

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider - Biskra
Faculté des Sciences et Sciences de L'ingénieur
Département de Génie Civil

N° d'ordre:
Série :

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en génie civil

Option: Structures et Mécanique de Sol

Présenté par

REZAIGUIA Nouha

LA RIGIDITE DANS LES STRUCTURES EN COQUES
DE REVOLUTION

Soutenu le :/.../

Devant le jury :

Président	:	B. MEZGHICHE	M.C.	Université de Biskra
Rapporteur	:	R. CHEBILI	M.C.	Université de Biskra
Examineurs	:	M. MELLAS	M.C.	Université de Biskra
	:	M. L. BELOUNAR	M.C.	Université de Biskra

REMERCIEMENTS

J'exprime mes sincères et profonds remerciements et reconnaissances au Docteur CHEBILI RACHID qui m'a encadré durant ce travail. Je le remercie aussi pour ses conseils et pour m'a voir dirigé et encouragé pendant l'accomplissement de ce travail. Je lui en suis profondément reconnaissante.

Je tiens également à remercier vivement le Docteur B. MEZGHICHE pour l'honneur qu'il m'a fait en tant que président le jury de soutenance, je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance.

Je tiens à remercier profondément aussi les membres de jury :

Le Docteur M. L. BELOUNAR et le Docteur M. MELLAS qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail, je leurs exprime tous mes remerciements.

Que tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ma formation, trouvent ici ma gratitude et mes remerciements.

Enfin mes remerciements vont à l'ensemble du corps enseignant de l'Institut de Génie Civil de l'Université de Biskra.

A

Mes parents

Mes frères et sœurs

RÉSUMÉ

Dans ce travail, on a étudié la rigidité des coques de révolution qui est un élément clés dans la conception des structures en coque de membranes. Pour qu'une structure en coque soit rigide il ne faut pas qu'elle subisse des déformations pures.

L'étude de rigidité dans ce cas est menée par la statique et la cinématique en utilisant les méthodes de membrane et de déformation pure et en faisant sortir les critères de rigidité essentiels pour empêcher la structure d'être un mécanisme. Il est important de dire en fin de ce travail que le comportement des coques est influencé par leurs géométries est leurs conditions aux limites.

Mots clés: Coques, Méthode de Membrane, Déformation Inextensionnelle, Rigidité, Mécanisme.

ABSTRACT

In this work, we studied the rigidity of shells of revolution, which is a key element in the structural design of membrane shell. In order for a shell to be rigid it must be impossible for the shell to deform without changing lengths on the surface.

The problem of rigidity, in this thesis, is studied using statics and kinematics, through the membrane theory and inextensional theory of deformation obtaining the essential criteria of rigidity to prevent the structure from being a mechanism. It is found that the behavior is governed both by the geometry of the shell of revolution and its boundary supports.

Key Word: Shell, Membrane Theory; Inextensional Theory of Deformation, Rigidity, Mechanism.

ملخص

في هذا العمل، قمنا بدراسة صلابة القشريات الدورانية، التي هي عنصر مهم في تصميم هياكل القشريات الغشائية. من أجل أن تكون الهياكل القشرية صلبة لا يجب أن تتعرض لتشوهات خالصة.

دراسة الصلابة في هذه الحالة تتم بطريقتين، سكونية و حركية باستعمال الطريقة الغشائية و طريقة التشوهات الخالصة و ذلك لاستخلاص أهم معايير الصلابة من أجل منع حدوث سلوك اللاإستقرار في الهياكل.

يجدر بنا أن نذكر في نهاية هذا العمل أهمية الشكل الهندسي و الشروط الحديدية في تحديد سلوك القشريات.

الكلمات المفتاحية : القشريات، الطريقة الغشائية، التشوهات الخالصة، الصلابة، اللاإستقرار.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
-----------------------------------	----------

CHAPITRE I

HISTORIQUE SUR LES STRUCTURES EN COQUES

1-1 Définition.....	4
1-2 Domaines d'utilisation.....	5
1-2-1 Architecture et construction.....	6
1-2-2 Energie et chimie industrielle.....	6
1-2-3 Structures d'ingénierie.....	6
1-2-4 Industrie de l'automobile.....	6
1-3 Le développement de la théorie des coques.....	7
1-4 Eléments clés dans la théorie.....	13
1-4-1 Analyse tensorielle.....	13
1-4-2 Géométrie différentielle.....	14
1-5 Conclusion.....	14

CHAPITRE II

NOTATION TENSORIELLE ET GEOMETRIE DE SURFACE

I- NOTATION TENSORIELLE.....	15
	15
1-1 Introduction.....	
1-2 Transformations des coordonnées.....	16
1-3 Vecteurs covariant et contravariant.....	17
1-4 Tenseurs du deuxième ordre.....	18
1-5 Algèbres tensorielles.....	19
1-6 Tenseurs spéciaux.....	20
1-7 Les vecteurs de base.....	22
1-8 Les symboles de CHRISTOFFEL.....	25
1-9 Dérivée covariante.....	26
1-10 Le tenseur de RIEMANN-CHRISTOFFEL.....	28
II- GEOMETRIE DE SURFACE.....	30
2-1 Introduction.....	30
2-2 Description de la surface moyenne.....	30

2-3 La première forme fondamentale.....	33
2-4 La deuxième forme fondamentale.....	36
2-4-1 Une courbe paramétrée sur une surface.....	36
2-5 Courbures et directions principales.....	39
2-5-1 Courbures principales.....	39
2-5-2 Directions principales.....	41
2-6 Classification des surfaces.....	41
2-7 Les Symboles de CHRISTOFFEL.....	44
2-7-1 Équations de CODAZZI et GAUSS.....	46
2-8 Troisième forme fondamentale de la surface.....	48
2-9 Conclusion.....	48

CHAPITRE III

CRITERES DE RIGIDITE

3-1 Introduction.....	50
3-2 Théorie de membrane.....	51
3-2-1 la validité de la théorie de membrane.....	51
3-2-2 Equations d'équilibres.....	53
3-2-3 Équilibre d'une surface élémentaire.....	55
3-3 Déformation inextensionnelle.....	59
3-3-1 Le taux de changement des quantités de la surface.....	59
a- Le taux de changement des vecteurs de base.....	59
b- Le taux de changement du tenseur métrique.....	61
c- Le taux de changement d'un élément de surface.....	62
3-3-2 Le tenseur des taux de déformation de membrane.....	62
3-3-3 Le concept des vitesses angulaire.....	63
3-4 Relation entre déformation inextensionnelle et la théorie de membrane.....	67
3-5 Conclusion.....	71

CHAPITRE IV

APPLICATION SUR LES COQUES DE REVOLUTION

4-1 Introduction.....	72
4-1-1 Définition.....	72
4-1-2 La géométrie.....	73
4-1-3 Les conditions de rigidités.....	77
4-2 Coques sphériques ($K > 0$ surface anticlastique).....	80
4-2-1 La géométrie.....	80
4-2-2 Les conditions de rigidités.....	82
4-2-3 Les conditions aux limites des coques sphériques.....	90
a- Une coque avec un seul bord.....	92
b- Une coque avec deux bords.....	92

4-3 Les coques catenoïd ($K < 0$ surface synclastique).....	96
4-3-1 La géométrie.....	96
4-3-2 Les conditions de rigidité.....	98
4-3-3 Les conditions aux limites du catenoïd.....	105
4-4 Les coques cylindriques ($K=0$ surface développable).....	109
4-4-1 La géométrie.....	109
4-4-2 Les conditions de rigidité.....	111
4-4-3 Les conditions aux limites du cylindre.....	115
4-5 Conclusion.....	117
CONCLUSION GENERALE	118
REFERENCE	120

NOTATION

δ_j^i	le KRONECKER Delta
ξ^i, φ, θ	Paramètres de la surface
$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$	Symbole de CHRISTOFFEL
$\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon^{\alpha\beta}$	Symbole d'anti-symétrie (permutation)
a^α, a_α	Les vecteurs de base contravariants et covariants
a^3, n	La normale de la surface
$v^r \Big _j, v_r \Big _j$	Les dérivées covariantes des composantes contravariantes et covariantes du vecteur v
$\left(v_r \Big _j \right) \Big _i$	La deuxième dérivée covariante du vecteur v_r
R_{pijk}	Tenseur de REIMANN-CHRISTOFFEL.
\vec{R}	Vecteur de position
$()_{,\alpha}$	La différentiation partielle par rapport aux coordonnées de la surface
$a^{\alpha\beta}, a_{\alpha\beta}$	Les composantes contravariantes et covariantes du tenseur métrique de la surface
a	Le déterminant de la première forme fondamentale
$ a^\alpha , a_\alpha $	Les magnitudes des vecteurs de base contravariants et covariants
ds	La longueur élémentaire de la surface
ds^2	L'aire élémentaire de la surface
$b^{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, b_\beta^\alpha$	Les composantes covariantes, contravariantes et mixtes du tenseur de courbure
K, M	Courbure de Gauss et la courbure moyenne de la surface
$N^{\alpha\beta}$	Le tenseur de membrane
p^α, p	Composantes tangentielle et normale des charges extérieures

v	Le vecteur de vitesse
v^α, v_α, v	Les composantes contravariantes, covariantes et normales du vecteur de vitesse
\dot{a}_α, \dot{n}	Le taux de changement du vecteur de base et la normale
$\dot{a}_{\alpha\beta}$	Le taux de changement du tenseur mtrique
\dot{a}	Le taux de changement du dtrminant
$d\dot{s}$	Le taux de changement d'un lment de surface
$Y_{\alpha\beta}$	Le tenseur des taux des dformations des membranes
$G_{\alpha\beta}$	Le tenseur des dformations des membranes
$\bar{\Omega}$	Le vecteur de vitesse angulaire
Ω^α, Ω	Les composantes tangentielles et normales de la vitesse angulaire
$c_{\alpha\beta}$	Tenseur du deuxime ordre
\dot{K}_n	Le taux de chargement de la courbure normale
$\dot{\tau}_n$	Le taux de chargement de la torsion.
$\dot{b}_{\alpha\beta}$	Le taux de changement de la deuxime forme fondamentale
$B^{\alpha\beta}$	Le tenseur de flexion
r	Le rayon
$R_0(\varphi)$	L'quation de la courbe de mridiens
$Z(\varphi)$	La position des parallèles

LA RIGIDITÉ DANS LES STRUCTURES EN COQUES DE REVOLUTION

INTRODUCTION GENERALE

La théorie des coques est l'étude des solides déformables surfaciques. Elle est adaptée à l'étude des solides déformables dont la géométrie est assimilable à une surface avec épaisseur. Cette géométrie va permettre d'établir une théorie simplifiée dans la quelle on dira qu'on connaît suffisamment les déplacements en connaissant seulement ceux de la surface moyenne.

Considérons une coque, c'est un corps élastique de surface courbée conçue pour couvrir des superficies ou pour résister aux grandes charges extérieures. En théorie linéarisée, les déplacements et les déformations des coques sont envisagés sous l'action de ces forces supposées suffisamment petites pour que la coque déformée reste proche de son état naturel. Ce comportement dépend essentiellement de la forme de la coque, c'est-à-dire de la géométrie de la surface, et de son épaisseur. Une théorie asymptotique des coques élastiques minces consiste à étudier le comportement limite lorsque l'épaisseur tend vers zéro.

Le comportement d'une coque est très différent suivant que sa surface moyenne (avec conditions aux limites) est ou non géométriquement rigide. Rappelons que la rigidité géométrique d'une surface, au sens qui convient en théorie des coques, consiste en la non existence des déplacements inextensionnels ou déplacement par flexion pure.

Dans tous les cas, l'équilibre de la coque est régi par deux phénomènes : L'effet de flexion pour le cas d'une surface non rigide (dit des coques à flexion pure non inhibées ou plus simplement des coques en flexion), et l'effet de membrane pour le cas d'une surface rigide ou inhibée, l'équilibre global qui minimise l'énergie potentielle élastique du coque, est piloté par l'effet de membrane, et par conséquent par la rigidité de la surface moyenne, qui est elle-même dépend de la courbure. Ceci fait dire qu'une coque résiste par sa forme.

Cependant, il apparaît souvent des flexions locales, notamment au voisinage des bords ou des variations brusques de géométrie. Au voisinage des charges, l'énergie membranaire est le plus souvent négligeable, et la coque ne résiste plus que par sa rigidité de flexion, ce qui peut donner naissance à des grands déplacements.

Il est donc essentiel pour qui étudie les coques minces, d'avoir une connaissance théorique de la rigidité (géométrique) de la surface moyenne d'une coque mince. C'est l'objet principal de ce mémoire.

Ce présent travail, hormis l'introduction générale, est constitué de 4 chapitres :

Le premier chapitre : contient une étude bibliographique exposant un historique sur le développement de la théorie des coques, domaine d'utilisation et les éléments clés permettant l'étude de la théorie des coques.

Au deuxième chapitre, nous exposons des éléments de la théorie locale des surfaces. Nous y rappelons les définitions de première et seconde formes fondamentales décrivant qualitativement la géométrie de la surface (respectivement les longueurs et les courbures) ; la seconde forme fondamentale définit en particulier, en tout point de la surface, la courbure totale en ce point. Le signe de la courbure totale donne alors la classification usuelle des points d'une surface, cela correspond, en un point d'une surface, à l'existence d'aucune, d'une ou de deux directions asymptotiques distinctes. La notion de direction asymptotique définit alors la notion de ligne asymptotique.

Dans le troisième chapitre, on définit les critères de rigidité des structures en coques, d'après la théorie des membranes qui présente le côté statique et qui nous donne les équations d'équilibres des coques, et la théorie des déformations inextensionnelles, qui présente le côté cinématique qui est caractérisé par la déformation de la surface moyenne, en employant un paramètre nommé la vitesse angulaire, qui définit l'élément déformé.

Et dans le dernier chapitre, application sur la théorie des coques de révolution, en étudiant les trois cas de courbures de Gauss et en tenant compte de la géométrie et des critères de rigidité avec spécification des conditions aux limites pour chaque cas.

Finalement, le travail s'achève par des conclusions et des recommandations suivies d'une bibliographie.

CHAPITRE I

HISTORIQUE SUR LES STRUCTURES EN COQUES

1-1 Définition

Une coque est un domaine tridimensionnel dont la configuration de référence est limitée par deux surfaces dont la distance est petite par rapport à toute autre dimension (longueur caractéristique et rayon de courbure). Certaines coques présentent des propriétés de symétries qui conduisent à des simplifications dans la formulation des différents modèles. C'est notamment le cas des coques de révolution par rapport à l'axe de révolution.

Soit une surface s paramétrée par les deux paramètres (ξ_1, ξ_2) figure(1.1). Une coque d'épaisseur h est l'ensemble des points N tels que :

$$\left\{ N \text{ tel que } ON = OM + \xi^3 n, \xi^3 \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right], \frac{h}{2} < \inf(\|R_1\|, \|R_2\|) \right\}$$

Où : R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux de la surface s en M .

La coque est dite *mince* si $\{ h \ll \inf(\|R_1\|, \|R_2\|) \}$, et on écrit : $\{ h \ll R \}$

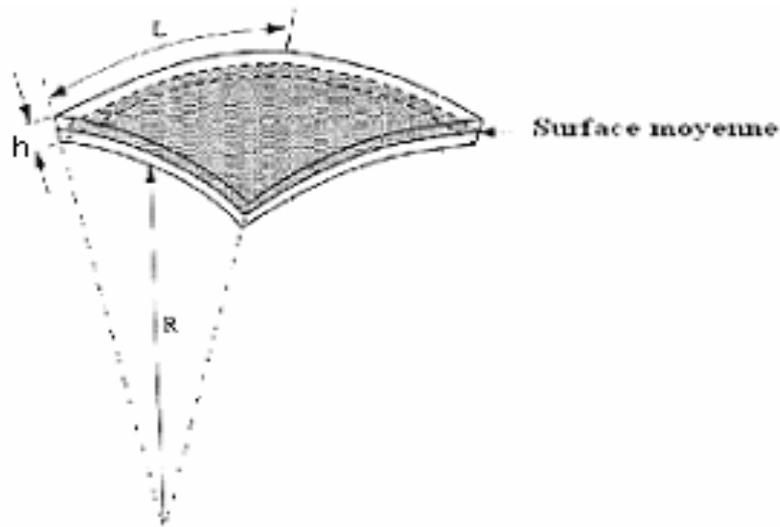


Figure (1.1) Surface moyenne

Chaque fois qu'on considère la coque comme un milieu surfacique, on la confond avec sa surface moyenne S et son point courant est $M(\xi_1, \xi_2)$. La base naturelle est $\{a_\alpha\}$, et lorsqu'on la considère comme un milieu volumique, on lui donne sa troisième dimension et son point courant est $N(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. La base naturelle est celle du système de coordonnées spatial induit $\{e_i\}$.

1-2 Domaine d'utilisation

Les coques minces deviennent des éléments de structures porteuses, pratiquement dans tous équipements industriels modernes. Spécialement dans l'aérospatial, le nucléaire et l'industrie pétrochimique.

Ces applications jouent un rôle stimulateur, pour les chercheurs de la mécanique des solides pour proposer des solutions différentes pour les problèmes liés aux structures en coque et aussi une théorie qui répond d'une manière générale aux différents problèmes posés.

1-2-1 Architecture et construction

Le développement des structures en coque (coupole en maçonnerie, voûte, ...) qui a été appliqué avec succès par HEYMAN en (1977), a permis de construire des ouvrages ayant des grandes portées, et avec l'avènement de béton armé et sa mise en œuvre maîtrisée, a permis aussi de construire des toitures en coques pour des différents ouvrages.

1-2-2 Energie et chimie industrielle

Le développement de l'énergie de vapeur pendant la révolution industrielle dépendait principalement sur la construction des conteneurs d'eaux pour la production de la vapeur. Ces coques minces sont fabriquées à partir des plaques métalliques stablement formées est assemblées par rivets. Puis le principe de soudage a permis une meilleure conception pour ce type de structure.

1-2-3 Structures d'ingénierie

Parmi les problèmes les plus complexes dans le développement des structures en aciers, la conception des structures qui travaillent en compression et résistent au flambement, la performance a permis d'utiliser le principe des tubes à partir des plaques rivetées.

1-2-4 Industrie de l'automobile

La construction des véhicules se basait essentiellement sur la formation d'un squelette capable de supporter les charges puis le couvrir pour obtenir une forme d'aérodynamique.

Le développement des coques a permis d'utiliser la coque elle-même comme étant un élément porteur à partir d'un simple façonnage des plaques assemblées par un système de boulonnage, rivetage ou soudage. Ce principe a donné des structures souples, légères et très résistantes, même très agréable de point de vue de conception.

Pour l'utilisation des coques (plaques courbées) comme éléments porteurs dans la conception des voitures, des avions et d'autres domaines ont permis le développement de l'utilisation des structures en coques.

1-3 Le développement de la théorie des coques

L'optimisation des structures modernes, rendue nécessaire par les exigences des techniques de pointes (structures spatiales, coques des navires...) conduit à un foisonnement d'études concernant les coques minces.

La géométrie des surfaces courbées occupe une partie importante dans la théorie des coques, beaucoup de structures en coques pratiques sont faites dans des formes de surfaces simples telle que : La sphère, le cylindre et le cône, dont la géométrie a été bien comprise pour des siècles.

Par conséquent, il a été discuté par quelques chercheurs, tel que GAUSS (1828) qui a proposé une étude sur des surfaces générales. Il a montré qu'il y avait deux méthodes distinctes mais complémentaires pour présenter les surfaces courbées, que ce soit pour un objet tridimensionnel ou bidimensionnel respectivement, et que les deux différentes méthodes avaient une simple connexion mathématique qui implique ce qu'on appelle la courbure de GAUSS. Cette idée a une grande importance dans la compréhension du comportement du coque.

Le point de vue de GAUSS, est d'assembler précisément les deux surfaces (celle de flexion et de déplacement, et donner en préférence les conditions géométriques qui sont nécessaires si les déformations sont grandes, il a aussi développé en particulier l'usage des coordonnées curvilignes généraux dans la description des surfaces courbées, et c'était le commencement du sujet de *Géométrie Différentielle*. Eventuellement RIEMANN (l'élève de GAUSS) a utilisé cette idée pour étudier l'espace non-Euclidien. *L'analyse tensorielle* qui est essentielle dans la théorie est une progression directe de ce travail.

En (1874) H. HIRON, a exprimé la géométrie d'une surface employant deux idées de paramètres d'après la manière de GAUSS. Il a obtenu une expression de l'énergie potentielle semblable a celle obtenue pour les plaques par KIRCHHOFF, mais ces développements ne sont pas strictement corrects, et ils ont été corrigés en (1888) par LOVE. Dans ce dernier travaille, LOVE a proposé une théorie qui basée sur les mêmes hypothèses de KIRCHHOFF-LOVE, qui sont : La coque est considérée mince, les déplacements sont petits, les contraintes tangentielles sont négligeables et la normale à la surface reste normale après déformation et ne change pas de longueur.

LOVE, aussi a remarqué qu'il est d'avantage d'utiliser la géométrie différentielle et les coordonnées curvilignes dans la description des surfaces générales, et d'employé ces derniers dans la dérivation des équations générales des coques élastiques minces (LOVE, 1927).

Les propriétés mécaniques des coques décrivent sa résistance de déformation en ce qui concerne l'effet de membrane et l'effet de flexion. Les charges qui sont appliquées aux coques, sont portées en général, par une combinaison entre les deux actions. Parmi les difficultés principales dans la théorie des structures en coques, est de trouver une méthode simple qui nous permet d'écrire l'interaction entre ces deux effets.

RAYLEIGH (1881-1894) a discuté que les déformations d'une coque mince sont des déformations inextensionnelles d'une manière prédominante. Il a développé une méthode d'analyse spéciale et simple, qui a pris en considération seulement l'énergie de déformation par flexion.

De l'autre côté, LOVE (1888) a discuté que pour une coque mince, l'effet de membrane est le plus dominant. Cette controverse a été résolue par LAMB et BASSET (1890), qui ont résolu les équations de LOVE dans le cas simple d'une coque cylindrique, et ils ont démontré qu'il y a une couche limite relativement étroite dont il y avait une transition spatiale rapide entre l'effet de flexion et de membrane avec la largeur de la couche limite qui est déterminée par l'interaction entre ces effets.

D'autre façon, nous exprimerons que les déformations de cisaillement ne sont pas importantes d'après l'hypothèse de KIRCHHOFF. Cette hypothèse connue aussi comme hypothèse du KIRCHHOFF-LOVE, parce que LOVE (1888) était le premier qui applique cette théorie aux coques courbées. Cette hypothèse nous permettra de décrire l'état de déformation dans l'élément et tous ceux qui concernent les déformations et les changements de courbure dans la surface moyenne de l'élément.

Nous devons considérer ce qui se passe, si nous éliminons l'effet du moment de torsion, certainement, nous avons besoin de deux conditions aux limites à chaque bord, mais on peut appliquer un moment de torsion, et on a besoin d'une troisième condition apparemment. Ce genre de problème a été résolu pour les plaques plates en (1850) par KIRCHHOFF et en (1890) par LAMB et BASSET pour les coques. Pour les plaques, l'hypothèse de KIRCHHOFF a été destinée pour réduire la plaque à une surface à deux dimensions et d'établir les équations aux dérivées partielles en terme de déplacement transversal. C'est une équation de quatrième ordre, et demande en général deux conditions aux limites.

Le point essentiel ici est que les équations sont obtenues de 3 sources, notamment: Equilibre des forces; compatibilité géométrique des déplacements et des déformations; et les propriétés mécaniques des matériaux. Dans la théorie classique d'élasticité, une procédure commune a été utilisée : C'est la loi de HOOKE, pour substituer les équations d'équilibre dans les relations de compatibilité et vice versa, pour obtenir une seule équation. En effet, TRUSDELL (1945) a discuté qu'il est d'avantage d'obtenir les équations des coques minces par un processus de réduction des équations générales de la théorie élastique des solides tridimensionnelles.

DONNELL en (1933) a étudié les déformations des coques cylindriques sous des charges de torsion. Ces équations sont connues comme les équations des coques peu profondes ou les équations de Donnell ou parfois les équations de DONNELL-MUSHTARI-VLASOV. Leur dérivation a été donnée par plusieurs auteurs tel que : FLÜGGE (1973), REISSNER (1946), VLASOV (1964) et NOVOZHILOV (1964).

Plusieurs investigateurs comme MORLEY (1959) et SIMMINDS (1966) ont étudié l'origine des caractéristiques des équations de DONNELL et plusieurs d'autres de même sorte, mais ils ont basé sur moins de simplification pour estimer l'exactitude des équations de DONNELL.

SCHWERIN et DONNELL ont appliqué la théorie classique des déformations élastique aux coques cylindriques entre 1911 et 1933.

Un pas très important dans l'analyse des déformations des coques cylindriques minces sous charges axiales, a été pris par VON KARMAN et TSIEN (1941). Ils ont fait quelques travaux compliqués sur l'analyse non linéaire des équations des coques cylindriques, qui avaient été proposé plutôt par DONNELL. En vu la complexité évidente des équations, ils ont discuté que le meilleur calcul était le calcul énergétique.

W. T. KOITER (1945) a constaté qu'il est possible de développer une nouvelle théorie générale sur l'équilibre élastique quasi-statique. Il a concentré leurs attentions aux bords des points essentiels qu'ils sont été indiqués par la théorie classique des déformations. Il a conçu cette idée d'un espace multidimensionnel avec des axes de charges et chaque cas a un mode de déformation possible. Et il a montré comment nous pouvons obtenir l'équilibre de cet espace, en prenant les premiers et les deuxièmes dérivés de la fonction d'énergie potentielle totale.

Dans les relations des déformations des coques cylindriques sous charges axiales de compression. KOITER a découvert qu'il y a plusieurs différentes méthodes, et suivant la théorie classique, il est arrivé au même charge critique qui peut être réagir dans l'analyse non linéaire pour atteindre l'équilibre, c'est aussi le travail de VON KARMAN et TSEIN (1941)

DONNELL et WAN (1950) ont fait une modification dans le calcul énergétique dont qu'ils ont introduit une petite imperfection géométrique initiale. Ils ont montré que ce défaut produit un effet maximum sur la charge axiale, et qui raccourcit la courbure qui est considérablement inférieure que la charge appliquée.

Le succès de l'approche des petites déformations a conduit aux développements de la théorie classique des déformations élastiques pour un grand nombre de structures élastiques. Plusieurs méthodes approximatives de l'énergie ont été développées à propos la théorie classique, pour traiter plusieurs problèmes. Un bon compte de cette théorie est donné par TIMOSHENKO et GERE (1961). LORENZ, SOUTHWELL, VON MISES, FLÜGGE, SCHWERIN et DONNELL.

On trouve aussi l'analyse de HOFF (1965), sur l'influence des conditions aux limites sur les déformations des coques cylindriques sous charge axiale. HOFF a expliqué les anomalies des petites déformations des coques cylindriques axialement comprimées.

KOITER a présenté en (1963), une deuxième analyse sur les déformations des coques cylindriques minces sous charge axiale, dans qu'il a supposé une imperfection initiale finie sous forme d'une méthode classique de déformations axisymétriques.

Une contribution importante a été faite par HUTCHINSON (1965). Il a confirmé le problème de KOITER de (1963), mais avec deux modes d'imperfection initiale. Il a résolu approximativement les équations non-linéaires dont on peut comprendre les deux méthodes. En particulier, il a appliqué cette méthode sur les déformations des coques cylindriques sous une combinaison de charge axiale et pression intérieure. Hutchinson a trouvé que l'addition d'une pression intérieure n'élimine pas le comportement des imperfections sensibles des coques.

Beaucoup de recherches expérimentales et théoriques ont été faites sur le sujet des déformations non-linéaire en les 15 dernières années. Nous devons néanmoins mentionner le travail simple de THOMPSON (1962) sur les déformations des coques sphériques sous pression externe; le travail d'ARBOCZ (1974) sur la corrélation des imperfections géométriques initiales mesurées avec la charge ultime des coques cylindriques.

Historiquement, la première discussion de déformations des imperfections sensibles a été donnée par AYRTON et PERRE (1886) dans le contexte des déformations plastiques d'un arc courbé initialement uniforme.

Tous les travaux précédents sont basés sur des théories tridimensionnelles, ces théories mènent à plusieurs difficultés. La plus part de ces difficultés viennent du comportement physique caractérisé dans les équations constitutives de la coque. Pour cette raison un développement d'une théorie bidimensionnelle est réalisé par plusieurs paramètres :

Dans le cas des déformations symétrique, JOHNSON et REISSNER (1958) et REISS (1960) ont proposé l'analyse des coques cylindriques circulaires et en (1962), GREEN a présenté une procédure d'expansion en terme d'un paramètre caractéristique, mais dans le cas des déformations non symétriques, plus qu'un type d'expansion est possible. Dans la même année, et en basant sur les travaux précédents, Green a essayé une approximation pour le cas général de la théorie des coques non limitée à un système de coordonnées spécial.

La méthode de dérivation variationnelle et une autre méthode dans laquelle les équations des états tridimensionnels des contraintes sont réduites à un système d'équations bidimensionnel. Cette méthode comme il a appelé aussi méthode d'énergie. Elle se base sur deux principes : le principe de l'énergie potentielle minimum, et le principe d'énergie minimum complémentaire.

Pour cette raison. KOITER (1961), a employé cette méthode dans l'obtention des équations et des conditions aux limites, avec une simplification des équations de la théorie des coques linéaire. Il a obtenu neuf cas d'états de contraintes.

En parallèle avec les travaux précédents dans le but de formuler une théorie des coques bidimensionnelle, et en (1893), DUHEM a proposé, pour la première fois, un modèle directe bidimensionnel pour les coques, ce modèle qui est une modélisation mathématique d'un problème physique a été développée en (1909) par les frères E. F. COSSERAT. Le principe de base de cette méthode doit considérer une surface incorporée dans un espace tridimensionnel, Euclidien, dans chaque point un ou plusieurs vecteurs appelés les directeurs déformables, qui sont attachés, et considérés invariables dans la longueur sous le mouvement du corps rigide.

ERICKSEN et TRUESDELL (1958) ont développé une théorie générale et exacte pour mesurer les déformations dans les coques, et aussi ont obtenu des équations d'équilibre des contraintes exactes. En (1960) ces mesures étaient produit dans le monographe de TRUESDELL et TOUPIN.

Finalement, plusieurs travaux sont venus plus tard pour la spécialisation de la théorie des coques, parmi ceux-ci, nous citons le travail de BALABON, GREEN et NAGHDI (1967) concernant la théorie non linéaire. La notion des directeurs est complètement omise et les variables cinématiques de base sont le vecteur de position et sa première et deuxième dérivée.

1-4 Eléments clés dans la théorie

Dans la littérature des structures en coques, des facteurs principaux sont d'habitude trouvée pour être cruciaux pour la simplification des équations différentielle. Ceux-ci sont respectivement : *Analyse tensorielle* et *la géométrie différentielle*.

1-4-1 Analyse tensorielle

Le calcul vectoriel classique est une technique simple et efficace qui s'adapte parfaitement à l'étude des propriétés mécaniques et physiques de la matière dans l'espace euclidien à trois dimensions. Cependant, dans de nombreux domaines de la physique, il apparaît des grandeurs expérimentales qui ne peuvent plus être représentées par de simples vecteurs de la géométrie élémentaires. C'est le cas, par exemple, en mécanique des milieux continus.

Ainsi, dès la fin du XIX^e siècle, l'analyse des forces qui s'exercent à l'intérieure d'un milieu continu a conduit à mettre en évidence des grandeurs physiques caractérisées par neuf nombres, représentant les forces de pression ou de tension internes. La représentation de ces grandeurs nécessita l'introduction d'un nouvel être mathématique qui fut appelé tenseur, par référence à son origine physique. Par la suite, à partir de 1900, ce furent G. RICCI et T. LEVI-CIVITA qui développèrent le calcul tensoriel, puis l'étude des tenseurs permit un approfondissement de la théorie des espaces vectoriels et contribua au développement de la géométrie différentielle.

Les définitions qu'on va donner sont intrinsèques, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas du système de coordonnées utilisé : ce sont les résultats d'opération tensorielle. Les expressions des composantes sur la base naturelle de ces opérations sont les mêmes dans tous les systèmes de coordonnées. On peut donc trouver facilement leurs expressions dans n'importe quel système de coordonnées. Pour retrouver les formules qu'on trouve dans les formulaires classiques, il faut donc faire des changements de base, de la base naturelle à la base naturelle normée.

1-4-2 Géométrie différentielle

Le nom de la structure en coque a été donné aux quelques surfaces ayant une caractéristique particulière. Cette particularité a représenté par la géométrie différentielle de la surface. Les plaques sont des coques de type particulier parce qu'ils ont des surfaces plates.

Le choix d'un type particulier de courbure va avec la nécessité, pour résister à un type particulier de charge extérieur, à cet effet le scalaire connu comme la courbure de Gauss de la surface, joue un rôle important dans la structure, son caractère dirige le comportement de structure.

CALLADINE a déclaré en (1983) que dans la théorie des coques, les équations ne sont jamais rendues hyperboliques par les propriétés matérielles seules, mais peut être rendues hyperboliques aussi dans quelques cas des propriétés géométriques de la coque.

Dans ce sens on peut dire que le problème des coques est dominé par la géométrie des coques.

1-5 Conclusion

Le développement de la théorie des coques exige aux chercheurs d'introduire des éléments clés tel que l'analyse tensorielle qui nous facilite l'écriture des équations différentielle dans n'importe quel système de coordonnées, et la géométrie différentielle qui nous donne une étude très vaste sur les différentes caractéristiques des coques.

CHAPITRE II

NOTATION TENSORIELLE

ET

GEOMETRIE DE SURFACE

I- Notation tensorielle

1-1 Introduction

La notation tensorielle est employée dans tout ce travail, étant donné que l'analyse des structures en coques est non seulement un problème d'analyse mais également un problème de géométrie. Les applications de l'analyse tensorielle à la géométrie des surfaces sont nombreuses, car nous permettons de trouver des expressions de géométrie sous une forme simple et générale.

Des quantités comme la température ou le potentiel électrique sont représentées par des scalaires, qui ne seront pas affectées pendant le processus des transformations des coordonnées. Tandis que les forces et des déplacements sont représentées par des vecteurs. Les scalaires et les vecteurs constituent des tenseurs d'ordre zéro et un respectivement. Les contraintes et les déformations sont représentées par les tenseurs du second ordre.

1-2 Transformations des coordonnées

Le processus de la transformation des coordonnées est une opération aussi importante, en faisant face à des problèmes particuliers au sujet de la géométrie de la théorie des coques. Le présent travail est basé sur les introductions de l'analyse tensorielle donnée par, EISENHART (1947), GREEN et ZERNA (1968), NIORDSON (1985) et CHUNG (1988)

Si nous définissons des points dans l'espace tridimensionnel par un système de coordonnée curviligne générale ξ^i (où l'indice latin supérieur i prend les valeurs 1, 2 et 3), la transformation de ce système des coordonnées à un nouveau système, appelé système des coordonnées cartésiennes x^i , devraient obéir certaines règles de transformation.

Si p^i sont trois fonctions indépendantes, continues et dérivables par rapport ξ^i , le système d'équations (1-1) définit le nouveau système des coordonnées cartésiennes.

$$x^i = p^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad (1-1)$$

Les fonctions p^i sont indépendantes si et seulement si le déterminant est nul.

$$\det\left(\frac{\partial p^i}{\partial \xi^j}\right) = |p^i_{,j}| \neq 0 \quad (1-2)$$

Si nous supposons que la transformation est réversible, alors la solution de (1-1) pour ξ^i nous donne

$$\xi^i = q^i(x^1, x^2, x^3) \quad (1-3)$$

Les fonctions q^i sont également indépendantes, continues et dérivable par rapport à x^i .

dérivant (1-1), on obtient

$$dx^i = \sum_{j=1}^3 p_{,j}^i d\xi^j = p_{,j}^i d\xi^j \quad (1-4)$$

Dans (1-4), le processus de répétition de l'indice j s'appelle la convention de sommation d'Einstein. Si un indice est répété dans le même terme, la sommation est appliquée sur la gamme de cet indice. Cet indice qui peut être noté indifféremment, sans changer les résultats de l'équation, s'appelle un indice muet, l'autre est un indice libre.

1-3 Vecteurs covariant et contravariant

Si nous supposons que F est une fonction scalaire continue et dérivable dans le système de coordonnées curvilignes générales ξ^i , alors la même fonction est représentée par une autre fonction F^* dans le système des coordonnées cartésiennes x^i , nous écrivons

$$F^*(x^i) = F(\xi^i) \quad (1-5)$$

De (1-3), (1-5) devient

$$F^*(x^i) = F(q^i(x^1, x^2, x^3)) \quad (1-6)$$

Dérivant (1-6) par rapport à x^i nous obtenons

$$F_{,i}^* = F_{,j} q_{,i}^j \quad (1-7)$$

En général, on écrit

$$\begin{cases} A_{,i}^* = A_{,j} q_{,i}^j \\ A^{*i} = A^j q_{,j}^i \end{cases} \quad (1-8)$$

L'équation (1-8) montre comment le gradient $A_{,j}$ est transformé quand le système de coordonnées est changé de ξ^i en x^i , ce type de transformation de coordonnées s'appelle une transformation covariante. Et de même pour A^j , ce type de transformation s'appelle une transformation contravariante.

1-4 Tenseurs du deuxième ordre

Maintenant, pour généraliser le concept des transformations des coordonnées pour les vecteurs (tenseur d'ordre 1) aux tenseurs du deuxième ordre, nous écrivons respectivement la transformation contravariante, covariante et mixte du tenseur du deuxième ordre comme suit

$$\begin{cases} H^{*ij} = p_{,k}^i p_{,l}^j H^{kl} \\ H_{ij}^* = p_{,i}^k p_{,j}^l H_{kl} \\ H_{.j}^{*i} = p_{,k}^i p_{,j}^l H_{.l}^k \end{cases} \quad (1-9)$$

Les mêmes règles de base peuvent être prolongées aux tenseurs d'ordre arbitraire de la façon suivante

$$H_{.ijm...}^{*rsp...} = p_{,u}^r p_{,v}^s p_{,k}^p \dots q_{,i}^k q_{,j}^l q_{,m}^t H_{.kl...}^{nvk...} \quad (1-10)$$

Nous ajoutons un autre type de tenseur mixte du deuxième ordre appelé le Kronecker delta δ_j^i , qui est défini dans les coordonnées cartésiennes par les formules suivantes.

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{when } i = j \\ 0 & \text{when } i \neq j \end{cases} \quad (1-11)$$

Si nous appliquons la troisième équation de (1-9) au Kronecker delta nous obtenons

$$\delta_j^{*i} = p_{,k}^i p_{,j}^l \delta_l^k = p_{,k}^i p_{,j}^k = \delta_j^i \quad (1-12)$$

L'équation (1-12), montre que le Kronecker delta δ_j^i est un tenseur mixte du deuxième ordre. Dans la notation tensorielle, δ_j^i joue le rôle d'un opérateur substitutionnel et a également la caractéristique d'être constants dans tous les systèmes de coordonnées, nous écrivons également dans les coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} \delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_j^i = \delta_i^j = 0 & (i \neq j) \\ \delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_j^i = \delta_i^j = 1 & (i = j, j \text{ n'est pas sommé}) \end{cases} \quad (1-13)$$

1-5 Algèbres tensorielles

D'abord, commençant par les opérations de base de l'algèbre sur des tenseurs. Parmi ces opérations, nous notons que l'addition et la soustraction des tenseurs, qui appliquent seulement aux tenseurs du même ordre et type, mènent aux tenseurs du même ordre et de même type. Ainsi, ces opérations sont équivalentes à ceux utilisées dans l'algèbre des nombres réels. Le produit externe de deux tenseurs au même point est un tenseur avec un ordre égal à la somme des ordres des deux tenseurs.

$$\begin{aligned} C^i &= A^i \pm B^i \\ C^{ij} &= A^{ij} \pm B^{ij} \\ C_{.k}^{ij} &= A^{ij} \cdot B_k \end{aligned}$$

Aux opérations ci-dessus, nous ajoutons une autre opération appelée la contraction du tenseur. Selon un théorème donné en NIORDSON (1985), n'importe quel tenseur contracté est un tenseur d'ordres deux moins (un contravariant et l'autre covariant). Si nous avons le tenseur T_j^{ik} d'ordre trois et nous substituons j par i , alors nous écrivons T_i^{ik} . De la notation tensorielle, nous savons que l'indice répété doit être additionné et par conséquent, ayant pour résultat un tenseur contravariant d'ordre un.

1-6 Tenseurs spéciaux

On appelle ds la distance entre deux points adjacents P et Q dans un système des coordonnées cartésiennes orthogonal x^i , x^i et $x^i + dx^i$ sont leurs coordonnées respectivement, on a

$$ds^2 = dx^k \cdot dx^k = p_{,i}^k p_{,j}^k d\xi^i d\xi^j \quad (1-14)$$

Posant

$$g_{ij} = p_{,i}^k p_{,j}^k \quad (1-15)$$

On obtient

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad (1-16)$$

Où g_{ij} comporte neuf fonctions de (ξ^1, ξ^2, ξ^3) . La forme différentielle quadratique dans le deuxième membre de (1-16) s'appelle la métrique Riemannienne, et l'espace, qui est caractérisé par une telle métrique, est l'espace Riemannien. L'équation (1-15) montre que g_{ij} est symétrique, donc

$$g_{ij} = g_{ji} \quad (1-17)$$

Ainsi, la comparaison entre (1-15) et (1-12) suggère que dans les coordonnées cartésiennes. $g_{ij} = \delta_j^i$

La raison pour laquelle le tenseur g_{ij} s'appelle le tenseur métrique fondamental de l'espace, est son importance dans l'identification de l'espace et de son caractère métrique comme on peut avoir dans (1-16)

Le déterminant g de g_{ij} est toujours positif

$$g = \det(g_{ij}) > 0$$

Pour des coordonnées cartésiennes, utilisant (1-15) on obtient

$$\begin{aligned} g &= |g_{ij}| = [\det(p_{.j}^i)]^2 \\ \frac{1}{g} &= |g^{ij}| = [\det(q_{.j}^i)]^2 \end{aligned} \quad (1-18)$$

L'inverse de g_{ij} c.-à-d. le tenseur contravariant du second ordre g^{ij} est également symétrique et donné par

$$g^{ij} = \frac{D^{ij}}{g} \quad (1-19)$$

Où D^{ij} est le cofacteur g_{ij} , est obtenu en éliminant le $i^{\text{ème}}$ ligne et le $j^{\text{ème}}$ colonne de g_{ij} et multipliant le résultat par $(-1)^{i+j}$

De (1-19) on a

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (1-20)$$

Les trois tenseurs fondamentaux sont le covariant, contravariant et les tenseurs mixtes du second ordre, ils sont tous symétriques. En employant les règles de transformation des tenseurs, nous écrivons dans les coordonnées curvilignes générales les composants de ces tenseurs comme suit :

$$\begin{cases} g_{ij} = p_{,i}^i p_{,j}^i = p_{,i}^i p_{,j}^i \delta_{it} \\ g^{ij} = q_{,i}^i q_{,j}^i = q_{,i}^i q_{,j}^i \delta^{it} \\ g_j^i = q_{,i}^i p_{,j}^i = q_{,i}^i p_{,j}^i \delta_i^t = \delta_j^i \end{cases} \quad (1-21)$$

Pour des coordonnées orthogonales, nous écrivons les résultats spéciaux

$$g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad \text{for } (i \neq j)$$

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}} \quad , \quad g^{22} = \frac{1}{g_{22}} \quad , \quad g^{33} = \frac{1}{g_{33}} \quad (1-22)$$

$$g = g_{11} g_{22} g_{33}$$

1-7 Les vecteurs de base

Considérant l'espace x^i dans lequel les coordonnées de deux points adjacents C et P sont données respectivement par x^i et $x^i + dx^i$, figue (2-1). R est une fonction dérivable exprimant le vecteur de position $de C$ à x^i . Dans ce cas nous avons.

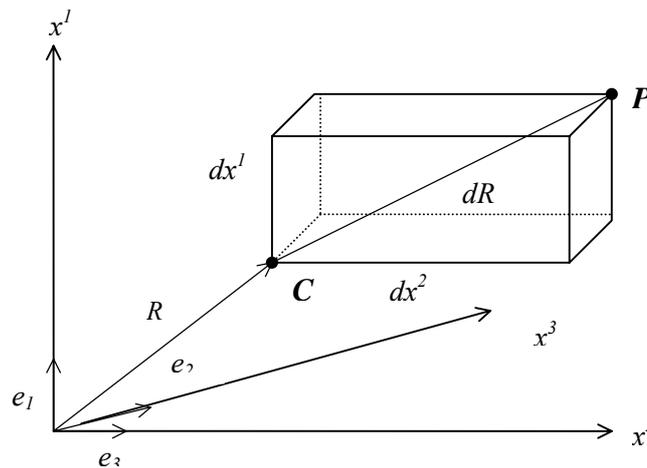


Figure (2.1) Le vecteur de position

$$R(x^1, x^2, x^3) = x^i \cdot e_i \quad (1-23)$$

Où $e_i = e^i$ sont les vecteurs constants d'unité.

On suppose que dR est le vecteur \overline{CP} alors, en utilisant (1-23)

$$dR = \frac{\partial R}{\partial x^i} dx^i = e_i \cdot dx^i \quad (1-24)$$

De (1-1) le vecteur de position se transforme en coordonnées curvilignes générales et devient

$$R = R(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad (1-25)$$

Ainsi, selon (1-4)

$$dR = \frac{\partial R}{\partial \xi^i} d\xi^i = \frac{\partial R}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^r} d\xi^r$$

Ainsi, avec l'utilisation de (1-24)

$$dR = g_r d\xi^r = g^r d\xi_r \quad (1-26)$$

Où :

$$\begin{cases} g_r = \frac{\partial R}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^r} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^r} i_i \\ g^r = \frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} i^i \end{cases} \quad (1-27)$$

g_r et g^r s'appellent respectivement les vecteurs de bases covariant et contravariant de l'espace ξ^i . Les vecteurs de base ne sont pas des vecteurs d'unité puisqu'ils sont multipliés

par les facteurs $\frac{\partial x^i}{\partial \xi^r}$ et $\frac{\partial \xi^r}{\partial x^i}$ qui représentent les matrices de transformation p^r_i et q^i_r .

Ils représentent le taux de changement du vecteur de position.

La comparaison entre (1-27) et (1-16) prouve que les vecteurs de base covariant et contravariant sont reliés avec les tenseurs g_{ij} , g^{ij} and g^i_j par les relations linéaires

$$\begin{cases} g_r g_s = g_{rs} \\ g^r g^s = g^{rs} \\ g^r g_s = g_s^r = \delta_s^r \end{cases} \quad (1-28)$$

Les magnitudes des vecteurs de base covariant et contravariant sont données par

$$\begin{cases} |g_i| = \sqrt{(g_i \cdot g_i)} = \sqrt{(g_{ii})} \\ |g^i| = \sqrt{(g^i \cdot g^i)} = \sqrt{(g^{ii})} \end{cases} \quad (i \text{ n'est pas sommé}) \quad (1-29)$$

De (1-16), l'élément linéaire ds est

$$ds^2 = dR \cdot dR = g_{rs} d\xi^r d\xi^s \quad (1-30)$$

En outre les éléments linéaires le long des coordonnées curvilignes sont

$$ds_i = g_i d\xi^i \quad (i \text{ n'est pas sommé}) \quad (1-31)$$

Et les magnitudes de l'élément linéaire

$$ds_i = \sqrt{(g_{ii})} d\xi^i \quad (1-32)$$

Les produits vectoriels des vecteurs de base covariant et contravariant peuvent être obtenus en utilisant (1-27)

$$\begin{cases} [\mathbf{g}_r \mathbf{g}_s \mathbf{g}_t] = [\mathbf{g}_s \mathbf{g}_t \mathbf{g}_r] = [\mathbf{g}_t \mathbf{g}_r \mathbf{g}_s] = \varepsilon_{rst} \\ [\mathbf{g}^r \mathbf{g}^s \mathbf{g}^t] = [\mathbf{g}^s \mathbf{g}^t \mathbf{g}^r] = [\mathbf{g}^t \mathbf{g}^r \mathbf{g}^s] = \varepsilon^{rst} \end{cases} \quad (1-33)$$

Où ε_{rst} , ε^{rst} sont les tenseurs antisymétriques.

En général nous écrivons pour l'élément de la surface ds_i

$$ds_i = \sqrt{(g^{ii})} d\xi^j d\xi^k \quad (i \text{ n'est pas sommé } i \neq j \neq k) \quad (1-34)$$

1-8 Les symboles de CHRISTOFFEL

Considérant la dérivée de l'équation (1-25)

$$\mathbf{g}_{s,r} = \mathbf{g}_{r,s} = \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^r \partial \xi^s} = R_{,rs} = R_{,sr} \quad (1-35)$$

Et dérivant la transformation inverse de (1-27) nous écrivons

$$\mathbf{e}_s = \mathbf{e}^s = \frac{\partial x^s}{\partial \xi^j} \mathbf{g}^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial x^s} \mathbf{g}_j \quad (1-36)$$

Prenant également les dérivés de (1-26), nous obtenons

$$\mathbf{g}_{r,s} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^r \partial \xi^s} \mathbf{e}_i \quad (1-37)$$

Remplaçant la valeur des vecteurs d'unité constante dans l'expression ci-dessus, on obtient

$$\mathbf{g}_{r,s} = \Gamma_{rsj} \mathbf{g}^j = \Gamma_{rs}^i \mathbf{g}_i \quad (1-38)$$

Où :

$$\Gamma_{rsj} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^r \partial \xi^s} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \quad , \quad \Gamma_{rs}^i = g^{ij} \Gamma_{rsj} \quad (1-39)$$

Ces nouveaux symboles s'appellent les symboles de CHRISTOFFEL du premier et deuxième type respectivement.

Les symboles de CHRISTOFFEL du premier type sont également obtenus à partir des dérivées des tenseurs métriques alors, avec une simple manipulation mathématique on obtient pour le premier et le deuxième type respectivement

$$\Gamma_{jrs} = \frac{1}{2} [g_{rs,j} + g_{js,r} - g_{rj,s}] \quad (1-40)$$

$$\Gamma_{jr}^i = g^{is} \Gamma_{jrs} = \frac{1}{2} g^{is} [g_{rs,j} + g_{js,r} - g_{rj,s}]$$

Dans les coordonnées cartésiennes où les lignes sont droites et les surfaces plates, $g_{ij} = \delta_j^i$ sont des constantes et les symboles de CHRISTOFFEL disparaissent identiquement. Mais en général dans les coordonnées curvilignes ils ne disparaissent pas. Notant que les symboles de CHRISTOFFEL ne sont pas des tenseurs.

On donne

$$\Gamma_{ir}^i = \frac{1}{2} g^{is} g_{is,r} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial g_{is}} \frac{\partial g_{is}}{\partial \xi^r} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \xi^r} \quad (1-41)$$

1-9 Dérivée covariante

Les relations précédentes ont été appliquées aux scalaires, vecteurs et tenseurs spécifiquement à un et au même point d'un espace bien défini. Dans la géométrie différentielle, LASS (1950), le BICKLEY (1962) et le WREDE (1963), ont rapporté que les

processus de la dérivée et la dérivée partielle ne conservent pas le caractère tensoriel du champ. Par exemple, nous devons mentionner que la dérivée d'un vecteur covariant c'est à dire tenseur du premier ordre, n'est pas un tenseur. Donc la dérivée covariante permet de préserver le caractère tensoriel.

Si v est un vecteur, alors selon (1-7)

$$v_{,i}^* = v_{,j} q_i^j \quad (1-42)$$

En utilisant (1-38) et (1-39), nous écrivons

$$v_{,j} = v^r |_{,j} g_r = v_r |_{,j} g^r \quad (1-43)$$

Où les nouvelles expressions sont égales à

$$\begin{cases} v^r |_{,j} = v_{,j}^r + \Gamma_{ij}^r v^i \\ v_r |_{,j} = v_{r,j} - \Gamma_{rj}^i v_i \end{cases} \quad (1-44)$$

$v^r |_{,j}$ et $v_r |_{,j}$ sont les dérivées covariantes des composantes contravariantes et covariantes du vecteur v .

Les dérivées de ces composantes forment un tenseur d'ordre deux. Dans une manière semblable, nous pouvons écrire les dérivées covariantes d'un tenseur d'ordre deux

$$\begin{cases} A_{ij} |_{,k} = A_{ij,k} - \Gamma_{ik}^s A_{sj} - \Gamma_{jk}^s A_{is} \\ A^i_{,j} |_{,k} = A^i_{,j,k} + \Gamma_{ks}^i A^s_{,j} - \Gamma_{jk}^s A^i_{,s} \\ A^{ij} |_{,k} = A^{ij,k} + \Gamma_{ks}^i A^{sj} + \Gamma_{ks}^j A^{is} \end{cases} \quad (1-45)$$

Les dérivées covariantes peuvent être généralisées aux tenseurs d'un ordre plus supérieur, ainsi

$$A_{q..r}^{j..k} \Big|_p = A_{q..r,p}^{j..k} + \Gamma_{ip}^j A_{q..r}^{j..k} + \dots + \Gamma_{ip}^k A_{q..r}^{j..i} - \Gamma_{qp}^i A_{i..r}^{j..k} - \dots - \Gamma_{rp}^i A_{q..i}^{j..k} \quad (1-46)$$

1-10 Le tenseur de RIEMANN -CHRISTOFFEL

Il est montré maintenant qu'on peut trouver la dérivée covariante de n'importe quel tenseur et de n'importe quel ordre puisque la règle générale est établie dans l'équation (1-46). Les équations (1-44) prouvent que le résultat d'une dérivée covariante est un terme contenant la dérivée partielle plus le changement du vecteur de base comme il est donné par le symbole de CHRISTOFFEL. Par conséquent, si on veut calculer la dérivée covariante du vecteur covariant v_r

$$\begin{aligned} \left(v_r \Big|_j \right) \Big|_i &= v_r \Big|_{ji} = \left(v_{r,j} - \Gamma_{rj}^s v_s \right) \Big|_i \\ &= \left(v_{r,j} - \Gamma_{rj}^s v_s \right)_{,i} - \Gamma_{ri}^k \left(v_{j,k} - \Gamma_{jk}^s v_s \right) - \Gamma_{ji}^k \left(v_{k,r} - \Gamma_{kr}^s v_s \right) \\ &= v_{rji} - \Gamma_{rj,i}^s v_s - \Gamma_{rj}^s v_{s,i} - \Gamma_{ri}^k v_{j,k} + \Gamma_{ri}^k \Gamma_{jk}^s v_s - \Gamma_{ji}^k v_{k,r} + \Gamma_{ji}^k \Gamma_{kr}^s v_s \end{aligned}$$

$\left(v_r \Big|_j \right) \Big|_i$ s'appelle alors, la deuxième dérivée covariante du vecteur covariant v_r . Si maintenant, nous considérons la différence de deux vecteurs covariants avec une permutation des indices, et après un certain calcul, nous trouvons

$$v_i \Big|_{jk} - v_i \Big|_{kj} = \left[\Gamma_{ki}^n \Gamma_{nj}^m - \Gamma_{kj}^n \Gamma_{ni}^m + \Gamma_{ki,j}^m - \Gamma_{kj,i}^m \right] v_m \quad (1-47)$$

Puisque v_r est arbitraire, l'expression entre parenthèses est un tenseur, donc on a

$$v_i \Big|_{jk} - v_i \Big|_{kj} = R_{ijk}^m v_m \quad (1-48)$$

La nouvelle expression R^m_{ijk} s'appelle le tenseur de RIEMANN- CHRISTOFFEL, elle est d'ordre quatre. L'équation (1-47) prouve que ce tenseur comprend les composantes du tenseur métrique et de leurs dérivées jusqu'au deuxième ordre. Par conséquent le tenseur de RIEMANN- CHRISTOFFEL disparaît identiquement dans un système des coordonnées cartésiennes. En abaissant l'indice m, nous écrivons

$$R_{pijk} = g_{mp} R^m_{ijk} \quad (1-49)$$

Le tenseur de RIEMANN- CHRISTOFFEL peut être écrit en utilisant la métrique et leurs dérivées de la façon suivante

$$R_{pijk} = \frac{1}{2} (g_{pk,ij} + g_{ij,pk} - g_{pj,ik} - g_{ik,pj}) + g^{rs} (\Gamma_{ijr} \Gamma_{pks} - \Gamma_{ikr} \Gamma_{pjs})$$

Si nous définissons l'espace euclidien comme espace dans lequel un système de coordonnées cartésiennes peut être adopté, donc le tenseur de RIEMANN- CHRISTOFFEL disparaît dans tout autre système des coordonnées, qui peut être établi dans l'espace euclidien. C'est-à-dire.

$$R^m_{ijk} = 0 \quad (1-50)$$

Les deuxièmes dérivées covariantes d'un tenseur d'ordre deux sont

$$\begin{cases} T_{ij}|_{rs} - T_{ij}|_{sr} = T_{nj} R^n_{irs} + T_{in} R^n_{jrs} \\ T^{ij}|_{rs} - T^{ij}|_{sr} = -T^{nj} R^i_{,nrs} - T^{in} R^j_{,nrs} \end{cases} \quad (1-51)$$

II- Géométrie de surface

2-1 Introduction

Une coque est un solide dont le volume V est engendré par une surface moyenne s et sa normale n s'étendant d'une longueur $t = h/2$ de chaque côté de la surface s . l'épaisseur totale h peut varier d'un point à l'autre, mais reste petite par rapport aux quantités géométriques qui caractérisent la surface s .

Donc, la géométrie d'une coque est caractérisée par la surface moyenne s que nous considérons comme surface de référence, et de l'épaisseur h , on dit qu'elle est entièrement définit géométriquement si la forme de sa surface moyenne et son épaisseur sont définies en chaque point.

La surface de référence reste l'élément le plus important dans la coque, puisqu'elle définit la forme du coque et caractérise son comportement fondamental lors de l'analyse. De cela, il est important de donner quelques définitions et généralités sur la théorie des surfaces, cette théorie qui repose sur les résultats des courbes dans l'espace, qui reviennent à la géométrie différentielle.

2-2 Description de la surface moyenne

Soient E , l'espace Euclidien, et S une surface dans E . La surface S est définie D un domaine du plan et R est le vecteur de position, fig. (2.2). On introduit un paramétrage (ξ^1, ξ^2) tel que tout point M de S sera repéré, dans un système cartésien orthonormé direct (o, x_1, x_2, x_3) , de vecteurs unitaires $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

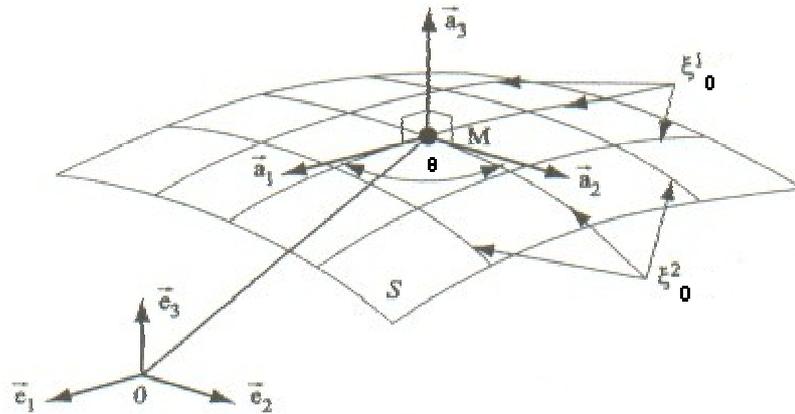


Figure (2.2) Définition de la surface

Selon GREEN et ZERNA (1968), le vecteur de position est donné par :

$$OM = R = r + x^3 e_3 \quad (2-1)$$

Où :

r est une fonction de (x^1, x^2)

$e_3 = n$ est le vecteur unitaire, perpendiculaire à la surface moyenne.

L'équation : $x^3 = 0$ est l'équation qui définit la surface moyenne, Donc l'équation (2-1) devient :

$$r = [x^1(\xi^1, \xi^2), x^2(\xi^1, \xi^2)] \quad (2-2)$$

Si l'une des coordonnées (ξ^1, ξ^2) est constante, alors (2-2), va faire la description d'une courbe allongée complètement sur la surface comme si la constante était variable, on aura une série de courbures. C'est-à-dire, si on fixe l'un des paramètres $\xi^1 = \xi_0^1$, le point défini par $r = x^i(\xi_0^1, \xi^2)$ décrit, lorsque ξ^2 varie, une courbe tracée sur la surface appelée *courbe coordonnée* ξ^2 , que nous noterons ξ_0^1 . On définit de même une courbe coordonnée ξ^1 , notée ξ_0^2 . Voir figure (2.2)

Les deux séries de courbures constitueront sur la surface un système de coordonnées curvilignes, les lignes des constantes (ξ^1, ξ^2) peuvent être dessinées sur la surface, en général, elles ne donnent pas en se croisant des angles droits, les intersections sont arbitraires et n'ont pas une forme spéciale.

L'élément différentiel $dr(\xi^1, \xi^2)$ en M s'écrit en fonction de $d\xi^1, d\xi^2$

$$dr = r_{,\xi^1} d\xi^1 + r_{,\xi^2} d\xi^2 = a_1 d\xi^1 + a_2 d\xi^2 \quad (2-3)$$

Tel que

$$a_i = r_{,\xi^i} = \frac{\partial r}{\partial \xi^i}$$

a_1 et a_2 , appelés vecteurs de base covariants, sont tangents aux directions définies par ξ^1 (ξ^2 constante) et ξ^2 (ξ^1 constante).

Si a_1 et a_2 sont orthogonaux, alors $a_{12} = 0$: Les lignes paramétriques ξ^1, ξ^2 sont orthogonales (c'est le cas des coques de révolution). Mais les vecteurs a_1 et a_2 ne sont en général ni unitaires, ni orthogonaux. Pour faciliter la présentation de certaines relations établies dans la suite, il est commode d'introduire des vecteurs tangents notés a^1 et a^2 de la base duale, (ou réciproque ou contravariante). Voir figure (2.3)

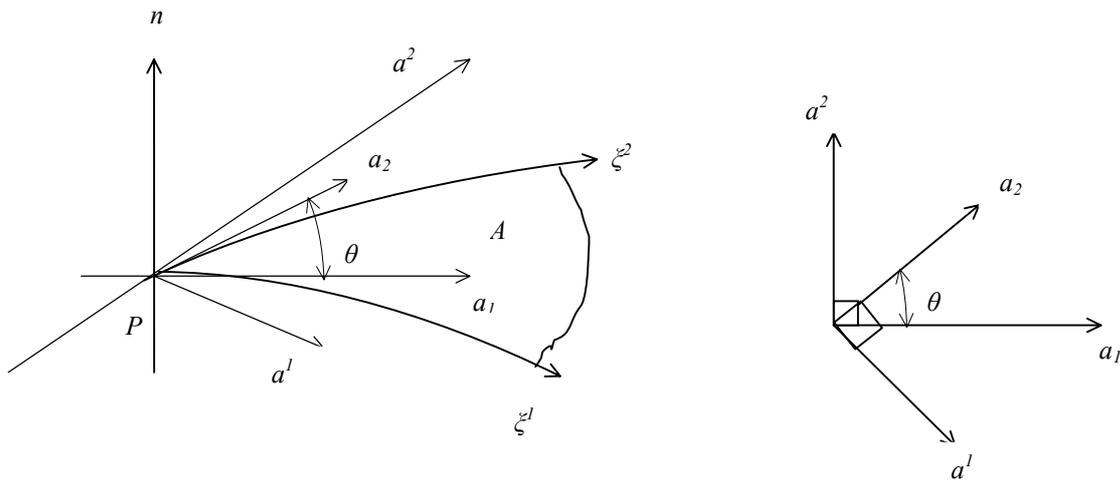


Figure (2.3) La base duale

Selon l'équation (1-28) nous avons

$$a^\alpha \cdot a_\beta = \delta_\beta^\alpha \tag{2-4}$$

Dans ce qui suit, les indices grecs α, β , prendront les valeurs 1 et 2, les indices latin i, j, k , les valeurs 1, 2 et 3.

De l'équation (2-4), a^1 est perpendiculaire à a_2 , aussi a^2 est perpendiculaire à a_1 . Le troisième vecteur de base $a_3 = a^3$ est la normale à la surface, il est perpendiculaire à a_α et à a^α , donc :

$$a_3 = \frac{(a_1 \times a_2)}{|a_1 \times a_2|} \tag{2-5}$$

2-3 La première forme fondamentale

La première forme fondamentale de S , dite tenseur métrique de s , est définie selon l'équation (1-28) et avec $\xi^3 = 0$ par :

$$a_\alpha \cdot a_\beta = a_{\alpha\beta} \quad , \quad a_{\alpha 3} = a_{3\alpha} = 0 \quad , \quad a_{33} = 1 \quad (2-6)$$

Compte tenu de (2-6), la matrice $[a_{\alpha\beta}]$ peut s'écrire :

$$[a_{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

Le tenseur métrique détermine la géométrie dite intrinsèque de s . on pose $a = \det[a_{\alpha\beta}]$

La matrice $[a_{\alpha\beta}]$ est inversible, On note $[a^{\alpha\beta}]$ la matrice inverse, et on a également :

$$a^{\alpha\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta \quad (2-8)$$

Selon l'équation (1-20) avec $\xi^3 = 0$, on a :

$$a_{\alpha\beta} \cdot a^{\beta\rho} = \delta_\alpha^\rho \quad ; \quad a^{\alpha 3} = 0 \quad ; \quad a^{33} = 1 \quad (2-9)$$

D'où :

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{a} \quad ; \quad a^{12} = a^{21} = -\frac{a_{12}}{a} \quad ; \quad a^{22} = \frac{a_{11}}{a} \quad (2-10)$$

Les équations (2-6) et (2-9) donnent les tenseurs métriques covariants et contravariant et mixte des surfaces, ils sont du deuxième ordre, et chacun a deux indices. Tous ces tenseurs vont satisfaire les propriétés des règles de transformation des surfaces des coordonnées.

Les magnitudes des vecteurs de base, covariant et contravariant sont données par l'équation (1-29) par :

$$\begin{cases} |a_\alpha| = \sqrt{(a_\alpha \cdot a_\alpha)} = \sqrt{a_{\alpha\alpha}} \\ |a^\alpha| = \sqrt{(a^\alpha \cdot a^\alpha)} = \sqrt{a^{\alpha\alpha}} \end{cases} \quad (\alpha \text{ n'est pas sommé}). \quad (2-11)$$

Donc, comme on le dit ci-dessus, la première forme fondamentale de la surface S en M est la forme quadratique sur le plan tangent.

En chaque point M de la surface S , la première forme fondamentale est définie comme le carré de la forme différentielle dr . Elle induit une métrique sur la surface. On la note fréquemment ds^2 . Alors l'équation (1-30) de l'élément linéaire, devient pour la surface :

$$ds^2 = dr \cdot dr = a_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (2-12)$$

La racine carrée ds^2 présente la distance entre deux points adjacents ont les coordonnées (ξ^1, ξ^2) et $(\xi^1 + d\xi^1, \xi^2 + d\xi^2)$ dans la surface, elle est généralement positive car ds est une longueur (sauf si : $d\xi^1 = d\xi^2 = 0$).

L'élément linéaire le long des coordonnées curvilignes est donné de l'équation (1-31) par :

$$ds_\alpha = a_\alpha d\xi^\alpha \quad (\alpha \text{ n'est pas sommé}) \quad (2-13)$$

La magnitude de l'élément linéaire selon (1-32) est :

$$ds_\alpha = \sqrt{a_{\alpha\alpha}} d\xi^\alpha \quad (2-14)$$

On donne l'angle γ entre les coordonnées curvilignes

$$\cos \gamma = \frac{a_{12}}{\sqrt{(a_{11} \cdot a_{22})}} \quad (2-15)$$

L'aire de la surface limitée par les lignes des coordonnées qui passent par (ξ^1, ξ^2) et celles qui passent par $(\xi^1 + d\xi^1, \xi^2 + d\xi^2)$ est de l'équation (1-34), en mettant $\xi^3 = 0$, est :

$$ds = \left| d\xi^1 a_1 \wedge d\xi^2 a_2 \right| = d\xi^1 d\xi^2 |a_1| |a_2| \sin(a_1, a_2) = \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \quad (2-16)$$

2-4 La deuxième forme fondamentale

Les vecteurs a_3 et dr varient d'un point à l'autre sur la surface s . La courbure est associée aux taux de variation de a_3 donc la deuxième forme fondamentale est donnée par :

$$dr \cdot da_3 = -b_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (2-17)$$

D'où, $b_{\alpha\beta}$ est donné par :

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = a_3 \cdot r_{,\alpha\beta} = a_3 \cdot a_{\alpha,\beta} = -a_{\alpha} \cdot a_{3,\beta} = -a_{\beta} \cdot a_{3,\alpha} \quad (2-18)$$

$b_{\alpha\beta}$ et $b^{\alpha\beta}$, sont les tenseurs de courbure de surface, ils sont symétriques et d'ordre 2.

On écrit :

$$\begin{cases} b_{\beta}^{\alpha} = a^{\alpha\gamma} b_{\beta\gamma} = a_{\beta\gamma} b^{\alpha\gamma} \\ b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\gamma} b_{\gamma}^{\beta} \\ b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\gamma} b_{\beta}^{\gamma} \end{cases} \quad (2-19)$$

2-4-1 Une courbe paramétrée sur une surface

Soit une surface S de point courant M dont la normale en M est a_3 . On considère un plan P passant par M contenant a^3 est appelé plan normal en M . On appelle C la courbe d'intersection de P avec s . On note t la tangente unitaire à C en M et l'abscisse curviligne de M sur C .

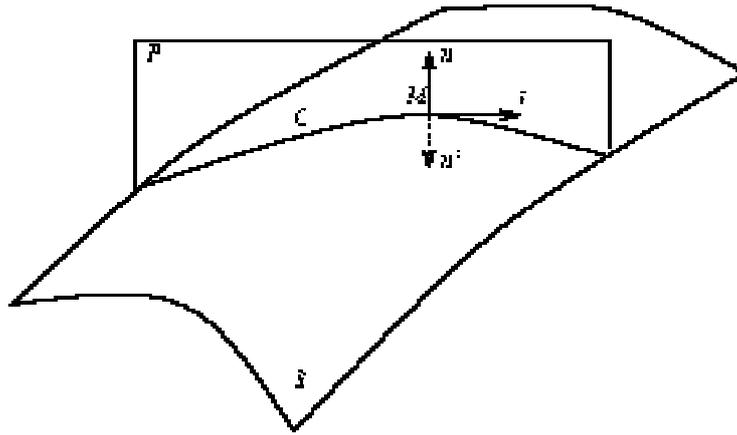


Figure (2.3) Interprétation géométrique du tenseur courbure
D'après GARRIGUES-1999

Soit un petit changement dans l'unité de la surface donnée par analogie à dr , de la manière :

$$da_3 = a_{3,\alpha} d\xi^\alpha = -b_\alpha^\lambda a_\lambda d\xi^\alpha \quad (2-20)$$

En supposant que C n'est pas une droite, on définit à tout point M de C , t : Le vecteur unitaire tangent à la courbe, a_3 la normale principale unitaire de la courbe, b et le vecteur binormal. Le triplet (t, a_3, b) forme en chaque point de C , une base orthonormée de E appelée trièdre de Freinet. Nous avons les formules de Serret-Frenet :

$$\frac{dt}{ds} = K a_3, \quad \frac{da_3}{ds} = -K t + \tau b, \quad \frac{db}{ds} = -\tau a_3 \quad (2-21)$$

Alors on peut tirer da_3 entre deux composantes :

$$da_3 = K_n dr + \tau (dr \times a_3) \quad (2-22)$$

Les produits scalaires de ces équations avec dr donnent la courbure normale K , et avec $(dr \times a_3)$ donnent la torsion τ de la surface.

Des équations (2-17) et (2-22) :

$$K_n = \frac{(dr \cdot da_3)}{(dr \cdot dr)} = \frac{b_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta}{a_{\gamma\eta} d\xi^\gamma d\xi^\eta} = \frac{2^{eme} \text{ forme fondamentale}}{1^{ere} \text{ forme fondamentale}} \quad (2-23)$$

$$\tau = \frac{da_3 (dr \times a_3)}{(dr \times a_3)(dr \times a_3)} = \frac{da_3 (dr \times a_3)}{(dr \cdot dr)} = \frac{b_\alpha^\beta \varepsilon_{\gamma\beta} d\xi^\alpha d\xi^\gamma}{a_{\lambda\eta} d\xi^\lambda d\xi^\eta} \quad (2-24)$$

Où $\varepsilon_{\gamma\beta}$ est le tenseur d'antisymétrie, est défini selon (1-33) par :

$$\begin{cases} \left[a^\alpha \cdot a^\beta \cdot a^3 \right] = \varepsilon^{\alpha\beta} \\ \left[a_\alpha \cdot a_\beta \cdot a_3 \right] = \varepsilon_{\alpha\beta} \end{cases} \quad (2-25)$$

Si $\xi^3 = 0$, on écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= -\varepsilon_{21} = \sqrt{a} \\ \varepsilon^{12} &= -\varepsilon^{21} = \frac{1}{\sqrt{a}} \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{22} = \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0 \end{aligned} \quad (2-26)$$

L'étude des courbes sur une surface donne une interprétation géométrique de la première et seconde forme fondamentale. La première forme fondamentale I mesure les longueurs (intrinsèques) de la surface. Ce qui est naturel puisque I est définie comme la restriction du produit scalaire. Les coefficients de sa représentation matricielle apparaissent dans l'expression donnant la longueur d'un arc de courbe. D'un autre côté, en ce qui concerne la seconde forme fondamentale II, elle mesure la courbure de la surface dans une direction.

2-5 Courbures et directions principales

2-5-1 Courbures principales

Les vecteurs da_3 et dr sont parallèles si :

$$da_3 + Kdr = 0 \quad (2-27)$$

Cette équation est appelée la forme de Rodrigues.

En multipliant par a^α on aura :

$$(b_\beta^\alpha - K\delta_\beta^\alpha) d\xi^\beta = 0 \quad (2-28)$$

Dans la géométrie différentielle, COXETER (1961) a vu que l'équation (2-28) a fourni des informations utiles, concernant la courbure principale et la direction principale de la surface. L'exécution de la sommation implicite dans (2-28) par l'indice répété β , notant que le rangé de l'indice α prend les valeurs 1, 2 alors :

$$\begin{cases} (b_1^1 - K)d\xi^1 + b_2^1 d\xi^2 = 0 \\ b_1^2 d\xi^1 + (b_2^2 - K)d\xi^2 = 0 \end{cases}$$

Qui a une solution $d\xi^\beta \neq 0$ si :

$$\begin{pmatrix} b_1^1 - K & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 - K \end{pmatrix} = 0$$

Alors :

$$K^2 - b_\alpha^\alpha K + \det(b_\alpha^\beta) = 0 \quad (2-29)$$

L'équation (2-29) est une équation de K , les deux valeurs de racines $d\xi^1, d\xi^2$ donnent les valeurs maximales et minimales de la courbure. Les deux valeurs de K sont les courbures principales, et elles ont lieu généralement dans les directions orthogonales (à moins que les deux valeurs de K soient égales dans un cas où toutes les directions sont des directions principales). Le sens arithmétique de ces courbures principales sont les courbures de GAUSS K et la courbure moyenne M , alors (2-29) devient :

$$K^2 - 2MK + K = 0$$

Les courbures principales sont :

$$\begin{cases} K_1 = M + \tau(M^2 - K) \\ K_2 = M - \tau(M^2 - K) \end{cases} \quad (2-30)$$

Où :

$$2M = K_1 + K_2 = b_\alpha^\alpha \quad (2-31)$$

$$K = K_1 K_2 = \det(b_\alpha^\beta) = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2 \quad (2-32)$$

L'équation (2-32) peut être aussi écrite :

$$K = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2 = \frac{\left\{ b_{11} b_{22} - (b_{12})^2 \right\}}{\left\{ a_{11} a_{22} - (a_{12})^2 \right\}} = \frac{|b_{\alpha\beta}|}{a} \quad (2-33)$$

2-5-2 Directions principales

On dit qu'on a affaire à des coordonnées normales principales lorsque les vecteurs de base a_α , orthogonaux, coïncident en outre avec les directions principales du tenseur symétrique $[b_{\alpha\beta}]$.

Les directions principales sont définies par

$$\begin{cases} A_{s1} = a_1 d\xi_1^1 + a_2 d\xi_1^2 \\ A_{s2} = a_1 d\xi_2^1 + a_2 d\xi_2^2 \end{cases} \quad (2-34)$$

Les directions principales sont orthogonales.

Pour les deux courbes paramétriques correspondantes, dites lignes de courbure de s (le long desquelles, respectivement, $d\xi^2 = 0$ et $d\xi^1 = 0$), les courbures, dites courbures normales principales, sont données respectivement, d'après (2-23), où les matrices $[a_{\alpha\beta}]$ et $[b_{\alpha\beta}]$ sont diagonales par

$$\frac{1}{R_1} = \pm \frac{b_{11}}{a_{11}} \quad , \quad \frac{1}{R_2} = \pm \frac{b_{22}}{a_{22}} \quad (2-35)$$

2-6 Classification des surfaces

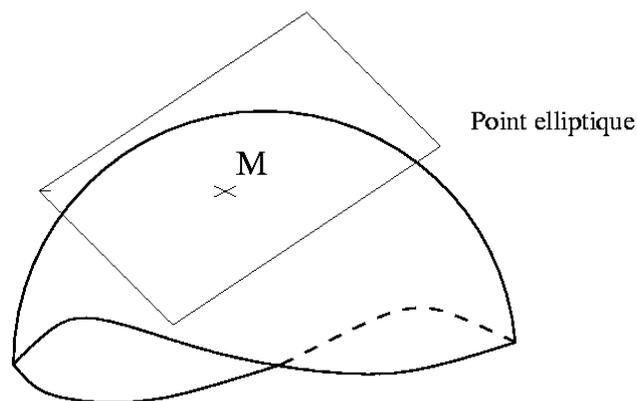
Selon STRUIK (1961), il n'y a pas de direction (réelles), pour les quelles la première forme fondamentale est nulle, mais il y a des directions réelles où la deuxième forme fondamentale de surface s'annule :

$$dr \cdot da_3 = -b_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = 0 \quad (2-36)$$

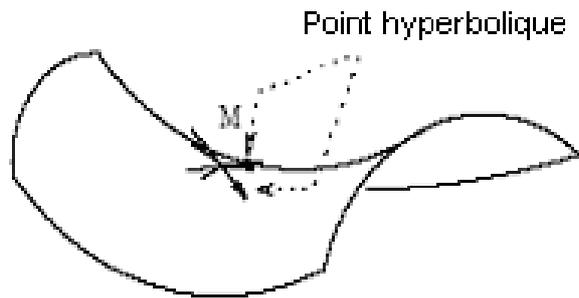
Les directions qui vérifient cette équation et pour lesquelles la deuxième forme fondamentale s'annule, et sur lesquelles les courbures changent éventuellement de signe sont appelées directions asymptotiques, et les courbures qui ont ces directions sont des courbures asymptotiques.

Suivant le signe de la courbure de Gauss K , nous avons la classification usuelle d'un point M de la surface :

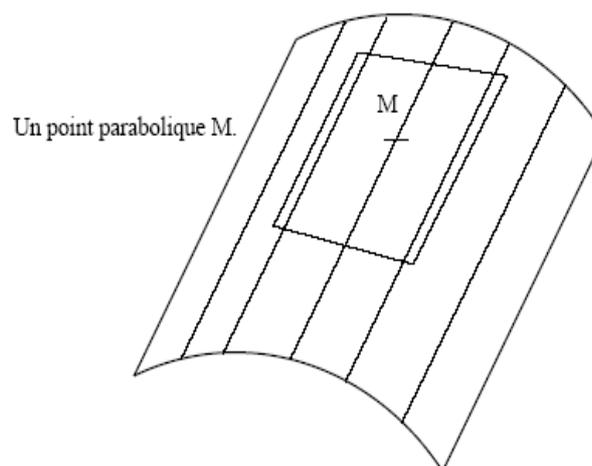
- Si $K > 0$ (surface synclastique) : les courbures principales de S passant par M sont de même signe, et il n'y a pas de directions asymptotiques en M . La surface (du moins un voisinage de M) se trouve d'un même côté du plan tangent. On dit que le point M est elliptique.



- Si $K < 0$ (surface anticlastique) : les courbures principales k_1 et k_2 sont de signe opposé. Le plan tangent traverse la surface suivant les deux directions (au signe près) qui annulent la seconde forme fondamentale (ce sont les directions asymptotiques). On dit que le point est hyperbolique.



- Si $K = 0$: (surface développable) K_1 ou K_2 s'annule, il y a deux possibilités :
 - K_1 ou $K_2 \neq 0$ Les courbures sont du même signe. Le plan tangent "colle" à la surface (linéairement) le long de la direction principale de courbure nulle (qui est donc une direction asymptotique), on dit que le point est parabolique.
 - K_1 et K_2 sont nulles toutes les deux. Toutes les courbes passant par M ont une courbure nulle, on dit que le point est méplat; une surface entièrement constituée de points méplats est une surface plane.



2-7 Les symboles de CHRISTOFFEL

Les symboles de CHRISTOFFEL du premier type en tenant compte de la surface ($\xi^3 = 0$) sont :

$$\Gamma_{\beta\gamma\alpha} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta,\gamma} + a_{\alpha\gamma,\beta} - a_{\beta\gamma,\alpha}) \quad (2-37)$$

Et ceux du deuxième type sont :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} &= a^{\alpha\gamma} \Gamma_{\beta\gamma\lambda} = a^{\alpha} \cdot a_{\gamma,\beta} = a^{\alpha} \cdot a_{\beta,\gamma} = -a_{\gamma} a_{,\beta}^{\alpha} \\ \Gamma_{\beta 3}^{\alpha} &= a^{\alpha} \cdot a_{3,\beta} = -a_3 a_{,\beta}^{\alpha} = -b_{\beta}^{\alpha} \\ \Gamma_{\alpha\beta}^3 &= a^3 \cdot a_{\alpha,\beta} = -a_{\beta} a_{,\beta}^3 = b_{\alpha\rho} \\ \Gamma_{\alpha 3}^3 &= a^3 \cdot a_{3,\alpha} = 0 \\ \Gamma_{\lambda\alpha}^{\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial \xi^{\alpha}} \\ \Gamma_{33}^3 &= 0 \end{aligned} \quad (2-38)$$

$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ Peut être écrit aussi en termes du tenseur de la surface métrique comme suit :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = a^{\lambda\rho} a_{\rho} \cdot a_{\alpha,\beta} \quad (2-39)$$

Le tenseur de RIEMANN- CHRISTOFFEL de la surface est obtenu en mettant $\xi^3 = 0$ dans les 2 équations combinés (1-47) et (1-48) alors :

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\psi}^{\rho} &= \left[\Gamma_{\psi\alpha}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\beta}^{\rho} - \Gamma_{\psi\beta}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\alpha}^{\rho} + \Gamma_{\psi\alpha,\beta}^{\rho} + \Gamma_{\psi\beta,\alpha}^{\rho} \right] + \left[\Gamma_{\psi\alpha}^3 \Gamma_{3\beta}^{\rho} - \Gamma_{\psi\beta}^3 \Gamma_{3\alpha}^{\rho} \right] \\ R_{\alpha\beta\psi}^{\rho} &= \overline{R^{\rho}{}_{\alpha\beta\psi}} + \left[\Gamma_{\psi\alpha}^3 \Gamma_{3\beta}^{\rho} - \Gamma_{\psi\beta}^3 \Gamma_{3\alpha}^{\rho} \right] \end{aligned}$$

De l'équation (1-50) on a : $R_{\alpha\beta\psi}^{\rho} = 0$

Donc, notre équation devient :

$$\overline{R^{\rho}}_{\alpha\beta\psi} = -\left[\Gamma_{\psi\alpha}^3 \Gamma_{3\beta}^{\rho} - \Gamma_{\psi\beta}^3 \Gamma_{3\alpha}^{\rho} \right]$$

La barre sur le symbole de Riemann sera enlevée et à ce moment, le tenseur de RIEMANN-CHRISTOFFEL de la surface sera :

$$R_{\alpha\beta\psi}^{\rho} = \Gamma_{\alpha\beta}^3 \Gamma_{3\psi}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\psi}^3 \Gamma_{3\beta}^{\rho} = b_{\alpha\beta} (-b_{\psi}^{\rho}) - b_{\alpha\psi} (-b_{\beta}^{\rho}) \quad (2-40)$$

L'abaissement des indices donne :

$$R_{\rho\alpha\beta\psi} = a_{\rho\gamma} R^{\gamma}_{\alpha\beta\psi} = b_{\alpha\psi} b_{\rho\beta} - b_{\alpha\beta} b_{\rho\psi} \quad (2-41)$$

D'où, pour la somme de $b_{\alpha\beta}$ on aura : $R_{\alpha\alpha\beta\psi} = R_{\rho\alpha\beta\beta} = 0$ (α, β ne sont pas sommés)

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{2112} = -R_{1221}$$

Alors, de l'équation (2-41) et (2-33) on a :

$$K = \frac{R_{1212}}{a} = \frac{|b_{\alpha\beta}|}{|a_{\alpha\beta}|} \quad (2-42)$$

$$R_{1212} = |b_{\alpha\beta}| = b_{11} b_{22} - (b_{12})^2 \quad (2-43)$$

On peut écrire aussi :

$$\begin{cases} K = \frac{1}{4} \varepsilon^{\alpha\beta} \cdot \varepsilon^{\lambda\nu} R_{\alpha\beta\lambda\nu} \\ K = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \cdot \varepsilon^{\lambda\nu} b_{\alpha\lambda} b_{\beta\nu} \end{cases} \quad (2-44)$$

Maintenant combinant l'équation (2-18) et la première équation de (2-38), on aura la formule de WEINGARTEN et GAUSS :

$$\begin{cases} a_{\alpha,\beta} = b_{\alpha\beta} a_3 + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} a_{\lambda} \\ a_{,\beta}^{\alpha} = b_{\beta}^{\alpha} a_3 - \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} a^{\lambda} \\ a_{3,\beta} = -b_{\beta}^{\lambda} a_{\lambda} \end{cases} \quad (2-45)$$

Les deux premières équations expriment le caractère différentiel de la relation, qui lie entre le coefficient de la première forme fondamentale et celle de la deuxième forme fondamentale de la surface, ce sont les formules de GAUSS. Tandis que la troisième équation est l'équation de WEINGARTEN, elle exprime les dérivations de la normale dans deux directions, aussi, elle sera utilisée pour la définition de la troisième forme fondamentale de la surface.

2-7-1 Équations de CODAZZI et GAUSS

La première équation de (2-45) comprise trois équations différentielles qui ne sont pas indépendantes, ces équations définies les coordonnées ξ^{α} de la surface. On met $\beta = 1$, et on fait la différentiation en tenant compte de ξ^2 , on aura le même résultat comme si on a met $\beta = 2$ et faire la différentiation en tenant compte de ξ^1 , alors :

$$\begin{cases} a_{\alpha,12} = b_{\alpha 1,2} a_3 + b_{\alpha 1} a_{3,2} + \Gamma_{\alpha 1,2}^{\lambda} a_{\lambda} + \Gamma_{\alpha 1}^{\lambda} a_{\lambda,2} \\ a_{\alpha,21} = b_{\alpha 2,1} a_3 + b_{\alpha 2} a_{3,1} + \Gamma_{\alpha 2,1}^{\lambda} a_{\lambda} + \Gamma_{\alpha 2}^{\lambda} a_{\lambda,1} \end{cases} \quad (2-46)$$

Aussi :

$$b_{\alpha 1.2} a_3 + b_{\alpha 1} a_{3.2} + \Gamma_{\alpha 1.2}^{\lambda} a_{\lambda} + \Gamma_{\alpha 1}^{\lambda} a_{\lambda.2} = b_{\alpha 2.1} a_3 + b_{\alpha 2} a_{3.1} + \Gamma_{\alpha 2.1}^{\lambda} a_{\lambda} + \Gamma_{\alpha 2}^{\lambda} a_{\lambda.1} \quad (2-47)$$

La multiplication scalaire par a_3 et l'utilisation de l'équation de GAUSS, donne :

$$b_{\alpha 1.2} + \Gamma_{\alpha 1}^{\lambda} b_{\lambda 2} = b_{\alpha 2.1} + \Gamma_{\alpha 2}^{\lambda} b_{\lambda 1} \quad (2-48)$$

En utilisant la dérivée covariante, on aura : $b_{\alpha 1}|_2 = b_{\alpha 2}|_1$ ($\alpha = 1,2$)

Sous une forme générale :

$$b_{\alpha\gamma}|_{\beta} = b_{\alpha\beta}|_{\gamma} \quad (2-49)$$

Qui est connue sous le nom de : l'équation de CODAZZI.

De nouveau on multiplie (2-49) par a_{γ} au lieu de a_3 , on aura :

$$b_{\alpha 1} a_{3.2} a_{\gamma} + \Gamma_{\alpha 1.2}^{\lambda} a_{\lambda} a_{\gamma} + \Gamma_{\alpha 1}^{\lambda} a_{\lambda.2} a_{\gamma} = b_{\alpha 2} a_{3.1} a_{\gamma} + \Gamma_{\alpha 2.1}^{\lambda} a_{\lambda} a_{\gamma} + \Gamma_{\alpha 2}^{\lambda} a_{\lambda.1} a_{\gamma}$$

En utilisant l'équation de WEINGARTEN

$$b_{\alpha 2} b_{1\gamma} - b_{\alpha 1} b_{2\gamma} = \left[\Gamma_{\alpha 2.1}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha 1.2}^{\lambda} \right] a_{\lambda\gamma} + \left[\Gamma_{\alpha 2}^{\lambda} \Gamma_{1\gamma}^{\rho} - \Gamma_{\alpha 1}^{\lambda} \Gamma_{2\gamma}^{\rho} \right] a_{\lambda\rho}$$

- Si on met $\gamma = \alpha$ dans cette équation, alors elle s'annule.

- Si $\gamma \neq \alpha$ alors on écrit :

$$K = \frac{1}{a} \left[a_{12.12} - \frac{1}{2} (a_{11.22} + a_{22.11}) - (\Gamma_{12}^{\lambda} \Gamma_{12}^{\rho} - \Gamma_{11}^{\lambda} \Gamma_{12}^{\rho}) a_{\lambda\rho} \right] \quad (2-50)$$

L'équation (2-50) est appelée le théorème de GAUSS.

Le théorème de GAUSS, et l'équation de CODAZZI sont les équations de compatibilité de la surface. Une valeur importante est obtenue par le théorème de GAUSS, c'est que la courbure de GAUSS peut être exprimée en utilisant seulement les métriques et leurs dérivées. Chaque expression qui dépend seulement du coefficient de la 1^{ère} forme fondamentale de la surface est appelée (les invariant de flexion). Alors la courbure de GAUSS de la surface est un invariant de flexion. Aussi si une surface donnée est un sujet de flexion pure, on doit compter sur une courbure Gaussienne inchangée, c'est-à-dire : Les distance et les angles entre les points sur la surface restent les mêmes, avant et après la déformation due à la flexion pure.

2-8 Troisième forme fondamentale de la surface

De la dernière relation de l'équation (2-45), on a :

$$a_{3,\beta} a_{3,\alpha} = b_{\alpha\gamma} b_{\beta}^{\gamma} \quad (2-51)$$

Alors :

$$da_3 \cdot da_3 = b_{\alpha\gamma} b_{\beta}^{\gamma} d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta} \quad (2-52)$$

Ce dernier résultat est appelé la troisième forme fondamentale de la surface.

2.9 Conclusion

Dans les espaces tridimensionnels, la géométrie intrinsèque représentée par les coefficients de la première forme fondamentale de la surface est capable de définir quelques caractéristiques géométriques comme les angles, les distances et les superficies, mais elle ne suffit pas à déterminer la surface elle-même, car elle ne contient aucune information relative à la courbure de la surface, dans ce cas la deuxième forme fondamentale de la surface doit être considérée, et quelques conditions complémentaires doivent être satisfaites.

Premièrement le déterminant de la première forme fondamentale de la surface doit être positif, et la première et la deuxième forme fondamentale de la surface doivent satisfaire les équations de GAUSS et CODAZZI pour assurer la continuité et l'existence de surface. Ces points importants sont la base des théorèmes fondamentaux de la théorie des surfaces. Ils ont aussi un rôle très important dans la théorie des coques elle-même.

L'utilité et la simplicité de l'analyse générale des tenseurs sont évidentes dans la formulation de la géométrie différentielle des surfaces.

CHAPITRE III

CRITERES DE RIGIDITE

3-1 Introduction

Le but de ce chapitre, est d'étudier l'équilibre statique des structures en coque selon l'hypothèse de membrane, lorsque les moments de flexion et de torsion et les efforts de cisaillement sont nuls toute au long de la coque. Nous constaterons que le problème est statiquement déterminé, et nous déterminons les valeurs des résultantes d'effort dans le plan en résolvant les équations d'équilibre pour un élément infinitésimal d'une coque, Ceci est appelé la théorie des membranes. On discute également les relations cinématiques produites lorsqu'une coque se déforme par flexion sans dilatation. Ceci est appelé les déformations inextensionnelles.

Il est admis qu'une pièce ayant la forme de membrane résiste bien aux efforts de traction et n'offre aucune résistance aux effets des charges qui sont appliquées perpendiculaire à son plan moyen. Ceci est dû principalement à la rigidité à la flexion qui est négligeable par rapport à la rigidité membranaire, la rigidité à la flexion est proportionnelle au cube de l'épaisseur (h^3) et la rigidité membranaire est proportionnelle à l'épaisseur seulement (h), si l'épaisseur (h) est très petite alors (h^3) tend vers zéro et peut être négligée dans les calculs.

Ce qui fait dire qu'une coque est calculée pour résister par sa forme, mais même dans ce cas, les effets de flexion ainsi que l'effet du cisaillement transverse peuvent se révéler importants, par exemples au voisinage des bords ou bien encore en cas de variation brusque de géométrie ou des changements dans les propriétés du matériau. Donc, les deux théories sont intimement reliées lorsqu'il est possible qu'une coque subisse des déformations inextensionnelles, alors la coque ne peut pas supporter toutes les charges appliquées par une seule action qui est l'action de membrane.

3-2 Théorie de membrane

La théorie de membrane est une simplification étonnante de la théorie des coques. Elle a précédé dans la pratique toutes autres approches simplifiées, à cause de son simple principe et l'exactitude des résultats dans certain cas.

En raison de leurs formes, les coques ont permis aux ingénieurs et concepteurs de prendre la première étape dans l'analyse de telles structures, en considérant la totalité des charges supportées par les efforts de membrane seulement. Cette simplification, nous donne un abaissement dans l'ordre des équations, et par conséquent seulement deux conditions aux limites doivent être indiquées à chaque bord.

Il y a une analogie dans l'analyse des structures des coques mince. En général, les charges appliquées aux coques sont supportées par une combinaison d'action entre les efforts et le moment de flexion. Mais, parfois les effets de flexion sont plutôt petits. Dans ce cas, il est davantage d'avoir un procédé analogue à l'analyse des nœuds rigides dans les treillis, où l'effet de flexion est négligé, et la structure est étudiée comme si elle avait porté la totalité des charges appliquées par les efforts résultantes dans le plan. Cette méthode est appelée *hypothèse des membranes*.

3-2-1 la validité de la théorie de membrane

La théorie de membrane a toujours été le sujet des quelques limitations concernant la géométrie du coque, le type des charges externes appliquées, et les appuis de bords. Un certain nombre d'auteurs tels que GOL'DENVEIZER (1961) et NOVOZHILOV (1964) ont

déjà mentionné ces restrictions. GOL'DENVEIZER (1961) montre que, la théorie de membrane est bien considérée seulement aux régions qui sont loin des lignes des déformations, qui appartiennent, aux bords des coques les lignes où se produisent des discontinuités dans les composants des charges extérieures, les régions où la surface moyenne d'une coque a une coupure ou subit un changement brusque de courbure ou d'épaisseur.

Comment nous pouvons décider, dans un problème particulier, si l'hypothèse de membrane est-elle justifiée ?

Supposons que le problème est statiquement déterminé, les efforts sont déterminés à partir des équations d'équilibre statiques de la théorie de membrane. Les déformations correspondantes sont obtenues par des relations constitutives par exemple la loi de Hooke, et pour déterminer le déplacement de la coque on doit résoudre les équations de déformation déplacement (équation de compatibilité)

En outre, nous calculons, à partir des déplacements connus, les changements de la courbure de la coque. Maintenant si n'importe quel élément d'une coque ayant l'épaisseur h subit un changement de la courbure K , il y aura un effort de flexion de $\frac{1}{2} K h$ sur les surfaces extérieures de l'élément, et si l'élément est élastique il sera des efforts correspondants, en particulier, des efforts résultants de flexion. Mais la présence de ces efforts est explicitement ignorée dans l'hypothèse de membrane. Donc nous pouvons conclure que l'hypothèse de membrane est inadmissible à moins que l'effort de flexion maximal $\frac{1}{2} K h$ soit petit en comparaison avec les déformations maximales ε correspondantes aux résultantes d'effort membrane tangentielle maximale. Il est donc utile d'évaluer un paramètre sans dimensions.

$$B = \frac{K_{\max} t}{2 \varepsilon_{\max}}$$

dans tout cas particulier, où K_{\max} and ε_{\max} représenter respectivement le taux du changement maximal de la courbure et de la déformation. Puis, si $B \ll 1$ l'hypothèse de membrane est justifiée.

3-2-2 Equations d'équilibres

Si nous imaginons qu'une coupure AB est faite sur la surface d'une coque, définie par $s(\xi^1, \xi^2)$ dont la direction est spécifiée par le vecteur $d\bar{\eta}$, qui est dans les plans tangents de la surface et perpendiculaire à AB . La longueur de la coupure est égale au module de $d\bar{\eta}$.

Si on considère maintenant que la portion de la surface est soumise à l'action des forces df , où df dépend de la direction et du module de $d\bar{\eta}$.

$$|d\bar{\eta}| = \text{Longueur de } AB \quad (3-1)$$

On pose

$$d\bar{\eta} = a_\beta d\eta^\beta = a^\beta d\eta_\beta \quad (3-2)$$

Aussi

$$\overline{AB} = a_\alpha d\xi^\alpha = a^\alpha d\xi_\alpha \quad (3-3)$$

Et aussi

$$\overline{AB} = n \times d\bar{\eta} \quad (3-4)$$

Où : $n(\xi^1, \xi^2) = a_3$ présente le vecteur normal à la surface.

Utilisant (3-3) et (3-4) on aura :

$$a_\alpha d\xi^\alpha = n \times d\bar{\eta} \quad (3-5)$$

On donne d'après (2-25)

$$n \times a_\beta = \varepsilon_{\beta\rho} a^\rho \quad (3-6)$$

Utilisant (3-2) et (3-5) et (3-6) on aura :

$$a_\alpha d\xi^\alpha = \varepsilon_{\beta\rho} a^\rho d\eta^\beta \quad (3-7)$$

En général, la force résultante df qui dépend de la magnitude et la direction $d\bar{\eta}$, peut s'écrire sous la forme :

$$df = force = dF^\lambda a_\lambda + n dF \quad (3-8)$$

Où dF est la composante normale, elle a une valeur nulle dans le cas membranaire.

$$dF = q^\alpha d\eta_\alpha = 0 \quad (3-9)$$

Où : q^α est le tenseur de force de cisaillement (nul dans ce cas)

Et dF^λ est la composante tangentielle du vecteur de force, tel que :

$$dF^\lambda = N^{\alpha\lambda} d\eta_\alpha \quad (3-10)$$

Où : $N^{\alpha\lambda}$ est définie comme le tenseur du deuxième ordre des forces dans le plan.

Donc (3-8) devienne :

$$df = dF^\lambda a_\lambda \quad (3-11)$$

Appliquons (3-2) et (3-3) à (3-4), alors :

$$d\bar{\eta} = a_\alpha d\xi^\alpha \quad n = \varepsilon_{\rho\alpha} a^\rho d\xi^\alpha = d\eta_\beta a^\beta \quad (3-12)$$

Cependant, avec une petite manipulation, on trouvera :

$$d\eta_\beta = \varepsilon_{\beta\alpha} d\xi^\alpha \quad (3-13)$$

Maintenant une combinaison de (3-10) et (3-13) mène à :

$$dF^\lambda = N^{\alpha\lambda} \varepsilon_{\alpha\rho} d\xi^\rho \quad (3-14)$$

Alors, l'équation (3-11) devient :

$$df = N^{\alpha\lambda} a_\lambda \varepsilon_{\alpha\rho} d\xi^\rho \quad (3-15)$$

3-2-3 Équilibre d'une surface élémentaire

On a eu les expressions des forces en utilisant des relations géométriques, maintenant on procède à établir l'équilibre statique pour un élément infinitésimal $ABCD$ enlevé de la surface de la coque. La figure (3.1) montre l'élément de surface $ABCD$ soumis à l'action des forces.

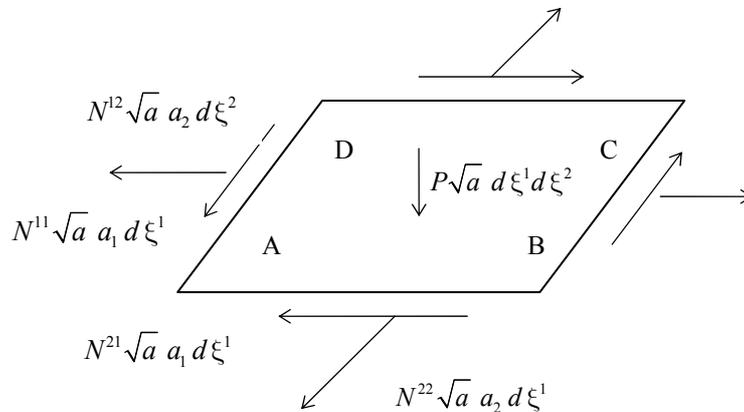


Figure (3.1) Equilibre de la surface moyenne

Supposons que la coque est soumise à un chargement extérieur symétrique mesuré par unité de surface :

$$P = p^\alpha a_\alpha + p.n \quad (3-16)$$

Où : p^α , p sont respectivement les composantes tangentielle et normale à la surface.

De l'équation (2-16), l'aire élémentaire $ABCD$ de la surface de référence est :

$$ds = \sqrt{a} . d\xi^1 . d\xi^2 . \quad (3-17)$$

Alors la charge extérieure appliquée à élément est :

$$P ds = (p^\alpha a_\alpha + p.n) \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 \quad (3-18)$$

La force agissante sur le coté BC est obtenu de l'équation (3-15) dans laquelle ρ est remplacé par la valeur 2

$$N^{1\lambda} a_\lambda \sqrt{a} d\xi^2 \quad (3-19)$$

Et la force agissante sur le coté AD est aussi toujours égale et opposée à (3-19).

La somme des forces agissantes sur AD et BC est égale aux taux de changement de (3-19) par rapport à ξ^1 multiplié par $d\xi^1$, qui est égal à :

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left[(N^{1\lambda} a_\lambda) \sqrt{a} \right] d\xi^1 d\xi^2 \quad (3-20)$$

Il est important de savoir que dans la différentiation de (3-19) par rapport à ξ^1 , on tient en compte automatiquement l'effet de changement de la direction de vecteur de base par conséquent celui de la courbure de surface et les coordonnées courbées.

De même, les forces agissantes sur AB et DC en posant $\rho = 1$ sont :

$$\frac{\partial}{\partial \xi^2} \left[N^{2\lambda} a_\lambda \sqrt{a} \right] d\xi^1 d\xi^2 \quad (3-21)$$

L'équation d'équilibre sur l'élément $ABCD$ est obtenue de l'addition des composantes de contraintes plus les charges extérieures.

L'addition de (3-18) à (3-20) et (3-21) donne les totalités des forces agissantes à l'élément $ABCD$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \left[N^{\alpha\lambda} a_\lambda \sqrt{a} \right] d\xi^1 d\xi^2 + (p^\alpha a_\alpha + pn) \sqrt{a} d\xi^1 d\xi^2 = 0 \quad (3-22)$$

Divisons cette équation par $d\xi^1 d\xi^2$ on aura :

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (N^{\alpha\lambda} a_\lambda) + (p^\alpha a_\alpha + pn) = 0 \quad (3-23)$$

L'équation générale de l'équilibre des forces peut être obtenue par le produit scalaire de cette équation par n et, qui nous donne respectivement, leurs composantes normales et tangentielles à la surface.

Ainsi dans la direction normale, après simplification et utilisation de (2-18) on écrit

$$N^{\alpha\lambda} b_{\alpha\lambda} + p = 0 \quad (3-24)$$

Dans la direction tangentielle en utilisant (1-45)

$$N^{\alpha\rho} \Big|_\alpha + p^\rho = 0 \quad (3-25)$$

Où :

$$N^{\alpha\rho}\Big|_{\alpha} = N^{\alpha\rho}_{,\alpha} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\rho} N^{\gamma\alpha} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\alpha} N^{\rho\gamma}$$

Alors, les relations générales d'équilibres peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} N^{\alpha\lambda} b_{\alpha\lambda} + p = 0 \\ N^{\alpha\rho}\Big|_{\alpha} + p^{\rho} = 0 \\ N^{\alpha\beta} = N^{\beta\alpha} \end{cases} \quad (3-26)$$

On peut remarquer que les équations d'équilibre sont en fonction des forces externes et des résultantes d'effort internes. Des quantités telles que l'épaisseur de la coque et les propriétés du matériau tel que le poids n'entrent pas dans ces équations. Le caractère des solutions aux équations d'équilibre dépend beaucoup de la géométrie des coques, et en particulier du signe de la courbure de Gauss.

Les deux premières équations de (3-26) avec l'aide de la condition de symétrie des efforts du cisaillement dans le plan, sont suffisantes pour déterminer les efforts inconnus N^{12} , N^{11} et N^{22} à condition que les conditions aux limites soient convenables.

Il est à mentionner que les équations d'équilibre dans la direction normales n'est pas une équation différentielle. Cependant, elle est employée pour éliminer un inconnu de l'ensemble d'équations d'équilibre. D'autre part, les équations tangentielles sont des équations différentielles. Par conséquent l'état de contrainte dans la théorie des coques-membrane est complètement déterminé par les équations d'équilibre, supposant que la géométrie, et les charges externes sont connues, donc la structure est statiquement déterminée.

3-3 Déformation inextensionnelle

La déformation inextensionnelle des surfaces est proportionnelle à l'aspect cinématique des déformations des surfaces courbes. Elle signifie les déformations de la surface moyenne sans dilatation, c'est à dire que le tenseur des taux de déformation de membrane est égal à zéro.

Selon LOVE (1944), si les déplacements de la surface moyenne vont être inextensionnels donc :

- Les longueurs de deux éléments dans les deux directions orthogonales ne doivent pas changer quand la surface se déforme.
- L'angle entre deux éléments avant déformation reste le même après déformation

3-3-1 Le taux de changement des quantités de la surface

a - Le taux de changement des vecteurs de base

Le point dans l'espace de la figure (3-2) est défini la relation suivante

$$R = r + \xi^3 a_3 \quad (3-27)$$

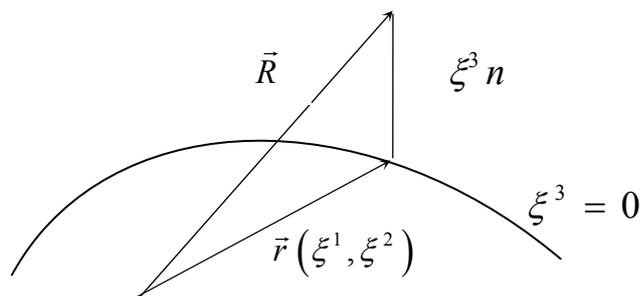


Figure (3-2) le vecteur de position de la surface

Comme nous sommes principalement concernés par la surface de référence, alors nous mettons, et cette dernière serait défini par le vecteur de position. Le vecteur de position $r(\xi^1, \xi^2, t)$ indiquera, la position de la surface déformée, le variable t définira la position des vecteurs de bases à tout moment t , pendant le processus de déformation. Il doit être noté cependant, que le variable t diffère de la coordonnée, qui définit la troisième dimension du corps.

Il doit être noté aussi que la géométrie de la surface donnée dans le deuxième chapitre, dans la quel la première et la deuxième forment fondamentale de la surface et quelques autres quantités impliquant r , n et leurs dérivées restent valables, mais dans ce chapitre ces fonctions dépendent du temps.

Le vecteur v correspond à la vitesse de la surface, est donné par

$$v = v^i a_i = v_i a^i$$

$$v = \dot{r} = \frac{\partial r}{\partial t} = v^\beta a_\beta + v \cdot n = v_\beta a^\beta + v \cdot n \quad (3-28)$$

La dérivée du vecteur de la vitesse est

$$v_{\alpha\beta} = \dot{r}_{,\alpha} = v_{\beta,\alpha} a^\beta + v_\beta a^\beta_{,\alpha} + v_{,\alpha} n + v \cdot n_{,\alpha} \quad (3-29)$$

En utilisant le théorème de GAUSS et WEINGARTEN, et avec simple application, nous trouvons le taux de changement des vecteurs de base

$$\dot{a}_\alpha = \left[v_{\beta,\alpha} - v_\lambda \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda - v b_{\alpha\beta} \right] a^\beta + \left[v_\beta b_\alpha^\beta + v_{,\alpha} \right] n$$

En utilisant le concept de la dérivée covariante, nous écrivons :

$$\dot{a}_\alpha = \left[v_\beta \Big|_\alpha - v b_{\alpha\beta} \right] a^\beta + \left[v_\beta b_\alpha^\beta + v \Big|_\alpha \right] n \quad (3-30)$$

$$\dot{n} = \left[v_\beta b_\alpha^\beta + v \Big|_\alpha \right] a^\alpha \quad (3-31)$$

Les équations (3-30) et (3-31) représentent le taux de changement des vecteurs de base et la normale unité de la surface respectivement.

b- Le taux de changement du tenseur métrique

Dans le mode de déformation inextensionnelle, la déformation admet seulement des petites flexures dans la surface et ne contient pas des allongements ou des déformations de cisaillement.

Nous exprimons le taux de changement du tenseur métrique

$$\dot{a}_{\alpha\beta} = v_{,\alpha} \cdot a_\beta + a_\alpha \cdot v_{,\beta} = 0 \quad (3-32)$$

Tel que $\dot{a}_\alpha = v_{,\alpha}$

En utilisant (3-30), l'équation (3-32) devient

$$\dot{a}_{\alpha\beta} = v_\beta \Big|_\alpha + v_\alpha \Big|_\beta - 2 v b_{\alpha\beta} \quad (3-33)$$

Et on donne le taux de changement du déterminant

$$\dot{a} = \dot{a}_{11} \cdot a_{22} + \dot{a}_{22} \cdot a_{11} - 2 a_{12} \cdot \dot{a}_{12} \quad (3-34)$$

On introduit (3-33) dans (3-34) on obtient

$$\dot{a} = 2 a \left[\left(v^\alpha \Big|_\beta - v b^\alpha_\beta \right) \right] \quad (3-35)$$

c- Le taux de changement d'un élément de surface

En utilisant (3-35), et avec la différentiation par rapport au temps de (2-16) le taux de changement d'un élément de surface ds est obtenu par

$$d\dot{s} = \sqrt{a} \left[v^\alpha \Big|_\beta - v b^\alpha_\beta \right] ds \quad (3-36)$$

3-3-2 Le tenseur des taux de déformation de membrane

Pendant la déformation, la surface s peut subir des allongements ou des raccourcissements dans son plan, l'élément ligne de la surface donnée dans l'expression (2-12) est :

$$\partial s^2 = \partial r \cdot \partial r = a_{\alpha\beta} \partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta$$

La dérivée de cette expression par rapport aux temps donne :

$$2 \partial s \cdot \partial \dot{s} = \dot{a}_{\alpha\beta} \partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta \quad (3-37)$$

Utilisant (3-33), on écrit

$$2 \partial s \cdot \partial \dot{s} = \left[\frac{v_\beta \Big|_\alpha + v_\alpha \Big|_\beta}{2} - v b_{\alpha\beta} \right] \partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta = Y_{\alpha\beta} \partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta \quad (3-38)$$

Où :

$$Y_{\alpha\beta} = \frac{v_{\beta|_{\alpha}} + v_{\alpha|_{\beta}}}{2} - v_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} \quad (3-39)$$

$Y_{\alpha\beta}$: est le tenseur des taux de déformation de membrane, qui est la moitié des taux de changement du tenseur métrique.

Nous définissons aussi le tenseur des déformations de membrane ($G_{\alpha\beta}$) qui caractérise les variations du tenseur métrique ($a_{\alpha\beta}$) de surface dans la déformation qui fait passer la surface de son état initial à son état actuel.

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}] \quad (3-40)$$

Où :

$a_{\alpha\beta}$: Est l'état déformé du tenseur métrique (l'état final de la surface déformée au temps fixé) est en fonction de ξ^{α} et t

$A_{\alpha\beta}$: Est la valeur du tenseur métrique à l'état initial (l'état non déformé), il est indépendant au temps t .

3-3-3 Le concept des vitesses angulaire

Comme nous avons utilisé le concept des vitesses au lieu des déplacements, et comme la déformation d'une surface incite aussi des rotations à côté des déplacements, nous présentons le concept des vitesses angulaire au lieu des rotations.

Pour la dérivée de la vitesse, en substituant (3-39) dans (3-30) avec $Y_{\alpha\beta} = 0$

$$v_{,\alpha} = \frac{1}{2} [v_{\beta|_{\alpha}} - v_{\alpha|_{\beta}}] a^{\beta} + [v_{\beta} b_{\alpha}^{\beta} + v|_{\alpha}] n \quad (3-41)$$

On pose

$$\Omega \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (v_{\beta|_{\alpha}} - v_{\alpha|_{\beta}}) \quad (3-42)$$

$$\Omega^{\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} = - (v_{\beta} b_{\alpha}^{\beta} + v|_{\alpha}) \quad (3-43)$$

Donc (3-41) devient

$$v_{,\alpha} = \Omega \varepsilon_{\alpha\beta} a^{\beta} - \Omega^{\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} n \quad (3-44)$$

En utilisant le symbole de permutation de (2-25), alors l'équation (3-44) devient

$$v_{,\alpha} = \bar{\Omega} . a_{\alpha} = \dot{a}_{\alpha} \quad (3-45)$$

Où $\bar{\Omega}$ est le vecteur de vitesse angulaire, donné par

$$\bar{\Omega} = \Omega^{\beta} a_{\beta} + \Omega n \quad (3-46)$$

La dérivée de (3-46) par rapport à α , donne

$$\bar{\Omega}_{,\alpha} = \Omega^{\beta}_{,\alpha} a_{\beta} + \Omega^{\beta} a_{\beta,\alpha} + \Omega_{,\alpha} n + \Omega n_{,\alpha} \quad (3-47)$$

On note que

$$\bar{\Omega}_{,\beta} . a^{\beta} = \Omega^{\beta}|_{\beta} - \Omega b_{\beta}^{\beta} \quad (3-48)$$

$$\bar{\Omega}_{,\beta} . n = \Omega^{\beta} b_{\beta\alpha} - \Omega|_{\alpha} \quad (3-49)$$

La dérivée de l'équation (3-45) par rapport à β , donne

$$v_{,\alpha\beta} = \bar{\Omega}_{,\beta} \cdot a_{\alpha} + \bar{\Omega} \cdot a_{\alpha,\beta} \quad (3-50)$$

En changeant les indices α et β et soustrayant, nous avons

$$v_{,\alpha\beta} - v_{,\beta\alpha} = \bar{\Omega}_{,\beta} \cdot a_{\alpha} + \bar{\Omega} \cdot a_{\alpha,\beta} - \bar{\Omega}_{,\alpha} \cdot a_{\beta} + \bar{\Omega} \cdot a_{\beta,\alpha} \quad (3-51)$$

Si $a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha}$ et $v_{,\alpha\beta} - v_{,\beta\alpha} = 0$

Alors

$$\bar{\Omega}_{,\beta} \cdot a_{\alpha} = \bar{\Omega}_{,\alpha} \cdot a_{\beta} \quad (3-52)$$

Maintenant, en considérant que $\beta = 1$ et $\alpha = 2$, (3-52) devient

$$\bar{\Omega}_{,1} \cdot a_2 = \bar{\Omega}_{,2} \cdot a_1 \quad (3-53)$$

Nous savons que a_1 et a_2 se situons dans le plan de la surface, donc (3-53) doit se situer dans la direction de la normale et par conséquent, $\bar{\Omega}_{,\beta}$ doit se situer dans le plan de la surface, on a donc

$$\bar{\Omega}_{,\beta} \cdot n = 0 \quad (3-54)$$

Multipliant l'équation (3-52) par n et en utilisant le produit triple, nous écrivons

$$\bar{\Omega}_{,\beta} \cdot \varepsilon_{\alpha\lambda} a^{\lambda} = \bar{\Omega}_{,\alpha} \cdot \varepsilon_{\beta\lambda} a^{\lambda} \quad (3-55)$$

Posant $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, (3-55) devient

$$\bar{\Omega}_{,2} \cdot a^2 = \bar{\Omega}_{,1} \cdot a^1$$

Et finalement nous avons

$$\bar{\Omega}_{,\beta} \cdot a^\beta = 0 \quad (3-56)$$

Et les conditions de déformation inextensionnelle sont

$$\begin{cases} \bar{\Omega}_{,\beta} \cdot n = 0 \\ \bar{\Omega}_{,\beta} \cdot a^\beta = 0 \end{cases} \quad (3-57)$$

Donc la condition qui nous permette de concevoir une coque-membrane doit prouver qu'il n'y a aucune solution de (3-57) satisfaisant les conditions aux limites autres que $\bar{\Omega} = 0$ (ou $\bar{\Omega} = \text{constante}$, pour une coque dans l'espace).

Les équations (3-57) peuvent être écrites comme dans (3-48) et (3-49)

$$\bar{\Omega}_{,\beta} \cdot a^\beta = \Omega^\beta \Big|_\beta - \Omega b_\beta^\beta = 0 \quad (3-58)$$

$$\bar{\Omega}_{,\beta} \cdot n = \Omega^\beta b_{\beta\alpha} + \Omega \Big|_\alpha = 0 \quad (3-59)$$

Par conséquent, pour écrire une équation à dérivée partielle simple pour la déformation inextensionnelle on multiplie (3-59) par $\varepsilon^{\xi\eta} \varepsilon^{\rho\alpha} b_{\xi\rho}$

$$-\Omega \Big|_\alpha \varepsilon^{\xi\eta} \varepsilon^{\rho\alpha} b_{\xi\rho} = \Omega^\beta \varepsilon^{\xi\eta} \varepsilon^{\rho\alpha} b_{\xi\rho} b_{\beta\alpha} \quad (3-60)$$

On pose

$$-\Omega|_{\alpha} \varepsilon^{\xi\eta} \varepsilon^{\rho\alpha} b_{\xi\rho} = \Omega^{\beta} \delta_{\beta}^{\eta} K = \Omega^{\eta} K \quad (3-61)$$

$$\Omega^{\eta}|_{\lambda} = - \left[\frac{\Omega|_{\alpha} \varepsilon^{\xi\eta} \varepsilon^{\rho\alpha} b_{\xi\rho}}{K} \right]_{\lambda} \quad (3-62)$$

Employant les équations de CODAZZI

$$\Omega^{\eta}|_{\eta} = - \varepsilon^{\xi\eta} \varepsilon^{\rho\alpha} b_{\xi\rho} \left[\frac{\Omega|_{\alpha}}{K} \right]_{\eta} \quad (3-63)$$

Substituant (3-63) dans (3-58), nous écrivons finalement

$$\varepsilon^{\xi\lambda} \varepsilon^{\rho\gamma} b_{\xi\rho} \left[\frac{\Omega|_{\gamma}}{K} \right]_{\lambda} + \Omega b_{\lambda}^{\lambda} = 0 \quad (3-64)$$

Équation (3-64) est une équation à dérivée partielle du second degré dont l'inconnu est la vitesse angulaire. On montre que sa solution dépend fortement de la forme de la surface de la coque, et en particulier, sur le signe de la courbure de GAUSS

3-4 Relation entre déformation inextensionnelle et théorie de membrane

Dans ce qui suit, nous avons concerné au problème d'analogie quand la surface de coque n'est pas plane, ceci éliminera la possibilité de la dominance des effets de flexion et provoquera la dominance des efforts de membrane. Dans les surfaces où les efforts de membrane sont prédominants, la théorie de membrane est acceptée pour puisse couvrir l'analyse. Cependant, comme on a discuté dans l'introduction, principalement les efforts plans dans les coques membrane provoquent des perturbations aux bords, et le traitement de la théorie de flexion pur des surfaces exige des déformations planes aux bords pour empêcher la structure d'être un mécanisme.

L'équation (3-63) permet l'introduction d'une nouvelle quantité, telle que l'équation (3-52) devient

$$\bar{\Omega}_{,\alpha} \times a_{\beta} = c_{\alpha\beta} n \quad (3-65)$$

Donc

$$c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha} \quad (3-66)$$

La multiplication des deux côtés de (3-65) par n donne

$$\bar{\Omega}_{,\alpha} = c_{\alpha\nu} \varepsilon^{\rho\nu} a_{\rho} \quad (3-67)$$

Dérivant (3-67) par rapport à β , et en changeant les indices α et β et soustrayant, avec l'utilisation des équations du GAUSS (2-45) nous obtenons

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \bar{\Omega}_{,\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\rho\nu} c_{\alpha\nu}|_{\beta} a_{\rho} + \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\rho\nu} c_{\alpha\nu} b_{\beta\rho} a_3 = 0 \quad (3-68)$$

Où $\bar{\Omega}_{,\alpha\beta}$ est symétrique.

Le premier terme du côté droit de (3-68) est égal à zéro, donc $c_{\alpha\nu}$ est également symétrique c'est à dire

$$c_{\alpha\nu}|_{\beta} = c_{\beta\nu}|_{\alpha} \quad (3-69)$$

Donc (3-68) devient

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\rho\nu} c_{\alpha\nu} b_{\beta\rho} = 0 \quad (3-70)$$

Les équations (3-66), (3-69) et (3-70) sont les relations d'effort de flexion dans le cas flexionnel.

$$\begin{cases} c_{\alpha\nu} = c_{\nu\alpha} \\ \left[\varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\nu\rho} c_{\alpha\nu} \right]_{\beta} = 0 \\ \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\nu\rho} c_{\alpha\nu} b_{\beta\rho} = 0 \end{cases} \quad (3-71)$$

Maintenant, en présentant une nouvelle quantité $Q^{\beta\lambda}$ définie comme suit

$$Q^{\beta\lambda} = \varepsilon^{\beta\alpha} \varepsilon^{\lambda\nu} c_{\alpha\nu} \quad (3-72)$$

Les équations dans (3-71) devenu

$$\begin{cases} Q^{\beta\lambda} = Q^{\lambda\beta} \\ Q^{\beta\lambda} b_{\beta\lambda} = 0 \\ Q^{\beta\lambda} \Big|_{\beta} = 0 \end{cases} \quad (3-73)$$

Les équations (3-73) sont équivalentes aux équations d'équilibre de la surface de membrane (3-26) quand les charges externes sont égales à zéro, le tenseur $Q^{\beta\lambda}$ est équivalent au tenseur d'effort $N^{\beta\lambda}$. Alors l'équation (3-72) représente l'analogie entre les équations statiques et géométriques dans les relations d'équilibre et de compatibilité.

La condition d'empêcher la déformation inextensionnelle (déformation par flexion) est de montrer qu'il n'y a aucune solution aux équations de compatibilité (3-71) autre que $\varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\nu\rho} c_{\alpha\rho} = 0$

Par conséquent, en termes d'efforts, nous devons montrer l'existence d'une solution aux équations complètes de la théorie de membrane.

Avant de fermer cette section, nous laisser présentent deux quantités qui sont les taux de changement de la courbure et de la torsion normale \dot{K} et $\dot{\tau}$. Ces deux expressions seront employées dans la discussion des conditions aux limites des déformations inextensionnelles de structure de coque.

En supposant que le taux de déformation de membrane est égal à zéro $Y_{\alpha\beta} = 0$

On donne le taux de changement de la deuxième forme fondamentale

$$\dot{b}_{\alpha\beta} = v_{,\alpha\lambda} n + a_{\alpha,\lambda} \dot{n} \quad (3-74)$$

Substituant (3-50) dans (3-74) on trouve

$$\dot{b}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\rho\alpha} \varepsilon_{\beta\lambda} B^{\beta\rho} \quad (3-75)$$

Où $B^{\beta\rho}$ est le tenseur des taux de flexion exprimé comme suit :

$$B^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\gamma} \bar{\Omega}_{,\gamma} a^{\beta} \quad (3-76)$$

On trouve le tenseur de changement de b_{β}^{α} , on écrit

$$\dot{b}_{\beta}^{\alpha} = \dot{a}^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + a^{\alpha\beta} \dot{b}_{\alpha\beta} \quad (3-77)$$

Substituant (3-75) et (3-33) dans (3-77)

$$\dot{b}_{\beta}^{\alpha} = \varepsilon^{\rho\lambda} \varepsilon_{\gamma\beta} B^{\gamma\rho} a^{\alpha\beta} \quad (3-78)$$

Le taux de changement de la courbure normale dans les modes de déformation inextensionnelle sera obtenu en (2-23) par rapport au temps,

$$\dot{K}_n = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{b_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta}{a_{\gamma\eta} d\xi^\gamma d\xi^\eta} \right] = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{b_\beta^\lambda a_{\beta\lambda} d\xi^\alpha d\xi^\beta}{a_{\gamma\eta} d\xi^\gamma d\xi^\eta} \right]$$

$$\dot{K}_n = -\frac{\dot{b}_\beta^\lambda a_{\beta\lambda} d\xi^\alpha d\xi^\beta}{a_{\gamma\eta} d\xi^\gamma d\xi^\eta} \quad (3-79)$$

En substituant (3-77) dans (3-79) on trouve

$$\dot{K}_n = -\frac{\varepsilon_{\rho\alpha} \varepsilon_{\gamma\beta} B^{\rho\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta}{a_{\gamma\eta} d\xi^\gamma d\xi^\eta} \quad (3-80)$$

Le dérivé de (2-24) par rapport au temps nous donne le taux de changement de la torsion

$$\dot{t} = \frac{\varepsilon_{\eta\beta} \varepsilon_{\gamma\nu} \varepsilon_{\alpha\lambda} a^{\lambda\nu} B^{\gamma\eta} d\xi^\alpha d\xi^\beta}{a_{\gamma\eta} d\xi^\gamma d\xi^\eta} \quad (3-81)$$

3-5 Conclusion

Les déformations inextensionnelle d'une surface doivent satisfait certains équations à dérivées partielles contenant la vitesse et la vitesse angulaire. Le but est de réduire ces équations à une seule équation et définir les conditions aux limites pour empêcher les déformations inextensionnelle.

Le dispositif le plus important de ces conditions est que les conditions aux limites nécessaires pour empêcher la déformation inextensionnelle sont ceux qui sont nécessaires pour l'équilibre des coques membrane. Ainsi, concevoir une coque membrane est d'éliminer les petites déformations inextensionnelle qui signifient également empêcher la structure de se comporter comme un mécanisme.

CHAPITRE IV

APPLICATION SUR LES COQUES DE REVOLUTION

4-1 Introduction

La rigidité géométrique, au sens qui convient ici, consiste en la non-existence de déformations inextensionnelles de la surface. Le système exprimant le caractère inextensionnel, dit système de rigidité, admet plusieurs écritures dont aucune ne relève des théories classiques. Le fait que la surface moyenne d'une coque soit géométriquement rigide ou non (inhibé ou non) définit le cadre dans le lequel se place le comportement asymptotique des coques de petite épaisseur.

4-1-1 Définition

Une surface de révolution est caractérisée par la rotation d'une courbe plane, dite C autour d'un axe A qui trouve dans son plan figure (4.1). La courbe C est appelée la courbe de méridien. Le point P sur la courbe C est changé dans une direction perpendiculaire à l'axe A et tangentiel au méridien, il trace une autre courbe perpendiculaire à la courbe C appelée le cercle parallèle (le cercle de latitude). Alors l'axe A est appelé l'axe de révolution et la surface produite de cette manière est la surface de révolution.

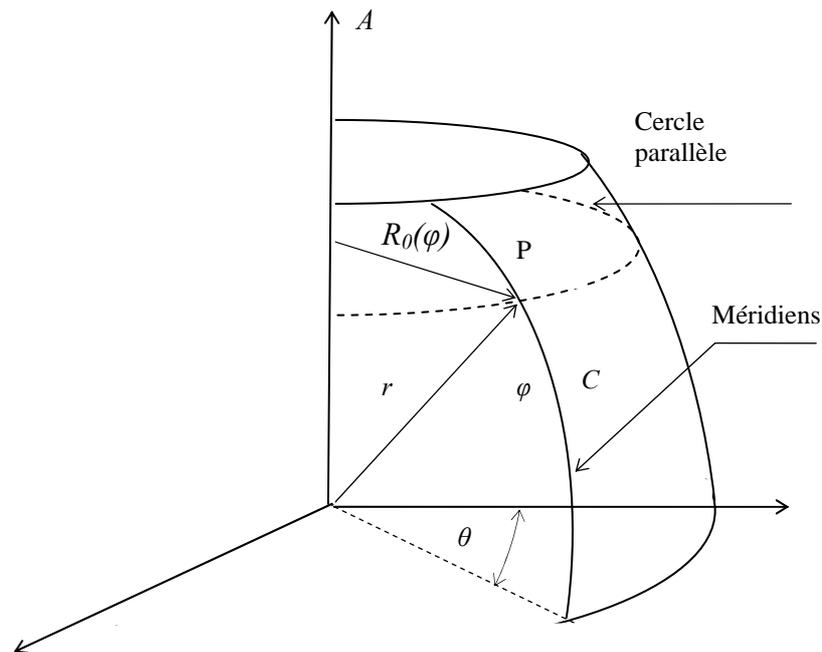


Figure (4.1) Surface de révolution

4-1-2 La géométrie

Le vecteur de position de point P sur la surface de révolution est donné par :

$$r(\varphi, \theta) = R_0(\varphi)(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) + Z(\varphi) e_3 \quad (4-1)$$

Où :

La position des parallèles est défini par $Z = f(\varphi)$

L'équation des courbes des méridiens est donnée par $R_0 = f(\varphi)$

Où R_0 : rayon des cercles de latitude à la position φ

Alors, pour obtenir la première et la deuxième forme fondamentale de la surface, en associant les paramètres ξ_1, ξ_2 avec φ et θ respectivement.

Donc, d'après (2.3), les vecteurs de base covariantes sont

$$\begin{cases} a_1 = R_0 (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) \\ a_2 = R_0' (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) + Z' e_3 \end{cases} \quad (4-2)$$

Où :

$$\begin{cases} R_0' = \frac{\partial R_0}{\partial \varphi} \\ Z' = \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (4-3)$$

Les composantes covariantes du tenseur métrique sont données par :

$$\begin{cases} a_1 \cdot a_1 = a_{11} = R_0^2 \\ a_1 \cdot a_2 = a_{12} = 0 \\ a_2 \cdot a_2 = a_{22} = R_0'^2 + Z'^2 \end{cases} \quad (4-4)$$

La deuxième équation montre que les méridiens et les parallèles forment une famille orthogonale des lignes paramétrique, alors :

$$[a_{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} R_0^2 & 0 \\ 0 & R_0'^2 + Z'^2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant est donne par

$$a = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 = R_0^2 (R_0'^2 + Z'^2) \quad (4-5)$$

En utilisant (2.10), on déduit les composantes contravariantes $a^{\alpha\beta}$ du tenseur métrique :

$$\begin{cases} a^{11} = \frac{1}{R_0^2} \\ a^{12} = 0 \\ a^{22} = \frac{1}{R_0'^2 + Z'^2} \end{cases} \quad (4-6)$$

Donc :

$$[a^{\alpha\beta}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_0^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_0'^2 + Z'^2} \end{pmatrix}$$

On peut alors déduire les vecteurs de base tangente contravariante :

$$\begin{cases} a^1 = a^{11}a_1 = -\frac{1}{R_0}(\sin\theta e_1 - \cos\theta e_2) \\ a^2 = a^{22}a_2 = \frac{1}{R_0'^2 + Z'^2} [R_0'(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2) + Z' e_3] \end{cases} \quad (4-7)$$

L'équation (2-5) donne le vecteur normal de la surface, donc on a

$$(a_1 \wedge a_2) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -R_0 \sin\theta & R_0 \cos\theta & 0 \\ R_0' \cos\theta & R_0' \sin\theta & Z' \end{pmatrix}$$

$$(a_1 \wedge a_2) = R_0 Z' \cos\theta e_1 + R_0 Z' \sin\theta e_2 - R_0 R_0' e_3$$

Dans le cas où a_1 et a_2 sont orthogonales on a

$$|a_1 \wedge a_2| = \sqrt{a} = \sqrt{R_0^2 (R_0'^2 + Z'^2)}$$

Donc la normale à la surface vaut :

$$n = \frac{1}{\sqrt{R_0'^2 + Z'^2}} (Z' \cos \theta e_1 + Z' \sin \theta e_2 - R_0' e_3) \quad (4-8)$$

Les dérivées des vecteurs de base covariantes sont données par :

$$\begin{cases} a_{1,1} = R_0 (-\cos \theta e_1 - \sin \theta e_2) \\ a_{2,2} = R_0'' (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) + Z'' e_3 \\ a_{1,2} = a_{2,1} = -R_0' (\sin \theta e_1 - \cos \theta e_2) \end{cases} \quad (4-9)$$

Le tenseur de courbure en utilisant les dérivées des vecteurs de base covariantes est

$$\begin{cases} b_{11} = a_{1,1} \cdot a_3 = -\frac{R_0 Z'}{\sqrt{R_0'^2 + Z'^2}} \\ b_{22} = a_{2,2} \cdot a_3 = \frac{1}{\sqrt{R_0'^2 + Z'^2}} (R_0'' Z' - R_0' Z'') \\ b_{12} = b_{21} = 0 \end{cases} \quad (4-10)$$

Utilisant (2-19), on déduit ses composantes mixtes :

$$[b_\alpha^\beta] = \begin{pmatrix} -\frac{Z'}{R_0 \sqrt{R_0'^2 + Z'^2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R_0'^2 + Z'^2)^{3/2}} (R_0'' Z' - R_0' Z'') \end{pmatrix} \quad (4-11)$$

La courbure de GAUSS et la courbure moyenne sont données respectivement selon (2-32) et (2-31) par :

$$K = -\frac{Z' (R_0'' Z' - R_0' Z'')}{R_0 (R_0'^2 + Z'^2)^2} \quad (4-12)$$

$$2M = \frac{R_0 (R_0'' Z' + R_0' Z'') - Z' (R_0'^2 + Z'^2)^2}{R_0 (R_0'^2 + Z'^2)^{3/2}} \quad (4-13)$$

En utilisant (2-38), on calcule les symboles de CHRISTOFFEL pour les surfaces de révolution

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Gamma_{11}^1 = a^1 . a_{1,1} = 0 & \Gamma_{22}^2 = a^2 . a_{2,2} = \frac{R_0'' R_0' + Z' Z''}{(R_0'^2 + Z'^2)} \\ \Gamma_{21}^1 = a^1 . a_{2,1} = \frac{R_0'}{R_0} & \Gamma_{12}^2 = a^2 . a_{1,2} = 0 \\ \Gamma_{22}^1 = a^1 . a_{2,2} = 0 & \Gamma_{11}^2 = a^2 . a_{1,1} = -\frac{R_0 R_0'}{(R_0'^2 + Z'^2)} \end{array} \right. \quad (4-14)$$

4-1-3 Les conditions de rigidités

L'équation (2-26) donne le symbole de permutation pour la surface de révolution

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{12} = \sqrt{a} = R_0 \sqrt{R_0'^2 + Z'^2} \\ \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{12} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{R_0 \sqrt{R_0'^2 + Z'^2}} \end{array} \right. \quad (4-15)$$

La dérivée covariante de la courbure de GAUSS K est

$$K|_{\alpha} = \frac{b_{11}|_{\alpha} b_{22} + b_{11} b_{22}|_{\alpha} - 2 b_{12} b_{12}|_{\alpha}}{a} \quad (4-16)$$

Nous écrivons également comme nous avons dans (1-44)

$$\Omega|_{\alpha\beta} = \Omega_{,\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \Omega_{,\gamma} \quad (4-17)$$

Donc

$$\begin{cases} \Omega|_{11} = \Omega_{,11} - \Gamma_{11}^1 \Omega_{,1} - \Gamma_{11}^2 \Omega_{,2} \\ \Omega|_{21} = \Omega|_{12} = \Omega_{,12} - \Gamma_{12}^1 \Omega_{,1} - \Gamma_{12}^2 \Omega_{,2} \\ \Omega|_{22} = \Omega_{,22} - \Gamma_{22}^1 \Omega_{,1} - \Gamma_{22}^2 \Omega_{,2} \end{cases}$$

De (1-45), nous pouvons écrire

$$b_{\alpha\beta}|_{\gamma} = b_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho} b_{\rho\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\rho} b_{\alpha\rho} \quad (4-18)$$

Maintenant, en utilisant l'équation (3-64), nous dérivons les composantes tangentielles de la vitesse angulaire comme suit

$$\Omega^{\eta} = - \frac{\Omega|_{\beta} \varepsilon^{\alpha\eta} \varepsilon^{\gamma\beta} b_{\alpha\gamma}}{K} \quad (4-19)$$

Alors, avec $b_{12} = b_{21} = 0$ et $\Omega|_{\beta} = \Omega_{,\beta}$, nous écrivons

$$\begin{cases} \Omega^1 = - \frac{\Omega|_1 \varepsilon^{12} \varepsilon^{12} b_{22}}{K} \\ \Omega^2 = - \frac{\Omega|_2 \varepsilon^{12} \varepsilon^{12} b_{11}}{K} \end{cases} \quad (4-20)$$

Considérant les bords des cercles qui tournent autour des cercles parallèles, donc $\theta^2 = \text{constante}$ et $d\theta^2 = 0$. Ainsi selon (3-80) le taux de changement de la courbure normale sera

$$\dot{K}_n = \frac{(\varepsilon_{12})^2 \beta^{22}}{a_{11}} \quad (4-21)$$

Et le taux de changement de la torsion de (3-81) sera

$$\dot{\tau} = \frac{(\varepsilon_{12})^3 \beta^{12} a^{22}}{a_{11}} \quad (4-22)$$

De (3-76) et (3-60), le tenseur $\beta^{\alpha\beta}$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta^{12} = \varepsilon^{12} \left(\Omega^2 \Big|_2 - \Omega b_2^2 \right) \\ \beta^{21} = \varepsilon^{21} \left(\Omega^1 \Big|_1 - \Omega b_1^1 \right) \\ \beta^{22} = \varepsilon^{21} \left(\Omega^2 \Big|_1 - \Omega b_1^2 \right) \\ \beta^{11} = \varepsilon^{12} \left(\Omega^1 \Big|_2 - \Omega b_2^1 \right) \end{array} \right. \quad (4-23)$$

De (3-64), nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega^1 \Big|_1 = - \left[\varepsilon^{21} \varepsilon^{21} b_{22} \frac{\Omega \Big|_1}{K} + \varepsilon^{21} \varepsilon^{12} b_{21} \frac{\Omega \Big|_2}{K} \right] \Big|_1 \\ \Omega^1 \Big|_2 = - \left[\varepsilon^{21} \varepsilon^{21} b_{22} \frac{\Omega \Big|_1}{K} + \varepsilon^{21} \varepsilon^{12} b_{21} \frac{\Omega \Big|_2}{K} \right] \Big|_2 \\ \Omega^2 \Big|_1 = - \left[\varepsilon^{12} \varepsilon^{12} b_{11} \frac{\Omega \Big|_2}{K} + \varepsilon^{12} \varepsilon^{21} b_{12} \frac{\Omega \Big|_1}{K} \right] \Big|_1 \\ \Omega^2 \Big|_2 = - \left[\varepsilon^{12} \varepsilon^{12} b_{11} \frac{\Omega \Big|_2}{K} + \varepsilon^{12} \varepsilon^{21} b_{12} \frac{\Omega \Big|_1}{K} \right] \Big|_2 \end{array} \right. \quad (4-24)$$

4-2 Coques sphériques : ($K > 0$ surface synclastique)

4-2-1 La géométrie

Le vecteur de position d'un point sur la surface de la sphère voir figure (4.2), est :

$$R(\varphi, \theta) = \frac{r}{\cosh \varphi} (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 + \sinh \varphi e_3) \quad (4-25)$$

Le cercle parallèle à la surface moyenne :

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{r}{\cosh \varphi} & R_0' &= -\frac{r \sinh \varphi}{\cosh^2 \varphi} & R_0'' &= -r \frac{(1 - \sinh^2 \varphi)}{\cosh^3 \varphi} \\ Z &= r \sinh \varphi & Z' &= \frac{r}{\cosh^2 \varphi} & Z'' &= -\frac{2 r \sinh \varphi}{\cosh^3 \varphi} \end{aligned}$$

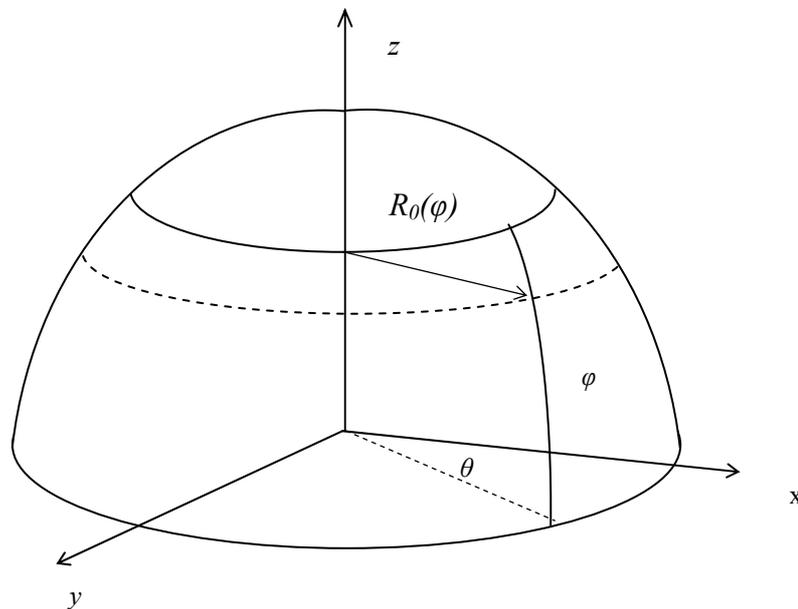


Figure (4.2) Coque sphérique

Les vecteurs de base

$$\begin{cases} a_1 = \frac{r}{\cosh \varphi} (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) \\ a_2 = \frac{r}{\cosh^2 \varphi} (-\cos \theta \sinh \varphi e_1 - \sin \theta \sinh \varphi e_2 + e_3) \end{cases} \quad (4-26)$$

Les composantes du tenseur métrique sont données par :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{r^2}{\cosh^2 \varphi} & a_{22} &= \frac{r^2}{\cosh^2 \varphi} & a_{12} &= a_{21} = 0 \\ a^{11} &= \frac{\cosh^2 \varphi}{r^2} & a^{22} &= \frac{\cosh^2 \varphi}{r^2} & a^{12} &= a^{21} = 0 \end{aligned} \quad (4-27)$$

Donc, les vecteurs de base contravariante sont :

$$\begin{cases} a^1 = \frac{\cosh \varphi}{r} (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) \\ a^2 = \frac{1}{r} (-\cos \theta \sinh \varphi e_1 - \sin \theta \sinh \varphi e_2 + e_3) \end{cases} \quad (4-28)$$

Et

$$n = \frac{1}{\cosh \varphi} (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 + \sinh \varphi e_3) \quad (4-29)$$

Donc

$$\begin{cases} a_{1,1} = -\frac{r}{\cosh \varphi} (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \\ a_{2,2} = -\frac{r}{\cosh^3 \varphi} \left[(1 - \sinh^2 \varphi) (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) + 2 \sinh \varphi e_3 \right] \\ a_{1,2} = a_{2,1} = \frac{r \sinh \varphi}{\cosh^2 \varphi} (\sin \theta e_1 - \cos \theta e_2) \end{cases} \quad (4-30)$$

Alors les composantes du tenseur de courbure sont données par :

$$\begin{aligned} b_{22} = b_{11} &= -\frac{r}{\cosh^2 \varphi} & b_1^1 = b_2^2 &= -\frac{1}{r} \\ b_{12} = b_{21} &= 0 & b_2^1 = b_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4-31)$$

Les symboles de CHRISTOFFEL sont :

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = 0 & \Gamma_{22}^2 = -\tanh \varphi \\ \Gamma_{21}^1 = -\tanh \varphi & \Gamma_{12}^2 = 0 \\ \Gamma_{22}^1 = 0 & \Gamma_{11}^2 = \tanh \varphi \end{cases} \quad (4-32)$$

La courbure de GAUSS et la courbure moyenne :

$$K = \frac{1}{r^2} \quad M = -\frac{1}{r} \quad (4-33)$$

Donc

$$K|_{\alpha} = 0 \quad (4-34)$$

4-2-2 Les conditions de rigidités

De l'équation (3-64), nous écrivons

$$\varepsilon^{\xi\lambda} \varepsilon^{\rho\gamma} b_{\xi\rho} \left[\frac{\Omega|_{\gamma}}{K} \right]_{\lambda} + \Omega b_{\lambda}^{\lambda} = 0 \quad (4-35)$$

L'équation (4-35) représente une simple équation tensorielle. Comme ε^{11} et ε^{22} sont nuls, et dans ce cas $b_{12} = b_{21} = 0$, donc nous écrivons

$$\varepsilon^{12} \varepsilon^{12} \left[b_{11} \left[\frac{\Omega|_2}{K} \right]_2 + b_{22} \left[\frac{\Omega|_1}{K} \right]_1 \right] + \Omega [b_1^1 + b_2^2] = 0 \quad (4-36)$$

Cette formule est valide pour toutes les coques de révolution à condition que la courbure de GAUSS soit différente de zéro.

Effectuant la dérivée et en utilisant (4-34), nous écrivons

$$\varepsilon^{12} \varepsilon^{12} \left[b_{11} \left[\frac{\Omega_{22}}{K} \right] + b_{22} \left[\frac{\Omega_{11}}{K} \right] \right] + \Omega [b_1^1 + b_2^2] = 0 \quad (4-37)$$

On donne selon (2-26)

$$\varepsilon_{12} = - \varepsilon_{12} = \frac{r^2}{\cosh^2 \varphi}$$

Remplaçant les quantités géométriques correspondantes aux coques sphériques et en utilisant (4-17), nous obtenons finalement

$$\cosh^2 \varphi [\Omega_{,22} + \Omega_{,11}] + 2 \Omega = 0 \quad (4-38)$$

Cette équation est une équation à dérivées partielles du second degré dont la composante normale est la vitesse angulaire, et selon BERG et MCGREGOR (1969) et ANDREWS (1986) elle est de type elliptique. Comme nous allons être concernés par les coques de révolution dans lesquelles les cercles de bord sont continus et fermés, la solution des équations à dérivées partielles sera périodique avec une période du 2π . La périodicité de la solution peut être faite pour ramener notre problème à une équation ordinaire du second degré.

Si nous écrivons la solution comme suit

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n(\varphi) \cos n\theta + g_n(\varphi) \sin n\theta] \quad (4-39)$$

Où $f_n(\varphi)$ et $g_n(\varphi)$ sont en fonction de φ seulement, donc

$$\Omega_{,11} = - n^2 \Omega \quad (4-40)$$

L'équation (4-38) devient

$$\begin{cases} \cosh^2 \varphi f_n''(\varphi) - f_n(\varphi)(n^2 \cosh^2 \varphi - 2) = 0 \\ \cosh^2 \varphi g_n''(\varphi) - g_n(\varphi)(n^2 \cosh^2 \varphi - 2) = 0 \end{cases} \quad (4-41)$$

Ces équations ont les solutions générales suivantes

$$\begin{cases} f_n(\varphi) = A_n [n \cosh n\varphi - \sinh n\varphi \tanh \varphi] + B_n [n \sinh n\varphi - \cosh n\varphi \tanh \varphi] \\ g_n(\varphi) = C_n [n \cosh n\varphi - \sinh n\varphi \tanh \varphi] + D_n [n \sinh n\varphi - \cosh n\varphi \tanh \varphi] \end{cases} \quad (4-42)$$

Où A_n, B_n, C_n, D_n sont des constantes qui seront déterminées par les conditions aux limites, C_0, D_0 ne produisent pas une solution pour $\sin n\theta = 0$.

La discussion du cas spécial des solutions lorsque n prend les deux valeurs 0 et 1 sera donnée quand nous dérivons les vitesses correspondantes.

Substituant (4-42) dans (4-39), nous écrivons

$$\begin{aligned} \Omega = \sum_{n=0}^{\infty} & \left[\left(A_n [n \cosh n\varphi - \sinh n\varphi \tanh \varphi] \right. \right. \\ & \left. \left. + B_n [n \sinh n\varphi - \cosh n\varphi \tanh \varphi] \right) \cos n\theta \right. \\ & \left. + \left(C_n [n \cosh n\varphi - \sinh n\varphi \tanh \varphi] \right. \right. \\ & \left. \left. + D_n [n \sinh n\varphi - \cosh n\varphi \tanh \varphi] \right) \sin n\theta \right] \end{aligned} \quad (4-43)$$

Finalement, de (4-20) les composantes tangentielles sont

$$\begin{aligned} \Omega^1 = \frac{n \cosh^2 \varphi}{r} \sum_{n=0}^{\infty} & \left[- \left(A_n \left[n \cosh n\varphi - \sinh n\varphi \tanh \varphi \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + B_n \left[n \sinh n\varphi - \cosh n\varphi \tanh \varphi \right] \right) \sin n\theta \right. \\ & \left. + \left(C_n \left[n \cosh n\varphi - \sinh n\varphi \tanh \varphi \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + D_n \left[n \sinh n\varphi - \cosh n\varphi \tanh \varphi \right] \right) \cos n\theta \right] \end{aligned} \quad (4-44)$$

$$\begin{aligned} \Omega^2 = \frac{\cosh^2 \varphi}{r} \sum_{n=0}^{\infty} & \left[\left(A_n \left[\sinh n\varphi \frac{(n^2 \cosh^2 \varphi - 1)}{\cosh^2 \varphi} - n \cosh n\varphi \tanh \varphi \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + B_n \left[\cosh n\varphi \frac{(n^2 \cosh^2 \varphi - 1)}{\cosh^2 \varphi} - n \sinh n\varphi \tanh \varphi \right] \right) \cos n\theta \right. \\ & \left. + \left(C_n \left[\sinh n\varphi \frac{(n^2 \cosh^2 \varphi - 1)}{\cosh^2 \varphi} - n \cosh n\varphi \tanh \varphi \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + D_n \left[\cosh n\varphi \frac{(n^2 \cosh^2 \varphi - 1)}{\cosh^2 \varphi} - n \sinh n\varphi \tanh \varphi \right] \right) \sin n\theta \right] \end{aligned} \quad (4-45)$$

Après avoir trouvé les composantes de la vitesse angulaire, dans les modes des déformations inextensionnelles, les vitesses correspondantes seront employées pour la génération des modes déformations inextensionnelles, ainsi de (3-45) et (3-46) et (3-47) nous avons

$$v_{,\alpha} = \bar{\Omega} \times a_{\alpha}$$

$$v_{,1} = \left(\Omega^1 a_1 + \Omega^2 a_2 + \Omega n \right) a_{\alpha} \quad (4-46)$$

Utilisant (2-25) et (2-26) nous écrivons

$$v_{,1} = \sqrt{a} \left(-\Omega^2 n + \Omega a^2 \right) \quad (4-47)$$

Substituant (4-28), (4-29), (4-42) et (4-45) dans (4-47) nous obtenons l'expression suivante

$$\begin{aligned}
v_{,1} = & -\frac{r}{\cosh \varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left[A_n \left((n^2 - 1) \sinh n\varphi \right) + B_n \left((n^2 - 1) \cosh n\varphi \right) \right] \cos n\theta \right. \\
& + \left. \left[C_n \left((n^2 - 1) \sinh n\varphi \right) + D_n \left((n^2 - 1) \cosh n\varphi \right) \right] \sin n\theta \right] \times \left[\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \right] \\
& + r n \left[\left[A_n \left(-n \sinh n\varphi \tanh \varphi + \cosh \varphi \right) + B_n \left(-n \cosh n\varphi \tanh \varphi + \sinh \varphi \right) \right] \cos n\theta \right. \\
& + \left. \left[C_n \left(-n \sinh n\varphi \tanh \varphi + \cosh \varphi \right) + D_n \left(-n \cosh n\varphi \tanh \varphi + \sinh \varphi \right) \right] \sin n\theta \right] e_3
\end{aligned} \tag{4-48}$$

Puis, intégrant (4-48) dans la direction du cercle parallèle, nous obtenons

$$\begin{aligned}
v = & -\frac{r}{\cosh \varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[n \left[\left(A_n \sinh n\varphi + B_n \cosh n\varphi \right) \sin n\theta \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(C_n \sinh n\varphi + D_n \cosh n\varphi \right) \cos n\theta \right] \times \left[\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \right] \right. \\
& - \left[\left(A_n \sinh n\varphi + B_n \cosh n\varphi \right) \cos n\theta \right. \\
& \left. + \left(C_n \sinh n\varphi + D_n \cosh n\varphi \right) \sin n\theta \right] \times \left[\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2 \right] \\
& + \left[\left[\left(A_n \sinh n\varphi + B_n \cosh n\varphi \right) n \sinh \varphi \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(A_n \cosh n\varphi + B_n \sinh n\varphi \right) \cosh \varphi \right] \sin n\theta \right. \\
& - \left[\left(C_n \sinh n\varphi + D_n \cosh n\varphi \right) n \sinh \varphi \right. \\
& \left. \left. - \left(C_n \cosh n\varphi + D_n \sinh n\varphi \right) n \cosh \varphi \right] \cos n\theta \right] e_3 + c
\end{aligned} \tag{4-49}$$

Où le vecteur constant c représente seulement une translation (translation du corps rigide).

Donc, deux types de déformation peuvent être distingués :

D'abord, considérant le cas de $n = 0$, nous obtenons seulement une rotation autour de l'axe Z représentée par B_0 dans l'expression suivante

$$\frac{r}{\cosh \varphi} B_0 (\sin \theta e_1 - \cos \theta e_2) \quad (4-50)$$

En outre le déplacement dû à $n = 1$ est

$$\begin{aligned} -\frac{r}{\cosh \varphi} \left[(A_1 \sinh \varphi + B_1 \cosh \varphi) e_1 - (C_1 \sinh \varphi + D_1 \cosh \varphi) e_2 \right. \\ \left. - (A_1 \sin \theta - C_1 \cos \theta) e_3 \right] \end{aligned} \quad (4-51)$$

L'analyse de cette équation indique que B_1, D_1 produisent les vitesses du corps rigide et A_1, C_1 produisent les vitesses angulaires du corps rigide autour des axes x et y . Donc les valeurs $n = 0$ et $n = 1$ ne seront pas considérées pour appartenir aux modes des déformations inextensionnelles, et représentent seulement le mouvement du corps rigide.

Deuxièmement, les valeurs de n qui sont supérieures ou égales à deux produisent une réelle déformation inextensionnelle, et rendent la structure d'être un mécanisme. Si les vitesses doivent être déterminées au Nord de la coque sphérique quand φ tend vers ∞ , donc $A_n = -B_n$ et $C_n = -D_n$. Identiquement, si les vitesses doivent être déterminées au Sud, quand φ tend vers $-\infty$, donc $A_n = B_n$ et $C_n = D_n$.

En conséquence, nous disons qu'une complète coque sphérique est incapable de subir les déformations inextensionnelles c'est à dire que la sphère complète ne peut pas fléchi sans dilatation et cisaillement de la surface moyenne.

Les composantes du vecteur de vitesse sont

$$\begin{aligned}
 v^1 &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left[[A_n \sinh n\varphi + B_n \cosh n\varphi] \cos n\theta + [C_n \sinh n\varphi + D_n \cosh n\varphi] \sin n\theta \right] \\
 v^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[[A_n \cosh n\varphi + B_n \sinh n\varphi] \sin n\theta - [C_n \cosh n\varphi + D_n \sinh n\varphi] \cos n\theta \right] \\
 v^3 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r \sinh \varphi}{\cosh \varphi} \left[[A_n \cosh n\varphi + B_n \sinh n\varphi] \sin n\theta - [C_n \cosh n\varphi + D_n \sinh n\varphi] \cos n\theta \right] \\
 &\quad - r n \left[[A_n \sinh n\varphi + B_n \cosh n\varphi] \sin n\theta - [C_n \sinh n\varphi + D_n \cosh n\varphi] \cos n\theta \right]
 \end{aligned} \tag{4-52}$$

Ces composantes seront employées pour dessiner les modes des déformations inextensionnelles correspondant aux valeurs de n qui sont plus grand que 1, figure (4.3)

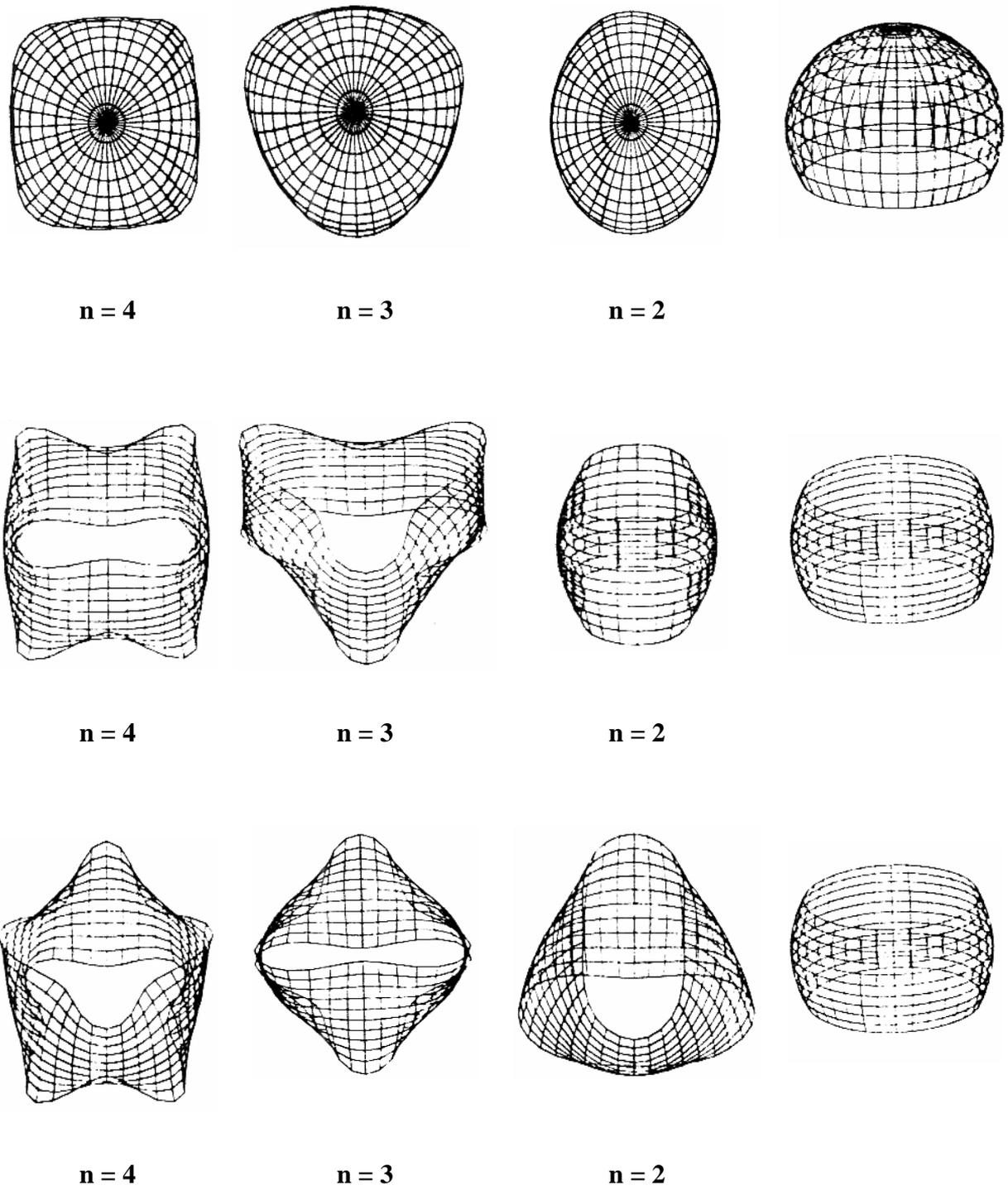


Figure (4.3) Déformations inextensionnelles des coques sphériques pour $n \geq 2$

4-2-3 Les conditions aux limites des coques sphériques

Dans la pratique, la coque sphérique ouverte vient de deux formes différentes selon que les lignes de bords se composent de un ou deux cercles de latitude (dôme ou toit sphérique et ceinture sphérique respectivement). Les deux cas sont considérés dans l'analyse actuelle, à cause de leur importance dans la construction et l'industrie.

Afin d'examiner l'effet de joindre une poutre rigide aux bords d'une coque sphérique, nous avons besoin des taux de changement de courbure et de torsion. Ces limites sont trouvées sur une ligne de latitude $\varphi = \text{constante}$

De (4-24), nous avons

$$\Omega^2|_2 = -(\varepsilon^{12})^2 \left[\left(\Omega|_{22} b_{11} + \Omega|_2 b_{11}|_2 - \Omega|_{12} b_{12} - \Omega|_1 b_{12}|_2 \right) \frac{1}{K} - \frac{(\Omega|_2 b_{11} - \Omega|_1 b_{12})}{K^2} K|_2 \right] \quad (4-53)$$

$$\Omega^2|_1 = -(\varepsilon^{12})^2 \left[\left(\Omega|_{21} b_{11} + \Omega|_2 b_{11}|_1 - \Omega|_{11} b_{12} - \Omega|_1 b_{12}|_1 \right) \frac{1}{K} - \frac{(\Omega|_2 b_{11} - \Omega|_1 b_{12})}{K^2} K|_1 \right] \quad (4-54)$$

Employant (4-17), (4-18) et les quantités géométriques obtenues ci-dessus pour la coque sphérique, nous écrivons

$$\begin{cases} \Omega^2|_1 = \frac{\cosh^2 \varphi}{r} (\Omega_{,21} + \Omega_{,1} \tanh \varphi) \\ \Omega^2|_2 = \frac{\cosh^2 \varphi}{r} (\Omega_{,22} + \Omega_{,2} \tanh \varphi) \end{cases} \quad (4-55)$$

Par conséquent, de (4-23)

$$\begin{aligned}\beta^{12} &= \frac{\cosh^2 \varphi}{r^2} \left[\frac{\cosh^2 \varphi}{r} (\Omega_{,22} + \Omega_{,2} \tanh \varphi) - \Omega b_2^2 \right] \\ \beta^{22} &= -\frac{\cosh^2 \varphi}{r^2} \left[\frac{\cosh^2 \varphi}{r} (\Omega_{,21} + \Omega_{,1} \tanh \varphi) \right]\end{aligned}\quad (4-56)$$

Ainsi, les taux de changement de courbure et de torsion pour la coque sphérique suivant une ligne $\varphi = \text{constante}$ sont respectivement

$$\begin{aligned}\dot{K}_n &= -\frac{\cosh^2 \varphi}{r} (\Omega_{,21} + \Omega_{,1} \tanh \varphi) \\ \dot{\tau} &= -\frac{\cosh^2 \varphi}{r} (\Omega_{,22} + \Omega_{,2} \tanh \varphi) + \frac{\Omega}{r}\end{aligned}\quad (4-57)$$

Exécutant les dérivées de la composante normale, les équations (4-57) deviennent

$$\begin{aligned}\dot{K}_n &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n^2-1)\cosh^2 \varphi}{r} \left[(A_n \sinh n\varphi + B_n \cosh n\varphi) \sin n\theta \right. \\ &\quad \left. - (C_n \sinh n\varphi + D_n \cosh n\varphi) \cos n\theta \right]\end{aligned}\quad (4-58)$$

$$\begin{aligned}\dot{\tau} &= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n^2-1)\cosh^2 \varphi}{r} \left[(A_n \cosh n\varphi + B_n \sinh n\varphi) \cos n\theta \right. \\ &\quad \left. + (C_n \cosh n\varphi + D_n \sinh n\varphi) \sin n\theta \right]\end{aligned}$$

Pour $n = 1$ et $n = 0$, \dot{K}_n et $\dot{\tau}$ sont égal à zéro, et ils sont utilisés pour un mouvement du corps rigide.

a- Une coque avec un seul bord

Si on a $\varphi = \infty$ on doit mettre $A_n = -B_n$ et $C_n = -D_n$ pour que la solution doive être déterminée, nous avons donc

$$\dot{K}_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n^2 - 1) \cosh^2 \varphi}{r} e^{-n\varphi} (-A_n \sin n\theta + C_n \cos n\theta) \quad (4-59)$$

$$\dot{\tau} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n^2 - 1) \cosh^2 \varphi}{r} e^{-n\varphi} (A_n \cos n\theta + C_n \sin n\theta)$$

Ainsi l'approvisionnement d'une poutre à un seul bord ($\dot{K}_n = 0$) est suffisant pour empêcher la déformation inextensionnelle, figure (4.4)

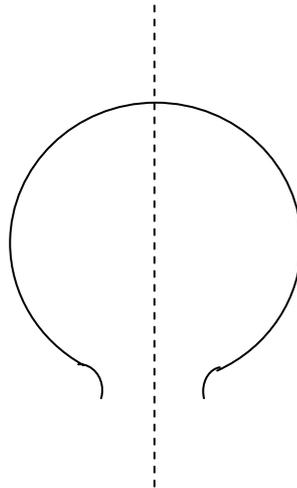


Figure (4.4) Coque sphérique avec un seul bord

b- Une coque avec deux bords

Dans ce cas nous avons, deux cercles de bord dont les deux extrémités du coque sphérique sont provisionnées par deux poutres, \dot{K}_n et $\dot{\tau}$ doivent être déterminés entre et sur ces cercles de bord, donc on a

$$\begin{aligned}
\dot{K}_n &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n^2-1) \cosh^2 \varphi}{r} \left[(A_n \sinh n\varphi + B_n \cosh n\varphi) \sin n\theta \right. \\
&\quad \left. - (C_n \sinh n\varphi + D_n \cosh n\varphi) \cos n\theta \right] \\
\dot{t} &= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n^2-1) \cosh^2 \varphi}{r} \left[(A_n \cosh n\varphi + B_n \sinh n\varphi) \cos n\theta \right. \\
&\quad \left. + (C_n \cosh n\varphi + D_n \sinh n\varphi) \sin n\theta \right]
\end{aligned} \tag{4-60}$$

Ainsi la déformation inextensionnelle est possible à moins que la rigidité appropriée soit fournie le long des cercles de bord

Premièrement, l'approvisionnement des poutres aux même bords est suffisant pour mettre $\dot{K}_n = 0$. Alors le système d'équations suivant est obtenu pour les deux cercles parallèles qui limitent la coque à $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_2$

$$\begin{cases}
(A_n \sinh n\varphi_1 + B_n \cosh n\varphi_1) \sin n\theta = 0 \\
(A_n \sinh n\varphi_2 + B_n \cosh n\varphi_2) \sin n\theta = 0
\end{cases}$$

Et également

$$\begin{cases}
(C_n \sinh n\varphi_1 + D_n \cosh n\varphi_1) \cos n\theta = 0 \\
(C_n \sinh n\varphi_2 + D_n \cosh n\varphi_2) \cos n\theta = 0
\end{cases}$$

Pour que ce système d'équations puissent avoir des solutions non nulles, leurs déterminants doivent disparaître, c'est-à-dire

$$\Delta = \sinh n\varphi_1 \cosh n\varphi_2 - \sinh n\varphi_2 \cosh n\varphi_1 = \sinh n(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{4-61}$$

$\Delta = 0$ seulement si $\varphi_1 = \varphi_2$ ce qui est impossible. Par conséquent la déformation inextensionnelle est empêchée par des poutres où les bords appropriés aux cercles de bord empêchent le changement de la courbure normale comme il est montré dans figure (4.5)

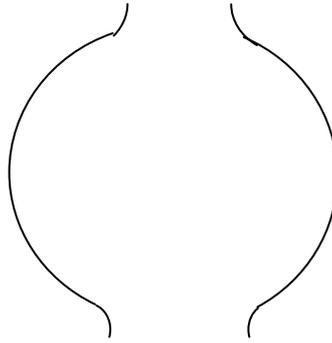


Figure (4.5) Coques sphériques avec deux bords

La deuxième possibilité est de fixer complètement un bord, c'est équivalent de mettre $\dot{K}_n = 0$ et $\dot{\tau}_n = 0$ au même bord. Ce qui donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (A_n \sinh n\varphi + B_n \cosh n\varphi) \sin n\theta = 0 \\ (A_n \cosh n\varphi + B_n \sinh n\varphi) \cos n\theta = 0 \end{cases}$$

Et aussi

$$\begin{cases} (C_n \sinh n\varphi + D_n \cosh n\varphi) \cos n\theta = 0 \\ (C_n \cosh n\varphi + D_n \sinh n\varphi) \sin n\theta = 0 \end{cases}$$

Où φ est l'angle sur le bord fixe.

De même, pour que ce système d'équations puissent avoir des solutions non nulles, leurs déterminants doivent disparaître. Cependant,

$$\Delta = \sinh^2 n\varphi - \cosh^2 n\varphi = -1 \quad (4-62)$$

Et parce que le déterminant n'est jamais égale à zéro, donc il y a seulement la solution triviale $A_n = B_n = 0$ et $C_n = D_n = 0$. Produisant la coque avec une base rigide à un seul bord est suffisant pour empêcher les déformations inextensionnelles, figure (4.6)

On fixe une coque membrane en position de vérification des deux composantes du déplacement dans la direction tangentielle. Le déplacement dans la direction normale de la surface de la coque ne peut pas être directement vérifié à cause de l'absence supposée de la force de cisaillement.

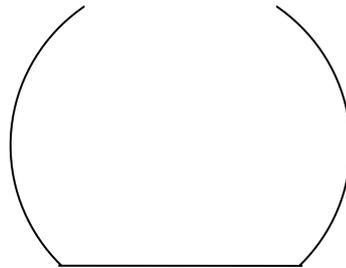


Figure (4.6) Coque sphérique avec une base rigide

4-3 Les coques catenoid ($K < 0$ surface anticlastique)

4-3-1 La géométrie

Le catenoïd représente la catégorie des surfaces qui ont une courbure gaussienne négative, figure (4.7). En outre le catenoïd est une surface minimale. Les cercles parallèles du catenoïd sont donnés par :

$$\begin{array}{lll} R_0 = r \cosh \varphi & R_0' = r \sinh \varphi & R_0'' = r \cosh \varphi \\ Z = r \varphi & Z' = r & Z'' = 0 \end{array}$$

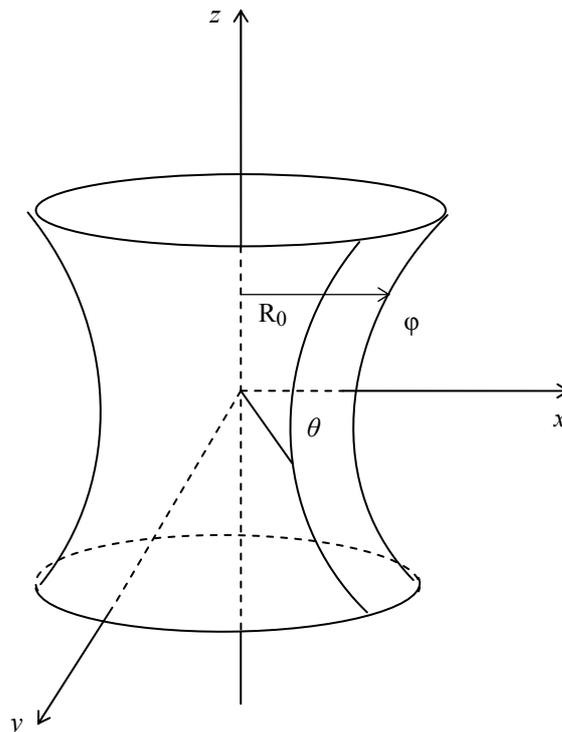


Figure (4.7) Coque catenoïd

Le vecteur de position du catenoïd est

$$R(\varphi, \theta) = r (\cosh \varphi \cos \theta e_1 + \cosh \varphi \sin \theta e_2 + \varphi e_3) \quad (4-63)$$

Les vecteurs de base sont :

$$\begin{cases} a_1 = r \cosh \varphi (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) \\ a_2 = r [\sinh \varphi (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) + e_3] \end{cases} \quad (4-64)$$

Les métriques sont données par :

$$\begin{aligned} a_{11} &= r^2 \cosh^2 \varphi & a_{22} &= r^2 \cosh^2 \varphi & a_{12} &= a_{21} = 0 \\ a^{11} &= \frac{1}{r^2 \cosh^2 \varphi} & a^{22} &= \frac{1}{r^2 \cosh^2 \varphi} & a^{12} &= a^{21} = 0 \end{aligned} \quad (4-65)$$

Les vecteurs de base contravariante :

$$\begin{cases} a^1 = \frac{1}{r \cosh \varphi} (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) \\ a^2 = \frac{1}{r \cosh^2 \varphi} (\cos \theta \sinh \varphi e_1 - \sin \theta \sinh \varphi e_2 + e_3) \end{cases} \quad (4-66)$$

Le déterminant est donné par :

$$a = a_{11} a_{22} = r^4 \cosh^4 \varphi \quad (4-67)$$

Le normale de la surface est :

$$n = \frac{1}{\cosh \varphi} (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 - \sinh \varphi e_3) \quad (4-68)$$

Les dérivées du vecteur de base

$$\begin{cases} a_{1,1} = -r \cosh \varphi (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \\ a_{2,2} = r \cosh \varphi (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \\ a_{1,2} = a_{2,1} = r \sinh \varphi (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) \end{cases} \quad (4-69)$$

Donc les composantes du tenseur de courbure sont :

$$\begin{aligned} b_{22} = -b_{11} = r & & b_1^1 = -b_2^2 = -\frac{1}{r \cosh^2 \varphi} \\ b_{12} = b_{21} = 0 & & b_2^1 = b_1^2 = 0 \end{aligned} \quad (4-70)$$

Les symboles de CHRISTOFFEL sont :

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = 0 & \Gamma_{22}^2 = \tanh \varphi \\ \Gamma_{21}^1 = \tanh \varphi & \Gamma_{12}^2 = 0 \\ \Gamma_{22}^1 = 0 & \Gamma_{11}^2 = -\tanh \varphi \end{cases} \quad (4-71)$$

La courbure de GAUSS :
$$K = -\frac{1}{r^2 \cosh^4 \varphi}$$

La courbure moyenne :
$$M = 0 \quad (\text{surface minimale}) \quad (4-72)$$

On a

$$K|_1 = 0 \quad K|_2 = \frac{4 \tanh \varphi}{r^2 \cosh^4 \varphi} \quad (4-73)$$

4-3-2 Les conditions de rigidité

Utilisant (4-17), (4-73) et remplaçant les quantités géométriques du catenoïd, l'équation (4-36) devient

$$\Omega_{,11} - \Omega_{,22} - 2 \Omega_{,2} \tanh \varphi = 0 \quad (4-74)$$

L'étude des coefficients, montre que l'équation (4-74) est de type hyperbolique. Donc, si nous écrivons la solution de la façon suivante :

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \left[f_n(\varphi) \cos n\theta + g_n(\varphi) \sin n\theta \right] \quad (4-75)$$

Où $f_n(\varphi)$ et $g_n(\varphi)$ fonction sont des fonctions de φ , on donne selon (4-40)

$$\Omega_{,11} = -n^2 \Omega$$

Alors la périodicité de la solution ramène le problème à une équation différentielle ordinaire, dérivant (4-75) et substituant dans (4-74), nous écrivons

$$\begin{cases} f_n''(\varphi) + 2 f_n'(\varphi) \tanh \varphi + n^2 f_n(\varphi) = 0 \\ g_n''(\varphi) + 2 g_n'(\varphi) \tanh \varphi + n^2 g_n(\varphi) = 0 \end{cases} \quad (4-76)$$

Ce système d'équations a la solution suivante

$$\begin{cases} f_n(\varphi) = \frac{1}{\cosh \varphi} \left(A_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] + B_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \\ g_n(\varphi) = \frac{1}{\cosh \varphi} \left(C_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] + D_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \end{cases} \quad (4-77)$$

Encore A_n, B_n, C_n, D_n sont des constantes, C_0 et D_0 peuvent être prises égal à zéro à cause de l'existence de $\sin n\theta$ dans (4-75)

Substituant (4-77) dans (4-75), la composante normale du vecteur de la vitesse angulaire devient

$$\begin{aligned} \Omega = \frac{1}{\cosh \varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(A_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] + B_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \cos n\theta \right. \\ \left. + \left(C_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] + D_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \sin n\theta \right] \end{aligned} \quad (4-78)$$

En utilisant l'équation (4-20) et substituant les quantités géométriques correspondantes, on donne les composantes tangentielles du vecteur de la vitesse angulaire pour le catenoïd

$$\Omega^1 = \frac{n}{r \cosh \varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[- \left(A_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] + B_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \sin n\theta \right. \\ \left. + \left(C_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] + D_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \cos n\theta \right] \quad (4-79)$$

$$\Omega^2 = - \frac{1}{r \cosh \varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left[- \left(A_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] - B_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \cos n\theta \right. \right. \\ \left. \left. - \left(C_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] - D_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \sin n\theta \right] \sqrt{(n^2 - 1)} \right. \\ \left. - \left[\left(A_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] + B_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \cos n\theta \right. \right. \\ \left. \left. + \left(C_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] + D_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \sin n\theta \right] \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} \right] \quad (4-80)$$

Le gradient de la vitesse de catenoïd est

$$v_{,1} = \sqrt{a} \left(- \Omega^2 n + \Omega a^2 \right) \quad (4-81)$$

Substituant les valeurs des vitesses angulaires du catenoïd, en utilisant les vecteurs de base et en intégrant, nous obtenons l'expression suivante

$$\begin{aligned}
v = & r \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n^2-1)}} \left[n \left[\left(A_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] - B_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \sin n\theta \right. \right. \\
& - \left. \left(C_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] - D_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \cos n\theta \right] (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_1) \\
& + \left[\left(A_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] - B_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \cos n\theta \right. \\
& \left. + \left(C_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] - D_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \sin n\theta \right] (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_1) \Big] \\
& + r \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\left[\cosh \varphi \left(A_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] + B_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{(n^2-1)} \sinh \varphi \left(A_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] - B_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \right] \sin n\theta \right. \\
& - \left[\cosh \varphi \left(C_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] + D_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \right. \\
& \left. \left. + (n^2-1) \sinh \varphi \left(C_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] - D_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \right] \cos n\theta \right] e_3 + c
\end{aligned} \tag{4-82}$$

Où c est un vecteur qui correspond à la vitesse des corps rigide.

Encore, les vitesses correspondantes aux valeurs $n = 0$ et $n = 1$ avec C_0 et D_0 sont égales à zéro, est

$$v = -r \left(A_0 \sinh \varphi - i B_0 \cosh \varphi \right) (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) + r A_0 \theta e_3 \tag{4-83}$$

Où $i = \sqrt{-1}$, et $n = 1$ donne :

$$\begin{aligned}
v = & -r \left[\left(A_1 \varphi - \frac{B_1}{\sqrt{(n^2-1)}} \right) e_2 - \left(C_1 \varphi - \frac{D_1}{\sqrt{(n^2-1)}} \right) e_1 \right. \\
& \left. - \cosh \varphi (A_1 \sin \theta - C_1 \cos \theta) e_3 \right]
\end{aligned} \tag{4-84}$$

Tout d'abord, B_0 devient imaginaire donc iB_0 devient réel. Dans ce cas la constante A_0 a une grande importance, il produit un déplacement dans la direction de e_3 qui change linéairement avec la coordonnée θ . C'est seulement possible si un méridien du catenoïd a disparu, c'est-à-dire que le catenoïd est ouvert le long du générateur où donc, son application par la suite donne une nouvelle surface connue sous le nom d'hélicoïde, figure (4.8).

Toutefois comme que nous sommes concernés par la déformation inextensionnelle dans laquelle la première forme fondamentale de la surface est préservée, ces deux surfaces (catenoïd et hélicoïde) sont identiques du point de vue des propriétés intrinsèques. Leurs différentes formes sont exprimées par leurs différentes deuxièmes formes fondamentales, voir LORD et WILSON (1984). Le présent phénomène connu dans la géométrie différentielle en tant qu'isométrie locale, voir aussi DO CAROM (1976).

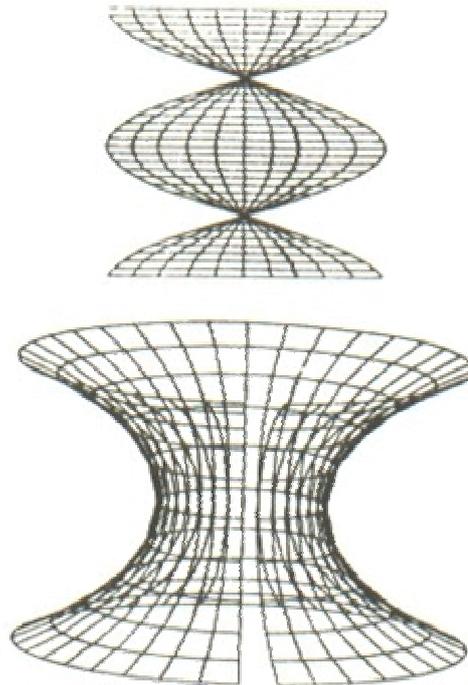


Figure (4.8) Le passage du catenoïd ouvert à un hélicoïde oblique

Les équations

$$\begin{cases} x = -\sinh \varphi \sin \theta \\ y = \sinh \varphi \cos \theta \\ z = \theta \end{cases} \quad (4-85)$$

Sont les équations paramétriques pour le vecteur de position de la surface hélicoïdale, qui est également une surface minimale. Selon DO CAROM (1976), si x et y sont deux fonctions différentielles qui satisfont les équations de CAUCHY_RIEMANN, alors elles sont vus pour être harmoniques et s'appelleront les équations harmoniques conjuguées. Si x et y sont des surfaces minimales, qui est le cas de l'hélicoïde et le catenoid, alors ils s'appellent les surfaces minimales conjuguées.

En outre, la surface $Z = \cos A x + \sin A y$ est une surface minimale pour tout $A \in R$. Si nous mettons $\cos A = t$ donc, on peut écrire le vecteur général de position pour les deux surfaces comme suit

$$\begin{cases} x = \sqrt{(1-t^2)} \cos \theta \cosh \varphi - t \sin \theta \sinh \varphi \\ y = \sqrt{(1-t^2)} \sin \theta \cosh \varphi + t \cos \theta \sinh \varphi \\ z = \sqrt{(1-t^2)} \varphi + t \theta \end{cases} \quad (4-86)$$

Avec $t = 0$ pour le catenoid, $t = 1$ pour l'hélicoïde oblique.

Cependant, comme nous sommes concernés par le catenoid complet, B_0 et A_0 doivent être prises égal à zéro. Les coefficients A_1 et C_1 produisent les vitesses angulaires du corps rigide, et B_1 , D_1 tend vers à zéro lorsque n tend vers 1. Ainsi, pour les modes de déformation inextensionnelle, nous examinerons seulement des valeurs de n qui sont plus grand que 1.

Les composantes de vecteur de vitesse sont

$$\begin{aligned}
 v^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n^2-1)} \cosh \varphi} & \left[\left(-A_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] + B_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \cos n\theta \right. \\
 & \left. + \left(-C_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] + D_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \sin n\theta \right] \\
 v^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\sinh \varphi}{n \sqrt{(n^2-1)} \cosh^2 \varphi} & \left[\left(A_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] - B_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \sin n\theta \right. \\
 & \left. - \left(C_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] - D_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \cos n\theta \right] \\
 & + \frac{1}{n \cosh \varphi} \left[\left(A_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] + B_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \sin n\theta \right. \\
 & \left. - \left(C_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] + D_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \cos n\theta \right] \quad (4-87)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-r}{\sqrt{(n^2-1)} \cosh \varphi} & \left[n^2 \cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi \right] \\
 & \times \left[\left(A_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] - B_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \sin n\theta \right. \\
 & \left. - \left(C_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] - D_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \cos n\theta \right] \\
 - \frac{r \sinh \varphi}{n} & \left[\left(A_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] + B_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \sin n\theta \right. \\
 & \left. - \left(C_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] + D_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2-1} \right] \right) \cos n\theta \right]
 \end{aligned}$$

Les graphiques des déformations inextensionnelles correspondantes pour $n \geq 2$ sont montrés dans la figue (4.9)

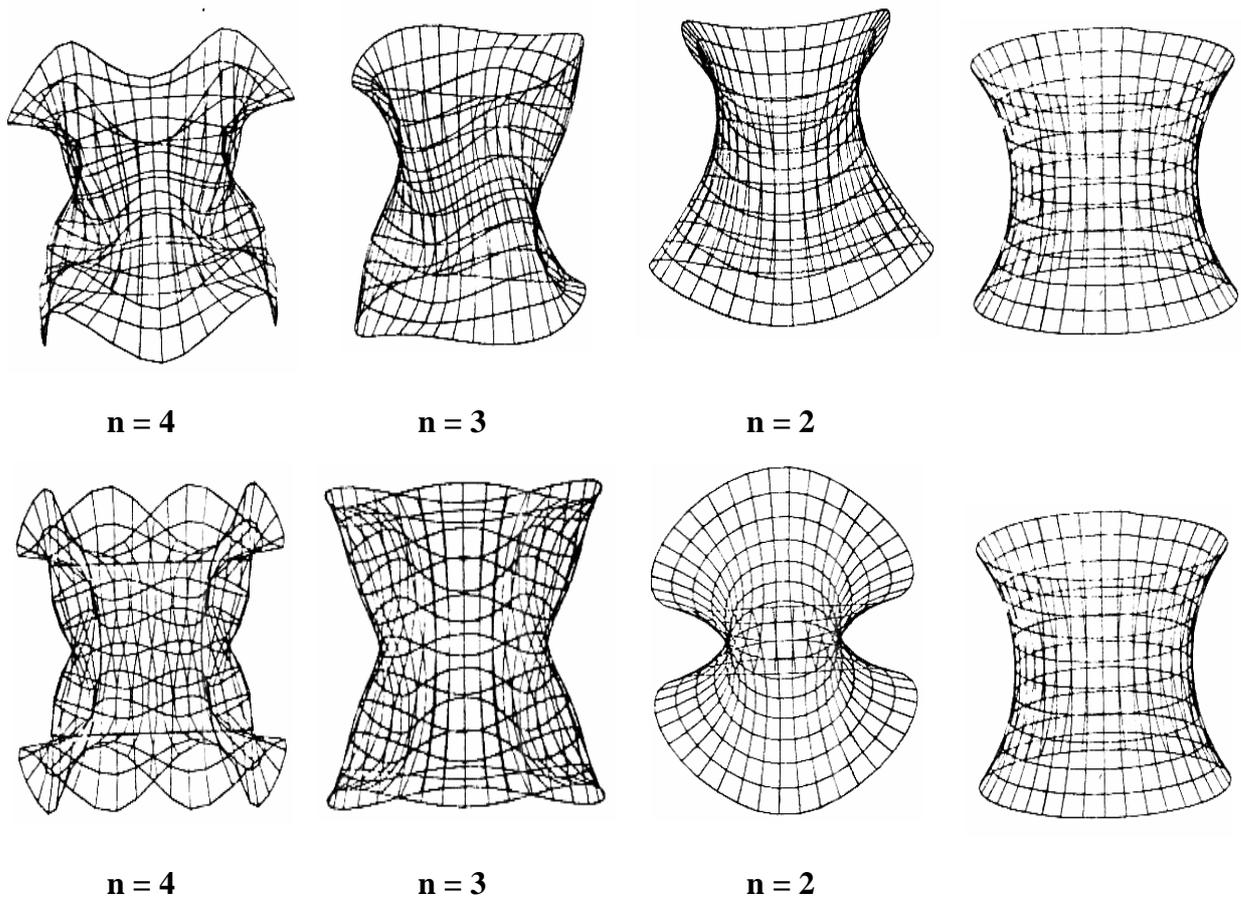


Figure (4.9) les modes de la déformation inextensionnelle du catenoïd pour $n \geq 2$

4-3-3 Les conditions aux limites du catenoïd

Commençons par la dérivée des expressions des taux de changement de torsion et de courbure normale. Alors, de (4-21) et utilisant (4-53), (4-54), (4-17) et (4-18) et en substituant les quantités géométriques du catenoïd on obtient

$$\begin{cases} \Omega^2|_2 = -\frac{1}{r}(\Omega_{,22} + \Omega_{,2} \tanh \varphi) \\ \Omega^2|_1 = -\frac{1}{r}(\Omega_{,12} + \Omega_{,1} \tanh \varphi) \end{cases} \tag{4-88}$$

Et

$$\begin{aligned}\dot{K}_n &= \frac{1}{r} (\Omega_{,21} + \Omega_{,1} \tanh \varphi) \\ \dot{\tau} &= \frac{1}{r} \left(\Omega_{,22} + \Omega_{,2} \tanh \varphi + \frac{\Omega}{\cosh^2 \varphi} \right)\end{aligned}\tag{4-89}$$

Dérivant la composante normale de la vitesse angulaire du catenoid, nous considérons seulement les valeurs de $n \geq 2$, nous écrivont

$$\begin{aligned}\dot{K}_n &= \frac{n \sqrt{(n^2 - 1)}}{r \cosh \varphi} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(A_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] - B_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \sin n\theta \right. \\ &\quad \left. - \left(C_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] - D_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \cos n\theta \right] \\ \dot{\tau} &= -\frac{1}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{(n^2 - 1)} \cosh \varphi}{\cosh^2 \varphi} \right. \\ &\quad \times \left[- \left(A_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] - B_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \cos n\theta \right. \\ &\quad \left. - \left(C_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] - D_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \sin n\theta \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{(n^2 - 1)}}{\cosh \varphi} \left[\left(A_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] + B_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \cos n\theta \right. \\ &\quad \left. + \left(C_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] + D_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \sin n\theta \right]\end{aligned}\tag{4-90}$$

Les coques catenoïds est limitées par deux cercles parallèles à $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_2$, les expressions (4-90) des changements de taux de la courbure normale et de la torsion sont déterminés au niveau des lignes de bords. Nous examinerons le problème pour fournir les conditions aux limites appropriées pour empêcher la déformation inextensionnelle.

Considérant d'abord, le cas où nous produisons au coque une poutre rigide aux deux bords pour empêcher les changements de la courbure normale le long des bords. Nous ramenons au système d'équations suivant

$$\begin{cases} \left(A_n \sin \left[\varphi_1 \sqrt{n^2 - 1} \right] - B_n \cos \left[\varphi_1 \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \sin n\theta = 0 \\ \left(A_n \sin \left[\varphi_2 \sqrt{n^2 - 1} \right] - B_n \cos \left[\varphi_2 \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \sin n\theta = 0 \end{cases}$$

Et aussi

$$\begin{cases} \left(C_n \sin \left[\varphi_1 \sqrt{n^2 - 1} \right] - D_n \cos \left[\varphi_1 \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \cos n\theta = 0 \\ \left(C_n \sin \left[\varphi_2 \sqrt{n^2 - 1} \right] - D_n \cos \left[\varphi_2 \sqrt{n^2 - 1} \right] \right) \cos n\theta = 0 \end{cases}$$

Pour que le système ci-dessus puisse avoir une solution non nulle, leur déterminant Δ doit disparaître, donc

$$\begin{aligned} \Delta &= -\sin \left[\varphi_1 \sqrt{n^2 - 1} \right] \cos \left[\varphi_2 \sqrt{n^2 - 1} \right] + \sin \left[\varphi_2 \sqrt{n^2 - 1} \right] \cos \left[\varphi_1 \sqrt{n^2 - 1} \right] \\ &= \sin \left[(\varphi_2 + \varphi_1) \sqrt{n^2 - 1} \right] \end{aligned} \quad (4-91)$$

Le déterminant est égal à zéro si

$$\left[\varphi_2 + \varphi_1 \right] = \frac{m \pi}{\sqrt{(n^2 - 1)}} \quad (4-92)$$

Où m et $n \geq 2$ sont des nombres entiers.

Ainsi, les conditions aux limites formulées ci-dessus n'empêchent pas les déformations inextensionnelles du catenoïd, c'est le cas contraire pour la bande sphérique.

Considérez maintenant, le cas du catenoïd avec un seul bord fixe, ceci correspond à éliminer complètement le taux de changements de la courbure normale et de la torsion, c'est à dire $\dot{K}_n = 0$ et $\dot{\tau} = 0$, nous conduisons au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] - B_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] = 0 \\ A_n \cos \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] + B_n \sin \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] = 0 \end{cases}$$

De même, un système d'équations est obtenu pour C_n et D_n . En conséquence, pour que ce système avoir une solution non nulle, il faut que leur déterminant doive disparaître, et nous écrivons

$$\Delta = \sin^2 \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] + \cos^2 \left[\varphi \sqrt{n^2 - 1} \right] = 1 \quad (4-93)$$

Le déterminant est toujours différent de zéro, et alors le système a seulement les solutions triviales $A_n = B_n = 0$ et $C_n = D_n = 0$. Ainsi deux conditions à un seul bord du catenoïd enlèvent complètement le mécanisme et tenir compte d'une coque membrane, voir la figure (4.10)

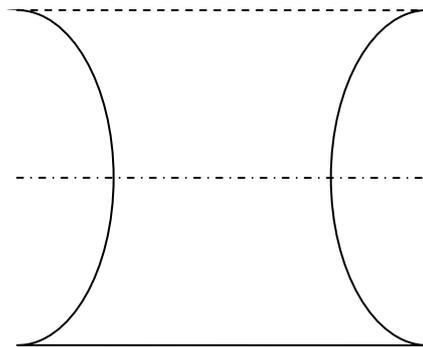


Figure (4.10) Coque catenoïd complètement fixée à un seul bord

4-4 Les coques cylindriques ($K = 0$ surface développable)

4-4-1 La géométrie

Les cylindres dans la théorie des coques ont un traitement spécial, en raison de sa géométrie unique.

Le cercle parallèle à la surface moyenne est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} R_0 = r \\ Z = r \varphi \end{cases}$$

Où r est le rayon de cylindre voir figure (4.11)

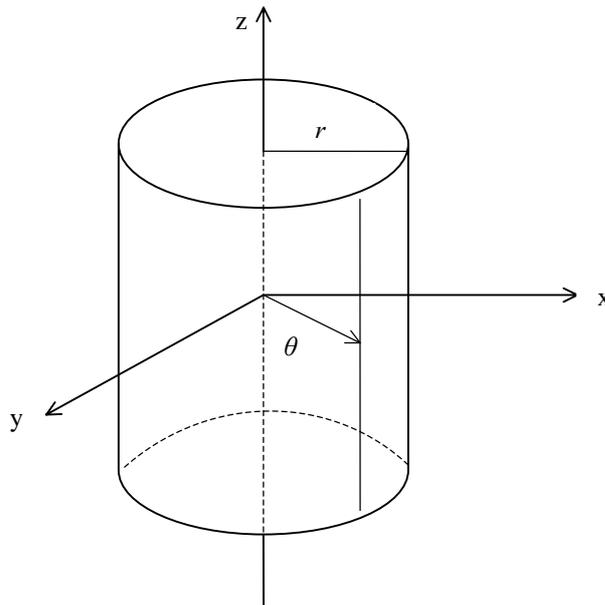


Figure (4.11) coque cylindrique

Le vecteur de position du cylindre est donné par

$$R(\varphi, \theta) = r \cos \theta e_1 + r \sin \theta e_2 + r \varphi e_3 \quad (4-94)$$

Les deux premières dérivées de R_0 et Z par rapport à φ sont :

$$\begin{aligned} R_0' &= 0 & R_0'' &= 0 \\ Z' &= r & Z'' &= 0 \end{aligned}$$

Les vecteurs de base sont obtenus en dérivant R par rapport aux deux variables θ et φ , alors

$$\begin{cases} a_1 = r(-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) \\ a_2 = r e_3 \end{cases} \quad (4-95)$$

Les métriques sont :

$$\begin{aligned} a_{11} &= r^2 & a_{22} &= r^2 & a_{12} &= a_{21} = 0 \\ a^{11} &= \frac{1}{r^2} & a^{22} &= \frac{1}{r^2} & a^{12} &= a^{21} = 0 \end{aligned} \quad (4-96)$$

Alors les vecteurs de la base contravariante sont :

$$\begin{cases} a^1 = -\frac{1}{r}(-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) \\ a^2 = \frac{1}{r} e_3 \end{cases} \quad (4-97)$$

Le déterminant est donné par :

$$a = a_{11} a_{22} = r^4 \quad (4-98)$$

Le vecteur normal à la surface :

$$n = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \quad (4-99)$$

Les dérivées des vecteurs de base sont :

$$\begin{cases} a_{1,1} = -r(\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \\ a_{1,2} = a_{2,1} = 0 \\ a_{2,2} = 0 \end{cases} \quad (4-100)$$

Le tenseur de courbure est :

$$\begin{aligned} b_{11} &= -r & b_1^1 &= -\frac{1}{r} \\ b_{22} = b_{12} = b_{21} &= 0 & b_2^2 = b_2^1 = b_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4-101)$$

Les symboles de CHRISTOFFELS pour le cylindre sont nuls.

$$K = 0 \quad , \quad M = -\frac{1}{2r} \quad (4-102)$$

4-4-2 Les conditions de rigidité

Comme nous avons mentionné auparavant, l'équation (3-64) ne peut pas être appliquée pour la déformation inextensionnelle du cylindre parce que $K = 0$, donc on peut utiliser l'équation (3-59). Elle produit deux équations tangentielles pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$

$$\Omega^\beta b_{\beta\alpha} + \Omega|_\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} -r \Omega^1 + \Omega|_1 = 0 \\ \Omega|_2 = 0 \end{cases} \quad (4-103)$$

En substituant les quantités géométriques du cylindre dans l'équation générale. Exploitant encore de la périodicité du cylindre, la composante normale de la vitesse angulaire aura la solution suivante

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta] \quad (4-104)$$

Où A_n et B_n sont les constantes d'intégration et $B_0 = 0$. Donc, de la première équation de (4-103), nous écrivons

$$\Omega^1 = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} n \left[-A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \right] \quad (4-105)$$

De (3-58), nous déduisons la deuxième composante tangentielle de la vitesse angulaire

$$\Omega^2 = \frac{(n^2 - 1)}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \varphi + (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) \right] \quad (4-106)$$

Avec C_n et D_n sont des constantes et $D_0 = 0$.

De (3-45) et l'intégration par rapport à θ , le vecteur de la vitesse du cylindre est

$$\begin{aligned} v = & r \sum_{n=0}^{\infty} n \left[- (A_n \cos n\theta - B_n \sin n\theta) \varphi - (C_n \sin n\theta - D_n \cos n\theta) \right] (\cos \theta e_1 + \sin \theta e_2) \\ & - r \sum_{n=0}^{\infty} \left[(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \varphi + (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) \right] (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) \\ & + r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \left[(A_n \sin n\theta - B_n \cos n\theta) \right] e_3 + c \end{aligned} \quad (4-107)$$

Où c correspond à la vitesse de corps rigide.

pour $n = 0$ et $n = 1$ on a respectivement

$$-r (A_0 \varphi + C_0) (-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) + A_0 \theta e_3 \quad (4-108)$$

Où B_0 doit être égal à zéro car n tend vers zéro.

$$r \left[- (A_1 \varphi + C_1) e_2 + (B_1 \varphi + D_1) e_1 + (A_1 \sin \theta - B_1 \cos \theta) e_3 \right] \quad (4-109)$$

Encore, ces déplacements représentent les vitesses du corps rigide et les vitesses angulaires et ne contribueront pas à la déformation inextensionnelle.

A_0 produit une vitesse angulaire autour des axes x et y , qui est également une vitesse semblable à celle trouvée dans le catenoid, c'est possible seulement si le cylindre est ouvert le long du méridien, figure (4.12). Un cas semblable a été discuté par CALLADINE (1983).

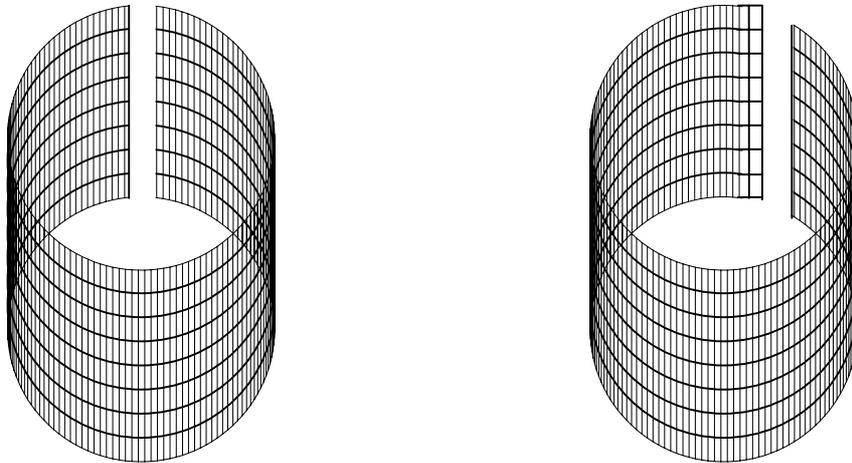


Figure (4.12) L'effet de A_0 le long de l'axe du coque

A_0 doit être prise égal à zéro. C_0 produit une vitesse du corps rigide dans les directions de x et y . A_1 , B_1 produit une vitesse angulaire du corps rigide autour des axes x et y et C_1 , D_1 produit des vitesses du corps rigide le long des même axes. Par conséquent, dans la discussion des conditions aux limites nécessaires pour empêcher la déformation inextensionnelle, nous considérons seulement les valeurs de n qui sont plus grand que 2.

Les composantes du vecteur de vitesse sont

$$v^1 = - \sum_{n=0}^{\infty} \left[(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \varphi + (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) \right]$$

$$v^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} (A_n \sin n\theta - B_n \cos n\theta) \tag{4-110}$$

$$v^3 = - \sum_{n=0}^{\infty} r n \left[(A_n \sin n\theta - B_n \cos n\theta) \varphi + (C_n \sin n\theta - D_n \cos n\theta) \right]$$

Les modes de déformation inextensionnelle correspondant à $n \geq 2$ sont montrés dans la figure(4.13)

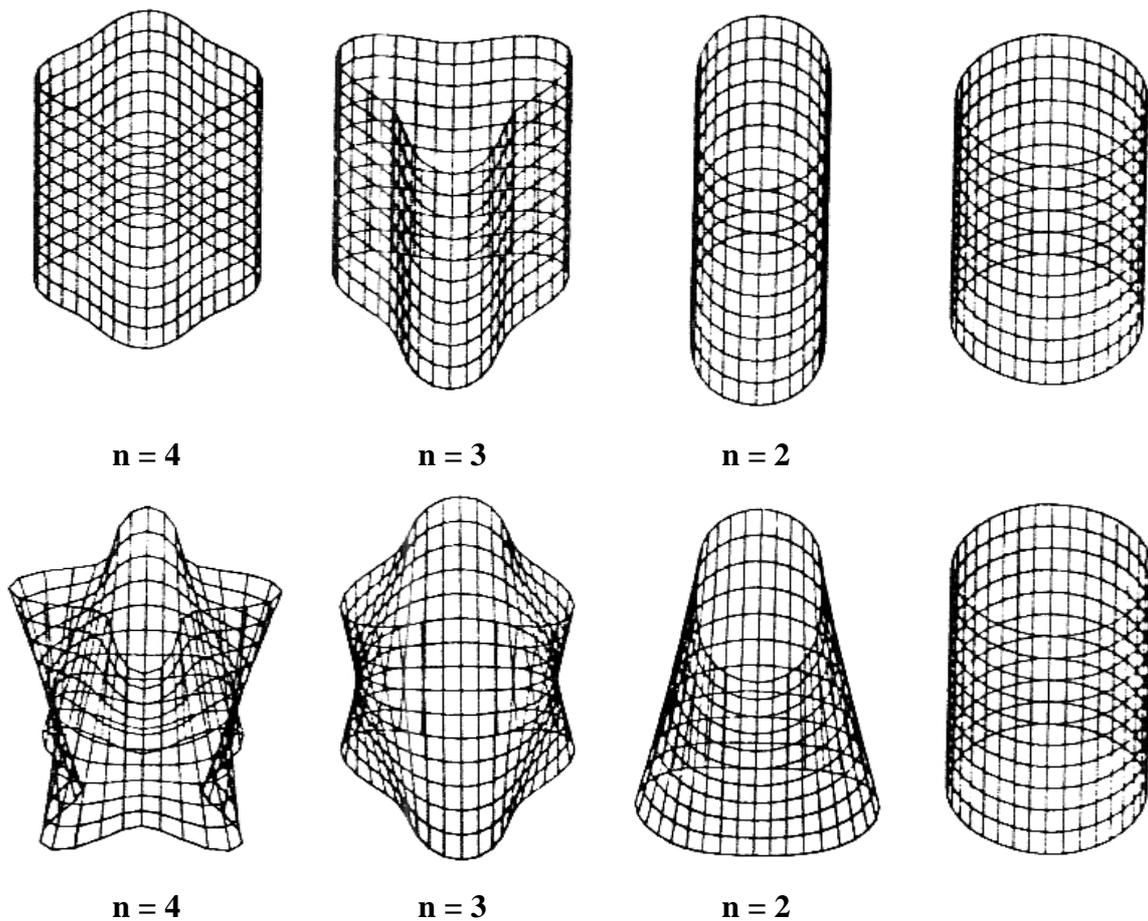


Figure (4.13) modes de déformation inextensionnelle pour le cylindre, $n \geq 2$

4-4-3 Les conditions aux limites du cylindre

Pour dériver les taux de changement de torsion et de courbure normale pour le cylindre, nous évitons l'approche utilisée précédemment pour le catenoid et les coques sphériques à cause des termes contenant la courbure de GAUSS. Nous utilisons donc le tenseur du second degré $c_{\alpha\beta}$, et après une petite manipulation dans (3-80) et (3-81) nous avons

$$\begin{aligned}\dot{K}_n &= -\frac{c_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta}{a_{\eta\gamma} d\xi^\eta d\xi^\gamma} \\ \dot{\tau} &= \frac{c_{\alpha\beta} a^{\gamma\alpha} \varepsilon_{\lambda\gamma} d\xi^\beta d\xi^\lambda}{a_{\eta\gamma} d\xi^\eta d\xi^\gamma}\end{aligned}\quad (4-111)$$

Les cercles de bord sont données par l'équation $\theta^2 = \text{constante}$, donc $d\theta^2 = 0$, et les équations ci-dessus deviennent

$$\dot{K}_n = -\frac{c_{11}}{a_{11}} \quad \text{et} \quad \dot{\tau} = \frac{c_{21} a^{22} \varepsilon_{12}}{a_{11}} \quad (4-112)$$

En utilisant (3-69), nous écrivons

$$\dot{K}_n = \frac{\bar{\Omega}_{,1} \varepsilon_{12} r^2}{a_{11}} \quad \text{et} \quad \dot{\tau} = -\frac{\bar{\Omega}_{,2} a^{22} (\varepsilon_{12})^2 r^2}{a_{11}} \quad (4-113)$$

Substituant les quantités géométriques correspondantes du cylindre et exécutant les différentes dérivées du vecteur de vitesse angulaire, nous écrivons finalement

$$\begin{aligned}\dot{K}_n &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n^2-1)}{r} \left[(-A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) \varphi - (C_n \sin n\theta - D_n \cos n\theta) \right] \\ \dot{\tau} &= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n^2-1)}{r} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\end{aligned}\quad (4-114)$$

D'abord, nous notons que la torsion et aussi la partie symétrique de \dot{K}_n sont indépendantes des coordonnées du méridien φ . C'est dû aux courbes caractéristiques qui constituent les méridiens du cylindre. Les quantités qui ont cette propriété sont prescrites seulement une fois sur la surface.

De (4-114) nous voyons qu'en produisant à un des bords du cylindre avec une base rigide qui empêche \dot{K}_n et $\dot{\tau}$, figure (4.14), nous obtenons le système d'équations suivant pour $\varphi = 0$

$$\begin{aligned} \dot{K}_n = 0 & & -B_n \sin n\theta + D_n \cos n\theta = 0 \\ \dot{\tau} = 0 & & A_n \cos n\theta + C_n \sin n\theta = 0 \end{aligned} \quad (4-115)$$

Ce système a une solution triviale unique $B_n = D_n = 0$ et $A_n = C_n = 0$. Par conséquent la base rigide à un seul bord empêche le mécanisme.

Considérant en outre le cas où une poutre capable de mettre $\dot{K}_n = 0$ à chaque extrémité est fournie aux deux bords du cylindre figure (4.14), alors nous écrivons le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \phi = 0 & & -B_n \sin n\theta + D_n \cos n\theta = 0 \\ \phi = 1 & & -(A_n + B_n) \sin n\theta + (C_n + D_n) \cos n\theta = 0 \end{aligned} \quad (4-116)$$

Cette manière de maintenir le cylindre empêche le mécanisme.

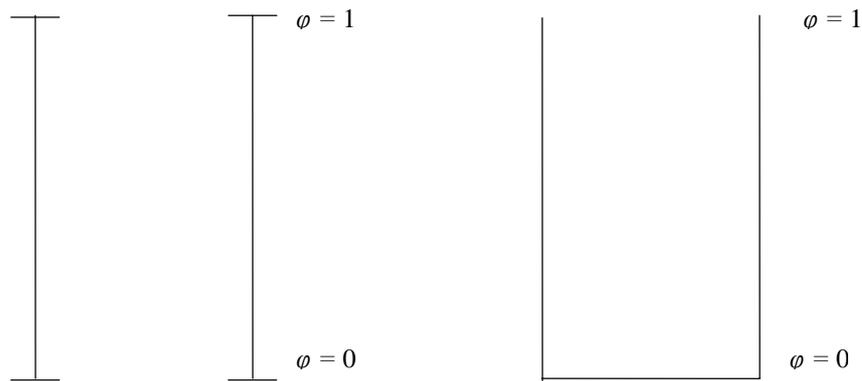


Figure (4.14) Cylindre constituant une structure

4-5 Conclusion

Dans ce chapitre on a étudié les conditions de rigidité des formes simples telles que sphère, catenoid et le cylindre qui a un traitement spécial à cause de sa courbure Gaussienne nulle.

Dans le tableau suivant nous montrons les résultats obtenus pour les surfaces précédentes où les ouvertures sont renforcées par des poutres ou des bases rigides.

	$K > 0$	$K < 0$	$K = 0$
Renforcement par poutre empêche le changement de courbure à chaque bords	Structure	Mécanisme	Structure
Déplacement nul par une base rigide	Structure	Structure	Structure

CONCLUSIONS GENERALES

Au présent travail, on a étudié les coques qui travaillent principalement par l'action de membrane. Le but de ce travail est de comprendre l'effet de la géométrie et l'importance des conditions aux limites pour des structures en coques. Le travail aide les ingénieurs de choisir la forme et les conditions d'appuis essentielles pour les coques dans les domaines de construction.

Les coques qui ont une épaisseur très petite sont représentées par des surfaces, ces surfaces résistent à des efforts de compression et elles ont la propriété de se fléchir que se dilater. Sur cette base, une combinaison entre la statique des coques représentées par la théorie de membrane et la cinématique des coques représentées par la déformation inextensionnelle a produit un nouveau paramètre appelé le vecteur de vitesse angulaire. Ce paramètre caractérise les différents modes de déformation de la surface, c'est à dire l'élément déformé de la coque est entièrement défini par les composants du vecteur de vitesse angulaire.

En combinant les équations de la déformation inextensionnelle, des équations à dérivées partielles simples ont été obtenues et employées pour trouver les conditions aux limites nécessaires pour empêcher les déformations inextensionnelles.

L'empêchement des déformations inextensionnelles dans les structures en coque c'est concevoir des coques de membrane qui sont infiniment rigides.

Les recherches sur les surfaces de révolution ont exigé des solutions aux équations différentielles simples de la vitesse angulaire, sauf les coques de type paraboliques qui ont un procédé spécial. La distribution particulière des appuis sur les bords pour empêcher les déformations inextensionnelles dans les différents cas de la géométrie de surfaces a été trouvée nécessaire pour :

1. Des coques d'une courbure gaussienne négative avec deux bords, un bord devrait être complètement fixé avec une base rigide, et l'autre bord peut être libre si la flexion infinitésimale doit être empêchée. On a étudié concernant ce cas les coques en forme de catenoid.

2. Dans des coques d'une courbure gaussienne nulle, une poutre rigide à chaque bord, où on fixe complètement un bord avec une base rigide est nécessaire pour que la structure soit infiniment rigide. Les coques cylindriques sont un exemple suffisant.

3. Des coques d'une courbure gaussienne positive, avec un bord, une poutre rigide est suffisante pour empêcher le mécanisme.

4. Pour les coques d'une courbure gaussienne positive avec deux bords, soit on fixe complètement un bord avec une base rigide, soit on met une poutre rigide à chaque bord cette procédure élimine complètement le mécanisme.

Pour les coques qui ont une courbure gaussienne positive on a étudié les coques sphériques.

Recommandation

Quand le travail sur cette thèse a été commencé, le but était de produire les règles générales simples qui disent qu'une coque peut fonctionner principalement par l'action des membranes. Il est important de noter qu'il faut bien plus d'exemples pour établir des règles générales, surtout pour les coques de géométrie translationnelles qui nécessitent une analyse très poussée en étudiant la géométrie des surfaces spécifiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- A. ASSIRE, P. MASSIN et F. LEBOUVIER, «Notice D'utilisation Des Eléments Plaques et Coques » Juin 2002, p50.
- D. P. BILLINGTON, «Thin Shell Concrete Structure», p 373.
- L. BOUMA, « On Approximate Methods of Shell Analysis. A General Survey », Proc. World. Conf. On Shell Structure, San Francisco, Oct 1962.
- B. BUDIANSKY et J. L. SANDERS, « First-order Linear Shell Theory » Progress In Applied Mechanics, Prager Anniversary Volume, New York, Macmillan 1963.
- R. CALLADINE, « Theory of Shell Structure », Cambridge university press 1983, p 40-355.
- R. CHEBILI, «The Boundary Support of Shell », PHD, University of Bath 1991, 268p.
- D. CHOI, «Computations On Thin Non-Inhibited Hyperbolic Elastic Shells. Benchmarks for Membrane Locking », January 1999, p29.
- D. CHOI, «Sur La Rigidité Géométrique des Surfaces, Application a la Théorie des Coques Elastiques Minces». Université Pierre et Marie Curie Septembre 1995. p 136.
- W. FLÜGGE, « Stresses in Shells », Springer – Verlag, Berlin 1960, 499p

- W. FLÜGGE and F. GEYLING, « A General Theory of Deformations of Membrane Shells », Proc. 9TH. Intern. Compr. Appl. Mech. Brussels, 1957.
- J. GARRIGUES, «Elément d'Algèbre et d'Analyse Tensorielle à l'Usage des Mécaniciens», Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille Septembre 2001, 44p.
- J. GARRIGUES, «Statiques des Coques», Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille mai 1999, p5-15.
- A.L GOL'DENVEISER, «Derivation of an Approximate Theory of Shells By Means of Asymptotic Integration of the Theory of Elasticity», Prikl. Mat. Mekl, English Translation Only, 1962.
- A.E. GREEN et ZERNA, «Theoretical Elasticity», 2ed. Oxford, the Clarendon Press, 1968.
- J. HLADIK & P.E. HLADIK, «Le Calcul Tensoriel en Physique», 3 éditions 1999, 228p.
- M.W. JOHNSON & E.REISSNER, «On the Foundations of Theory of Thin Elastic Shells», J. Math. Phys., 37, 1958.
- V. S. KELKAR et R. T. SEWELL, «Fundamental of The Analysis And Design of Shell Structures», p 258-289.
- W. T. KOITER. «On the foundations of the linear theory of thin elastic shells: I, II». Proc. Kon. Ned. Akad. Welensch. Ser. B 73 (1970).
- H. KRAUS «Thin Elastic Shells», London 1967 p 476.
- A.E.H. LOVE, «A Treatise on Mathematical Theory of Elasticity», 4th Ed., New

York, Dover Publication, 1944.

- P. MULLER & C. OSSADZW, «Introduction aux Coques Minces Elastiques», France 1999, p16-34. livre
- P.M. NAGHDI, «Finite Deformation of Elastic Rods and Shells», Proc. Of the IUTAM Symposium, ed. By D.E. CARLSON and R.T. SHIELD, 1980.
- F. NIORDSON, «Shell Theory», Oxford 1983, 397p.
- V.V. NOVOZHILOV, «Thin Shell Theory», 2ed. Augmented and revised edition, Wolters-Noordhoff Publishing Groningen the Netherlands, 1964.
- E. REISSNER, «Variational Considerations for Elastic Beams and Shells», Vol. 88, No. EM1, February 1962.
- J. SANCHEZ HUBERT, E. SANCHEZ PALENCIA. «Coques Elastiques Minces Propriétés Asymptotiques» .Masson, Recherches en Mathématiques Appliquées, Paris, (1997). p123
- V.Z. VLAZOV « Basic Differential Equations in General Theory of Elastic Shells », NACA TM 1241, Feb. 1951.
- C.J.K. WILLIAMS, «Defining and Designing Curved Flexible Tensile Surface Structures», The Institute of Mathematics & Its Applications conference series, N°6, 1986.
- W. ZERNA, «Exact theory of elastic shells», proc. World conf. on shell structure, San Francisco, October 1962.