COURRIER DU SAVOIR – N°01, Novembre 2001, pp. 33-39

CONTRIBUTION AU CALCUL DES DIMENSIONS LINEAIRES DANS LES ECOULEMENTS UNIFORMES A SURFACE LIBRE ET EN CHARGE

B. ACHOUR, A. BEDJAOUI

Laboratoire de Recherche en Hydraulique Souterraine et de Surface (LARHYSS)
www.larhyss.org , info@larhyss.org
Université de Biskra, B.P.145, R.P., 07000, Biskra, Algérie

RESUME

L'étude montre que la dimension linéaire $a = \phi_a(Q, J, \varepsilon, w, \nu)$ d'un profil liquide ou géométrique de forme quelconque peut s'écrire $a = \psi\, a_r$, dans le domaine pratiquement lisse, et $a = \lambda a_r$ lorsque l'écoulement est dans le domaine de transition. Le paramètre a_r représente la dimension linéaire lorsque l'écoulement est turbulent rugueux, véhiculé par une conduite hypothétique de rugosité relative donnée et ayant la même conductivité que celle de la conduite réelle. Les facteurs ψ et λ sont des coefficients de correction de la dimension linéaire. La méthode proposée dans cette étude est extensible aux canaux et conduites de forme quelconque et son application au cas de la conduite circulaire montre la fiabilité et la simplicité du calcul.

1. INTRODUCTION

Le calcul des écoulements uniformes à surface libre ou en charge occupe une place importante dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien. Un écoulement est considéré comme étant uniforme lorsque ses caractéristiques sont invariables dans le temps et dans l'espace. Ces caractéristiques sont la profondeur h de l'écoulement appelée aussi hauteur normale, l'aire de la section mouillée A, la vitesse moyenne V de l'écoulement et le débit Q. D'un point de vue pratique, la constance de la vitesse V est généralement associée à la celle de la vitesse moyenne; mais de façon plus rigoureuse, cela signifie que l'écoulement est caractérisé par une vitesse constante en tout point de son domaine. En d'autres termes, la distribution des vitesses dans chacune des sections transversales de l'écoulement est uniforme, correspondant à une couche limite pleinement développée; cet aspect du problème a été longuement étudié par plusieurs chercheurs (*Prandtl, 1926; Keulegan, 1938; Hama, 1954; Schlichting, 1955; Morris, 1955; Iwasa, 1957*). Bien que la condition d'un écoulement uniforme, dans le sens strict du terme, ne soit pratiquement jamais satisfaite, elle est cependant fréquemment admise lors du calcul des caractéristiques d'un écoulement en canaux et rivières (*Chow, 1973*). Cette approche simplifiée donne des résultats assez satisfaisants dans bon nombre de cas pratiques. Les relations de calcul de la profondeur normale dans les canaux expriment de manière approximative la vitesse moyenne V sous l'hypothèse d'un régime turbulent. Ce régime doit être considéré non seulement comme étant turbulent, mais aussi comme étant rugueux en raison du fait que l'effet des forces dues à la viscosité est laissée hors considération. Les relations appliquées se présentent, en règle générale, sous la forme $V = CR_h^{\beta} J^{\gamma}$, où R_h est le rayon hydraulique, J est la pente de la ligne de charge, C est un paramètre qui traduit la résistance de l'écoulement et dépend de la vitesse moyenne V, de R_h, de la rugosité absolue ε des parois du canal, de la viscosité du liquide et de beaucoup d'autres facteurs. L'une des premières formules destinées au calcul de l'écoulement uniforme est probablement celle de *Chézy*, correspondant à $\beta = \gamma = 1/2$. Le coefficient C de *Chézy* a été estimé par plusieurs auteurs (*Ganguillet* et *Kutter, 1869; Bazin, 1897; Powell, 1950*). Mais, la relation la plus largement utilisée pour les écoulements uniformes dans les canaux ouverts est celle de *Manning* (*1891*) en raison de sa forme simplifiée et aux résultats satisfaisants auxquels elle aboutit. Dans cette relation, $\beta = 2/3$ et $\gamma = 1/2$ tandis que $C = k = 1/n$ où n est le coefficient de rugosité appelé aussi coefficient de *Manning*. La même forme de la relation ayant été introduite indépendamment par *Strickler* (*1923)*, cette relation est souvent appelée formule de *Manning-Strickler*. Il n'existe aucune méthode exacte qui permet d'évaluer n. Évaluer n revient à estimer la résistance de l'écoulement dans un canal donné, ce qui nécessite beaucoup d'expérience et de pratique. Notons cependant que *Hager* (*1987*) a pu lier, à travers une relation fortement intéressante, le coefficient k et la rugosité absolue ε.

Cette relation sera utilisée dans notre développement théorique. Une autre relation qui servira de base à notre étude est celle de *Darcy-Weisbach*, initialement formulée par *Weisbach* (*1845)* et reprise par *Darcy* (*1854*) dans ses recherches expérimentales. Cette relation, développée pour les écoulements en conduites, se présente sous la forme $J = fV^2/(2gD)$ où f est le coefficient de frottement, D est le diamètre de la conduite et g est l'accélération de la pesanteur. Le coefficient de frottement f dépend à la fois de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R et la nature du régime d'écoulement dans la conduite peut être examiné à travers la variation de $f = \phi(R, \varepsilon/D)$. Le graphique obtenu est communément appelé diagramme de *Stanton* (*1914*). Bien que la relation de *Darcy-Weisbach* ait été développée pour le cas des conduites, elle est cependant applicable aux canaux ouverts, en remplaçant D par le diamètre hydraulique D_h.

Dans le cas le plus général, l'écoulement est régi par une fonction de six paramètres que l'on peut écrire sous la forme $\varphi\,(a, Q, J, \varepsilon, w, \nu) = 0$, où :

a est une dimension linéaire quelconque liée à l'écoulement ou au profil géométrique du canal considéré. Cette dimension linéaire peut être à titre d'exemple la profondeur h de l'écoulement, la largeur b d'un canal rectangulaire ou la petite base d'un trapèze , le diamètre D d'une conduite circulaire,…

w est le paramètre de forme ou rapport d'aspect du profil liquide en écoulement, correspondant à $w = \eta = b/h$ pour le cas du canal rectangulaire ou trapézoïdal, à $w = \xi = h/D$ pour le cas du profil circulaire,...

ν est la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

En pratique, trois catégories de problèmes peuvent se poser. La première catégorie répond à un besoin de dimensionnement et consiste à évaluer la dimension linéaire a à partir des valeurs connues des cinq autres paramètres régissant l'écoulement. La relation fonctionnelle φ devient $a = \phi_a(Q, J, \varepsilon, w, \nu)$. En se référant à la bibliographie, il n'existe à l'heure actuelle aucune relation explicite susceptible de répondre à cette catégorie de problème lorsque l'écoulement est de nature lisse ou de transition. Ceci s'explique par l'impossibilité d'évaluer le nombre de Reynolds R puisque celui-ci dépend de la dimension linéaire a recherchée. Le problème peut être résolu en s'appuyant sur un procédé itératif. Dans le domaine rugueux, pour lequel a est indépendant de R, l'application de relations de type *Manning-Strickler* donne des résultats satisfaisants. La deuxième catégorie de problème consiste à évaluer le débit Q tel que $Q = \varphi_Q(a, J, \varepsilon, w, \nu)$. Ce problème trouve sa solution de manière explicite par la combinaison des relations de Colebrook-White et de Darcy-Weisbach, et ce quelle que soit la nature du régime d'écoulement. La troisième catégorie de problème est celle qui consiste à évaluer le gradient de la perte de charge tel que $J = \varphi_J(a, Q, \varepsilon, w, \nu)$. Pour ce cas, l'application des relations de type *Darcy-Weisbach* est suffisante.

Dans cette première partie de l'étude, nous proposons d'établir une relation généralisée susceptible de répondre à la première catégorie de problème ci-dessus exposés et pour toute nature du régime d'écoulement. Il s'agit en fait d'exprimer de manière pratique la relation fonctionnelle φ_a. Cette généralisation est possible par la combinaison des relations de *Manning-Strickler* et de *Darcy-Weisbach*.

Afin de faciliter la compréhension de la méthode, le seul cas de la conduite circulaire est exposé. La méthode est cependant extensible à tout profil géométrique.

2. TRANSFORMATION DE L'EQUATION DE MANNING-STRICKLER

L'équation de *Manning-Strickler*, applicable dans le domaine rugueux, s'écrit :

$$V = kR_h^{2/3}\sqrt{J} \tag{1}$$

où V est la vitesse moyenne de l'écoulement, k est le coefficient de *Strickler* et R_h est le rayon hydraulique. En tenant compte du fait que $V = Q/A$ et $R_h = A/P$, où A et P désignent respectivement l'aire de la section mouillée et le périmètre mouillé, la relation (1) devient :

$$\frac{QP^{2/3}}{kA^{5/3}\sqrt{J}} = 1 \tag{2}$$

A et P dépendent de la dimension linéaire a et l'on peut écrire que $A = a^2 A_1$ et $P = aP_1$. Les paramètres A_1 et P_1 sont adimensionnels et correspondent respectivement à l'aire de la section mouillée et au périmètre mouillé lorsque a est égal à l'unité. En tenant compte de ces considérations, la relation (2) devient :

$$a_r = \left[\frac{Q}{k\sqrt{J}}\right]^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \tag{3}$$

L'indice *r* désigne le domaine rugueux. Étant donné que $k = (8{,}2\varepsilon^{-1/6}\sqrt{g})$ (Hager, 1987) où g est l'accélération gravitationnelle, la relation (3) peut également s'écrire :

$$a_r = \left[\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8{,}2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \tag{4}$$

Ainsi, en posant $\Gamma = \left[\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8{,}2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8}$ et $a_o = P_1^{1/4} / A_1^{5/8}$, la relation (4) s'écrit plus simplement :

$$a_r = \Gamma a_o \tag{5}$$

La relation (5) montre que toute dimension linéaire a s'exprime, dans le domaine rugueux, par le produit de deux fonctions Γ et a_o. La fonction Γ dépend de Q, J et ε, mais ne dépend pas de la forme géométrique du profil liquide, dont dépend par contre a_o. On notera que Γ a la dimension d'une longueur.

3. CONDUITE CIRCULAIRE

3.1 Domaine turbulent rugueux

En considérant le cas de la conduite circulaire de diamètre D_r, on peut écrire que $A_r = (D_r^2 / 4)(\theta - \sin\theta\cos\theta)$ et $P_r = D_r\theta$, où θ est le demi angle au centre, exprimé en radian, du segment circulaire de hauteur h_r et tel que $\theta = \cos^{-1}(1-2\xi)$. Puisque $a = D_r$, il vient que $A_1 = (\theta - \sin\theta\cos\theta)/4$ et $P_1 = \theta$; il apparaît ainsi que $a_o = D_o = \theta^{1/4} / [(\theta - \sin\theta\cos\theta)/4]^{5/8}$ ne dépend que du paramètre de forme ξ. En vertu de l'équation (5), le diamètre D_r de la conduite s'écrit :

$$D_r = 1{,}08 \left(\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{\theta^{1/4}}{(\theta - \sin\theta\cos\theta)^{5/8}} \tag{6}$$

En choisissant pour dimension linéaire $a = h_r$, la relation (6) permet d'écrire, en considérant que $h_r = \xi D_r$:

$$h_r = 1{,}08 \left(\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{\xi\theta^{1/4}}{(\theta - \sin\theta\cos\theta)^{5/8}} \tag{7}$$

Les relations (6) et (7) permettent le calcul explicite de D_r et h_r, dans le domaine rugueux, à partir de la valeur imposée du paramètre de forme ξ. Mais, pour évaluer ξ, les relations (6) et (7) ne sont pas pratiques à appliquer et elles peuvent être remplacées avec une excellente approximation par l'équation :

$$\left[\frac{8}{5}\sin(90°\xi) \right]^2 = \frac{q_r}{\sqrt{J}} \left(\frac{\varepsilon}{D_r} \right)^{1/6} \tag{8}$$

où $q_r = Q / \sqrt{gD_r^5}$ est le débit relatif et $q_r / \sqrt{J}$ est la conductivité relative de la conduite.

Pour le cas particulier de la conduite circulaire pleine caractérisée par $\xi = 1$ ou $\theta = \pi$, la relation (6) permet d'écrire :

$$D_r = 0{,}70 \left[\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \tag{9}$$

La relation approchée (8) conduit au même résultat pour $\xi = 1$.

Dans le domaine rugueux, le nombre de Reynolds s'écrit $R_r = VD_{hr} / \nu$, où $D_{hr} = 4A_r / P_r$ est le diamètre hydraulique et ν est la viscosité cinématique du liquide. En tenant compte du fait que $V = Q / A_r$, le nombre de Reynolds devient $R_r = 4Q / (P_r\nu)$. Or, selon la relation (5), $P_r = \Gamma P_o$ et le nombre de Reynolds peut s'écrire, quelle que soit la forme du profil géométrique
considéré, $R_r = 4Q / (\Gamma P_o \nu) = 4Q / (\Gamma a_o\, P_1\, \nu)$, soit :

$$R_r = \frac{4Q}{\Gamma\nu} \left(\frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{5/4} \tag{10}$$

Le diamètre hydraulique D_{hr} peut également s'écrire $D_{hr} = 4A_r / P_r = 4\Gamma^2 a_o^2 A_1 / (\Gamma a_o P_1) = 4\Gamma a_o A_1 / P_1$, soit :

$$D_{hr} = 4\Gamma \left(\frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{3/4} \tag{11}$$

Étant donné que $D_{hr} = \Gamma D_{ho}$, la relation (11) permet d'écrire $D_{ho} = 4(\sqrt{A_1} / P_1)^{3/4}$.

Pour le cas de la conduite circulaire, le nombre de Reynolds et le diamètre hydraulique sont respectivement :

$$R_r = \frac{3{,}70}{\nu}\left(\frac{Q^{5/3}\sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}}\right)^{3/8}\left(\frac{\sqrt{\theta-\sin\theta\cos\theta}}{\theta}\right)^{5/4} \qquad (12)$$

$$D_{hr} = 1{,}08\left(\frac{Q\,\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}}\right)^{3/8}\left(\frac{\sqrt{\theta-\sin\theta\cos\theta}}{\theta}\right)^{3/4} \qquad (13)$$

Pour le cas de la conduite circulaire pleine ($\theta = \pi$), la relation (13) conduit à (9) tandis que (12) devient:

$$R_r = \frac{1{,}81}{\nu}\left(\frac{Q^{5/3}\sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}}\right)^{3/8} \qquad (14)$$

3.2 Domaine de transition

Dans le domaine de transition, la dimension linéaire a dépend fortement de l'influence du nombre de Reynolds. La démarche que nous préconisons consiste à corriger la dimension linéaire a_r, calculée selon la relation (5) obtenue dans l'hypothèse d'un régime turbulent rugueux, par un coefficient λ dit facteur de transition. La relation (5) devrait s'écrire :

$$a = \lambda\Gamma a_o = \lambda\, a_r \qquad (15)$$

Lorsque le domaine est rugueux, $\lambda = 1$ et lorsque le domaine est de transition, $\lambda > 1$. Le facteur λ dépend à la fois de la valeur du nombre de Reynolds ainsi que de celle de la rugosité relative ε / D_h. Afin d'exprimer le facteur de transition λ, nous pouvons faire appel à l'équation de *Darcy-Weisbach* $J = (f / D_h)Q^2/(2gA^2)$, où f est le coefficient de frottement dans le domaine de transition. L'aire de la section mouillée $A = a^2 A_1$ peut s'écrire en tenant compte de (15) $A = \lambda^2\Gamma^2 a_o^2 A_1$, soit $A = \lambda^2\Gamma^2 A_o$ où $A_o = a_o^2 A_1$. De même, D_h peut s'écrire $D_h = \lambda\Gamma D_{ho}$. En tenant compte de ces considérations, la relation de *Darcy-Weisbach* devient :

$$\lambda\Gamma = f^{1/5}\sqrt[5]{\frac{Q^2}{2gA_o^2 D_{ho} J}} \qquad (16)$$

Dans le domaine rugueux, la relation (16) s'écrit, avec $\lambda = 1$ et $f = f_r$:

$$\Gamma = f_r^{1/5}\sqrt[5]{\frac{Q^2}{2gA_o^2 D_{ho} J}} \qquad (17)$$

La combinaison des relations (16) et (17) conduit à :

$$\lambda = \left(\frac{f}{f_r}\right)^{1/5} \qquad (18)$$

Ainsi, dans le domaine de transition, la dimension linéaire a s'écrit en vertu de (15) et (18):

$$a = \left(\frac{f}{f_r}\right)^{1/5} a_r \qquad (19)$$

Lorsque c'est le diamètre D de la conduite qui est recherché ($a = D$), la relation (19) devient en tenant compte de (6):

$$D = 1{,}08\left(\frac{f}{f_r}\right)^{1/5}\left(\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}}\right)^{3/8}\frac{\theta^{1/4}}{(\theta-\sin\theta\cos\theta)^{5/8}} \qquad (20)$$

La relation (20) permet à la fois le calcul du diamètre de la conduite circulaire dans les domaines de transition et turbulent rugueux ($f \to f_r$), aussi bien lorsque cette conduite est pleine ($\theta = \pi$) ou partiellement occupée par l'écoulement.

Dans le domaine de transition, le coefficient de frottement f peut être évalué par la formule connue de *Colebrook-White*, en s'appuyant cependant sur un procédé itératif. Mais, nous avons pu montrer que cette formule peut être remplacée avec une excellente approximation, par l'équation explicite :

$$f^{-1/2} = -2\log\left[\frac{\varepsilon / D_h}{3{,}7} + \frac{4{,}5}{R}\log\frac{R}{6{,}97}\right] \qquad (21)$$

Par contre, le coefficient de frottement f_r peut être évalué de manière explicite par application de la formule de Nikuradsé $f_r^{-1/2} = -2\log\left[\frac{\varepsilon / D_h}{3{,}7}\right]$. Dans la relation (21), le nombre de Reynolds est $R = 4Q/(P\nu)$, mais en tenant compte du fait que $P = \lambda P_r$, on peut écrire $R = R_r / \lambda$. De même, le diamètre hydraulique D_h est $D_h = \lambda D_{hr}$ et la relation (21) devient :

$$f^{-1/2} = -2\log\left[\frac{\varepsilon / D_{hr}}{3{,}7\,\lambda} + \frac{4{,}5\,\lambda}{R_r}\log\frac{R_r}{6{,}97\,\lambda}\right] \qquad (22)$$

Étant donné que, selon la relation (18), λ est fonction du coefficient de frottement $f(\varepsilon / D_{hr}, R_r)$, l'évaluation de λ nécessite à priori un procédé itératif dont le principe est le suivant :

$$f_1^{-1/2} = -2\log\left[\frac{\varepsilon / D_{hr}}{3{,}7\,\lambda_o} + \frac{4{,}5\,\lambda_o}{R_r}\log\frac{R_r}{6{,}97\,\lambda_o}\right],\ \lambda_o = 1$$

$$f_2^{-1/2} = -2\log\left[\frac{\varepsilon / D_{hr}}{3{,}7\lambda_1} + \frac{4{,}5\lambda_1}{R_r}\log\frac{R_r}{6{,}97\lambda_1}\right],\ \lambda_1 = \left(\frac{f_1}{f_r}\right)^{1/5}$$

$$f_i^{-1/2} = -2\log\left[\frac{\varepsilon / D_{hr}}{3{,}7\lambda_{i-1}} + \frac{4{,}5\lambda_{i-1}}{R_r}\log\frac{R_r}{6{,}97\lambda_{i-1}}\right],\ \lambda_{i-1} = \left(\frac{f_{i-1}}{f_r}\right)^{1/5},\ i = 1,2,\ldots n$$

Nous pouvons constater que ce procédé itératif n'est pas nécessaire, puisque nous avons pu montrer que $(\lambda_3 - \lambda_1) \le 0{,}01\lambda_1$. Ainsi, l'erreur relative commise sur l'évaluation de λ, en application de la relation (18) et pour $f = f_1$, ne dépasse pas 1%.

Exemple d'application 1 : Soit à déterminer, sous un gradient de perte de charge J =6,8.10^{-6}, le diamètre D d'une conduite circulaire partiellement occupée par un écoulement d'eau de débit Q =20 l/s et caractérisée par une viscosité cinématique ν =10^{-5} m^{2}sec^{-1}. Le taux de remplissage de la conduite est $\xi = h / D = 0{,}40$ et la rugosité absolue des parois est $\varepsilon = 6.10^{-4}$ m.

Nous supposons, dans un premier temps, que l'écoulement est dans le domaine rugueux $(\lambda = 1)$ et l'application de la relation (6) permet le calcul de D_r, soit $D_r \approx 0{,}93$ m. Nous pouvons vérifier, à partir de cette valeur de D_r, que l'application de la relation (8) mène à $\xi \approx 0{,}40$. Le diamètre hydraulique D_{hr} dans le domaine rugueux est selon (13) $D_{hr} = 0{,}797$ m, soit $\varepsilon / D_{hr} = 7{,}526.10^{-4}$, correspondant à $f_r = 0{,}01834$ calculé selon Nikuradsé. Le nombre de Reynolds est selon (12) $R_r \approx 6273$. En application du procédé itératif ci-dessus décrit, les valeurs du coefficient de frottement f et du coefficient de transition λ sont:

$f_1 = 0{,}0360$; $\lambda_1 = 1{,}1446$,

$f_2 = 0{,}0372$; $\lambda_2 = 1{,}1519$,

$f_3 = 0{,}03725$; $\lambda_3 = 1{,}1522$.

On peut clairement constater, à travers cet exemple, que $(\lambda_3 - \lambda_1)/\lambda_3 = 0{,}66\%$ et $(f_3 - f_1)/f_3 = 3{,}5\%$. Le procédé itératif aurait pu être évité et le calcul mené avec la valeur de λ_1. La valeur recherchée de λ est donc $\lambda = (f / f_r)^{1/5} \approx 1{,}15$, ce qui confirme que l'écoulement est dans le domaine de transition puisque $\lambda > 1$. Le diamètre D de la conduite est alors $D = \lambda D_r = 1{,}07$ m.

3.3 Domaine pratiquement lisse

Dans le domaine pratiquement lisse, caractérisé par une rugosité absolue $\varepsilon \to 0$, nous proposons de corriger la valeur de la dimension linéaire a_r obtenue dans le domaine rugueux, par un coefficient ψ analogue au coefficient de transition λ. La dimension linéaire recherchée s'écrit $a = \psi\, a_r$. L'expression de ψ s'obtient de la même manière que celle ayant conduit à λ et nous pouvons écrire :

$$\psi = \left(\frac{f}{f_r}\right)^{1/5} \tag{23}$$

Cependant, le coefficient de frottement f_r calculé en application de la formule de Nikuradsé n'a pas de sens puisque $\varepsilon \to 0$. Afin de lever cette difficulté, nous considérons une conduite hypothétique de même conductivité que la conduite réelle et caractérisée par une rugosité relative $\varepsilon r / D_{hr}$=8,5.10^{-3} dans le domaine rugueux. Pour cette conduite hypothétique, le coefficient de frottement f_r selon Nikuradse est alors $f_r = 0{,}0359$ et la relation (23) devient $\psi = 1{,}945\, f^{1/5}$. Le coefficient de frottement f se calcule pour $\varepsilon / D_h = 0$, selon la relation (21), avec une erreur inférieure à 0,6% par rapport à la valeur obtenue selon *Colebrook-White* et pour $R \ge 2350$. Mais cette relation peut être remplacée par l'équation suivante, obtenue avec un coefficient de corrélation R^2 = 0,9999 :

$$\psi = \left(\frac{3{,}673}{\log R}\right)^{0{,}478},\ R \ge 2350 \tag{24}$$

Comme dans le cas du domaine de transition, le nombre de Reynolds figurant dans la relation (24) s'écrit $R = R_r / \psi$ et cette relation devient :

$$\psi = \left[\frac{3{,}673}{\log(R_r / \psi)}\right]^{0{,}478} \tag{25}$$

Le coefficient ψ est ainsi évalué par itération de la manière suivante :

$$\psi_1 = \left[\frac{3{,}673}{\log(R_r/\psi_o)}\right]^{0{,}478} \quad \text{avec } \psi_o = 1,$$

$$\psi_2 = \left[\frac{3673}{\log(R_r/\psi_1)}\right]^{0{,}478},$$

$$\psi_i = \left[\frac{3{,}673}{\log(R_r/\psi_{i-1})}\right]^{0{,}478}$$

Nous avons pu également constater que ce procédé itératif n'est pas nécessaire puisque $(\psi_1 - \psi_3) < 0{,}01\psi_1$. La valeur recherchée de ψ peut donc être déterminée avec une excellente approximation par la relation :

$$\psi = \left(\frac{3{,}673}{\log R_r}\right)^{0{,}478} \tag{26}$$

Il est intéressant de noter que, pour la conduite hypothétique circulaire partiellement remplie de rugosité relative $\varepsilon / D_{hr} = 8{,}5.10^{-3}$, la relation (12) conduit à :

$$R_r = 5\,\frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu}\left(\frac{\sqrt{\theta - \sin\theta\cos\theta}}{\theta}\right)^{6/5} \tag{27}$$

Le diamètre hydraulique pour cette même conduite est, selon (13) :

$$D_{hr} \approx \frac{4}{5}\left[\frac{Q}{\sqrt{gJ}}\right]^{2/5}\left(\frac{\sqrt{\theta - \sin\theta\cos\theta}}{\theta}\right)^{4/5} \tag{28}$$

Soit :

$$D_r = \frac{4}{5}\left[\frac{Q}{\sqrt{gJ}}\right]^{2/5}\frac{\theta^{1/5}}{(\theta - \sin\theta\cos\theta)^{3/5}} \tag{29}$$

Pour le cas particulier de la conduite hypothétique pleine pour laquelle $\theta = \pi$, les relations (27) et (29) conduisent respectivement à :

$$R_r = \frac{5}{2}\,\frac{\left(gJQ^3\right)^{1/5}}{\nu} \tag{30}$$

$$D_r \approx \frac{1}{2}\left[\frac{Q}{\sqrt{gJ}}\right]^{2/5} \tag{31}$$

ou bien $q_r/\sqrt{J} \approx 4\sqrt{2}$. Ce résultat montre que la conductivité relative de la conduite circulaire pleine hypothétique est constante. Notons également que le rapport des conductivités des conduites hypothétique et réelle est tel que :

$$q_r / q = (D/D_r)^{5/2} = \psi^{5/2} = \sqrt{f/f_r} = 5{,}278\sqrt{f}\,.$$

Lorsque c'est le diamètre D de la conduite qui est recherché ($a = D$), la relation $D = \psi D_r$ devient, en tenant compte de (26) et (29) :

$$D = \frac{4}{5}\left(\frac{3{,}673}{\log R_r}\right)^{0{,}478}\left(\frac{Q}{\sqrt{gJ}}\right)^{2/5}\frac{\theta^{1/5}}{(\theta - \sin\theta\cos\theta)^{3/5}} \tag{32}$$

Le nombre de Reynolds R_r est exprimé par la relation (27).

Dans le cas particulier de la conduite circulaire pleine ($\theta = \pi$), la relation (32) devient:

$$D = \frac{1}{2}\left(\frac{3{,}673}{\log R_r}\right)^{0{,}478}\left(\frac{Q}{\sqrt{gJ}}\right)^{2/5} \tag{33}$$

où R_r se calcule sans difficulté en application de la relation (30). Les formules (32) et (33) permettent respectivement le calcul explicite du diamètre D d'une conduite circulaire partiellement et entièrement occupée par un écoulement en régime pratiquement lisse.

Exemple d'application 2 : Soit à déterminer, sous un gradient de perte de charge $J = 10^{-3}$, le diamètre D d'une conduite lisse pleine $(\theta = \pi)$ véhiculant de l'eau caractérisée par une viscosité cinématique $\nu = 10^{-6}$ m^{2}sec^{-1} et par un débit Q = 300 l/s.

Le nombre de Reynolds R_r est, en application de (30), $R_r \approx 4{,}81.10^5$. Par suite, la dimension linéaire D recherchée est, selon (33), $D = 0{,}632$ m.

4. CONCLUSION

Une approche théorique est présentée au calcul de la dimension linéaire d'un profil liquide quelconque en écoulement uniforme. La fonction de six paramètres qui régit cet écoulement est transformée en un produit de trois fonctions λ, Γ et a_o. La dimension linéaire s'écrit alors $a = \lambda\Gamma a_o$, lorsque l'écoulement est en régime de transition et $a = \psi\Gamma a_o$ lorsque l'écoulement est dans le domaine pratiquement lisse. Il est établi que λ dépend des caractéristiques $\left(R_r, \varepsilon/D_{hr}\right)$ de l'écoulement en régime turbulent rugueux pour lequel la dimension linéaire est connue. La valeur particulière

$\lambda = 1$ indique que l'écoulement est dans le domaine turbulent rugueux, tandis que l'écoulement dans le domaine de transition est caractérisé par $\lambda > 1$.

Lorsque l'écoulement est dans le domaine pratiquement lisse, le calcul est mené sur une conduite hypothétique de rugosité relative $\varepsilon / D_{hr} = 8{,}5.10^{-3}$, caractérisée par une même conductivité que la conduite réelle et véhiculant un écoulement en régime turbulent rugueux. Ceci a permis d'exprimer la fonction ψ en fonction du seul paramètre connu R_r. Enfin, les relations présentées ont été appliquées au cas de la conduite circulaire.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BAZIN, H. (1897). Étude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts, Mémoire N° 41, Annales des ponts et chaussées, Vol. 14, ser. 7, 4ème trimestre, pp. 20-70, Paris.

CHOW, V.T. (1973). Open Channel Hydraulics, McGraw Hill Book Company, New York.

DARCY, H. (1854). Sur des recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Vol. 38, pp. 1109-1121, Paris.

GANGUILLET, E., KUTTER, W.R. (1869). Versuch zur Aufstellung einer neuen allegemeinen Formel für die gleichförmige Bewegung des wassers in canälen und Flüssen, Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur und Architekten Vereines, Vol. 21, N° 1, pp. 6-25; N° 2-3, pp. 46-59, Vienna.

HAGER, W.H. (1987). Die Berechnung turbulenter Rohrströmungen, 3R-International, Vol. 26, Heft 2, pp. 116-121.

HAMA, F.R. (1954). Boundary Layer growth characteristics for smooth and rough surfaces, Transactions, Society of Naval Architects and Marine Engineers, Vol. 62, pp. 333-351.

IWASA, Y. (1957). Boundary layer growth of open channel flows on a smooth bed and its contribution to practical application to channel design, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University, Japan, Vol. XIX, N° III, pp. 229-254.

KEULEGAN, H.G. (1938). Laws of turbulent flow in open channels, Research Paper RP 1151, Journal of Research, U.S. National Bureau of Standards, Vol. 21, pp. 707-741.

MANNING, R. (1891). On the flow of water in open channels and pipes, Transactions, Institution of Civil Engineers of Ireland, Vol. 20, pp. 161-207, Dublin.

MORRIS, H.M. (1955). A new concept of flow in rough conduits, Transactions, American Society of Civil Engineers, Vol. 120, pp. 373-398.

POWELL, R.W. (1950). Resistance to flow in rough channels, Transactions, American Geophysical Union, Vol. 31, N° 4, pp. 575-582.

PRANDTL, L. (1926). Ûber die ausgebildete Turbulenz, Proceedings of the 2d International Congress of Applied Mechanics, Zürich, pp. 62-74.

SCHLICHTING, H. (1955). Bondary Layer Theory, McGraw Hill Book Company, New York, Pergamon Press Ltd., London.

SINNIGER, O.R., HAGER, W.H. (1989). *Écoulements stationnaires*. Constructions hydrauliques, Ed. Presses polytechniques Romandes, Vol. 15, pp. 81-104

STANTON, T.E., PANNEL, J.R. (1914). Similarity of motion in relation to surface friction of fluids, Philosophical Transactions, Royal Society of London, Vol. 214A, pp. 199-224.

STRICKLER, A. (1923). Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauhigkeitszahlen für Ströme, Kanäle und geschlossene Leitungen, Mitteilungen des eidgenössischen Amtes für Wasserwirtschaft, N° 16, Bern.

WEISBACH, J. (1845). Lehrbuch der Ingenieur und Maschinenmechanik, Brunswick, Germany.

PRINCIPALES NOTATIONS

a	(m)	Dimension linéaire.
A	(m^2)	Aire d'une section mouillée.
A_1	(-)	Aire de la section mouillée pour a égal à l'unité ($A_1 = A/a^2$).
D	(m)	Diamètre d'une conduite.
D_h	(m)	Diamètre hydraulique.
f	(-)	Coefficient de frottement.
g	(m.sec^{-2})	Accélération de la pesanteur.
h	(m)	Profondeur d'un écoulement.
J	(-)	Gradient de perte de charge.
P	(m)	Périmètre mouillé.
P_1	(-)	Périmètre mouillé pour a égal à l'unité ($P_1 = P/a$).
Q	(m^3.sec^{-1})	Débit.
q	(-)	Débit relatif ($q = Q/\sqrt{gD^5}$).
R	(-)	Nombre de Reynolds.
V	(m.sec^{-1})	Vitesse moyenne d'un écoulement.
ε	(m)	Rugosité absolue des parois d'un canal.
ξ	(-)	Paramètre de forme d'un segment circulaire ($\xi = h/D$).
ν	(m^2.sec^{-1})	Viscosité cinématique d'un liquide.
λ	(-)	Facteur de correction de la dimension linéaire dans le domaine de transition.
ψ	(-)	Facteur de correction de la dimension linéaire dans le domaine lisse.

L'indice "r" indique le domaine rugueux