

Table des figures

2.1 Diagramme des L-moments théorique des quelques distributions plus utilisés. 32

2.2 Diagramme des L-moments théorique des quelques distributions les plus utilisés avec les rapport de L-moment empiriques (t_3 et t_4) des échantillons simuler avec la loi Exp. 33

3.1 Densité de loi Gumbel avec des différents paramètres. 40

Liste des tableaux

2.1 L-moments des quelques distributions. 27

2.2 Estimastion des paramètres via L-moments pour quelque distribution. 32

3.1 Simulation de paramètres G(2,1) par la méthode des L-moments. 42

3.2 Simulation de paramètres G(2,4) par la méthode des L-moments. 42

Introduction

Les pratiques statistiques courante résume une distribution de probabilité par ses moments ou cumulant pour estimer les paramètres en assimilant les moments d'échantillonnage à ceux de la distribution ajustée mais ils ne sont pas toujours satisfaisants, des fois c'est difficile de calculer le $3^{éme}$ ordre ou la moyenne infinie. C'est pour cela on a découvert la méthode alternative, appelons L-moment, est une combinaison linéaire de statistiques d'ordre utilisée pour résumer la forme d'une distribution de probabilité, introduite pour la première fois par **Hosking (1990)**[11]. Ils peuvent être définir pour toute variable aléatoire dont la moyenne existe et forme la base d'une théorie générale qui couvre le résumé des distributions de probabilité théoriques sont l'implique des procédures établies telles que l'utilisation de la moyenne Gini statistique de différence donne lieu à quelques innovations prometteuses telles que les mesures de l'asymétrie et l'aplatissement décrivent à la deuxième section, des nouvelles méthodes d'estimation des paramètres pour plusieurs diffusions.

Ce mémoire est composé d'une introduction générale, de trois chapitres et une conclusion :

1. **Chapitre 01** : Dans ce chapitre, nous exposerons la définition et quelques propriétés des théories des moment d'ordre k et la statistiques d'ordre qui joue un rôle fondamental au niveau du chapitre suivant et des quantile.

2. **Chapitre 02** : On passe au deuxième chapitre, nous détaillerions les définitions des L-moments et les propriétés de base constituant l'estimation par le calcule des paramètres de position et d'échelle ainsi que les L-skewness et les L-kurtosis.
3. **Chapitre03** : Le dernier chapitre, on connaitrait la loi de Gumbel après avoir estimer par la méthode de L-moment par **R.**

Chapitre 1

Introduction aux statistiques d'ordre

Dans ce chapitre, on va faire un rappel général des notions et définitions les plus importantes utilisées dans tous les chapitres concernant le moment d'ordre k, dans lequel on discute de deux axes principaux, sur le moment non centré et le moment centré d'une $v.a$ continu, ainsi que la fonction génératrice du moment. Puis on va passer directement aux statistiques d'ordre, qui elles-mêmes exposées à trois axes essentiels : les distributions des statistiques d'ordre et la densité conjointe de deux statistiques d'ordre et nous finissons ce chapitre en parlant de la distribution des quantiles.

1.1 Moment d'ordre k

La méthode des moments est un outil d'estimation intuitif qui date du début des statistiques. Elle consiste à estimer les paramètres recherchés en égalisant certains moments théoriques (qui dépendent de ces paramètres) avec leurs contreparties empiriques. L'égalisation se justifie par la loi des grands nombres qui implique que l'on peut "approcher" une espérance mathématique par une moyenne empirique. On est donc amené à résoudre un système d'équations.

En théorie de statistique le moment d'ordre $k \in \mathbf{N}$ d'une $v.a$ réelle X est un indicateur de la dispersion de cette variable, à l'instar par exemple de son écart type, la racine carrée du moment centré d'ordre 2.

Définition 1.1.1 *Le moment (ou moment ordinaire, ou moment en* 0*) d'ordre* $k \in \mathbf{N}$ *de* X *est défini, s'il existe par :*

$$m_k = \mathbf{E}(X^k).$$

On a donc :

$$m_k = \int_{x \in I} x^k dF_X(x).$$

Remarque 1.1.1 *Si* X *un* $v.a$ *discrète sont moments d'ordre* k *sa calculés de la façon suivante :*

$$m_k = \sum_{i=1}^{m} x_i^k \mathbf{P}(X = x_i).$$

Exemple 1.1.1 *Soit* X *la* $v.a$ *de densité :* $f(x) = \frac{x}{\alpha^2}\exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2})$ *pour* $x \geq 0$. *Nous déterminons le moment d'ordre* k *par :*

$$\begin{aligned} m_k = \mathbf{E}(X^k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^k \frac{x}{\alpha^2}\exp(-\frac{x^2}{2\alpha^2}) dx, \end{aligned}$$

On pose : $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2\alpha^2} \Longrightarrow y^2 = \frac{x^2}{\alpha^2} \Longrightarrow y = \frac{x}{\alpha} \Longrightarrow dx = \alpha dy.$

$$x = \alpha y.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
m_k(x) &= \int_0^{+\infty} (\alpha y)^k \frac{\alpha y}{\alpha^2} \exp(-\frac{y^2}{2}) \alpha dy \\
&= \alpha^k \int_0^{+\infty} y^{k+1} \exp(-\frac{y^2}{2}) dy \\
&= \alpha^k \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{k+1} \exp(-\frac{y^2}{2}) dy \\
&= \alpha^k \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \mathbf{E}(y^{k+1}).
\end{aligned}$$

En déduisant l'espérance et la variance :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= m_1 = \frac{1}{2} \alpha \sqrt{2\pi} \mathbf{E}(y^2) \\
\mathbf{Var}(X) &= m_2 - m_1^2 \\
&= \frac{1}{2} \alpha^2 \sqrt{2\pi} \mathbf{E}(y^3) - \left[\frac{1}{2} \alpha \sqrt{2\pi} \mathbf{E}(y^2) \right]^2 \\
&= \frac{1}{2} \alpha^2 \sqrt{2\pi} \mathbf{E}(y^3) - \frac{1}{4} \alpha^2 2\pi \mathbf{E}^2(y^2) \\
&= \frac{1}{2} \alpha^2 \sqrt{2\pi} \left[\mathbf{E}(y^3) - \sqrt{2\pi} \mathbf{E}^2(y^2) \right].
\end{aligned}$$

1.1.1 Moments non centrés et centrés d'une v.a. continue

Définition 1.1.2 ***(Moments non centrés)*** *: Le moment non centre d'ordre $k \in \mathbf{N}$ d'une v.a continue X est la quantité, lorsqu'elle existe.*

$$m_k(X) = \mathbf{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx.$$

Définition 1.1.3 ***(Moments centrés)*** *: Le moment centre d'ordre $k \in \mathbf{N}$ d'une* *v.a continue X est la quantité, lorsqu'elle existe :*

$$\mu_k(X) = \mathbf{E}([X - \mathbf{E}(x)]^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - \mathbf{E}(X)^k\right] f(x)dx.$$

En posant $\mu = m_1$ et $\sigma = \sqrt{\mu_2}$, le moment centré réduit d'ordre $k \in]2; +\infty[$ de X est défini, s'il existe par :

$$\beta_{k-2} = \mathbf{E}\left[(\frac{X-\mu}{\sigma})^k \right].$$

On a donc $\beta_{r-2} = \frac{\mu_k}{\sigma}$ et, par construction $\beta_0 = 1$.

Certains moments utilisés couramment pour caractériser une $v.a$ réelle X sont connus sous un nom particulier :

Le moment d'ordre un c'est l'espérance : $\mu = m_1 = \mathbf{E}(X)$.

Le moment centré d'ordre deux c'est la variance : $\mathbf{Var}(X) = \mu_2 = \mathbf{E}\left[(X-\mu)^2\right]$ ainsi que sa racine carrée l'écart type : $\sqrt{\mathbf{Var}(X)}$.

Le moment centré réduit d'ordre trois c'est le coefficient d'asymétrie :

$\beta_1 = \mathbf{E}\left[(\frac{X-\mu}{\sigma})^3\right]$.

Le moment centré réduit d'ordre quatre c'est kurtosis non normalisé :

$\beta_2 = \mathbf{E}\left[(\frac{X-\mu}{\sigma})^4\right]$.

1.1.2 Fonction génératrice des moments

Fonction génératrice

Définition 1.1.4 *Soit X une v.a entière. On appelle fonction génératrice des probabilités de X, et on note G_X, la fonction :*

$$G_X(s) = \mathbf{E}(s^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_X(k) s^k,$$

tq : $p_X(k) = \mathbf{P}(\{X = k\})$.

Fonction génératrice des moments

Définition 1.1.5 *Si X est associée une densité de probabilité continue f, alors la fonction génératrice des moments est donnée par :*

$$M_X(t) = \mathbf{E}(\exp(t, X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx) f(x) dx.$$

1.2 Statistique d'ordre

Définition 1.2.1 *Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ est une suite des variables i.i.d de loi de probabilité F continue, on appelle statistique d'ordre associée à l'échantillon*

$(X_1, \cdots, X_n)$ la suite notée $(X_{1,n}, \cdots, X_{n,n})$ telle que : $(X_{1,n} \leq \cdots \leq X_{n,n})$ presque surement.

Remarque 1.2.1 *Pour tout $k = 1, \cdots, n$, la v.a $X_{k,n}$ s'appelle étant la $k^{éme}$ statistique d'ordre.*

La première statistique d'ordre $X_{1,n}$ est toujours le minimum de l'échantillon et

$X_{n,n}$ *le maximum en d'autre termes :*

$$X_{1,n} = \min(X_{1,n}, \cdots, X_{n,n}).$$
$$X_{n,n} = \max(X_{1,n}, \cdots, X_{n,n}).$$

1.2.1 Distributions des statistiques d'ordre

Soit $F_{i,n}(x)$ la distribution de $X_{i,n}$ on va montra que l'expression de $X_{i,n}$ (voir [5]) :

$$\begin{aligned} F_{X_{i,n}}(x) = F_{i,n}(x) &= \mathbf{P}(X_{i,n} \leq x) \\ &= c\sum_{r=i}^{n} C_n^r \left[F(x)\right]^r \left[1 - F(x)\right]^{n-r}, \end{aligned}$$

On sait que :

$$\sum_{r=i}^{n} C_n^r p^r (1-p)^{n-r} = \int_0^p \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} \left[1-t\right]^{n-i} dt.$$

la $v.a$ $Y_i = F(X_{i,n}) \backsim \beta(i, n-i+1)$

$$\begin{aligned} F_{i,n}(x) &= \mathbf{P}\left\{X_{i,n} \leq x\right\} \\ &= I_{F(x)}(i, n-i+1). \end{aligned}$$

$$I_x(a,b) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt.$$

telle que[1]

$$\begin{aligned}
F_{i,n}(x) &= \sum_{r=i}^{n} C_n^r \left[F(x)\right]^r \left[1-F(x)\right]^{n-r} \\
&= \int_0^{F(x)} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} \left[1-t\right]^{n-i} dt \\
&= \int_0^{F(x)} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)} t^{i-1} \left[1-t\right]^{n-i} dt \\
&= \frac{1}{B(i,n-i+1)} \int_0^{F(x)} t^{i-1} \left[1-t\right]^{n-i} dt \\
&= I_{F(x)}(i,n-i+1).
\end{aligned}$$

Alors la fonction de densité est :

$$\begin{aligned}
f_{X_{i,n}}(x) &= f_{i,n}(x) \\
&= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \left[F\right]^{i-1} \left[1-F(x)\right]^{n-i} f(x).
\end{aligned}$$

Lemme 1.2.1 *La densité conjointe de statistique d'ordre* $(X_{1,n} \cdots, X_{n,n})$ *est donné par [1] :*

$$f_{(X_{1,n},\cdots,X_{n,n})}(x_1,\cdots,x_n) = n!\prod_{i=1}^{n} f(x_i), -\infty < x_1 < \cdots < x_n < \infty.$$

Preuve. Comme les X_i ont des densité par à rapport à Lebesgue, on a $X_i \neq X_j$

$$f(X_{(1)},\cdots,X_{(n)}) = \sum_{\delta \epsilon P(n)} f(X_{\delta(1)} < \cdots < X_{\delta(n)}) I(X_{\delta(1)} < \cdots < X_{\delta(n)}).$$

[1] $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, $\Gamma(i) = (i-1)!$

on à X_i est $i.i.d$ donc $(X_{\delta(1)} < \cdots < X_{\delta(n)})^t \backsim (X_1 < \cdots < X_n)^t$ alors $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E} f(X_{\delta(1)} < \cdots < X_{\delta(n)}) I(X_{\delta(1)} < \cdots < X_{\delta(n)}) \\
&\qquad = \mathbf{E} f(X_1 < \cdots < X_n) I(X_1 < \cdots < X_n) \\
&\qquad = \int_{R^n} f(x_1, \cdots, x_n) (\prod_{i=1}^{n} f(x_i)) I(X_1 < \cdots < X_n) dx_1 \cdots dx_n.
\end{aligned}$$

D'après la dérivation en déduire que :

$$f_{(X_{1,n}, \cdots, X_{n,n})}(x_1, \cdots, x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i).$$

■

Théoreme 1.2.1 *Soit $(X_1 < \cdots < X_n)$ une suite de v.a i.i.d on note la fonction de répartition de X par : $F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ la densité par $f_X(x)$ et soit $(X_{1,n}, \cdots, X_{n,n})$ les statistiques d'ordre associées. La loi de la statistique d'ordre $X_{1,n}$ est donnée par la fonction de répartition $F_{X_{1,n}}$ et la fonction de densité $f_{X_{1,n}}$ qui sont définies par :*

$$F_{1,n}(x) = F_{X_{1,n}}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n .$$

$$f_{1,n}(x) = f_{X_{1,n}}(x) = n [1 - F(x)]^{n-1} f(x).$$

La loi de la statistique d'ordre $X_{n,n}$ est donnée par la fonction de répartition $F_{X_{n,n}}$ et la fonction de densité $f_{X_{n,n}}$ qui sont définies par :

$$F_{n,n}(x) = F_{X_{n,n}}(x) = [F(x)]^n .$$

$$f_{n,n}(x) = f_{X_{n,n}}(x) = n [F(x)]^{n-1} f(x).$$

1.2.2 Densité conjointe de deux statistiques d'ordre

La fonction de distribution conjointe de $(X_{i,n} \leq X_{j,n})$ avec $1 \leq i < j \leq n$ et $-\infty < x < y < +\infty$ est donnée par :

$$F_{i,j:n}(x,y) = \sum_{s=j}^{n} \sum_{r=i}^{s} \alpha \left[F(x)\right]^{r-1} f(x) \left[F(y) - F(x)\right]^{s-r-1} f(y) \left[1 - F(y)\right]^{n-s},$$

telle que :

$$\alpha = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}.$$

La densité conjointe de $(X_{i,n} \leq X_{J,n})$:

$$f_{i,j:n}(x,y) = \beta \left[F(x)\right]^{i-1} f(x) \left[F(y) - F(x)\right]^{j-i-1} f(y) \left[1 - F(y)\right]^{n-j}.$$

$$\beta = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}.$$

Remarque 1.2.2 *Pour $x \leq y$ la fonction de répartition est :*

$$F_{i,j:n}(x,y) = F_{(X_{i,n} \leq X_{j,n})}(x,y) = F_{X_{j,n}}(y).$$

Exemple 1.2.1 *On suppose que $X = (X_1, X_2, X_3)$ suite de v.a i.i.d suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ et $y_1 < y_2 < y_3$ sont les statistique d'ordre*

$$\begin{cases} f(x) = \exp(-x)\mathbb{I}_{\{x \geq 0\}} \\ F(x) = 1 - \exp(-x)\mathbb{I}_{\{x \geq 0\}} \end{cases}.$$

La statistique d'ordre du minimum : *La fonction de répartition et la fonction* *de densité sont données comme suit :*

$$\begin{aligned} F(y_1) &= F_{1,3}(x) \\ &= 1 - [1 - (1 - \exp(-x)]^3 \\ &= 1 - \exp(-3x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(y_1) &= f_{1,3}(y_1) \\ &= 3\,[1 - (1 - \exp(-y_1)]^{3-1}\,(\exp(-y_1)) \\ &= 3\exp(-y_1(3-1))\exp(-y_1) \\ &= 3\exp(-3y_1). \end{aligned}$$

La statistique d'ordre du maximum : *La fonction de répartition et la fonction de densité sont données comme suit :*

$$\begin{aligned} F(y_3) &= F_{3,3}(y_3) \\ &= [1 - \exp(-y_3)]^3, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(y_3) &= f_{3,3}(y_3) \\ &= 3\,[1 - \exp(-y_3)]^2\exp(-y_3). \end{aligned}$$

La statistique d'ordre de $\mathbf{y}_2$

La fonction de répartition de y_2 est donnée par :

$$\begin{aligned}
F(y_2) &= F_{2,3}(y_2) \\
&= \sum_{r=2}^{3} C_2^3 \left[F(y_2)\right]^r \left[1 - F(y_2)\right]^{3-r} \\
&= \frac{3!}{2!(3-2)!}(1 - \exp(-y_2))^2 \exp(-y_2) + (1 - \exp(-y_2))^3 \\
&= 3(1 - \exp(-y_2))^2 \exp(-y_2) + (1 - \exp(-y_2))^3.
\end{aligned}$$

La fonction de densité de y_2 est donnée par :

$$\begin{aligned}
f(y_2) &= f_{2,3}(y_2) \\
&= \frac{3!}{(2-1)!(3-2)!}(1 - \exp(-y_2))^{2-1} \exp(-y_2)^{3-2} \exp(-y_2) \\
&= 6(1 - \exp(-y_2)) \exp(-y_2) \exp(-y_2) \\
&= 6 \exp(-2y_2)(1 - \exp(-y_2)).
\end{aligned}$$

1.2.3 Distribution de quantile

La fonction de répartition empirique de l'échantillon $(X_1, \cdot\cdot\cdot, Xn)$ est évaluée à l'aide des statistiques d'ordre comme suit :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i \leq x\}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < X_{1,n} \\ \frac{i-1}{n} & \text{si } X_{i-1,n} \leq x \leq X_{i,n} \\ 1 & \text{si } \ x \geq X_{n,n} \end{cases}.$$

L'espérance de $F_n(x)$ et :

$$\mathbf{E}\left[F_n(x)\right] = F(x).$$

La variance de $F_n(x)$ et :

$$\mathbf{Var}\left[F_n(x)\right] = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}.$$

Définition 1.2.2 ***(Fonctions quantile et quantile de queue)*** *: La fonction quantile de la fonction de distribution F est la fonction inverse généralisée de F définie par :*

$$Q(s) = F^{\leftarrow}(s) = \inf\left\{x \in R : F(x) \geq s\right\}, 0 < s < 1. \tag{1.1}$$

Dans la théorie des extrêmes, une fonction notée U et appelée fonction quantile de queue est définie par :

$$U(t) = Q(1-\frac{1}{t}) = (\frac{1}{\overline{F}})^{\leftarrow}(t), 1 < t < +\infty.$$

On Peut être exprimée comme une fonction simple des statistiques d'ordre relatives à l'échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ et nous avons

$$Q_n(s) = \begin{cases} X_{i,n} & \text{si } \frac{i-1}{n} < s < \frac{i}{n} \\ X_{[np]+1,n} & \text{si } 0 < s \leq 1 \end{cases}.$$

Notons que pour $0 < p < 1$, $X_{[np]+1;n}$ est le quantile d'échantillon de l'ordre p.[3] :

1.3 Moment de la statistique d'ordre

Définition 1.3.1 *Soit $X_{i,n}$ la $i^{éme}$ statistique d'ordre associée à l'échantillon, de taille n, de densité de probabilité $f(x)$ et de fonction de répartition $F(x)$ continue* *avec la fonction de quantile* $\left(Q(u) = F_X^{-1}(u)\right)$ *le* $k^{\acute{e}me}$ *moment de la* $i^{\acute{e}me}$ *statistique d'ordre est définie par :*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_{i,n}^k) = \mu_{i,n}^k &= \int_{\mathbb{R}} x^k f_{i,n}(x)dx \qquad (1.2)\\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-1)!}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \{F(x)\}^{i-1}\{1-F(x)\}^{n-i} f(x)dx\\ &= \frac{1}{\beta(i, n-i-1)}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \{F(x)\}^{i-1}\{1-F(x)\}^{n-i} f(x)dx.\end{aligned}$$

et par la forme de quantile il doit être :

$$\mathbf{E}(X_{i,n}^k) = \frac{n!}{(i-1)!(n-1)!}\int_0^1 Q(u)^k u^{i-1}(1-u)du \ \ tq : U = F(x).$$

Remarque 1.3.1 *Pour* $k = 1$ *alors* $\mathbf{E}(X_{i,n})$ *est l'espérance de la statistique d'ordre*

$$\mathbf{E}(X_{i,n}) = \int_{\mathbb{R}} x f_{i,n}(x)dx. \qquad (1.3)$$

Théoreme 1.3.1 ***(Existence de moment de la statistique d'ordre)*** *Soient* $(X_1, \cdots, X_n)$ *un n-échantillons de v.a de loi* F *continue et* $(X_{1,n}, \cdots, X_{n,n})$ *les statistiques d'ordre associées. Soit* k *un entier strictement positif, si* X *admet un moment d'ordre* k *alors pour tout* i *appartenant* $\{1, \cdots, n\}$ *la* $i^{\acute{e}me}$ *statistique d'ordre* $X_{i,n}$ *admet aussi un moment d'ordre* k

$$(c - \grave{a} - d : si\mathbf{E}(X^k)existe \Longrightarrow \forall i \in \{1, \cdots, n\}\, \mathbf{E}(X_{i,n}^k) est\ aussi\ existe).$$

Remarque 1.3.2 *Le contraire est faux c-à-d :*

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}\, \mathbf{E}(X_{i,n}^k) \ \ existe \nRightarrow \mathbf{E}(X^k) \ \ est\ existe.$$

Chapitre 2

L-moment

Une alternative à la méthode des moments sont les L-moments développés par Hosking (1990) [11] qui apparaissent progressivement dans différents travaux sur les combinaisons linéaires de statistiques d'ordre, où ils sont utilisés pour estimer les paramètres de distribution, où les moments empiriques sont utilisés en équilibrant les moments théoriques, qui sont les meilleures pour les distributions à queue lourde, pour donner une estimation robuste de la présence de valeurs aberrantes.

2.1 Propriété de base et définition

Définition 2.1.1 *Soit X une v.a de taille n d'une distribution F et de quantile $\{Q(u) = F^{-1}(u)\}$ et soit $(X_{1,n}, \cdot\cdot\cdot, X_{n,n})$ la statistique d'ordre associe de $(X_1, \cdot\cdot\cdot, X_n)$. Le $r^{éme}$ L-moment est défini par (voir [7]) :*

$$\lambda_r := r^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \begin{pmatrix} r-1 \\ k \end{pmatrix} \mathbf{E}(X_{r-k,r}), r \geq 1, \tag{2.1}$$

telle que $\begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} = r!\backslash(r-k)!k!$ *et* $\mathbf{E}(X_{r-k,r})$ *est l'espérance la statistique d'ordre* $(r-k)$ *(1.2) de taille* r.

Les quatre premiers L-moments sont :

• Pour $r = 1$: λ_r est la $(r-1)^{éme}$ itération de l'opérateur de différence d'ordre appliqué à la séquence le $\{\mathbf{E}(X_{k,r})\}$ premier L-moment est la moyenne de F c'est la mesure de position :

$$\lambda_1 = \mathbf{E}(X_{1,1}).$$

ensuite, pour $k \geq 2$: k est la $(k-2)^{éme}$ itération de l'opérateur de différence d'ordre appliqué à la séquence $\{\mathbf{E}(X_{k+1,r}) - \mathbf{E}(X_{k,r}), j = 1, \cdots, k-1\}$.

• Pour $r = 2$: λ_2 est utilisé pour calculer la différence moyenne de Gini Mesure de dispersion ou d'échelle :

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\mathbf{E}(X_{2,2} - X_{1,2}).$$

• Pour $r = 3$: λ_3 pour étudier la symétrique mesure de skewnes :

$$\lambda_3 = \frac{1}{3}\mathbf{E}(X_{3,3} - 2X_{2,3} + X_{1,3}).$$

• Pour $r = 4$: λ_4 pour étudier l'aplatissement mesure de kurtosis :

$$\lambda_4 = \frac{1}{4}\mathbf{E}(X_{4,4} - 3X_{3,4} + 3X_{2,4} - X_{1,4}).$$

Remarque 2.1.1 *Les quatre premiers L-moments* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *et* λ_4 *alternative les quatre moment classique.*

2.1.1 L-Correlation, L-skewness et L-kurtosis

Définition 2.1.2 *Les proportions des L-moments (les ratio L-moments) sont des rapports entre les L-moments et la mesure d'échelle λ_2 a pour but de définir les caractéristiques de la distribution, elle sont définie par :*

$$\tau_r = \frac{\lambda_r}{\lambda_2}, r \geq 3.$$

Théoreme 2.1.1 *Soit une X v.a de moyenne finie ($\mathbf{E}(X) < \infty$), alors les rapports de L-moments satisfait $|\tau_r| < 1$, $r \geq 3$. Si en plus $X > 0$ alors le $L - CV$ satisfait : $0 < \tau < 1$ [7] :*

• Le rapport entre le premier L-moments $\lambda_1$et le second L-moments λ_2 présente la mesure de L- variation définie par :

$$L - CV = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

• Pour $r = 3$, $\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$, c'est la mesure de l'asymétrie s'appelle "**L-skewnes**".

• Pour $r = 4$, $\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2}$, c'est la mesure de l'aplatissement s'appelle "**L-kurtosis**".

Exemple 2.1.1 *Distribution uniforme continue sur* $[0, 1]$:

La fonction de densité et de répartition de la v.a X suit la loi Uniforme sont définis par :

$$\begin{cases} f_X(x) = 1 \\ F_X(x) = x \end{cases}.$$

On applique (2.1) et d'aprés (1.3), trouve le résultat :

Le premier L-moment est :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \mathbf{E}(X_{1,1}) \\ &= \int_0^1 x f_{1,1}(x)dx \\ &= \int_0^1 x\frac{1!}{1!1!}(x)^0(1-x)^0 dx \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Le $2^{éme}$ L-moments :

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\mathbf{E}(X_{2,2} - X_{1,2}),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_{2,2}) &= \int_0^1 x f_{2,2}(x)dx = \frac{1}{3}. \\ \mathbf{E}(X_{1,2}) &= \int_0^1 x f_{1,2}(x)dx = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Alors :

$$\lambda_2 = \frac{1}{6}.$$

Le $3^{éme}$ L-moments :

$$\lambda_3 = \frac{1}{3}\mathbf{E}(X_{3,3} - 2X_{2,3} + X_{1,3}).$$

Après avoir les calculs on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_{3,3}) &= \int_0^1 x f_{3,3}(x)dx = \frac{3}{4}. \\ \mathbf{E}(X_{2,3}) &= \int_0^1 x f_{2,3}(x)dx = \frac{1}{2}. \\ \mathbf{E}(X_{1,3}) &= \int_0^1 x f_{1,3}(x)dx = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

$$\lambda_3 = 0.$$

Le $4^{éme}$ L-moments :

$$\lambda_4 = \frac{1}{4}\mathbf{E}(X_{4,4} - 3X_{3;4} + 3X_{2,4} - X_{1,4}).$$

Calculé comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_{4,4}) &= \int_0^1 x f_{4,4}(x)dx = \frac{4}{5}.\\
\mathbf{E}(X_{3,4}) &= \int_0^1 x f_{3,4}(x)dx = \frac{12}{20}.\\
\mathbf{E}(X_{2,4}) &= \int_0^1 x f_{2,4}(x)dx = \frac{12}{30}.\\
\mathbf{E}(X_{1,4}) &= \int_0^1 x f_{1,4}(x)dx = \frac{4}{20}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\lambda_4 = 0.$$

et pour τ_3 et τ_4

$$\begin{cases} \tau_3 = 0 \\ \tau_4 = 0 \end{cases}.$$

2.1.2 Propriétés de base des L-moments

Proposition 2.1.1 ***(Existence) :*** *Les L-moments λ_r de v.a X existe si seulement si : la moyenne est finie $[\mathbf{E}(X) < \infty]$.*

Proposition 2.1.2 ***(Unicité) :*** *Une distribution dont la moyenne existe est caractérisé par son L-moment λ_r, $r = 1, 2, \cdots$*

On dit donc que les propriétés les plus importantes sur les L-moment (voir [7]) :

1. **Existence** : Si la moyenne de la distribution existe alors tous

   les L-moments existent.

2. **Unicité** : Si la moyenne de la distribution existe, alors les L-moment unique qui défini la distribution c-à-d il n'existe pas deux distribution distinct sont les mêmes L-moments.

3. **Transformation linéaire** : Soit X, Y deux $v.a$ avec L-moment λ_r et λ_r^* (resp) et $Y = aX + b$, alors :

   a) $\lambda_1^* = a\lambda_1 + b$.

   b) $\lambda_2^* = |a|\,\lambda_2$.

   c) $\tau_r^* = \tau_r$.

2.2 Représentations des L-moments

2.2.1 Représentation de λ_r en tant que L-fonctionnelle et en termes de polynômes orthogonaux

La fonction quantile Q (1.1) donne la représentation L-fonctionnelle classique. Le $r^{éme}$ L-moment est donné par [4] :

$$\lambda_r = \int_0^1 Q(u) P_{r-1}^*(u) du, r \geq 1, \tag{2.2}$$

Telle que : $P_r^*(u) = \sum_{j=0}^{k} p_{r,k}^* u^k, 0 < u < 1$ c'est le système de legendre déplacé des polynômes orthogonaux sur l'intervalle $[0, 1]$ [8]. Tq $P_r^*(u) = P_r(2u - 1)$ et $p_{r,k}^* = (-1)^{r-k} \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r+k \\ k \end{pmatrix}$.

On va calculer P_k^* pour $k = 0, 1, 2$ et 3 :

$$P_0^*(u) = 1.$$

$$P_1^*(u) = (2u - 1).$$

$$P_2^*(u) = (6u^2 - 6u + 1).$$

$$P_3^*(u) = (20u^3 - 30u^2 + 12u - 1).$$

Alors les quatre L-moments récrire par :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \int_0^1 Q(u)du. \qquad (2.3)\\
\lambda_2 &= \int_0^1 (2u-1)Q(u)du.\\
\lambda_3 &= \int_0^1 (6u^2-6u+1)Q(u)du.\\
\lambda_4 &= \int_0^1 (20u^3-30u^2+12u-1)Q(u)du.
\end{aligned}$$

Exemple 2.2.1 *La distribution de Pareto des paramètres d'échelle γ et de la forme k les les fonctions de répartitions et de quantiles sont définis*

$$\begin{cases} F_{\gamma,k}(x) = 1 - (1 - k(\frac{x}{\gamma}))^{\frac{1}{k}} \\ Q(u) = \gamma(1 - (1-u)^k)/k \end{cases}.$$

On calcule et on obtenir :

$$\lambda_1 = \frac{\gamma(k+2)}{k(k+1)}.$$
$$\lambda_2 = \frac{\gamma}{(k+1)(k+2)}.$$
$$\lambda_3 = \frac{\gamma(k-1)}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$
$$\lambda_4 = \frac{\gamma(k-1)(k-2)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}.$$

Alors les rapports de L-moments également :

$$\begin{cases} \tau_3 = \frac{k-1}{k+3} \\ \tau_4 = \frac{(k-1)(k-2)}{(k+3)(k+4)} \end{cases}.$$

2.2.2 Représentation de λ_r en tant que covariance et L-statistique

Selon l'orthogonalité de polynôme de legendre et posant $P_0 \equiv 0$ implique une nouvelle représentation de L-moments en termes de covariance d'ou [2] :

$$\lambda_r = \begin{cases} \mathbf{E}(X), k = 1 \\ Cov\left[X, P_{r-1}^*(F(X))\right], r \geq 2 \end{cases},$$

et les quatre premiers L-moments sont donnés par :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \mathbf{E}(X). \qquad (2.4)\\ \lambda_2 &= Cov(X, 2F(X) - 1).\\ \lambda_3 &= Cov(X, 6F^2(X) - 6F(X) + 1).\\ \lambda_4 &= Cov(X, 20F^3(X) - 30F^2(X) + 12F(X) - 1).\end{aligned}$$

Les L-moments aussi peuvent être écrite en terme de L-statistique, par :

$$\lambda_r = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_{i,n}^{(k)} \mathbf{E}(y_{i,n}),$$

où

$$\omega_{i,n}^{(k)} = \sum_{j=0}^{\min\{r-1,k-1\}} (-1)^{k-1-j} \begin{pmatrix} k-1 \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k-1+j \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r-1 \\ j \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.2.2 *La distribution Exponentielle de paramètre* $(\lambda = 1)$

La fonction de répartition et de quantiles d'une v.a X *suit la loi Exponentielle de paramètre* 1 *sont donés par :*

$$\begin{cases} F_x(x) = 1 - \exp(-x) \\ Q(u) = -\log(1-u) \end{cases}.$$

Les L-moments et rapport des L-moments sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \mathbf{E}(X) = 1.\\ \lambda_2 &= Cov(X, 2F(X) - 1)\\ &= Cov(X, 1 - 2\exp(-X)\\ &= \mathbf{E}(X(1 - 2\exp(-X)) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(1 - 2\mathbf{E}(\exp(-X))),\end{aligned}$$

et pour l'espérance, on obtient :

$$\mathbf{E}(\exp(-X)) = \int_0^{+\infty} \exp(-x)\exp(-x)dx = \frac{1}{2}.$$
$$\mathbf{E}(X(1 - 2\exp(-X)) = \int_0^{+\infty} x(1 - 2\exp(-x))\exp(-x)dx = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= Cov(X, 2F(X) - 1)\\ &= \frac{1}{2} - (1 - 2\frac{1}{2})\\ &= \frac{1}{2},\end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} \tau_3 = \frac{1}{3} \\ \tau_4 = \frac{1}{6} \end{cases}.$$

2.2.3 Représentation de L-moments en termes de moments de probabilités pondérés

Les moments de probabilité pondérés (Probability Weighted Moments), est une généralisation des moments habituels d'une distribution de probabilité, notés

PWM [9].

Soit Y une $v.a$ de distribution continue. Alors les L-moments de probabilité pondérés $M_{l,j,k}$ est défini par [6] :

$$\begin{aligned} M_{l,j,k} &= \mathbf{E}\left[Y^l F^j (1-F)^k\right] \\ &= \int_0^1 Q(u)^l u^j (1-u)^k du \ l, j, k \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Où : F et $Q(u)$ présentent les fonctions de répartition et de quantile de la variable X,telle que $Q(u) = F_X^{-1}(u)$.

1. Pour $j = k = 0$ et l entier positifs

$$M_{l,0,0} = \mathbf{E}\left[Y^l\right] = \int_0^1 Q_Y(u)^l du.$$

Qui sont les moments classiques d'ordre l par rapport à l'origine.

2. Pour $j = 0, l$ et k sont des entiers positifs ou $k = 0$, j et k sont des entiers positif :

$$M_{l,0,k} = \mathbf{E}\left[Y^l (1-F)^k\right] = \int_0^1 Q(u)^l (1-u)^k du. \tag{2.5}$$

$$M_{l,j,0} = \mathbf{E}\left[Y^l F^j\right] = \int_0^1 Q(u)^l u^j du. \tag{2.6}$$

La quantité (2.3) et (2.4) sont les plus utilisés en pratique et pour calculer les

L-moments et pour estimé les paramètres de distribution en fonction de moments de probabilité pondéré. La procédure d'estimation basée sur $M_{1,0,k}$ et $M_{1,j,0}$ est développé par Landweher et al (1970) [12] Hosking et al [10].

Les L-moment sont écrites comme des combinaisons linéaires de **PWM** :

$$\lambda_r = \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^{r-1}P^*_{r,k}\alpha_k = \sum_{j=0}^{r-1}P^*_{r,j}\beta_j. \tag{2.7}$$

$$a_k = M_{1,0,k} et \beta_j = M_{1,j,0}.$$

Après avoir calculé :

$$\lambda_1 = \alpha_0 = \beta_0. \tag{2.8}$$

$$\lambda_2 = \alpha_0 - 2\alpha_1 = 2\beta_1 - \beta_{0.}$$

$$\lambda_3 = \alpha_0 - 6\alpha_1 + 6\alpha_2 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta.$$

$$\lambda_4 = \alpha_0 - 12\alpha_1 + 30\alpha_2 - 20\alpha_3 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0.$$

Exemple 2.2.3 *Le tableau (2.1) représente les deux premières L-moments, les rapports L-moments et la fonction de quantile de quelque lois.*

Loi	Quantile	λ_1	λ_2	τ_3	τ_4
Uni	$a+(b-a)u$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{1}{6}(b-a)$	0	0
G Exp	$\xi - \alpha\log(l-u)$	$\xi+\alpha$	$\frac{1}{2}\alpha$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
Gumbel	$\xi - \alpha\log(-\log u)$	$\xi+\gamma\alpha$	$\alpha\ln 2$	$0,1699$	$0,1504$
Logistique	$\xi - \alpha\log(\frac{u}{1-u})$	ξ	α	0	$\frac{1}{6}$
Normale	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[(\frac{x-\mu}{\sigma})^2\right]$	μ	$\pi^{-1}\sigma$	0	$0,1226$
G Pareto	$\frac{\xi+\alpha\{1-(1-F)^k\}}{k}$	$\frac{\xi+\alpha}{(1+k)}$	$\frac{\alpha}{(l+k)(2+k)}$	$\frac{(1-k)}{(3+k)}$	$\frac{(1-k)(2-k)}{(3+k)(4+k)}$

TAB. 2.1 – L-moments des quelques distributions.

2.3 Estimation

Les L-moments ont été définies pour une distribution de probabilité, mais généralement (dans la pratique) ils sont estimés à partir d'un échantillon fini. L'estimation par les L-moments est basée sur la même approche que celle des moments classique, c-à-d que :

$$L - \text{moments empiriques} = L - \text{moments théoriques}.$$

Soit $(X_1 \cdots, X_n)$ n-échantillons et $(X_{1,n}, \cdots, X_{n,n})$ les statistiques d'ordres associées. L'estimation de L-moment de l'échantillon sont développés par Hosking (1985) [12] dérivé de l'estimation de **PWM** sous la forme suivant :

$$l_r = \sum_{j=0}^{r-1} p^*_{r-1,j} b_j.$$

Où les coefficients b_j sont les estimateurs sans biais de **PWM** β_j donnés par :

$$\hat{\beta}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-j} \left[\frac{\begin{pmatrix} n-i \\ j \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix}} \right] X_{i,n},$$

et comme les L-moments sont des combinaisons linéaires de **PWM**, on peut estimé les **PWM** β_j et α_j par $\hat{\beta}_j$ et $\hat{\alpha}_j$.

Pour $j = 0, 1, 2$ et 3 on a $\hat{\beta}_j$

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{i,n} \\ \hat{\beta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)}{(n-1)} X_{i,n} \\ \hat{\beta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)} X_{i,n} \\ \hat{\beta}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)} X_{i,n} \end{cases}.$$

et

$$\hat{\alpha}_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{(n-i)(n-i-1)...(n-i-k+)1}{(n-1)(n-2)...(n-k)} X_{i,n}.$$

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i,n} \\ \hat{\alpha}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i)}{(n-1)} X_{i,n} \\ \hat{\alpha}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i)(n-i-1)}{(n-1)(n-2)} X_{i,n} \\ \hat{\alpha}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-i)(n-i-1)(n-i-2)}{(n-1)(n-2)(n-3)} X_{i,n} \end{cases}.$$

Donc les quatre premiers L-moments de l'échantillon sont :

$$l_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} X_{i,n}.$$

$$l_2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=0}^{n} (2i-1-n) X_{i,n}.$$

$$l_3 = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}\sum_{i=0}^{n} (6(i-1)(i-2) - 6(n-2)(i-1) + (n-1)(n-2)) X_{i,n}.$$

$$l_4 = \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\sum_{i=0}^{n} (20(i-1)(i-2)(i-3) - 30(n-3)(i-1)(i-2)$$

$$+ 12(n-2)(n-3)(i-1) - (n-1)(n-2)(n-3)) X_{i,n}.$$

Définition 2.3.1 *Soit $(X_1 \cdots, X_n)$ n-échantillons et $(X_{1,n}, \cdots, X_{n,n})$ les statistiques d'ordres associées. L'estimation de L-moment de l'échantillon, noté l_r est :*

$$l_r = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}^{-1} \sum\sum \cdots \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \cdots \le i_r \le n} \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \begin{pmatrix} r-1 \\ k \end{pmatrix} X_{ir-k,n}, r \geq 1.$$

Cette estimation de L-moments basé sur l'estimateur de l'espérance de la statistique d'ordre aussi développé par Hosking (1990) [11].

Les premiers L-moments sont données comme suit :

$$l_1 = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} X_{i,n}.$$

$$l_2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (X_{j,n} - X_{i,n}).$$

$$l_3 = \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum\sum\sum_{1 \leq i \leq k \leq l \leq n} (X_{k,n} - 2X_{j,n} + X_{i,n}).$$

$$l_4 = \frac{6}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \sum\sum\sum\sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq n} (X_{l,n} - 3X_{k,n} + 3X_{j,n} - X_{i,n}).$$

Remarque 2.3.1 *Le premier estimateur l_1 présente la moyenne de l'échantillon et le deuxième l_2 défini la différence moyenne Gini.*

On définit l'estimateur de rapport des L-moments (ratio L-moment) par :

$$t_r = \frac{l_r}{l_2}, r \geq 3.$$

De lui t_3, t_4 et t : sont L-sekwness et L-kurtosis empiriques (resp) estimateur de $L - CV$ respectivement.

Exemple 2.3.1 *On note X la v.a suit la loi logistique de fonction de répartition définie par :*

$$F_X(x) = \frac{1}{1+\exp(-\frac{x-\zeta}{\alpha})}.$$

Alors sa fonction de quantile est donnée par :

$$Q(u) = \xi - \alpha \log(\frac{u}{1-u}).$$

D'après (2.2) on conclut que :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \mathbf{E}(X) = \xi. \\
\lambda_2 &= Cov(X, 2F(X)-1) \\
&= Cov(X, \frac{2}{1+\exp(-\frac{x-\zeta}{\alpha})} - 1) = \alpha. \\
\tau_3 &= 0, \tau_4 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

On change λ_1 et λ_2 par les estimateurs l_1 et l_2, alors :

$$\hat{\xi} = l_1, \hat{\alpha} = l_2.$$

Exemple d'estimation

Le problème commune en statistique c'est l'estimation des p paramètres d'une distribution de probabilité de une méthode analogue de la méthode de moment est la méthode de L-moment. Cette méthode consiste à résoule un systeme d'équations, où en calculent des p premier L-momnts d'un échantillon et l'égalent avec les L-moments théorique. Dans la tableau (2.2) un exemple de quelques distributions :

loi	Estimateurs
G Exp	$(\xi \ connue)$, $\hat{\alpha} = l_1$
Gumbel	$\hat{\alpha} = l_2/\log 2$, $\hat{\xi} = l_1 - \gamma\hat{\alpha}$
Logistique	$\hat{\alpha} = l_2$, $\hat{\xi} = l_1$
Normale	$\hat{\sigma} = \pi^{\frac{1}{2}}$, $\hat{\mu} = l_1$
G Pareto	$(\xi \ connue)$, $\hat{k} = l_1/l_2 - 2$, $\hat{\alpha} = (1 + \hat{k})l_1$

TAB. 2.2 – Estimastion des paramètres via L-moments pour quelque distribution.

2.4 Diagramme de L-skewness et L kurtosis

La diagramme des rapports de L-moments représente le graphique de τ_3 tant que l'axe des X est L-skewens et l'axe des Y L-kurtosis pour comprendre quelques distributions correspondent à un échantillon donnée. Cela nous donne une idée de l'ajustement qui peut correspondre à un échantillon avec des différentes distribution [13]. Alors les courbes et les points représentés dans le graphe sont les distributions, en ajoutant les L-moments calculé d'un échantillon avec t_3, t_4.

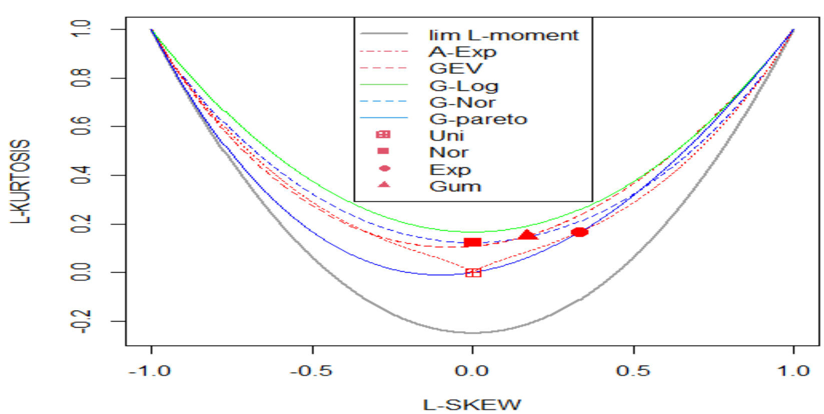

FIG. 2.1 – Diagramme des L-moments théorique des quelques distributions plus utilisés.

La figure (2.1) présente diagramme de rapports des L-moments théoriques τ_4 et τ_3 des lois : Lim L-moment, Asymmetric Exponentiel, GVE, Généralisé Logistique, Généralisé Exponentiel, Généralisé Normale, Généralisé Paréto, Exponentiel, Normale, Gumbel et Uniforme.

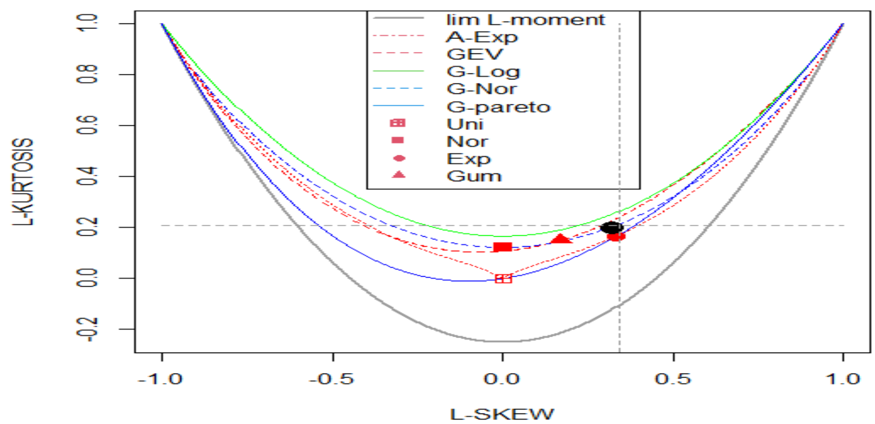

FIG. 2.2 – Diagramme des L-moments théorique des quelques distributions les plus utilisés avec les rapport de L-moment empiriques (t_3 et t_4) des échantillons simuler avec la loi Exp.

La figure (2.2) présente le diagramme des rapports des L-moments théoriques τ_4 et τ_3 des lois : Lim L-moment, Asymmetrique Exponentiel, GVE, Généralisé Logistique, Généralisé Exponentiel, Généralisé Normale, Généralisé Paréto, Exponential, Normale, Gumbel, Uniforme et les L-moment empirique t_3 et t_4 des échantillons simuler selon loi Exponentiel.

Chapitre 3

L-moment de la loi de Gumbel

La distribution des valeurs extrêmes provenant de n'importe quelle distribution converge vers la loi des extrêmes généralisées (GEV) est une famille de lois de probabilité continues. Elle comprend la loi de Gumbel, la loi de Fréchet et la loi de Weibull. la distribution de cette loi s'exprime de la manière suivante :

$$F(x) = \exp\left[-(1 - \kappa\frac{x - \xi}{\alpha})^{-\frac{1}{\kappa}}\right].$$

ou ξ le paramètre de position, α est le paramètre d'échelle et le paramètre κ spécifie le comportement de la distribution dans ses queues. Si $\kappa = 0$, on dit que loi d'extrémum de type I **(distribution de Gumbel)** tant que la loi tombe exactement dans la domaine d'attraction de la loi de Gumbel. Parmi les lois qui appartiennent au domaine d'attraction de la loi de Gumbel, il y a la loi d'Exponentielle.

3.1 Distribution de loi Gumbel

Définition 3.1.1 *Une v.a continue X suit la loi de Gumbel, dépendant par deux paramètres $\xi \in \mathbf{R}$ et $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ on définie sa fct de répartition par :*

$$F_X(x) = \exp\left[-\exp(-\frac{x-\xi}{\alpha})\right].$$

Sa densité est :

$$f_X(x) = \frac{1}{\xi}\exp(-\frac{x-\xi}{\alpha})\exp^{(-\exp(-\frac{x-\xi}{\alpha}))}.$$

Remarque 3.1.1 *Pour $\xi = 0$ et $\alpha = 1$ on obtient la loi standard de Gumbel. la dérivée première s'écrit :*

$$f'(x) = \frac{1}{\xi^2}\exp(-\frac{x-\xi}{\alpha})\exp^{(-\exp(-\frac{x-\xi}{\alpha}))}\left[\frac{1}{\sigma}\exp(-\frac{x-\xi}{\alpha}) - 1\right].$$

De racine $x_0 = \xi$.

Sa fonction de quantile est

$$Q(u) = \xi - \alpha\log(-\log\xi).$$

Le moment d'ordre 1 de loi Gumbel (Espérance) :

$$\mathbf{E}(x) = \xi + \alpha\gamma.$$

tq [1]

Le variance :

$$\mathbf{Var}(x) = \frac{\pi^2}{6}\alpha.$$

[1] γ constant d'Euleur égal à 0.5772

On va calculer les quatre L-moments par deux représentations défirents par la représentation polynômes orthogonaux (2.2) et par la représentation probabilités pondérés **(2.7) :**

Représentation en termes des polynômes orthogonaux

Indemnisation en (2.3) les quatre L-moments :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \int_0^1 Q(u)du \\ &= \int_0^1 \left[\xi - \alpha \log(-\log u)\right] du \\ &= \xi + \alpha\gamma.\end{aligned}$$

Le $2^{éme}$ L-moment

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \int_0^1 (2u-1)Q(u)du. \\ &= \int_0^1 (2u-1)\left[\xi - \alpha \log(-\log u)\right] du \\ &= 2\xi \int_0^1 udu - \int_0^1 du - 2\alpha \int_0^1 u \log(-\log u)du + \alpha \int_0^1 \log(-\log u)du \\ &= 2\xi(\frac{1}{2}) - \xi - 2\alpha \left[\frac{1}{2}(-\gamma - \log 2)\right] + \alpha\gamma \\ &= \alpha \ln 2.\end{aligned}$$

Le $3^{éme}$ L-moments

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \int_0^1 (6u^2 - 6u + 1)\left[\xi - \alpha \log(-\log u)\right] du \\
&= 6\xi \int_0^1 u^2 du - 6\mu \int_0^1 u du + \xi \int_0^1 du \\
&- 6\alpha \int_0^1 u^2 \log(-\log u) du + -6\alpha \int_0^1 u \log(-\log u) du \\
&- \alpha \int_0^1 \log(-\log u) du \\
&= 2\alpha(-\gamma - \ln 2) + 2\alpha(-\gamma - \ln 3) - \alpha\gamma \\
&= \alpha(2\ln 3 - 3\ln 2).
\end{aligned}$$

Le $4^{éme}$ L-moments

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= \int_0^1 (20u^3 - 30u^2 + 12u - 1)\left[\xi - \alpha \log(-\log u)\right] du \\
&= 5\xi - 10\xi + 6\xi - \xi - 20\alpha(-\gamma - \log 4) + 30\alpha(-\gamma - \ln 3) \\
&+ 12\alpha(-\gamma - \ln 2) + \alpha\gamma \\
&= \alpha(5\ln 4 - 10\ln 3 + 6\ln 2).
\end{aligned}$$

les rapportes de L-moments :

$$L - CV = \frac{\alpha \ln 2}{\xi + \alpha\gamma}.$$

Le L-skewness :

$$\begin{aligned}
\tau_3 &= \frac{(2\ln 3 - 3\ln 2)}{\log 2} \\
&= 0.1698.
\end{aligned}$$

Et L-kurtosis :

$$\tau_4 = \frac{(5\ln 4 - 10\ln 3 + 6\ln 2)}{\log 2}$$
$$= 0.1503.$$

Représentation en termes des moments de probabilités pondérés :

$$\begin{aligned}\beta_j = M_{1,j,0} &= \int_0^1 Q(u)^l u^j du \\ &= \int_0^1 \left[\xi - \alpha \log(-\log \xi)\right] u^j du \\ &= \frac{\xi}{j+1} - \alpha \int_0^1 \log(-\log \xi) u^j du\end{aligned}$$

On choisit le changement de variable $X = -\ln u \Longrightarrow u = \exp(X)$

et donc $dX = \frac{-1}{u} du$

$$\beta_j = \frac{\xi}{j+1} + \alpha \int_0^{+\infty} \exp(-X(j+1)) \ln(X) dX$$

On change le variable, pour une deuxième fois $Y = (j+1)X \Longrightarrow X = \frac{Y}{j+1}$

donc $dY = (j+1)dX$ on trouve la formule suivent :

$$\beta_j = \frac{\xi}{j+1} + \frac{\alpha}{j+1} \int_0^{+\infty} \exp(-Y) \ln(\frac{Y}{j+1}) dY$$

Donc

$$\beta_j = \frac{1}{j+1} \left[\xi + \alpha \left(\gamma + \ln(j+1)\right)\right].$$

On remplace dans β_j les indices $j = 1, j = 2, j = 3$ et $j = 4$ d'aprés (2.8) les quatre L-moments est :

$$\lambda_1 = \beta_0 = \xi + \alpha\gamma.$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= 2\beta_1 - \beta_{0.} = \alpha \ln 2 \\ &= 2\left[\frac{1}{2}(\xi + \alpha(\gamma + \ln 2))\right] - \xi - \alpha\gamma \\ &= \alpha \ln 2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= 6\left[\frac{1}{3}(\xi + \alpha(\gamma + \ln 3)\right] - 6\left[\frac{1}{2}(\xi + \alpha(\gamma + \ln 2))\right] - \xi - \alpha\gamma \\ &= \alpha(2\ln 3 - 3\ln 2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_4 &= 20\left[\frac{1}{4}(\xi + \alpha(\gamma + \ln 4)\right] - 30\left[\frac{1}{3}(\xi + \alpha(\gamma + \ln 3)\right] \\ &+ 12\left[\frac{1}{2}(\xi + \alpha(\gamma + \ln 2))\right] - \xi - \alpha\gamma \\ &= \alpha(5\ln 4 - 10\ln 3 + 6\ln 2).\end{aligned}$$

3.1.1 Graphe de densité

On présente une courbe de densité de la loi de Gumbel pour différents paramètres : $G(1,1), G(2,1), G(1.5,2)$.voir (3.1).

La densité n'est pas symétrique elle admet un maximum est : $\frac{1}{e\sigma}$ pour $t = \lambda$ et admet également deux points d'inflexion pour : $\lambda - \sigma\log(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}) \approx 0,9624\sigma$.

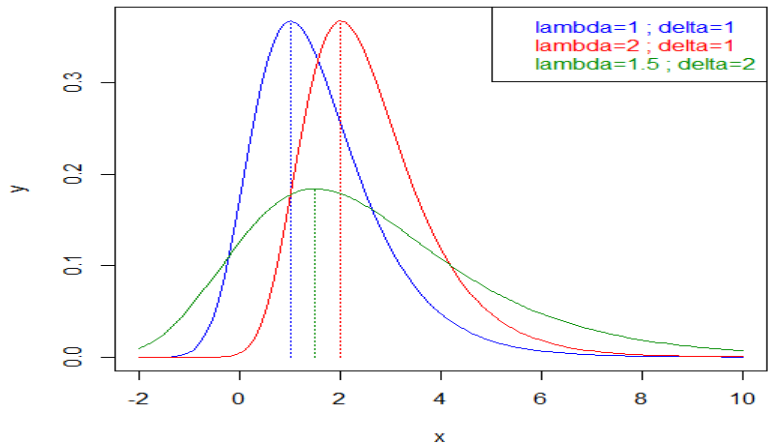

FIG. 3.1 – Densité de loi Gumbel avec des différents paramètres.

3.1.2 Application de loi Gumbel

La loi de Gumbel peut décrire des phénomènes extrêmes de durée de vie, de coûts de sinistres en assurance, de crues de rivières, etc$\cdots$ la probabilité d'un événement critique, comme un tremblement de terre.

Outil sympathique de prédiction de catastrophe, la loi de Gumbel est une loi de probabilité continue dont l'application dans l'économie est limitée à quelques domaines spécifiques, notamment la finance de marché et l'assurance. Pourtant, il reste relativement méconnu en dehors de l'hydrologie et est rarement invité dans les livres et logiciels de statistiques.

La loi de Gumbel peut, par exemple, servir à prévoir le niveau des crues d'un fleuve, si on possède le relevé des débits sur dix ans. Elle peut aussi servir à préd.

La loi de Gumbel est très utilisée en hydrologie et en climatologie pour estimer les valeurs extrêmes de phénomènes. Ainsi, si des variables.

Par la méthode des moments aléatoires indépendantes suivent une loi normale centrée, leur maximum suit approximativement, pour n grand, une loi de Gumbel de paramètres ξ et α.

3.2 Estimation

3.2.1 Par la méthode des moments

La méthode des moments consiste à égaler les moments théoriques et les moments des échantillonnes de la loi choisie L'espérance et la variance de loi Gumbel (Les deux premiers moments théoriques) :

$$\mathbf{E}(X) = \mu = \xi + \alpha\gamma.$$
$$\mathbf{Var}^2(X) = \sigma^2 = \frac{\pi^2}{6}\alpha^2.$$

Après la méthode des moments, nous avons trouvé les formules suivantes :

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}\hat{\sigma} \\ \hat{\xi} = \hat{\mu} - \hat{\alpha}\gamma \end{cases}.$$

3.2.2 Par la méthode des L-moments

L'objectif de L-moment est de s'ajuster lorsque les moments classiques ne conviennent pas. Les deux paramètres et s'obtiennent très simplement à partir des valeurs des deux premiers L-moments de la loi de Gumbel et d'une estimation calculée pour l'échantillon, Soit $X = (x_1, \cdots, x_n)$ $v.a$ de F fonction de répartition de z paramètres inconnues. Les paramètres inconnus sont estimés par résoudre le système d'équation résultants des z premier L-moments théoriques avec z premier L-moments empiriques :$\lambda_r = l_r, r = 1, \cdots, z$

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \frac{l_2}{\ln 2} \\ \hat{\xi} = l_1 - \hat{\alpha}\gamma \end{cases}.$$

3.3 Simulation de loi Gumbel à l'aide du R

L'éducation de simulation nous permet d'estimer les deux paramètres ξ et α de précédente loi par la méthode L-moments plusieurs tailles d'échantillons

$(n = 100, n = 500, n = 2000, n = 5000)$ en changeant à chaque nos paramètres, donc nous calculent la moyenne et le racine de l'erreur quadratique myenne on présente les tableaux suivent de facon que le tableau (3.1) indique ($\xi = 1$ et $\alpha = 2$) :

	$\xi = 1$			$\alpha = 2$		
	$\hat{\xi}$	$Biais$	$RMSE$	$\hat{\alpha}$	$Biais$	$RMSE$
$n = 100$	0.972	0.028	0.214	1.994	0.006	0.186
$n = 500$	0.995	0.005	0.097	1.991	0.009	0.079
$n = 2000$	0.998	0.0020	0.04	1.999	0.001	0.04
$n = 5000$	0.998	0.002	0.03	2.001	−0.001	0.03

TAB. 3.1 – Simulation de paramètres G(2,1) par la méthode des L-moments.

et le tableau (3.2) représente ($\xi = 2$ et $\alpha = 4$) :

	$\xi = 2$			$\alpha = 4$		
	$\hat{\xi}$	$Biais$	$RMSE$	$\hat{\alpha}$	$Biais$	$RMSE$
$n = 100$	1.990	0.01	0.219	3.969	0.031	0.181
$n = 500$	1.992	0.008	0.091	3.981	0.019	0.082
$n = 2000$	2.002	−0.002	0.039	3.997	0.003	0.038
$n = 5000$	2.001	−0.001	0.03	4.001	−0.001	0.022

TAB. 3.2 – Simulation de paramètres G(2,4) par la méthode des L-moments.

D'après la simulation des différents échantillons et paramètres par la méthode de L-moment en remarque que l'estimateur $\hat{\xi}$ et $\hat{\alpha}$ sont meilleur et plus proche de la vraie valeur.

Évidemment par les tableaux la racine de l'erreur quadratique moyenne $RMSE$ est plus proche de zéro.

L'éfficacité de la méthode d'estimation basée sur les L-moments, chaque fois l'échantillon augmente le valeurs est sans biais beaucoup plus

et le $RMSE$ diminuer.

Conclusion

Les L-moments est une combinaison linéaire de statistiques d'ordre peut être utilisée pour calculer des quantités telles que l'asymétrie (L-skewness) et l'aplatissement (L-kurtosis), cependant l'utilisation de L-moments offre un certain nombre d'avantages :

1. Pour estimer les paramètres d'une distribution de probabilité, en résolvant un système d'équations égal au nombre de paramètres inconnus.
2. Déterminer la distribution qui s'ajuste le mieux à un échantillons par la diagramme de rapport de L'moment L-Skwness et le L-Kurtosis.
3. L'existence de L-moments plus élevés nécessite seulement que la $v.a$ ait une moyenne finie, (exemple : la distribution t de Student avec de faibles degrés de liberté)
4. Nous déduisons également, de l'estimateur **PWM** du paramètre de forme du distribution généralisée des valeurs extrêmes, un test si ce paramètre de forme est nul, et on évalue la réalisation de ce test par simulation.

Un inconvénient des rapports de L-moment pour l'estimation est leur sensibilité généralement plus faible, comme le cas n'implique pas les L-moments (loi de cauchy) c'est pour cette raison que le statisticien **EL Amir et Seheult(2003)** proposa la méthode TL-moment.

Annex A

Le programme R est un logiciel de statistiques interactif et interprété. Il est dédié à l'analyse statistique et à la visualisation de données.Disponible sous de nombreux systèmes d'exploitation, R se compose d'une base ("base") et de bibliothèques de fonctions thématiques regroupées par nom de package,Il peut offrir application de techniques statistiques comme la création de représentations graphiques (histogrammes, diagrammes...), R a aussi la possibilité d'exécuter des programmes stockés dans des fchiers textes et comporte un grand nombre de procédures statistiques Ces derniers permettent de traiter assez rapidement des sujets aussi des opérations mathématiques classiques

Il est édité en 1996, par *Robert Gentleman* et *Ross Ihaka* du département de statistique de l'Université d'Auckland en Nouvelle Zélande. Le téléchargement de ce logiciel est trés facile est disponible par le site web : ≪www.r-project.org ≫ .

Dans $3^{éme}$ chapiter les packags utilises est : **lmom** et **lmomco** avec la version **R.4.2.0**

plotlmrdia : on trouve dans package **lmomco** pour le diagramme de rapport de L-moment

quagum : ce paquets nous permet de calculer fonction de distribution et fonction quantile de la distribution de Gumbel dans package **lmom.**

Annex B

$v.a$	:	Variable améatoire.
$i.i.d$	:	Indépendantes et identiquement distribuées.
$\mathbf{E}(X)$	:	Espérance mathématique ou moyenne du v.a X .
$\mathbf{Var}(x)$	:	Variance de X.
$Cov(X,Y)$	:	Covariance de X et Y.
F^{-1}	:	Inverse de la fonction de distribution.
$F^{\leftarrow}$	:	Inverse généralisé de la fonction de distribution.
Q	:	Fonction de quantile.
Q_n	:	Fonction de quantile empirique.
$B(a,b)$	:	Loi beta de parametre a et b.
Γ	:	Fonction gamma.
$\mathbf{P}(X \leq x)$	:	La probabilité de x.
λ_r	:	Le L-moment d'ordre r.
$L - CV$	:	L-variation.
PWM	:	Moments de probabilité pondéré.
l_r	:	L-moments empirique.
$G(a,b)$	:	Loi Gumbel de parametres a et b.
$RMSE$	:	Racine de l'erreur quadratique moyenne.

Bibliographie

[1] Arnold, B, Balakrishnan, N., Nagaraja, H. N. A. (1992). A frst course in order statistics. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Inc, New York.

[2] Benelmir.I, (2010). Les L-moments : Application en hydrologie.magister en-mathématique. Univ-biskra

[3] Berkan.H., (2021/2022). Cours 2-éme master en matématique (statistique). Univ-biskra.

[4] Chine.A.,(2018). Sur la statistique de copules. Doctorat en science. Univ-biskra

[5] David, H. A., (1970). Order statistics. John Wiley & Sons, Inc, New York-London Sydney.

[6] Greenwood, J.A, Landwehr, J.M., Matalas, N.C., and Wallis, J.R, (1979). Probability weighted moments : defnition and relation to parameters of several distributions expressable in inverse form.Water Resour, 1979, vol. 15, no 5, p. 1049-1054.

[7] Hosking.J.R.M.,(1990). L-moments : analysis and estimation of distributions using linear combinations of statistics, Journal of the Royal Statistical So-

ciety.105.

[8] Hosking.J.R.M. (2003). On the characterization of distribution by their L-moment. T. J. Watson Research Center, Yorktown Heights.

[9] Hosking.J.R.M., Wallis.J.R. (1995) : A comparison of unbiased and plotting-position es timators of L-moments.T.J.watson.

[10] Hosking, J.R.M., Wallis, J.R., and Wood, E.F. (1985). Estimation of the generalised extreme-value distribution by the method of probability-weighted moments.Technometrics. 27,251-261.

[11] Hosking, J.R.M. (1990). L-moments : analysis and estimation of distributions using linear combinations of statistics, Royal Statistical Society. 52, 105-124.

[12] Landwehr, J.M, Matalas, N.C., and Waliss, J.R. (1979). Probability weighted moments compared with some traditional techniques in estimating Gumbel parameters and quantiles. Water Resources Research. 5, 1055-1064.

[13] Vogel, R.M, Fennessey, N.M. (1993). L-moment diagram should replace product moment diagram. Water Resour. Res. 29, 1745-1752.

الملخص

في هذه المذكرة قدمنا قياس موازي للعزوم هذه العزوم خطية عرف من قبل Hosking 1990 من اجل تقدير الاعدادات واختبار بالتفرطح والتناظر قاعدة هذه الكتابة لاحصاء الترتيبي ولهذا قمنا بذكرها في الفصل الاول المحاكاة فعلت بتوزيع غامبل

الكلمات المفتاحية : ل-مومون, مومون, تقدير, رسم بياني, التحدب, التقرطح, ارتباط

Résumé

Dans ce mémoire en presenté un mesure analogue au moment si

les l-moment introduite par Hosking 1990 pour estimer les paramètres et teste d'ajustement telle que par L-skewness et L-kurtosis La base de l'écrituure la statistique d'ordre pour ce la représente dans 1er chapitre Un simulation est fait la loi de Gumble

Mot clés : ***L-moment, moment, estimation, Diagramme, l'asymétrique, l'aplaticeent, L-correlation***

Abstract

In this note we present a simulations misure of moments in which it is the linear moment introduced by Hosking 1990. In order to estimate the settings and test the L-kurtosis and L-skewness. The rule of this writing is the ranking statistics, in which is why we mentioned it in the first chapter. Asimulation did by Gumbel's distributing.

Keywords: ***L-moment, moment, estimation, Diagram, L-skewness, L-kurtosis***

L-correlation