

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : Génie électrique  
Ref : .....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة الكهربائية  
المرجع: .....

Thèse présentée en vue de l'obtention  
Du diplôme de  
**Doctorat en sciences**

**Option : Automatique**

**Intitulé**  
**Synthèse de lois de commande par la théorie d'hyperstabilité**  
**Application aux systèmes physiques**

Présentée par :

**Abdelghani CHELIHI**

Soutenue publiquement le 02 Juin 2016

**Devant le jury composé de :**

<b>Dr. Mohamed BOUMEHREZ</b>	<b>Professeur</b>	<b>Président</b>	<b>Université de Biskra</b>
<b>Dr. Mohamed CHEMACHEMA</b>	<b>Professeur</b>	<b>Rapporteur</b>	<b>Université de Constantine</b>
<b>Dr. Latifa ABDOU</b>	<b>Maitre de Conférences 'A'</b>	<b>Examineur</b>	<b>Université de Biskra</b>
<b>Dr. Souad CHAOUCH</b>	<b>Maitre de Conférences 'A'</b>	<b>Examineur</b>	<b>Université de Batna</b>
<b>Dr. Riad TOUFOUTI</b>	<b>Maitre de Conférences 'A'</b>	<b>Examineur</b>	<b>Université de Souk Ahras</b>

## **Résumé**

Les travaux présentés dans cette thèse sont centrés autour de la stabilisation des systèmes non linéaires en utilisant la théorie d'hyperstabilité. Notre intérêt est porté sur la synthèse des lois de commande pour deux classes de systèmes : les systèmes non linéaires monovariables (SISO) et les systèmes non linéaires multivariables (MIMO) complexes. Premièrement, on s'est intéressé à l'étude de la stabilisation des systèmes non linéaires monovariables par des lois de commande multi-contrôleurs. Les structures de commande multi-contrôleurs développées sont basées sur la synthèse de lois de commande linéaires classiques et/ou adaptatives pour un système non linéaire représenté par un descripteur multimodèle flou de Takagi-Sugeno. Les conditions de stabilité et de convergence sont obtenues en utilisant les définitions et les propriétés d'hyperstabilité. Deuxièmement, on s'est intéressé à l'étude de la stabilisation des systèmes non linéaires interconnectés par des lois de commande adaptatives décentralisées. Le problème de commande est résolu via une modélisation linéaire à temps variant du système non linéaire et l'utilisation des algorithmes adaptatifs hyperstables. Finalement, la théorie d'hyperstabilité est introduite dans l'analyse et la synthèse de lois de commande adaptatives floues indirecte pour une classe plus large des systèmes non linéaires affines en la commande. Pour approuver les approches de commande proposées et montré l'impact bénéfique du critère d'hyperstabilité, les résultats de simulation des lois de commande développées sur des systèmes physiques tels que le pendule inversé et le simulateur de vol d'hélicoptère ont été présentés.

### **Mots clés :**

Hyperstabilité, Multi-contrôleurs, Multimodèles flou, Commutation flou, Commande adaptative, Commande décentralisée, Système non linéaire, TRMS.

## Abstract

The work presented in this thesis are centered around the stabilization of nonlinear systems using the hyperstability theory. Our interest is focused on the synthesis of control laws for two classes of nonlinear systems: single-input single-output (SISO) nonlinear systems and a complex multi-input multi-output (MIMO) nonlinear systems. First, we were interested in the study of stabilization of single-input single-output nonlinear systems by using multi-controllers approach. The developed multi-controllers structure is based on the synthesis of classical linear and/or adaptive control laws for nonlinear systems represented by a Takagi-Sugeno fuzzy models. The convergence and stability conditions are obtained using the definitions and properties of the hyperstability theory. Second, we were interested, in this study, to stabilize interconnected nonlinear systems by using decentralized adaptive control laws. The control problem is resolved using a time varying model and hyperstable adaptive algorithms. Finally, the hyperstability theory is introduced into the analysis and synthesis of fuzzy adaptive control laws for a wider class of affined nonlinear systems. To approve the proposed control approaches and show the beneficial impact of the hyperstability criterion, the simulation results of the developed control laws on physical systems such as the inverted pendulum and the helicopter flight simulator (TRMS) are presented.

### Key words:

Hyperstability, Multi-controllers, Fuzzy multi-model, Fuzzy switching, Adaptive control, Decentralized control, Nonlinear systems

in order to extend this concept to complex nonlinear systems

### ملخص

تتركز الأعمال المقدمة في هذه الأطروحة حول إحلال الاستقرار في النظم غير الخطية باستخدام نظرية فرط الاستقرار. حيث يتركز اهتمامنا على اقتراح قوانين التحكم في فئتين من الأنظمة: الأنظمة غير الخطية أحادية المدخل والمخرج و: الأنظمة غير الخطية المعقدة متعددة المدخل والمخرج ذات أبعاد كبيرة. أولاً، كان اهتمامنا في دراسة استقرار النظم غير الخطية أحادية المدخل والمخرج بأنظمة تحكم متعددة وحدات التحكم. هياكل التحكم متعددة الوحدات المطورة تستند إما على اقتراح قوانين تحكم خطية و/أو تأقلمية إذا كان تمثيل النظام غير الخطي بوصف غامض متعدد النماذج من نوع تاكاجي سوجينو. يتم الحصول على شروط الاستقرار باستخدام تعريفات و خصائص نظرية فرط الاستقرار. ثانياً، اهتمامنا بدراسة إحلال الاستقرار في النظم غير الخطية المترابطة بقوانين التحكم التآقلمي اللامركزية، أين تم حل مشكلة التحكم من خلال استخدام النماذج الخطية المتغيرة زمنياً وخوارزميات التأقلم التي تتميز باستقرار مفرط. وفي الأخير، قدمنا نظرية فرط الاستقرار في تحليل الاستقرار وتوليف قوانين التحكم تأقلمي غامضة لفئة أوسع من النظم غير الخطية. لتبيان فعالية أنظمة التحكم المقترحة وإظهار التأثير الإيجابي لمعيار فرط الاستقرار، قدمنا تطبيقات للأنظمة الفيزيائية مثل النواس المقلوب و جهاز محاكاة طيران هيلكوبتر مع إظهار نتائج المحاكاة.

**كلمات مفتاحية:** نظرية فرط الاستقرار، متعددة وحدات التحكم، متعدد النماذج الغامضة، التحكم التآقلمي، التحكم اللامركزي، الأنظمة غير الخطية.

*A ma femme, pour son indéfectible soutien*

*A mes enfants Alaa et Assim , sources de joie inaltérable*

*A mes chers parents*

## **Avant-Propos**

*L'ensemble des travaux présentés dans ce mémoire a été effectué au Laboratoire d'Identification, de Contrôle, de Commande et de communication (LI3CUB) de l'université de Biskra.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Monsieur Mohamed CHEMACHEMA, Professeur à l'Université de Constantine, pour le suivi de cette thèse et pour ses conseils et son soutien tout au long de ce travail.*

*C'est un honneur pour moi d'adresser mes remerciements aux membres du jury pour le temps et l'attention qu'ils ont consacré à la lecture et à la critique de ce travail.*

*J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Mohamed BOUMEHREZ, Professeur à l'Université de Biskra, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en acceptant de l'examiner et de présider le jury.*

*Je remercie chaleureusement Mademoiselle Latifa ABDOU, Maître de conférence à l'Université de Biskra, Madame Souad CHAOUCH, Maître de conférence à l'Université de Batna, Monsieur Riad TOUFOUTI, Maître de conférence à l'Université de Souk Ahras pour l'intérêt qu'ils ont voulu porter à ce travail en acceptant de l'examiner.*

*Ça serait ingrat de ma part de terminer ce témoignage sans me souvenir de ceux qui ont contribué, par leurs encouragements, leur soutien moral, à l'aboutissement de cette thèse. Je veux parler ici de tous les membres de ma famille, de tous mes collègues à l'université de Biskra, et de tous mes amis qui se reconnaîtront dans ces mots.*

---

# Table des matières

---

<b>DEDICACES</b>	<b>3</b>
<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>4</b>
<b>TABLE DES MATIERES</b>	<b>5</b>
<b>TABLE DES FIGURES</b>	<b>8</b>
<b>LISTE DES TABLEAU</b>	<b>10</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	<b>11</b>
<b>Chapitre 1. Notions Préliminaires</b>	<b>17</b>
1.1. Introduction. . . . .	17
1.2. Modélisation des systèmes dynamiques. . . . .	17
1.2.1. Systèmes linéaires. . . . .	18
1.2.2. Systèmes non linéaires. . . . .	19
1.2.2.1. Systèmes non linéaires affines en la commande. . . . .	19
1.2.2.2. Représentation entrée-sortie. . . . .	19
1.2.2.3. Systèmes non linéaires interconnectés . . . . .	20
1.2.3. Systèmes d'inférence flous. . . . .	21
1.2.3.1. Notions et définitions. . . . .	21
1.2.3.2. Structure d'un système flou . . . . .	23
1.2.3.3. Système flou de Takagi-Seguno. . . . .	24
1.3. Analyse par l'hyperstabilité (V.M. Popov). . . . .	27
1.3.1. Principe de base. . . . .	27
1.3.2. Hyperstabilité des systèmes non linéaires. . . . .	28
1.3.3. Hyperstabilité des systèmes linéaires : Positivité. . . . .	29
1.3.4. Propriétés des systèmes hyperstables. . . . .	30
1.3.5. Hyperstabilité des systèmes à base de blocs structurés. . . . .	31
1.3.5.1. Structure en parallèle. . . . .	31
1.3.5.2. Structure à interaction par rétroaction. . . . .	32
1.3.5.3. Hyperstabilité d'un système linéaire avec une contre réaction non linéaire. . . . .	32
1.4. Notions sur les approches de commandes étudiées. . . . .	33
1.4.1. Introduction. . . . .	33
1.4.2. Commandes multi-contrôleurs. . . . .	34
1.4.2.1. Concept général de la commande multi-contrôleurs. . . . .	34
1.4.2.2. Classification des commandes multi-contrôleurs. . . . .	35
1.4.3. Commande adaptative à modèle de référence. . . . .	37
1.4.3.1. La commande MRAC de Landau. . . . .	39

1.4.3.2. Algorithme MCS . . . . .	40
1.4.3.3. Algorithme Er-MCSI. . . . .	41
1.4.4. Commande adaptative floue. . . . .	42
1.4.4.1. Approche directe . . . . .	43
1.4.4.2. Approche indirecte. . . . .	44
1.5. Conclusion. . . . .	45
<b>Chapitre 2. Commande multi-contrôleurs à commutation floue d'un système non linéaire</b>	
<b>SISO</b>	<b>47</b>
2.1. Introduction. . . . .	47
2.2. Contexte et formulation . . . . .	49
2.3. Détermination du multimodèle flou de T-S . . . . .	51
2.4. Structure générale de la commande multi-contrôleurs adoptée . . . . .	54
2.5. Commande multi-contrôleurs à gains régulateurs statiques. . . . .	55
2.5.1. Synthèse de la loi de commande. . . . .	56
2.5.2. Simulation et résultats. . . . .	57
2.4. Commande multi-contrôleurs à loi de commande locale adaptative . . . . .	63
2.4.1. Synthèse de la loi de commande. . . . .	64
2.4.2. Simulation et résultats. . . . .	68
2.5. Conclusion . . . . .	71
<b>Chapitre 3. Commandes adaptatives décentralisées des systèmes non linéaires interconnectés</b>	<b>73</b>
3.1. Introduction. . . . .	73
3.2. Contexte et formulation. . . . .	75
3.3. Commande adaptative décentralisée via un algorithme MCS. . . . .	79
3.3.1. Synthèse de la loi de commande MCS locale. . . . .	79
3.3.2. Application à un simulateur de vol d'hélicoptère (TRMS). . . . .	84
3.3.2.1. Description et modélisation du TRMS. . . . .	85
3.4.2.2. Modèle découplé du TRMS. . . . .	87
3.4.2.3. Forme canonique des modèles horizontal et vertical. . . . .	88
3.4.2.5. Lois de commande décentralisées du TRMS. . . . .	90
3.3.3. Simulation et résultats. . . . .	91
3.4. Commande adaptative décentralisée via un algorithme Er-MCSI. . . . .	98
3.4.1. Synthèse de la loi de commande Er-MCSI locale. . . . .	98
3.4.2. Application à la commande du TRMS. . . . .	101
3.4.2.1. Synthèse de lois de commande locales du TRMS. . . . .	102
3.5.3.2. Simulation et résultats. . . . .	103
3.6. Conclusion. . . . .	109
<b>Chapitre 4. Commande adaptatives floues des systèmes non linéaires incertains</b>	<b>111</b>
4.1. Introduction. . . . .	111
4.2. Contexte et formulation . . . . .	113
4.3. La commande adaptative floue indirecte d'un système non linéaire incertain. . . . .	115
4.3.1. L'approche de commande proposée . . . . .	116
4.3.1.1 Structure de la loi de commande. . . . .	117

4.3.1.2 Analyse de la stabilité en boucle fermée. . . . .	118
4.3.2. Simulation et résultats. . . . .	121
4.3.2.1. Système masse-ressort-amortisseur. . . . .	122
4.3.2.2. Système pendule inversé. . . . .	124
4.4. Commande adaptative floue décentralisée des systèmes non linéaires incertains interconnectés . . . . .	127
4.4.1. Contexte et formulation. . . . .	128
4.4.2. Synthèse de la loi de commande décentralisée. . . . .	130
4.4.3. Analyse de la stabilité en boucle fermée. . . . .	131
4.4.4. Simulation et résultats. . . . .	133
4.5. Conclusion. . . . .	143
<b>CONCLUSION GENERALE</b>	<b>145</b>
<b>ANNEXE A</b>	<b>149</b>
<b>ANNEXE B</b>	<b>149</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>152</b>

## Table des figures

1.1	Schéma fonctionnel d'une structure parallèle et par rétroaction. . . . .	31
1.2	Schéma structurel d'un système linéaire avec un contre-réaction non linéaire. . . . .	33
1.3	Schéma de principe de la commande multi-contrôleurs. . . . .	35
1.4	Commande multi-contrôleurs à commutation franche. . . . .	36
1.5	Commande multi-contrôleurs à commutation floue. . . . .	37
1.6	Commande adaptative à modèle de référence . . . . .	38
1.7	Commande adaptative floue directe. . . . .	43
1.8	Commande adaptative floue indirecte. . . . .	44
2.1	Linéarisation du système non linéaire et choix des points de fonctionnement. . . . .	52
2.2	Schéma de commande multi-contrôleurs à commutation floue . . . . .	54
2.3	Système pendule inversé. . . . .	57
2.4	Réponses du système pendule inversé (cas de $N = 5$ gains régulateurs ) . . . . .	61
2.5	Erreurs de poursuite (cas $N = 5$ gains régulateurs) . . . . .	61
2.6	Commande appliquée au pendule inversé (cas de $N = 5$ gains régulateurs). . . . .	62
2.7	Réponses du système pendule inversé (cas de $N = 3$ gains régulateurs). . . . .	62
2.8	Erreurs de poursuite (cas de $N = 3$ gains régulateurs). . . . .	63
2.9	Schéma bloc équivalent du système d'erreur . . . . .	66
2.10	Réponses du système pendule inversé (cas de loi de commande adaptative). . . . .	69
2.11	Erreurs de poursuite (cas de loi de commande adaptative). . . . .	70
2.12	Commandes appliquées au pendule inversé (cas de loi de commande adaptative)..	70
3.1	Schéma une commande adaptative décentralisée via un algorithme MCS. . . . .	80
3.2	Schéma bloc équivalent du sous-système $S_i$ . . . . .	81
3.3	TRMS : Twin Rotor MIMO System. . . . .	85
3.4	Schéma bloc détaillé du TRMS. . . . .	87
3.5	Evolution de $\Delta_h$ en fonction de $\omega_t$ et $u_{hh}$ . . . . .	89
3.6	Evolution de $\Delta_v$ en fonction de $\omega_m$ et $u_{vv}$ . . . . .	90

3.7	Bloc diagramme de commande adaptative décentralisée du TRMS via un algorithme MCS . . . . .	92
3.8	Réponses en position et en vitesse du TRMS. . . . .	94
3.9	Tensions de commande et gains d'adaptation du TRMS . . . . .	95
3.10	Réponses en position et en vitesse du TRMS perturbé pour des signaux de référence carrés. . . . .	96
3.11	Tensions de commande et gains d'adaptation du TRMS perturbé pour des signaux de référence carrés . . . . .	96
3.12	Réponses en position et en vitesse du TRMS perturbé pour des signaux de référence sinusoïdales. . . . .	97
3.13	Tensions de commande et gains d'adaptation du TRMS perturbé pour des signaux de référence sinusoïdales . . . . .	97
3.14	Schéma de commande adaptative décentralisée via un algorithme Er-MCSI. . . . .	99
3.15	Schéma bloc équivalent du sous-système $S_i$ (Algorithme Er-MCSI). . . . .	100
3.16	Bloc diagramme de commande adaptative décentralisée du TRMS via un algorithme Er-MCSI. . . . .	102
3.17	Réponses en position et en vitesse du TRMS. . . . .	104
3.18	Tensions de commande et gains d'adaptation du TRMS . . . . .	105
3.19	Réponses en position et en vitesse du TRMS perturbé pour des signaux de référence carrés. . . . .	106
3.20	Tensions de commande et gains d'adaptation du TRMS perturbé pour des signaux de référence carrés . . . . .	106
3.21	Réponses en position et en vitesse du TRMS perturbé pour des signaux de référence sinusoïdales. . . . .	107
3.22	Tensions de commande et gains d'adaptation du TRMS perturbé pour des signaux de référence sinusoïdales . . . . .	107
3.23	Réponses et tensions de commande du TRMS avec test de rupture de liaison . . . .	108
4.1	Système masse-ressort-amortisseur . . . . .	122
4.2	Réponses en position et en vitesse du système masse-ressort-amortisseur . . . . .	123
4.3	Erreurs de poursuite du système masse-ressort-amortisseur . . . . .	124
4.4	Commande appliquée au système masse-ressort-amortisseur . . . . .	124
4.5	Réponses en position et en vitesse du système pendule inversé. . . . .	126
4.6	Erreurs de poursuite du système pendule inversé. . . . .	126
4.7	Commande appliquée au système pendule inversé. . . . .	127
4.8	Schéma de commande adaptative floue indirecte décentralisée . . . . .	134
4.9	Bloc diagramme de commande adaptative floue décentralisée du TRMS. . . . .	136
4.10	Réponse en position $\theta_h$ et $\theta_v$ du TRMS non perturbé . . . . .	138

4.11	Réponse en vitesse $\Omega_h$ et $\Omega_v$ du TRMS non perturbé .....	138
4.12	Erreurs de poursuite en position du TRMS non perturbé.....	139
4.13	Tensions de commande $u_h$ et $u_v$ du TRMS non perturbé .....	139
4.14	Angle d'orientation $\theta_h(t)$ du TRMS perturbé.....	140
4.15	Angle d'élévation $\theta_v(t)$ du TRMS perturbé .....	140
4.16	Réponse en vitesse $\Omega_h$ et $\Omega_v$ du TRMS perturbé .....	141
4.17	Erreurs de poursuite en position du TRMS perturbé.....	141
4.18	Tensions de commande $u_h$ et $u_v$ du TRMS perturbé .....	142
4.19	Réponse en position et vitesse du TRMS avec test de rupture de liaison.....	142
4.20	Tensions de commande $u_h$ et $u_v$ du TRMS avec test de rupture de liaison.....	143
b.1	Forces de gravité agissantes sur le TRMS dans le plan vertical.....	150
b.2	Forces agissantes sur le TRMS dans le plan horizontal.....	150

---

## Liste des Tableaux

---

b.1	Paramètres du simulateur d'hélicoptère TRMS.....	151
-----	--	-----

---

## Introduction générale

---

< Non, la science n'est pas une illusion. Mais ce serait une illusion de croire que nous puissions trouver ailleurs ce qu'elle ne peut pas nous donner. >

↔ **Sigmund Freud**

---

La stabilisation des systèmes non linéaires constitue un domaine très actif de recherche en automatique où la diversité des comportements des phénomènes dynamiques qui peuvent être observés pour cette classe de systèmes explique la grande variété des approches qui, depuis longtemps déjà et pour une durée encore très longue certainement, ont été et vont être développées. Les problèmes posés par les systèmes non linéaires prennent une dimension particulière lorsque ceux-ci sont constitués de sous-systèmes interconnectés. La vision systématique des automaticiens consiste en effet à diviser un système complexe de grandes dimensions en une interconnexion de sous-systèmes pouvant être traités individuellement.

Plusieurs outils théoriques pour l'analyse de la stabilité existent dans la littérature avec pour chacun un aspect et des conditions différentes. Parmi ces outils, la théorie de Lyapunov qui a une importance considérable pour résoudre des problèmes de stabilisation des systèmes non linéaires. Malgré son succès, cette méthode présente, entre autres, l'inconvénient de l'absence d'une procédure générale permettant de trouver une fonction de Lyapunov candidate capable de prouver la stabilité pour n'importe quel système non linéaire, c'est-à-dire un problème de généralisation.

Donc, l'utilisation de la méthode de Lyapunov dans la synthèse de lois de commande présente de limitations. Notamment, dans une commande multi-contrôleurs avec les travaux

(Narendra & Balakrishnan, 1994), (Fierro, 1998), (Mancilla-Aguilar, 2000) dont les résultats de stabilité sont locaux, aussi dans (Wang, 1996), (Tanaka, 1998), (Chadli, 2002) et (Kau & Fang, 2007) où l'analyse de la stabilité conduit généralement à la résolution des conditions LMI (Linear Matrix Inequalities) qui donnent des solutions qui peuvent ne pas être entièrement atteignables.

Par ailleurs, dans les systèmes complexes, les solutions proposées par une décentralisation des lois de commande adaptatives généralement utilisent aussi la théorie de Lyapunov pour l'analyse de stabilité (Guo, 1999), (Jiang, 2000) et (Xu, 2013) où les résultats obtenus sont conditionnés par des hypothèses de simplification sur le modèle du processus à commander et/ou sur la loi de commande élaborée, c'est-à-dire stabilité contraignante.

Une autre approche pour la commande des systèmes non linéaires qui est également analysée par la méthode de Lyapunov est celle de la commande par logique floue, en particulier, la commande adaptative floue largement utilisée avec succès dans la littérature pour résoudre le problème de la commande des systèmes non linéaires incertains. L'idée fondatrice consiste à estimer d'une façon directe ou indirecte la commande à appliquer par un ou plusieurs systèmes d'inférence flous à paramètres adaptatifs. Généralement, les lois d'adaptation des paramètres sont obtenues par la méthode de Lyapunov avec des hypothèses sur le modèle et les paramètres à synthétiser afin de garantir la convergence et la stabilité du système de commande (Wang, 94), (Chang, 2001), (Labioud, 2004) et (Boukroune, 08) . En effet, ces hypothèses peuvent ne pas être entièrement vérifiables, ce qui conduit en conséquence à des systèmes de commande non applicables dans la réalité.

C'est dans ce contexte que s'inscrivent les travaux de recherche de cette thèse en visant de trouver de nouvelles pistes par d'autres outils d'analyse de la stabilité et la synthèse de lois de commande pour des systèmes non linéaires.

La théorie d'hyperstabilité, que l'on appellera aussi théorie de Popov (Popov, 1973), ou plus simplement critère de Popov, fait partie des outils d'analyse de la stabilité qui ont été proposés dans la littérature. L'avantage essentiel de cet outil est qu'il s'agit d'une approche permettant d'étudier la stabilité d'un système indépendamment de son point d'équilibre, et qui présente, donc, dans ce sens un caractère plus général que la théorie de Lyapunov.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la stabilisation des systèmes dynamiques continus non linéaires par la théorie d'hyperstabilité. Pour l'élaboration des lois de commande, il est envisagée l'exploitation de différentes techniques et approches de commande non linéaires. Ainsi, nos travaux visent d'impliquer ces techniques dans la conception des

structures de commande pour certaines classes de systèmes non linéaires dont la synthèse des lois de commande est réalisée par le concept d'hyperstabilité. Le but étant de proposer de nouvelles approches en utilisant la théorie de commande multi-contrôleurs pour des systèmes mono-variables et la théorie de commande adaptative décentralisée pour des systèmes complexes. Enfin, des structures de commande par logique floue adaptatives indirectes basées sur la notion du système flou sont introduites pour une classe de systèmes non linéaires.

Dans un souci de compréhension, deux systèmes physiques sont proposés tout au long de ce travail permettant d'illustrer les lois de commande développées. Le premier système est un pendule inversé correspondant à un système non linéaire mono-variable du deuxième ordre. Le second système est un simulateur de vol d'hélicoptère correspondant à un système non linéaire complexe de grande dimension fortement couplé.

Trois parties peuvent être identifiées dans ce travail :

- La première partie, est consacrée au problème de synthèse de lois de commande multi-contrôleurs par la théorie d'hyperstabilité pour des systèmes non linéaires monovariables. Nous proposons alors un théorème qui permet la synthèse de loi de commande assurant l'hyperstabilité asymptotique de ces systèmes. Un pendule inversé est utilisé comme exemple d'application.
- Dans la deuxième partie, la commande des systèmes non linéaires interconnectés en utilisant des algorithmes de commande adaptative décentralisée synthétisés par le concept d'hyperstabilité est abordée. Les lois de commande développées sont appliquées à un simulateur de vol d'hélicoptère.
- La troisième partie a pour but d'étudier le problème de la commande d'une classe de systèmes non linéaires par des lois adaptatives floues indirectes. Les méthodes de commande proposées sont synthétisées par la théorie d'hyperstabilité et approuvées sur des processus physiques concrétisant les systèmes non linéaires étudiés.

Ce rapport de thèse est divisé suivant une approche thématique en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la présentation succincte des outils théoriques nécessaires pour le développement et la compréhension des travaux effectués dans cette thèse. Nous présentons, en premier lieu, les outils de modélisation par représentations d'état des systèmes linéaires et non linéaires, monovariables et complexes ainsi que des systèmes d'inférence flous de type Takagi-Sugeno (T-S). Puis, nous exposons quelques définitions et propriétés de la théorie d'hyperstabilité nécessaires à l'analyse de la stabilité des systèmes

linéaires et non linéaires. Enfin, nous donnons quelques architectures de commande adaptative, à savoir, la commande par l'approche multi-modèle, la commande adaptative à modèle de référence et la commande par logique floue adaptative d'une classe de systèmes non linéaires.

Après avoir abordé les notions préliminaires, nous présentons, dans le deuxième chapitre, la synthèse et la stabilisation de lois de commande multi-contrôleurs des systèmes non linéaires représentés par des descripteurs multi-modèles de type T-S. Deux approches sont traitées : la première approche est une commande multi-contrôleurs à commutation floue avec des contrôleurs locaux à gains régulateurs linéaires de type retour d'état avec anticipation de la référence. La seconde est une amélioration de la première approche avec une loi de commande locale augmentée par une composante adaptative additionnelle. Elle est synthétisée par la théorie d'hyperstabilité, son rôle est de compenser les erreurs d'approximation, réduire le nombre de contrôleurs locaux et garantir la stabilité globale du système de commande. Afin de valider les approches proposées, les lois de commande élaborées sont appliquées en simulation sur un pendule inversé.

Dans le troisième chapitre, nous abordons le problème de la stabilisation d'une classe de systèmes non linéaires complexes, composés d'un ensemble de sous-systèmes non linéaires mono-variables affines en la commande et interconnectés. En se basant sur une représentation par un modèle linéaire à temps variant et en utilisant des algorithmes adaptatifs hyperstables, la synthèse de lois de commande adaptatives décentralisées est proposée pour garantir la stabilité en boucle fermée du système complexe. Dans le but de valider les méthodes proposées, ces lois de commande sont appliquées en simulation sur un simulateur de vol d'hélicoptère. Des tests de performances, en terme de poursuite de trajectoire et de robustesse de la commande, sont présentés.

Dans le quatrième chapitre et dernier chapitre, nous traitons la conception d'une loi de commande adaptative floue indirecte pour une classe de systèmes non linéaires incertains et affines en l'entrée. Le système flou et la commande linéarisante sont à la base de la loi de commande proposée dont les paramètres adaptatifs sont mis à jour par un mécanisme d'adaptation synthétisé par la théorie d'hyperstabilité. Notre contribution consiste à La résolution du problème de singularité et les contraintes souvent imposées sur le gain de commande par une transformation introduite sur le modèle du système à commander. En plus,

la loi de commande proposée est utilisée pour le développement d'une commande adaptative floue décentralisée des systèmes non linéaires interconnectés. Les schémas de commande établis sont validés par simulation sur le pendule inversé et le simulateur de vol d'hélicoptère avec des tests de performances et de robustesse.

Cette thèse se termine par une conclusion générale résumant les différentes approches de commande développées dans ce travail et nous y mettons l'accent aussi sur les futures recherches s'inscrivant dans le prolongement de ce travail et à mener ultérieurement.

**Chapitre 1.**

## **Notions préliminaires**



# Chapitre 1.

---

## Notions préliminaires

---

< La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. >

↪ **Albert Einstein**

---

### 1.1. Introduction

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques notions et outils nécessaires à la compréhension du contenu de ce mémoire. Il est scindé en trois parties:

Dans une première partie, nous rappelons brièvement quelques éléments de base sur la représentation des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires ainsi que les systèmes flous dont ils font usage pour proposer des approches de commande des systèmes non linéaires. La seconde partie est consacrée à la théorie d'hyperstabilité, où nous donnons quelques définitions mathématiques d'hyperstabilité pour les systèmes linéaires et non linéaires. Nous terminons cette partie par l'analyse des différents systèmes à base de blocs structurés à l'aide des théorèmes et propriétés d'hyperstabilité. En dernier lieu, nous présentons un état de l'art sur quelques approches de commande qui seront par la suite des sujets d'étude dans cette thèse, telles que la commande multi-contrôleurs, la commande adaptative à modèle de référence et la commande adaptative floue d'une classe de systèmes non linéaires incertains, et ce, en mettant en évidence leurs structures et leurs domaines d'application. Les approches de commande développées dans les chapitres suivants sont essentiellement basées sur ces notions.

### 1.2. Modélisation des systèmes dynamiques

Le comportement d'un processus peut être modélisé en fonction de ses différentes variables par un ensemble d'équations, formant ce qu'on appelle représentation d'état. Cette représentation,

qui peut être linéaire ou non, continu ou non, doit rendre compte de l'état du système à n'importe quel instant futur si l'on connaît les valeurs initiales et l'évolution des entrées. D'une façon générale, la représentation d'état d'un système continu multi-variables prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{F}(x(t), u(t), t), x(0) = x_0 \\ y(t) &= \mathcal{H}(x(t), u(t), t), \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

où  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $y \in \mathfrak{R}^q$  et  $u \in \mathfrak{R}^m$  sont respectivement le vecteur d'état, le vecteur de sortie et le vecteur de commande du système (1.1).  $\mathcal{F}(\cdot)$  et  $\mathcal{H}(\cdot)$  sont les champs de vecteurs fonctions qui dépendent des systèmes étudiés. Dans le cadre de notre étude nous nous limiterons la représentation d'état des modèles linéaires et non linéaires. Pour plus de détails sur les représentations fréquentielles et temporelles le lecteur pourra consulter (Khalil, 2002).

### 1.2.1. Systèmes linéaires

Si les fonctions  $\mathcal{F}(\cdot)$  et  $\mathcal{H}(\cdot)$  sont linéaires en l'état et en la commande, le système (1.1) est linéaire et sa représentation d'état peut être écrite de comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

avec

- $A(t) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  est la matrice caractéristique du système en régime libre;
- $B(t) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  est la matrice de commande;
- $C(t) \in \mathfrak{R}^{q \times n}$  est la matrice d'observation;
- $D(t) \in \mathfrak{R}^{q \times n}$  est la matrice de transmission directe

Ce système est dit Linéaire à Temps Variant (LTV). Dans le cas où ces matrices ne dépendent pas explicitement du temps, le système linéaire est dit stationnaire.

Outre la représentation temporelle différentielle, le comportement d'un système dynamique Linéaire à Temps Invariant (LTI) peut être décrit par des représentations fréquentielles telles que les fonctions de transfert pour le cas mono-variable, et les matrices de transfert qui en représentent une généralisation (cas multi-variable). Il s'agit de représentations externes ne dépendant que de l'influence des entrées sur les sorties, obtenues par un passage d'une représentation dans l'espace d'état à celle par matrice de transfert  $T(s)$  à travers la relation (Borne & al., 1993) :

$$T(s) = D + C(sI - A)^{-1}B \quad (1.3)$$

où  $I$  est une matrice identité,  $s$  représente l'opérateur de Laplace.

### 1.2.2. Systèmes non linéaires

Rappelons que un système non linéaire est un système qui ne satisfait pas le principe de superposition, où les fonctions  $\mathcal{F}(\cdot)$  et  $\mathcal{H}(\cdot)$  sont non linéaires. Elle peuvent être de formes particulières relativement simples déterminant des classes importantes qui peuvent en être déduites de tels systèmes dynamiques à savoir les systèmes non linéaires affines en la commande (Isidori, 1989).

#### 1.2.2.1. Systèmes non linéaires affines en la commande

La structure des systèmes non linéaires affine en la commande vient généraliser les systèmes bilinéaires et élargir la classe des systèmes non linéaires apparentés aux structures linéaires (1.2). La représentation de ce type de systèmes découle de l'expression (1.1) en considérant la fonction  $\mathcal{F}(\cdot)$  comme affine des variables d'entrée. Le système peut être défini dans ce cas par :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F(x(t), t) + G(x(t), t)u(t) \\ y(t) &= h(x(t), t)\end{aligned}\tag{1.4}$$

où  $G(x, t)$  est un vecteur de fonctions non linéaires de l'état et du temps :

$$G(x, t) = [G_1(x, t) \quad G_2(x, t) \quad \cdots \quad G_m(x, t)]\tag{1.5}$$

Il est clair que le modèle d'état (1.4) ne présente pas une relation directe entre la commande et la sortie, ce qui ne facilite pas la synthèse d'une loi de commande. Pour extraire cette relation, il est nécessaire alors d'introduire une transformation de la représentation d'état (1.4) en utilisant la méthode proposée par Lie (Isidori, 1989).

#### 1.2.2.2. Représentation entrée-sortie

Un cas particulier du système non linéaire (1.4) représentant une classe importante des systèmes non linéaires impliqués dans la synthèse des lois de commande est obtenu par une transformation du modèle d'état (1.4) en une représentation entrées-sorties en utilisant la dérivée de Lie (Isidori, 1989). Pour le cas d'un système mono-entrée mono-sortie, il vient la représentation suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f(x(t), t) + g(x(t), t)u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\end{aligned}\tag{1.6}$$

où  $f(x(t), t)$   $g(x(t), t)$  sont des fonction non linéaires, et  $h(\cdot)$  est définie dans ce cas par  $[1 \ 0 \ \cdots \ 0] \in \mathfrak{R}^n$ .

### 1.2.2.3. Systèmes non linéaires interconnectés

Les “systèmes complexes”, les “systèmes interconnectés”, les “systèmes structurés”, sont des termes employés pour désigner les systèmes de grandes dimensions. Tous ces termes semblent indiquer une dynamique complexe avec un grand nombre de variables d'état, d'entrées et de sorties et/ou des sous-systèmes plus ou moins fortement interconnectés (Claveau, 2005). Ainsi, un système non linéaire complexe de dimension élevée peut être défini comme étant un ensemble de sous-systèmes non linéaires interconnectés dont le modèle dynamique global est donné sous la forme de la représentation d'état (1.4).

Considérons une décomposition des vecteurs  $x(t)$ ,  $u(t)$  et  $y(t)$  en  $N$  composantes : c'est-à-dire  $x(t) = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_N^T]^T$  avec  $x_i(t) \in \mathfrak{R}^{n_i}$  et  $n = \sum_{i=1}^N n_i$ ,  $u(t) = [u_1^T \ u_2^T \ \dots \ u_N^T]^T$  avec  $u_i(t) \in \mathfrak{R}^{m_i}$  et  $m = \sum_{i=1}^N m_i$ ,  $y(t) = [y_1^T \ y_2^T \ \dots \ y_N^T]^T$  avec  $y_i(t) \in \mathfrak{R}^{q_i}$  et  $q = \sum_{i=1}^N q_i$ . La représentation d'état (1.4) peut être alors réécrite sous la forme d'un ensemble de  $N$  sous-systèmes interconnectés, tel que :

Pour  $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= F_{ii}(x_i, t) + G_{ii}(x_i)u_i(t) + \sum_{l=1, l \neq i}^N (F_{il}(x_l, t) + G_{il}(x_l)u_l) \\ y_i(t) &= h_{ii}(x_i) + \sum_{l=1, l \neq i}^N h_{il}(x_l, t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

où  $F_{ii} \in \mathfrak{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $G_{ii} \in \mathfrak{R}^{n_i \times m_i}$  et  $h_{ii} \in \mathfrak{R}^{q_i \times m_i}$  sont des vecteurs de fonction non linéaires définissant la partie nominale du sous-système.  $F_{il} \in \mathfrak{R}^{n_i \times n_l}$ ,  $G_{il} \in \mathfrak{R}^{n_i \times m_l}$  et  $h_{il} \in \mathfrak{R}^{q_i \times m_l}$  sont des vecteurs de fonctions d'interconnexions (couplages) entre les sous-systèmes définis aussi éventuellement non linéaires.

Dans certaines méthodes de commande, les interactions entre les sous-systèmes sont considérés comme étant des perturbations mesurables lors de la synthèse de la loi de commande. Dans le cas des systèmes qui présentent seulement des interactions état-état et état-commande (les sorties des sous-systèmes sont découplées,  $h_{il}(x_l, t) = 0$ ,  $i \neq l$ ) regroupés dans un vecteur noté  $H_i(x, t) \in \mathfrak{R}^{n_i}$ , la représentation du système complexe (1.7) peut être réduite, alors, au modèle d'état suivant (Khalil, 2002):

Pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= F_i(x_i, t) + G_i(x_i)u_i(t) + H_i(x, t) \\ S_i : \quad y_i(t) &= h_i(x_i) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Il est à noter, que le modèle (1.8) peut avoir d'autres formes particulières, par exemple, le cas d'un système complexe affine en l'état obtenu par la simplification de la fonction  $F_i(x_i, t) =$

$A_i(x_i, t)x_i(t)$ . En outre, une représentation entrée-sortie des sous-systèmes est possible qui permet d'aboutir au modèle d'état du système complexe affine en la commande sous la forme (1.6). Ces différentes représentation de systèmes complexes, couramment rencontrés en automatique, seront étudiées par la suite et constituerons l'objet principal des travaux réalisés le long de ce manuscrit.

### 1.2.3. Système d'inférence flou

Si, d'un point de vue mathématique, les systèmes sont classés selon la nature des équations qui les caractérisent (linéaires, non linéaires, ...etc), les systèmes flous sont quant à eux répertoriés selon leur nature structurelle. Dans la littérature, on distingue classiquement deux grandes familles de systèmes flous: systèmes flous à conclusions symboliques (Mamdani, 1976) et systèmes flous à conclusion fonctionnelle [(Takagi, 1985), (Sugeno, 1986)].

Ces deux types de systèmes flous sont basés sur une collection de règles "Si ... Alors". Dans les deux cas, les prémisses de règles sont exprimées symboliquement. Seule l'expression des conclusions de règles permet alors de dissocier les deux familles de systèmes. Les systèmes de Mamdani utilisent en effet des conclusions symboliques de même nature que les prémisses alors que les systèmes de Sugeno exploitent des conclusions numériques. Cette différence dans l'écriture des conclusions de règles permet de distinguer les deux types de systèmes à leur aspect externe. D'un point de vue interne, un mécanisme de calcul est associé à chaque famille de système. Pour les systèmes de Sugeno, celui-ci est purement numérique et s'exprime aisément de manière analytique selon une approche unique. Dans notre étude, on limite la présentation des systèmes flous à ceux qui seront directement exploités dans les approches de commande développées, à savoir les systèmes flous de Takagi-Sugeno à conclusion fonctionnelle.

#### 1.2.3.1. Notions et définitions :

La logique floue peut être vue comme une extension de la logique booléenne. Elle permet de traiter des variables linguistiques dont les valeurs sont des mots ou expressions du langage naturel. Dans cette section, on se limite à la présentation de quelques notions et définitions de base de la logique floue nécessaire la construction d'un système flou.

**Définition 1.1 : Ensemble flou et Fonction d'appartenance :** La notion d'ensemble flou provient du constat que, très souvent, les classes d'objets rencontrés dans le monde physique ne possèdent pas de critères d'appartenance bien définis (Mendel, 1995). Mathématiquement, un ensemble flou  $A$  est défini sur un univers de discours  $X$ , par une fonction d'appartenance  $\mu_A(x)$  qui prend ces valeur dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Cette fonction donne le degré d'appartenance de

chaque élément  $x \in X$  à  $A$ , à partir d'une description mathématique. Les fonctions les plus souvent utilisées sont :

- **Fonction triangulaire** : Elle est définie par trois paramètres  $\{a, b, c\}$  :

$$\mu(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right) \quad (1.9)$$

- **Fonction trapézoïdale** : Elle est définie par quatre paramètres  $\{a, b, c, d\}$  :

$$\mu(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right) \quad (1.10)$$

- **Fonction Gaussienne** : Elle est définie par deux paramètres  $\{a, b\}$  :

$$\mu(x) = \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2b^2}\right) \quad (1.11)$$

- **Fonction sigmoïdale** : Une fonction sigmoïdale est définie par deux paramètres  $\{a, b\}$  :

$$\mu(x) = 1/(1 + \exp(-a(x - b))) \quad (1.12)$$

La représentation formelle des ensembles flous par des fonctions d'appartenance a permis de généraliser les opérateurs des ensembles classiques au cas flou. Nous pouvons citer, par exemple, égalité floue, complémentation floue, union floue, Intersection floue ... etc. Pour plus de détails le lecteur est invité à consulter [(Buhler, 1994), (Driankov, 1996)].

**Définition 1.2: Règle et implication floue** : Les variables linguistiques définies par des fonctions d'appartenance sont liées entre elles par des règles permettant de tirer des conclusions, on parle alors de déductions floues ou inférences. Ces règles floues sont élaborées à partir de la connaissance du système issue très souvent de l'observation expérimentale. Elles permettent de décrire l'évolution du système. Les règles floues, qui sont des objets linguistiques, doivent être mises sous forme de relations floues qui sont des objets mathématiques.

Soit  $A$  et  $B$  deux ensembles flous définis dans l'univers de discours  $X$  et  $Y$ , une règle floue est une relation entre deux propositions floues ayant chacune un rôle particulier, par exemple

$$R: \text{Si } x \text{ est } A \text{ Alors } y \text{ est } B \quad (1.13)$$

A partir des valeurs de la première ( $x \text{ est } A$ ) d'une part, et de celle de la conclusion ( $y \text{ est } B$ ) d'autre part, le degré de vérité de la relation floue ( $R$ ) est déterminé à partir des degrés d'appartenance de  $x$  à  $A$  et de  $y$  à  $B$  comme suit :

$$\mu_R(x, y) = \text{imp}(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (1.14)$$

Les opérateurs les utilisés en commande floue sont les implications de Mamdani et de Larsen :

- Implication de Mamdani:  $\mu_R(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

- Implication de Larsen:  $\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \times \mu_B(x)$

### 1.2.3.2. Structure d'un système flou

Un système flou peut être interprété selon deux points de vue : mathématique ou logique. D'un point de vue mathématique, un système flou est une fonction non linéaire reliant un vecteur de données d'entrée à un vecteur de sortie et, de point de vue logique, un système flou est un système à base de connaissance particulière composé de quatre modules principaux, à savoir : la base de règles, la fuzzification, le moteur d'inférence et la défuzzification [(Buhler, 1994), (Wang, 1994)]:

- **Interface de fuzzification** : ce module traduit les données numériques caractérisant l'état du système pour fournir une caractérisation floue des variables pour pouvoir activer les règles qui sont exprimées à l'aide de variables linguistiques associées à des ensembles flous. Dans la littérature de la commande floue, deux approches de fuzzification sont généralement utilisées, à savoir : la fuzzification singleton et la fuzzification non-singleton.
- **La base de règles floues**: une base de règle floue est une collection de règles floues décrivant le comportement du système. Ces règles peuvent être fournies par un expert ou peuvent être extraites de données numériques. Une règle floue  $R^{(i)}$  est donnée pour le cas multi-entrée mono-sorite (MISO) par :

$$R^{(i)}: \text{Si } x_1 \text{ est } A_{i1} \text{ et } x_2 \text{ est } A_{i2} \text{ et ... et } x_n \text{ est } A_{in} \text{ Alors } y \text{ est } B^i \quad (1.15)$$

où  $x \in [x_1, \dots, x_n]$  et  $y$  sont respectivement le vecteur des variables d'entrée et la sortie du système flou. Pour  $B$  une valeur floue, le système est dit de Mamdani.

- **Moteur d'inférence** : Le moteur d'inférence utilise la base des règles floues pour effectuer une transformation à partir des ensembles flous dans l'espace d'entrée vers des ensembles flous dans l'espace de sortie en se basant sur les opérateurs de la logique floue. Le traitement mathématique de l'opérateur "ET" intervenant dans une règle et l'opérateur "OU" reliant les différents règles détermine le type de moteur, tel que, le moteur de Mamdani et Sugeno.
- **Défuzzification** : ce module traduit l'action floue issue de l'inférence en une grandeur physique directement exploitable par le processus à commander. Le critère de choix de la méthode qui réalise cette tâche en commande floue est la simplicité de calcul. Le plus souvent, la méthode de défuzzification par la moyenne des centres est la plus utilisée.

Dans la littérature, il existe plusieurs variantes des systèmes flous résultent de la façon de représenter les opérations flous par des formules mathématiques (Wang, 1994). Dans cette étude, on se restreint à la présentation des systèmes flous de Takagi-Sugeno (T-S).

### 1.2.3.3. Système flou de Takagi-Sugeno:

Les systèmes flous à conclusion symbolique sont les systèmes flous de Mamdani. Les systèmes flous de Takagi-Sugeno sont, comme ceux de Mamdani, construits à partir d'une base de règles "Si ...alors". Si les prémisses sont toujours exprimées linguistiquement et donc similaires à celles utilisées dans (1.15), les conclusions sont par contre de nature numérique. Elles peuvent prendre différentes formes : équations linéaires ou polynômiales, statiques ou dynamiques. L'étude est ici restreinte à deux type de conclusions, constantes et équation d'état, donnant naissance ainsi à deux modèles flous.

#### a. Premier modèle flou de T-S

D'une manière générale, un modèle flou de type T-S est basé sur une collections de règles floues  $R^{(i)}$  de la forme :

$$R^{(i)}: \text{Si } x_1 \text{ est } \check{F}_1^i \text{ et } x_2 \text{ est } \check{F}_2^i \cdots \text{ et } x_n \text{ is } \check{F}_n^i \text{ Alors } y = f_i(x) \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.16)$$

où  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur des entrées du système flou,  $y \in \mathfrak{R}$  sa sortie,  $\check{F}_j^i \in \{F_j^1, \dots, F_j^{m_j}\}$ , avec  $\check{F}_j^k \quad j = 1, \dots, n$  et  $k = 1, \dots, m_j$  sont des ensembles flous définis dans  $\mathfrak{R}$ .  $N = \prod_{j=1}^n p_j$  est le nombre total des règles du système flou.  $f_i(x)$  est une fonction numérique dans l'espace de sortie. Si  $f_i(x)$  est une constante, telle que :

$$f_i(x) = \pi_i \quad (1.17)$$

Le système flou de Takagi-Sugeno est dit d'ordre zéro (T-S0), et la sortie totale du système est obtenue par le calcul d'une moyenne pondérée des conclusions des règles selon la relation suivante (Wang, 1994) :

$$y(x) = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i(x) \pi_i}{\sum_{i=1}^N \mu_i(x)} \quad (1.18)$$

avec ,

$$\mu_i(x) = \prod_{j=1}^n \mu_{F_j^i}(x_j), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.19)$$

où  $\mu_i(x)$  représente le degré d'activation de la règle  $R^{(i)}$ .

En introduisant la notion de fonctions floues de base (Wang, 1994), la sortie du système flou de T-S0 peut être écrite sous la forme :

$$y(x) = \xi^T(x) \pi \quad (1.20)$$

avec

- $\hat{\pi}_f = [\pi_1, \dots, \pi_N]^T$  : vecteur constitué des paramètres de la partie conclusion des règles floues;
- $\xi_f(x) = [\xi_1(x), \dots, \xi_N(x)]^T$  : vecteur des fonctions floues de base, dont chacune des composantes est données par :

$$\xi_i(x) = \frac{\mu_i(x)}{\sum_{i=1}^N \mu_i(x)} \quad (1.21)$$

L'expression (1.20) du système flou T-S0 est particulièrement importante, puisque elle sera directement exploitée dans les approches de commande floue développées au chapitre 4 pour la commande d'une classe de systèmes non linéaires incertains.

### ***b. Deuxième modèle flou de T-S : Multi-modèle flou de T-S***

Le deuxième modèle de T-S, appelé aussi multimodèle flou de T-S, est représentés dans l'espace d'état par des règles floues de type "Si –Alors". Les parties prémisses de ces règles floues sont représentatives de l'univers du discours sur lequel le modèle flou est valide et, les parties conclusions correspondent à des modèles locaux invariants dans le temps, c'est-à-dire des représentations d'état linéaires. Ce type de modèle flou s'avère utile pour la représentation des systèmes non linéaires. La  $i^{\text{ème}}$  règle floue  $R^{(i)}$  (en temps continu) peut s'écrire alors sous la forme :

$$R^{(i)}: \text{Si } z_1(t) \text{ est } \check{F}_1^i \text{ et, } \dots, \text{ et } z_p(t) \text{ est } \check{F}_1^i \text{ Alors } \dot{x}_i(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \quad (1.22)$$

où  $z_p(t)$  sont les variables de prémisses (variable de décision) dépendant des variables d'état mesurables  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  et éventuellement de la commande  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  ou de la sortie  $y(t) \in \mathfrak{R}^q$ ,  $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  et  $C_i \in \mathfrak{R}^{q \times n}$  sont des matrices décrivant la dynamique linéaire locale du système.

Le modèle global est alors obtenu par l'agrégation des différents modèles locaux.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (1.23)$$

où  $\xi_i(z(t))$  représente donc la fonction d'activation du  $i^{\text{ème}}$  modèle local associé. Selon la zone où évolue le système, cette fonction indique la contribution plus ou moins importante du modèle local correspondant dans le modèle global (multimodèle). Elle assure un passage progressif de ce modèle aux modèles locaux voisins. Ces fonctions vérifient la propriété d'une somme convexe, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^N \xi_i(z(t)) = 1, \xi_i(z(t)) \geq 0 \quad (1.24)$$

Dans la littérature, il existe trois méthodes permettant le passage d'un modèle non linéaire à un modèle flou T-S : par identification, par linéarisation autour de différents points de fonctionnement ou par transformation polytopique convexe. Dans la première situation, à partir de données sur les entrées et les sorties, on peut identifier les paramètres du modèle local correspondant aux différents points de fonctionnement. Dans la deuxième et la troisième situation, on suppose disposer d'un modèle mathématique non linéaire.

Considérant le cas on dispose d'un système non linéaire ait une représentation de la forme :

$$\dot{x} = \mathcal{F}(x(t), u(t)) \quad (1.25)$$

avec  $\mathcal{F}(\cdot)$  est continûment dérivables. Nous supposons que le comportement dynamique du système non linéaire (1.25) peut être décrite par une représentation multimodèle, composée de plusieurs modèles locaux linéaires ou affines, tel que chaque modèle local est obtenu en linéarisant le système non linéaire autour de  $N$  points de fonctionnement  $P_f(x_i^*, u_i^*)$ ,  $1, \dots, N$ , tel que :

$$\dot{x}(t) = A_i(x(t) - x_i^*) + B_i(u(t) - u_i^*) + E_i(x - x_i^*, u - u_i^*) \quad (1.26)$$

avec

$$A_i = \left. \frac{\partial \mathcal{F}(x(t), u(t))}{\partial x} \right|_{x = x_i^*, u = u_i^*}, B_i = \left. \frac{\partial \mathcal{F}(x(t), u(t))}{\partial u} \right|_{x = x_i^*, u = u_i^*} \quad (1.27)$$

où  $E_i$  représente le vecteur des erreurs d'approximation. D'un point de vue mathématique, ceci correspond à approximer la fonction  $\mathcal{F}(\cdot)$  par son plan tangent au point  $P_f(x_i^*, u_i^*)$ . La notation multi-modèle flou de T-S se représente alors sous la forme suivante:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i(z(t))(A_i x(t) - x_i^*) + B_i(u(t) - u_i^*) + E_i(x_i^*, u_i^*) \quad (1.28)$$

La précision de la modélisation souhaitée dépend directement du nombre de modèles locaux  $N$ , de la complexité du système non linéaire ainsi que du choix des fonctions d'activation. Ces dernières sont reliées essentiellement aux choix de la variable prémisse, le nombre des ensembles flous et le type des fonctions d'appartenance. Elles sont sélectionnées dans les travaux de cette thèse par des fonctions gaussiennes et sigmoïdale.

- **Fonction d'appartenance gaussienne** : Elle est définie par sa moyenne  $m_i^j$  et son écart type  $\vartheta_i^j$  :

$$F_j^i(x_i) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - m_i^j}{\vartheta_i^j}\right)^2\right] \quad (1.29)$$

- **Fonction d'appartenance sigmoïdale** : Elle est définie par deux paramètres  $a_i^j$  et  $c_i^j$

$$F_j^i(x_i) = 1/[1 + \exp(-a_i^j(x_i - c_i^j))] \quad (1.30)$$

Il est à noter que, les modèles flous T-S sont très efficace pour approximer des systèmes non linéaires complexes du fait qu'ils ont la propriété d'approximateur universel de fonctions continues sur un ensemble compact avec une précision arbitraire définie (Wang, 1994). De ce fait, ils permettent d'exploiter un certain nombre de techniques numériques issues de l'automatique conventionnelle (méthodes moindres carrés récursifs, filtrage de Kalman, commande adaptative, commande prédictive, ...etc) et d'établir l'analyse de la stabilité et la robustesse.

### 1.3. Analyse par l'hyperstabilité (V.M. Popov)

La notion de stabilité constitue une problématique centrale de la théorie de commande. Souvent liée à la façon d'appréhender un système, elle possède un large éventail de définitions (Khalil, 2002). Comme la dynamique d'un système physique est souvent gouvernée par des équations différentielles non linéaires complexes et fortement couplées, connaître la solution explicite de ces équations différentielles pour étudier la stabilité est généralement une tâche difficile. Pour contourner ce problème, La théorie d'hyperstabilité introduite par Popov trouve sa place chez la communauté des automaticiens (Popov, 1973). L'hyperstabilité des systèmes linéaires, connue aussi par la notion de Positivité, consiste à étudier la stabilité locale autour d'un point d'équilibre. Par contre, l'inégalité intégrale de Popov, basée sur le concept d'énergie, détermine la stabilité globale du système sur son domaine de fonctionnement.

#### 1.3.1. Principe de base

Le concept d'hyperstabilité a été développé pour la première fois par Popov en 1973 résultats des travaux effectués sur l'analyse de stabilité des systèmes dynamiques avec une contre-réaction non linéaire en utilisant la théorie des systèmes passifs (Popov, 1973). En réalité, la passivité dispose d'un lien étroit avec la théorie d'hyperstabilité, voire même identique selon Lyapunov pour des systèmes linéaires en considérant une fonction candidate de forme quadratique de l'état. Pour cela, nous considérons la représentation d'état d'un système linéaire  $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$ ,  $\forall t \geq t_0$  avec  $x(t_0)$  sa valeur initiale. Le résultat obtenu par Popov pour démontrer la stabilité de ce système est basé sur l'inégalité suivante (Popov 1963) :

$$\underbrace{\int_{t_0}^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau}_{\text{Energie fournie}} + \underbrace{\frac{1}{2}x^T(t_0)x(t_0)}_{\text{Energie initiale}} \geq \underbrace{\frac{1}{2}x^T(t)x(t)}_{\text{Energie stockée}} \quad (1.31)$$

Cette inégalité exprime le principe de conservation d'énergie des systèmes passifs linéaires permettant de garantir la stabilité. Depuis, les travaux de Popov sont orientés vers l'extension de ce principe aux systèmes passifs réels, c'est-à-dire aux systèmes non linéaires. Comme résultat, Popov a pu démontrer que tous les systèmes dynamiques satisfaisant l'inégalité (1.31) admettent les mêmes propriétés de stabilité.

### 1.3.2. Hyperstabilité des systèmes non linéaires

L'hyperstabilité d'un système non linéaire démontré par Popov est obtenu à partir de l'inégalité (1.31). Un système non linéaire décrit par la représentation d'état (1.1) vérifiant cette inégalité est globalement stable "hyperstable", d'où, il vient la définition suivante d'un système non linéaire hyperstable :

#### Définition 1.3 :

Soit le système décrit par la représentation d'état non linéaire (1.1) avec  $m = q$ , le système est strictement hyperstable si pour  $t \geq t_0$  avec  $t_0 \geq 0$ ,  $u$  vérifie l'inégalité :

$$\int_{t_0}^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau \geq -\gamma_0^2 + \varrho_1 \|x(t)\|^2, \quad \varrho_1 > 0 \quad (1.32)$$

où  $\gamma_0 = \sqrt{\frac{1}{2}x^T(t_0)x(t_0)}$  est une constante dépendante des conditions initiales,  $\varrho_1$  est une constante strictement positive,  $\|\cdot\|$  est la norme d'un vecteur.

Avec l'inégalité de Popov (1.32), il est possible d'étudier la stabilité d'un système physique quelconque sans faire recours à la résolution de l'équation différentielle qui gouverne sa dynamique. La vérification de cette inégalité permet de savoir si le système est stable ou non et avec quel type de stabilité.

La définition 1.1 de l'hyperstabilité stricte est une condition suffisante et non nécessaire pour garantir la stabilité du système non linéaire (Popov, 1973). Pour des systèmes décrits seulement par un modèle externe reliant les variables d'entrée et de sortie (les états du système ne sont pas pris en considération), Popov a introduit la notion de faible hyperstabilité ou hyperstabilité non stricte.

#### Définition 1.4:

Le système décrit par (1.1) avec  $m = q$  est faiblement hyperstable, si l'inégalité intégrale suivante est vérifiée :

$$\int_{t_0}^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau \geq -\gamma_0^2 \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.33)$$

Cette définition est particulièrement importante pour l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires (Popov, 1973).

**Définition 1.5 : Hyperstabilité asymptotique**

Le système décrit par (1.1) est asymptotiquement hyperstable, s'il est hyperstable et globalement asymptotique pour  $u = 0$ .

**1.3.3.. Hyperstabilité des systèmes linéaires : Positivité**

L'hyperstabilité d'un système linéaire est basée sur le fait que le comportement d'un système non linéaire est le même que son approximation linéaire pour des petites variations autour du point d'équilibre (Slotine, 1991). Elle permet l'étude et l'analyse de la stabilité locale des systèmes physiques. En effet, l'hyperstabilité et la positivité d'un système linéaire sont deux concepts équivalents qui sont déterminés à partir de la représentation externe entrée-sortie du système à un point d'équilibre [(Anderson, 1967), (Narendra & al., 1973)].

**Définition 1.6 : Système positif réel**

Soit le système linéaire stationnaire décrit par la représentation d'état (1.2), le système est Positif Réel (PR) pour  $t \geq 0$  avec  $x(0) = 0$ , si l'inégalité intégrale suivante est vérifiée (Willems, 1972) :

$$\int_0^t u^T(t)y(t)dt \geq 0 \quad (1.34)$$

Pour un système linéaire décrit par une fonction (matrice) de transfert  $T(s)$  (Equation 1.3), la positivité peut être définie à travers l'analyse fréquentielle.

**Définition 1.7 : Fonction (Matrice) positive réelle**

Une fonction (matrice) de transfert  $T(s)$  est PR si elle vérifie les conditions suivantes :

- $T(s)$  est analytique,  $\forall \omega \geq 0 \Rightarrow Re[T(j\omega)] \geq 0$ ,
- les éléments de  $T(s)$  n'ont pas de pôles instables,
- $T(j\omega) + T(-j\omega) \geq 0$  pour toute fréquence  $\omega$ , où  $j\omega$  n'est pas un pôle de  $T(s)$ , s'il y a des pôles  $p_1, p_2, \dots, p_q$  de  $T(s)$  sur l'axe imaginaire, qui sont non-répétés et la matrice de résidu aux pôles  $\lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)T(s), i = 1, \dots, q$  est hermitienne et semi-définie positive.

**Remarque 1.1 :** La définition d'un système linéaire strictement positif réel (SPR) peut être établie à partir des définitions 1.4 et 1.5 d'un système PR en éliminant l'opération d'égalité.

**Théorème 1.1 :** Un système linéaire stationnaire décrit par la représentation d'état (1.2) est strictement hyperstable, si et seulement si, il est décrit par une fonction (matrice) de transfert (1.3) SPR. Il est seulement hyperstable s'il est décrit par une fonction (matrice) de transfert PR .

Il est évident que dans le cas des systèmes monovariables, la positivité est facile à vérifier selon la définition 1.5. Cependant, dans le cas multivariables, elle est inexploitable sans le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (Rantzer, 1996).

**Théorème 1.2 : Kalman-Yakubovich-Popov**

Soit le système linéaire stationnaire multivariable d'écrit par l'équation d'état (1.2) qui est commandable et observable. La matrice de transfert  $T(s) = C(sI_n - A)^{-1} + D$ , avec  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ ,  $D \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  est SPR avec  $T(s) \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  si et seulement s'il existe des matrices  $P = P^T > 0$ ,  $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  et  $V \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  Telle que :

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= -LL^T \\ PB - C^T &= -LV \\ D + D^T &= V^T V \end{aligned} \tag{1.35}$$

Pour  $D = 0_{m \times p}$ , le théorème 1.2 est énoncé comme suit :

**Théorème 1.3 :**

Soit la fonction (matrice) de transfert  $T(s) = C(sI - A)^{-1}B$  d'un système linéaire qui est à la fois commandable et observable, où  $(A, B, C)$  est une réalisation minimale de  $T(s)$  avec  $T(\infty) = 0$ , sous ces hypothèses, la fonction de transfert  $T(s)$  est SPR, si et seulement s'il existe deux matrices symétriques définies positives  $P$  et  $Q$  telle que :

$$A^T P + PA = -Q \tag{1.36}$$

et

$$PB = C^T \tag{1.37}$$

Notons que le théorème 1.3 est principalement employé dans l'analyse de la stabilité et la synthèse des lois de commande développées dans cette thèse.

**1.3.4. Propriétés des systèmes hyperstables :**

Le concept d'hyperstabilité est essentiellement relié aux propriétés particulières, les plus importantes accordées et approuvées par Popov sont (Popov, 1973) :

- a. **Bornitude** : Un système hyperstable est un système à entrées-sorties bornées (BIBO), c'est-à-dire si le système est soumis à des entrées bornées alors les sorties obtenues sont aussi bornées.
- b. **Stabilité globale** : L'hyperstabilité incluse la stabilité globale de Lyapunov pour une entrée nulle. Tel que, un système asymptotiquement hyperstable est globalement asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.
- c. **Passivité** : Un système hyperstable est un système passif stable.

### 1.3.5. Hyperstabilité des systèmes à base de blocs structurés

Rappelons qu'un système complexe peut être ramené à des structures qui sont constituées d'un ensemble de sous-systèmes, par exemple deux sous-systèmes  $S_1$  et  $S_2$ , reliés en parallèle ou en rétroaction (Voir figure 1.1). La preuve de l'hyperstabilité des systèmes complexes est simplifiée donc à déterminer l'hyperstabilité de ces deux structures.

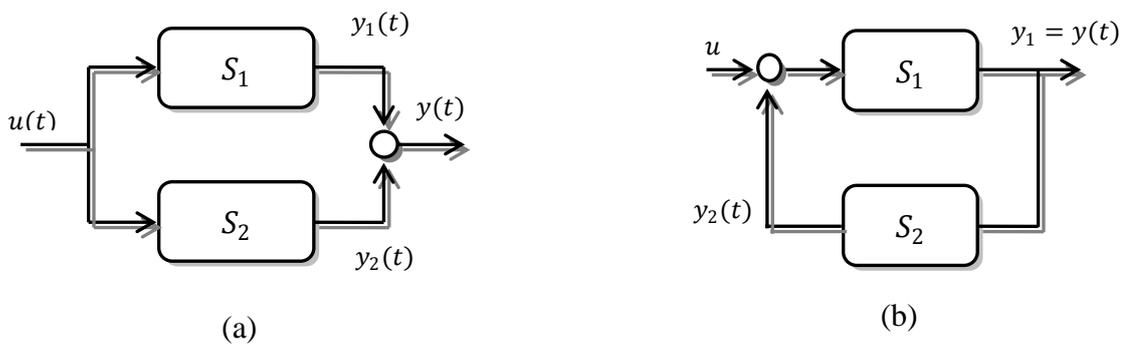


Figure 1.1 : Schéma fonctionnel d'une structure parallèle et par rétroaction

#### 1.3.5.1. Structure en parallèle

La connexion parallèle des systèmes, comme elle est schématisée par la figure (1.1a), permet de simplifier la preuve de l'hyperstabilité des systèmes complexes. Tel que, une opération de sommation de deux sous-systèmes avec une entrée commune est souvent modélisée par un schéma de connexion parallèle. L'hyperstabilité du système global selon la définition 1.4 est garantie si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$S : \int_0^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau \geq -\gamma_0^2 \quad (1.38)$$

en remplaçant  $y$  par son expression  $y(\tau) = y_1(\tau) + y_2(\tau)$  dans (1.38), il vient

$$\begin{aligned} \int_0^t u^T(\tau)y(\tau)d\tau &= \int_0^t u^T(\tau)(y_1(\tau) + y_2(\tau))d\tau \\ &= \int_0^t u^T(\tau)y_1(\tau)d\tau + \int_0^t u^T(\tau)y_2(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (1.39)$$

Le système est hyperstable, si les deux sous-systèmes en parallèles sont hyperstables, avec

$$S_1 : \int_0^t u^T(\tau)y_1(\tau)d\tau \geq -\gamma_{01}^2 \quad (1.40)$$

$$S_2 : \int_0^t u^T(\tau)y_2(\tau)d\tau \geq -\gamma_{02}^2 \quad (1.41)$$

où  $\gamma_0^2 = \gamma_{01}^2 + \gamma_{02}^2$

### 1.3.5.2. Structure à interaction par rétroaction

Cette section présente les résultats obtenus sur l'analyse de l'hyperstabilité des systèmes interconnectés de manière bidirectionnelle à savoir par rétroaction qui peut être schématisée par la figure (1.1b). L'hyperstabilité du système global  $S$  est garantie si les deux sous-systèmes  $S_1$  et  $S_2$  sont hyperstables:

L'hyperstabilité du sous-système  $S_1$  est définie par l'inégalité suivante :

$$\int_0^t (u(\tau) + y_2(\tau))^T y_1(\tau) d\tau = \int_0^t u^T(\tau)y_2(\tau)d\tau + \int_0^t y_1^T(\tau)y_2(\tau)d\tau \quad (1.42)$$

Le système global est hyperstable, d'après (1.42), si les deux sous-systèmes  $S_1$  et  $S_2$  sont en même temps hyperstables:

$$S_1 : \int_0^t u^T(\tau)y_1(\tau)d\tau \geq -\gamma_{01}^2 \quad (1.43)$$

$$S_2 : \int_0^t y_1^T(\tau)y_2(\tau)d\tau \geq -\gamma_{02}^2 \quad (1.44)$$

Les résultats de l'hyperstabilité des systèmes structurés présentés dans cette section peuvent être étendus au cas d'hyperstabilité stricte.

### 1.3.5.3. Hyperstabilité d'un système linéaire avec une contre réaction non linéaire :

Dans cette section, nous présentons une structure particulière des systèmes pouvant être mis sous une forme d'un schéma standard composé de deux blocs: un bloc linéaire dans la chaîne directe défini par  $T(s)$ , et ayant en contre-réaction un bloc non linéaire décrit par  $v = F(y, t)$ , où  $y$  et  $v$  sont respectivement leur entrée et leur sortie (voir figure 1.2). Le problème de la stabilité absolue de ce système consiste à trouver des conditions suffisantes sur ces deux systèmes pour que l'origine soit globalement asymptotiquement stable (Popov, 1973). Ce résultat est obtenu si le système considéré est hyperstable, c'est-à-dire les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- La fonction transfert  $T(s)$  est SPR , c'est-à-dire

$$\operatorname{Re}(T(j\omega)) > 0 \quad \text{Pour toutes } \omega \geq 0 \quad (1.45)$$

- Le sous-système non linéaire en contre-réaction est faiblement hyperstable (Popov 1973)

$$\int_0^t y^T(\tau)v(\tau)d\tau \geq -\gamma_0^2 \quad (1.46)$$

La condition (1.45) est vérifiée en utilisant le lemme 1.2 de Kalman-Yakobovich-Popov présenté précédemment.

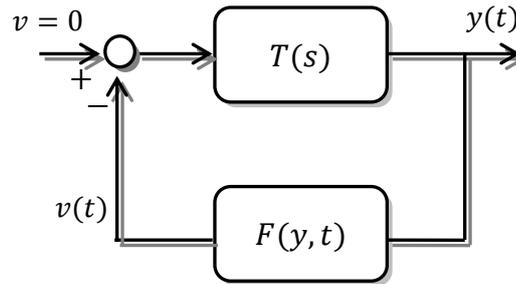


Figure 1.2 : Schéma structurel d'un système linéaire avec un contre-réaction non linéaire

L'hyperstabilité de ce type de système est particulièrement importante dans l'analyse de la stabilité et la synthèse de lois de commande. Les approches de commande que nous allons développer dans ce manuscrit sont basées essentiellement sur cette propriété.

## 1.4. Notions sur les approches de commandes étudiées

### 1.4.1. Introduction

Cette section a pour objectif de présenter trois approches de commande qui seront des sujets d'étude dans les prochains chapitres, à savoir la commande multi-contrôleurs, la commande adaptative à modèle de référence et la commande adaptative floue. En effet, la problématique de synthèse des lois de commande par la théorie d'hyperstabilité des systèmes non linéaires que nous abordons dans cette thèse, repose essentiellement sur les méthodes présentées dans cette section. Cette dernière sera structurée comme suit. En premier lieu, nous donnons un aperçu général sur la commande multi-contrôleurs à travers son schéma de conception général et les différentes classes qui existent dans la littérature en particulier la commande multi-contrôleurs par l'approche multi-modèle. Ensuite, nous présentons quelques algorithmes de commande adaptatifs à modèle de référence synthétisés par la théorie d'hyperstabilité. Enfin, la commande adaptative par logique floue direct et indirecte d'une classe de systèmes non linéaires est présenté.

## 1.4.2. Commande multi-contrôleurs

La modélisation d'un système est souvent considérée comme une étape préliminaire pour la conception d'une commande. Lorsqu'il s'agit de processus non linéaires, l'approximation par une représentation multi-modèle s'avère une méthode assez puissante et efficace permettant de pallier aux difficultés rencontrées lors de la conception d'une commande dans la mesure où le modèle global du système, qui peut être très complexe et incertain, est remplacé par un ensemble de modèles simples décrivant chacun le processus dans une région de fonctionnement particulière. Si nous pouvons caractériser chacune de ces régions et leur associer des contrôleurs locaux plus simple et performant, le problème se simplifiera grandement. Dans ce contexte, on parle d'une approche multi-contrôleurs qui consiste à définir une méthode de commande basée sur de multiples modèles. Cette approche a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche récents et a été adoptée pour des applications dans des domaines divers [(Balakrishnan, 1996.), (Xu, 2000), (Sarma, 2001), (Chadli, 2002)].

### 1.4.2.1. Concept général de la commande multi-contrôleurs

L'approche multi-contrôleurs consiste à déterminer une structure de commande pour le système considéré en se servant d'un ensemble de contrôleurs déterminés dans différentes régions de fonctionnements. Ces contrôleurs sont conçus à partir d'un ensemble de modèles dont leur représentation n'est valable que dans une partie de l'espace de fonctionnement. En effet, à chaque modèle local est associé un contrôleur qui prend en compte les mesures du système et l'objectif à atteindre. Ensuite, la commande final effectivement appliquée au procédé est déduite à partir des différentes commandes locales et un mécanisme de sélection mi en place pour déterminer la contribution de chaque commande. Cette contribution se présente généralement sous forme d'un indice de validité que l'on attribue à chaque contrôleur.

Pour la conception des contrôleurs locaux, on peut opter pour une structure commune ou pour des structures différentes selon les modèles disponibles. A ce sujet, plusieurs stratégies de commande multi-contrôleurs ont été développées dans la littérature qui dépendent de plusieurs paramètres, à savoir la nature des modèles locaux, les performances souhaitées et les caractéristiques du processus étudié (Pagès, 2001).

Il est a noter que la commande final appliquée au procédé peut être considérée comme étant une commande adaptative, puisque les paramètres du contrôleur (cas des contrôleurs similaires) changent à chaque instant suivant un mécanisme de décision prédéterminé. La figure 1.3 présente le schéma bloc illustrant le principe de la commande multi-contrôleurs.

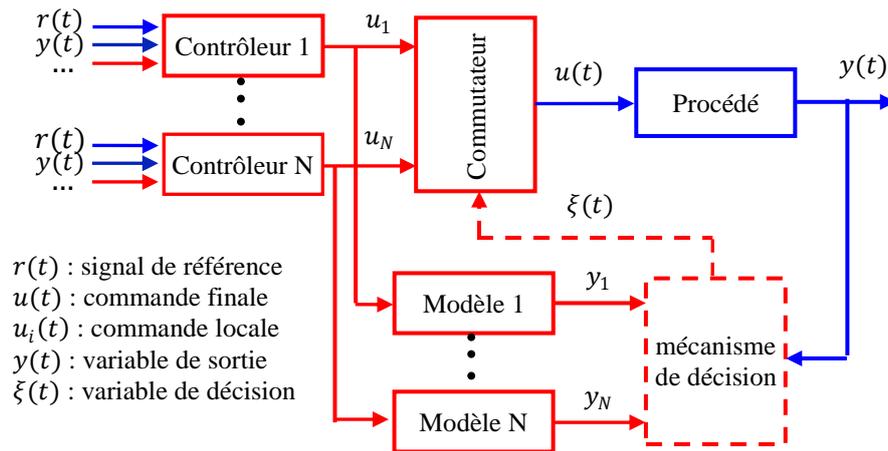


Figure 1.3: Schéma de principe de la commande multi-contrôleurs.

### 1.4.2.2. Classification des commandes multi-contrôleurs

Les diverses études menées dans le domaine de la commande multi-contrôleurs ont abouti à l'apparition de plusieurs stratégies de commande. Ces stratégies diffèrent en fonction de plusieurs paramètres tels que la nature et les caractéristiques du processus étudié, la structure de la représentation multimodèle (à modèle global implicite ou explicite faisant intervenir des modèles locaux ou génériques) et les performances souhaitées pour la commande. De ce fait, il est difficile de déduire une classification unique et exhaustive de ces stratégies (Elfelly, 2010).

En considérant la façon selon laquelle la commande finale est obtenue, les stratégies de commande multi-contrôleurs peuvent être regroupées en deux grandes classes : stratégies par commutation franche ou stratégies par commutation floue.

#### a. Stratégie de commande multi-contrôleurs à commutation franche

Le principe de la commande multi-contrôleurs à commutation franche consiste à concevoir un contrôleur pour chaque modèle de la représentation multi-modèle, puis à déduire la commande finale par sélection franche entre les différentes commandes obtenues  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Donc, la commutation entre les contrôleurs s'effectue selon une séquence prédéfinie programmée dans un système à événement discret de sorte que, à chaque instant, le processus se trouve commandé par un seul contrôleur relatif à l'un des modèles [(Chang, 1999), (Pagès, 2001)].

Cette stratégie de commande, comme c'est illustrée par la figure (1.4), présente l'avantage de la facilité d'implémentation et de manipulation dans la mesure où elle fait intervenir un mécanisme de décision assez simplifié. Elle s'adapte bien au cas de la modélisation idéale où la

séquence de commutation peut être connue a priori. Toutefois, si la base contient un grand nombre de modèles, il est souvent difficile de déterminer une règle de commutation. De plus, l'allure de la commande appliquée au procédé présente des points de discontinuité "des pics" apparaissent au moment des commutations, et en conséquence les performances ne sont plus satisfaisantes au niveau de la poursuite de trajectoire..

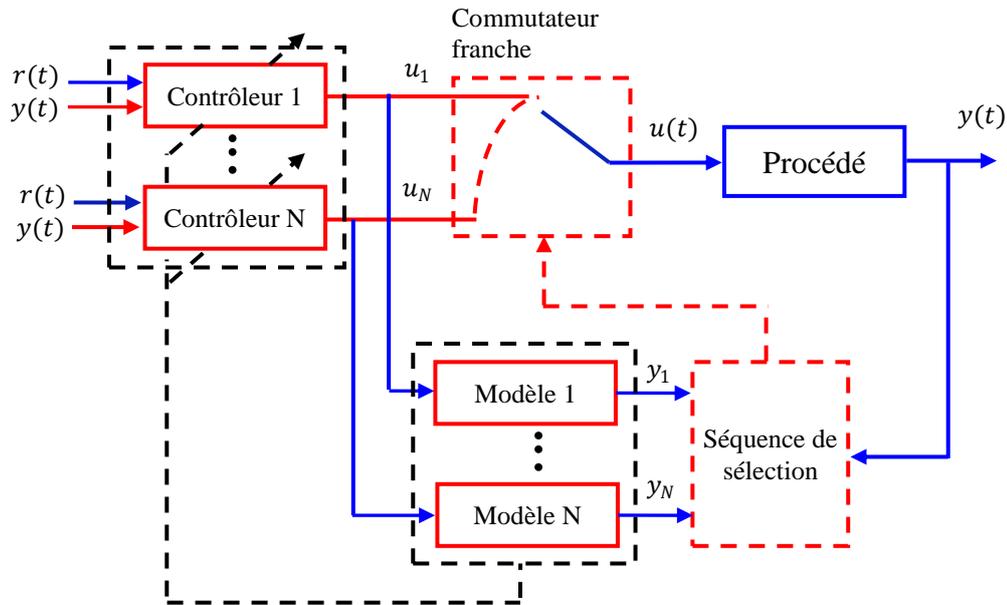


Figure 1.4: Commande multi-contrôleurs à commutation franche.

### b. Stratégie de commande multi-contrôleurs à commutation floue

Cette stratégie de commande est basée sur l'utilisation d'un système flou pour effectuer la combinaison des commandes locales liées aux modèles descriptifs du système considéré. En effet, chaque contrôleur contribue partiellement, à chaque instant, à la détermination de la commande finale effectivement appliquée au procédé. La contribution est réalisée via une opération de pondération entre ces commandes partielles par leurs degrés de validités respectifs, comme l'illustre l'expression suivante (Chadli, 2002):

$$u(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i(z) u_i(t) \quad (1.47)$$

La figure (1.5) représente la structure du système de commande multi-contrôleurs à commutation floue.

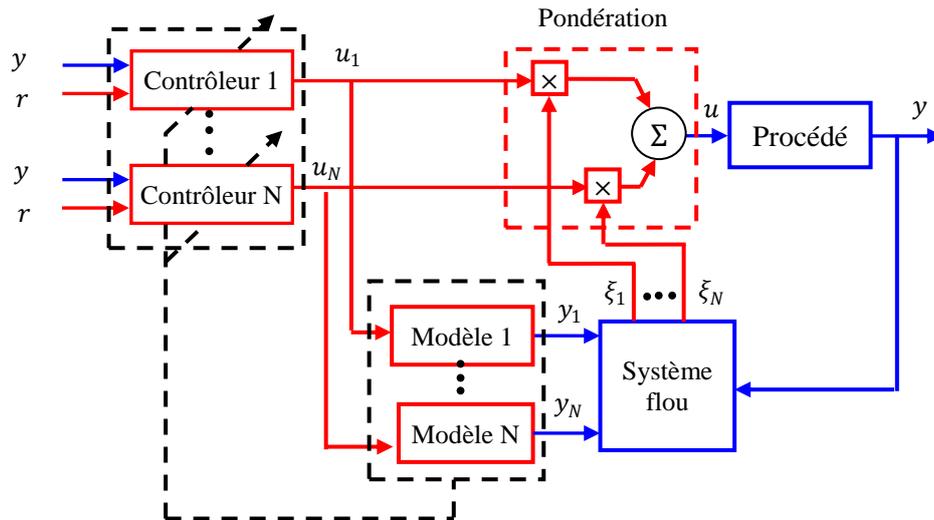


Figure 1.5: Commande multi-contrôleurs à commutation floue.

Les avantages de ce type de commutateur dans un système de commande sont multiples, à savoir, le problème des pics intervenants dans une commutation franche est pallié telle que l'allure de commande est nettement plus lisse, en conséquence, les performances en poursuite de trajectoire sont nettement meilleur. De plus, ce type de commutation permet aussi de combiner dans une même structure des contrôleurs de différentes natures, et la preuve de stabilité peut être effectuée analytiquement. Dans le domaine de la commande, ce type de commutation donne des opportunités beaucoup plus vastes qu'une commutation franche.

Les travaux menés dans cette thèse sur la commande multi-contrôleurs sont à commutation floue basés sur la représentation multimodèle T-S d'un système non linéaire. Les lois de commande locales sont de même forme, linéaire et adaptative dont l'analyse de la stabilité est effectuées par le concept d'hyperstabilité.

### 1.4.3. Commande adaptative à modèle de référence

L'élaboration des lois de commande susceptibles de réaliser les performances désirées a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Particulièrement, la Commande Adaptative avec Modèle de Référence (MRAC) a suscité un réel intérêt. Le concept de la loi de commande MRAC consiste tout simplement à ajuster les paramètres du régulateur en vue de réaliser une poursuite parfaite d'un modèle de référence, incorporant la dynamique désirée en boucle fermée. Pour ce faire, plusieurs structures de cette loi de commande ont été élaborées. Les premiers résultats disponibles ont été principalement obtenus dans le cas des systèmes linéaires invariants ou lentement variant dans le temps [(Osburn,1961), (Landau, 1979)].

Le schéma de commande MRAC, comme illustré par la figure (1.6), peut être conçu en deux sens. Si nous considérons que tous les paramètres du système sont accessibles, nous pouvons déterminer une loi de commande qui les ajuste directement (adaptation directe). En pratique cette situation n'est très réaliste puisque d'habitude nous n'avons accès qu'aux entrées du système. Tandis que, si les paramètres de la loi de commande sont ajustés nous avons une forme indirecte d'adaptation. Or, si un signal de commande synthétisé est injecté comme entrée de commande (entrée de commande additionnelle), alors nous avons une adaptation par signal.

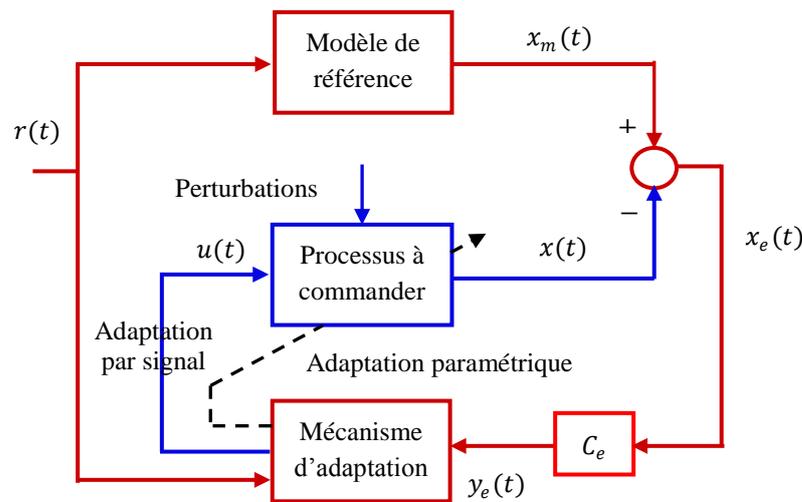


Figure 1.6 : Commande adaptative à modèle de référence.

Dans la littérature, deux concepts sont utilisés pour l'analyse de la stabilité et la synthèse d'une commande adaptative à modèle de référence. Le premier concept concerne la méthode de Lyapunov qui permet d'aboutir à des structures globalement stables sans aucune restriction sur les conditions initiales des erreurs. Cependant, le problème de généralisation des conditions de stabilité pour toutes les lois de commande à motivé Landau d'appliquer le concept d'hyperstabilité pour le développement d'une commande adaptative indirecte à modèle de référence (Landau, 1979). Depuis, un nombre important de travaux de recherche sont orientés vers l'amélioration de la robustesse de cette commande conduisant à l'aboutissement de nouvelles méthodes de commande à modèle de référence. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer les algorithmes de commande adaptative MCS (Minimum Controller Synthesis) et Er-MCSI (Erreur-based Minimal Control Synthesis with Integral action) développés respectivement dans les travaux (Stoten, 1990) et (Stoten et Neild, 2003).

Dans ce qui suit, nous allons présenter brièvement trois algorithmes de commande adaptative à modèle de référence, à savoir la commande MRAC proposée par Landau et les algorithmes MCS et Er-MCSI. Les structures de commande adoptées dans le chapitre 3 reposent essentiellement sur ces algorithmes.

#### 1.4.2.1. La commande MRAC de Landau (Landau, 1979) :

La commande adaptative à modèle de référence synthétisée par la théorie d'hyperstabilité est développée par Landau (Landau, 1979) dont l'objectif étant de commander une classe de systèmes linéaires et/ou lentement variants dans le temps. Le modèle d'état stationnaire du système à commander est supposé connu décrit par l'équation d'état  $\dot{x}(t) = Ax + Bu + d$ , où  $x \in \mathfrak{R}^n$  et  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  sont respectivement les vecteurs d'état et de commande,  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  sont la matrices dynamique et d'entrée respectivement,  $d$  est un vecteur de perturbation. L'objectif est de ramener la dynamique du processus à commander à un comportement similaire à celui d'un modèle de référence de même dimension donné par l'équation d'état  $\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r$ , où  $x_m \in \mathfrak{R}^n$  et  $r \in \mathfrak{R}^p$  sont respectivement le vecteur état et le signal de référence,  $A_m$  et  $B_m$  sont des matrices constantes décrivent les performances désirées en boucle fermée. Soit le vecteur erreur  $x_e = x_m - x$  ; la loi de commande proposée par Landau pour satisfaire l'objectif de commande ( $\lim_{t \rightarrow \infty} x_e(t) = 0$ ) et stabilise le système prend la forme suivante (Landau, 1979) :

$$u_{MRAC}(t) = u_l(t) + u_{adp}(t) \quad (1.48)$$

avec

$$u_l(t) = -K_x x(t) + K_r r(t) \quad (1.49)$$

$$u_{adp}(t) = \delta K_x(t) x(t) + \delta K_r(t) r(t) \quad (1.50)$$

où  $u_l(t)$  est une commande linéaire à gains régulateurs  $K_x \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  et  $K_r \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  calculés à partir des paramètres du processus à commander.  $u_{adp}(t)$  est une commande adaptative additionnelle avec des gains ajustables  $\delta K_x(t)$  et  $\delta K_r(t)$  de dimension appropriées. Leurs rôles est de compenser l'effet de la perturbation et satisfaire les conditions d'hyperstabilité du système bouclé. Pour une action de correction proportionnelle intégrale sont donnés par les expressions suivantes (Landau, 1979):

$$\delta K_x(t) = \alpha_x \int_0^t y_e(\tau) x^T(\tau) d\tau + \beta_x y_e(t) x^T(t) \quad (1.51)$$

$$\delta K_r(t) = \alpha_r \int_0^t y_e(\tau) r^T(\tau) d\tau + \beta_r y_e(t) r^T(t) \quad (1.52)$$

avec  $y_e(\tau) = C_e x_e(\tau)$ , où  $C_e \in \mathfrak{R}^n$  est un compensateur linéaire,  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ ,  $i = x, r$ , sont des poids d'adaptation de dimensions appropriés.

Il est à noter que cette approche exige certaines conditions, à savoir pour la synthèse des gains régulateurs  $K_x$  et  $K_r$ , la connaissance des paramètres du système est exigée, c'est-à-dire  $A$  et  $B$  doivent être connus et de forme particulière telle que la forme canonique de Brunovsky. De plus, le gain de commande doit être de rang plein. Pour pallier à cet inconvénient, Stoten et *al.* ont proposé l' algorithme MCS (Stoten, 1990) qui découle de l'approche MRAC.

#### 1.4.2.2. Algorithme MCS (Stoten, 1990) :

L'algorithme de commande MCS est développé par Stoten et Benchoubane (Stoten, 1990) comme étant une extension de la commande MRAC proposée par Landau. Les objectifs sont similaires parvenir d'excellentes performances de commande en présence de variations des paramètres du processus à commander et les perturbations externes. Cependant, et contrairement à l'algorithme MRAC, cet algorithme ne nécessite pas l'identification du modèle et le calcul des gains régulateurs statiques. En effet, les éléments des matrices  $A$  et  $B$  sont supposés inconnus variants dans le temps, et les gains  $K_p$  et  $K_r$  sont remis à zéros. L'analyse de la stabilité du système de commande est réalisée aussi par la théorie d'hyperstabilité avec une loi de commande obtenue à partir de (1.48), telle que:

$$u_{MCS}(t) = \delta K_x(t)x(t) + \delta K_r(t)r(t) \quad (1.53)$$

En littérature, certains auteurs se sont intéressés à l'algorithme MCS et ont proposé d'autres approches beaucoup plus performants. Dans (Hodgson, 1996) les auteurs proposent de nouvelles conditions de stabilité et de convergence de l'algorithme MCS afin de soulever les restrictions sur le modèle du système, en particulier sur le gain de commande. Les auteurs dans (Stoten, 1992) ont proposé une extension de l'algorithme MCS (EMCS) en introduisant un terme robuste par mode de glissement dans la loi de commande. L'objectif est d'améliorer les performances du système vis-à-vis des variations rapides des paramètres et de la perturbation. Dans (Benchoubane, 1992), une approche de commande décentralisée des systèmes linéaires complexes via l'algorithme MCS (DMCS) est aussi développée. Un algorithme de commande adaptative utilisant une loi linéaire quadratique synthétisé par la théorie d'hyperstabilité est proposée par (Bernardo, 2008). D'autres approches de commande conçues à base d'algorithme MCS peuvent être trouvées dans la littérature, comme celles proposées dans [(Aziz, 1996), (Stoten, 1998), (Bernardo, 2010)].

### 1.4.2.3. Algorithme Er-MCSI (Stoten & Neild, 2003) :

L'algorithme de commande Er-MCSI est proposé par Stoten et Neild (Stoten & Neild, 2003) dans le but d'améliorer les performances de l'algorithme MCS. En particulier, éliminer la dépendance directe de la loi de commande et les gains d'adaptation des signaux de référence afin d'éviter des efforts supplémentaires dans sa valeur. Ainsi, cet algorithme propose une loi de commande calculée seulement à base de variables erreurs avec introduction d'une action intégrale explicite  $x_I(t) = C \int_0^t x_e(\tau) d\tau$ , où  $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$  est le vecteur de sortie. De même, la synthèse de la loi de commande est effectuée par la théorie d'hyperstabilité qui permet d'assurer la stabilité globale du système et la convergence des erreurs de poursuite vers zéro. La loi de commande est formulée ainsi comme suit :

$$u_{Er-MCSI}(t) = \delta K_E(t)x_e(t) + \delta K_I(t)x_I(t) \quad (1.54)$$

où  $\delta K_E(t) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  et  $\delta K_I(t) \in \mathfrak{R}^{m \times p}$  sont des gains d'adaptation calculés par les expressions suivantes :

$$\delta K_E(t) = \alpha_E \int_0^t y_e(\tau)x_e^T(\tau) d\tau + \beta_E y_e(t)x_e^T(t) \quad (1.55)$$

$$\delta K_I(t) = \alpha_I \int_0^t y_e(\tau)x_I(\tau) d\tau + \beta_I y_e(t)x_I(t) \quad (1.56)$$

où  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ ,  $i = E, I$ , sont des poids d'adaptation de dimensions appropriés.

Les différents algorithmes de commande à modèle de référence synthétisés par la théorie d'hyperstabilité ont été appliqués dans différents domaines. Au début, les principales applications ont été dans le domaine de la robotique [(Stoten & Hodgson, 1991), (Hodgson & Stoten, 1999)], où la dynamique du procédé était linéaire, couplée et soumise à des variations paramétriques. Depuis 1990, les algorithmes de commande ont été mis en œuvre dans certains nombres de domaines d'ingénierie. Par exemple, l'asservissement des moteurs électriques [(Bowes, 2000), (Doraraju, 2000) (Chelihi, 2005)]; le contrôle de la dynamique du véhicule (Catino, 2003), la commande des servomoteurs hydrauliques [(Stoten, 1992), (Beard, 1996)], et la commande de l'altitude du satellite (Arif, 2008). Jusqu'à nos jours ces algorithmes de commande attirent l'attention de plusieurs chercheurs malgré l'avance des techniques de commande, et ce, du fait qu'ils admettent deux propriétés importantes: la simplicité et la robustesse.

#### 1.4.4. Commande adaptative floue

Traditionnellement, la conception d'un contrôleur est faite en utilisant des modèles mathématiques issus de lois physiques qui décrivent le comportement dynamique du procédé. Cependant, lorsqu'on ne dispose pas de modèles mathématiques précis du système à commander du fait que sa structure et ses paramètres ne sont pas connus en raison des modifications de l'environnement, des erreurs de modélisation, ou lorsque ce dernier présente de fortes non linéarités ou imprécisions, la recherche d'une alternative est recommandée. Pour résoudre ces problèmes, l'utilisation des contrôleurs basés sur l'expertise humaine peut être une alternative. Parmi ces approches, on trouve la commande par logique floue qui ne nécessite pas la connaissance du modèle mathématique du processus à commander, ainsi elle exploite les informations linguistiques de l'expert humain. Cette technique de commande tient profit de la théorie d'approximation universelle qui garantit la possibilité de modéliser, sur un ensemble compact, la dynamique des systèmes non linéaires par des systèmes flous avec un degré de précision arbitraire fixé (Wang, 1994).

La commande par des modèles flous de T-S associée à des techniques adaptatives a été largement utilisée avec succès dans la littérature pour résoudre le problème de la commande des systèmes non linéaires affines en la commande. Ces systèmes sont caractérisés par des entrées de commande qui apparaissent linéairement dans l'équation d'état du système (Equation 1.6). Théoriquement, un grand nombre de systèmes non linéaires peuvent être ramenés à cette structure. Pour le cas mono-variable, le développement de cette représentation d'état conduit à la représentation entrée-sortie suivante (Isidori, 1989):

$$y^{(n)} = f(x) + g(x)u(t) + d(t) \quad (1.57)$$

où  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}]^T$  est le vecteur état du système disponible à la mesure,  $u(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système et  $d(t)$  représente les perturbations externes inconnues.  $f(x)$  et  $g(x)$  sont des fonctions non linéaires incertaines ou inconnues décrivant respectivement le comportement du système et le gain de commande.

L'objectif est de développer des lois de commandes pour cette classe de systèmes non linéaires capables d'assurer la stabilité en boucle fermée et la robustesse vis-à-vis des incertitudes et/ou perturbations. La loi de commande  $u(t)$  doit forcer la sortie du système  $y$  à suivre un signal de référence désiré borné  $r$  de sorte à minimiser l'erreur de suivi  $e = y - r$  et ses dérivées à l'ordre  $(n - 1)$  soient bornées.

Lorsque les dynamiques du système (1.57) sont bien connues et que le système est non affecté par des perturbations externes  $d(t) = 0$ , alors selon le principe de la linéarisation entrée-sortie (Isidori, 1989), la loi de commande capable d'assurer la convergence asymptotique vers zéro de l'erreur de suivi de trajectoire  $e(t)$  est exprimée par  $u^* = (g(x))^{-1} (-f(x) + r^{(n)} + \dot{u})$ . Le système obtenu après introduction de cette loi de commande est linéaire avec une nouvelle entrée de commande  $u_l$  qui peut être choisie en utilisant les méthodes de conception de contrôleurs linéaires, par exemple par placement de pôles afin de stabiliser le système. Cependant, l'implantation de cette commande nécessite la connaissance parfaite de  $f(x)$  et  $g(x)$  qui sont généralement inconnues ou incertains. De plus, aucune robustesse n'est garantie face aux incertitudes paramétriques du modèle et aux perturbations externes qui peuvent affectés le système. Dans ces circonstances, la synthèse de la loi de commande par linéarisation devient très difficile à mettre en œuvre. Dans la littérature, il ya deux solutions distinctes utilisant le système flou de T-S sont formulées pour développer des systèmes de commande adaptative : l'approche directe et l'approche indirecte.

#### 1.4.4.1 Approche directe

Dans cette approche, par exemple dans [(Tang, 1999), (Chang, 2000), (Labioud, 2007)] un seul système flou de T-S de la forme (1.20) est utilisé pour approcher directement la loi de commande idéale inconnue  $u^*$  sous certaines contraintes sur le gain de commande et ou sur sa dérivé. Les paramètres du système flou sont directement ajustés pour atteindre les objectifs de commande (voir figure 1.7). Il est à noter que l'approche directe ne pose pas de problème de singularité et permet d'exploiter toutes informations linguistiques concernant sa commande. Cependant, les informations linguistiques concernant le modèle ne sont pas prises en considération.

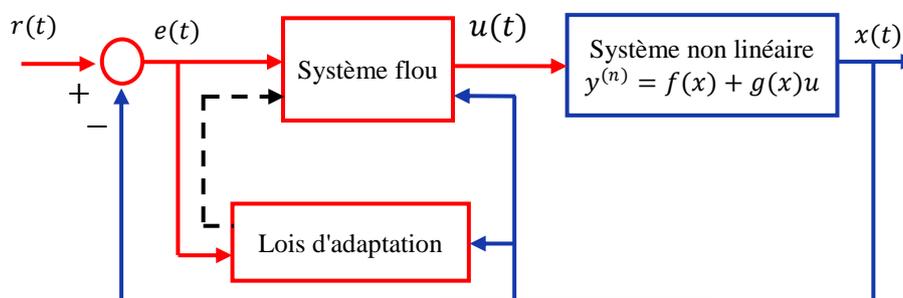


Figure 1.7 : Commande adaptative floue directe.

### 1.4.4.2 Approche indirecte

Cette approche de commande est traitée dans de nombreux travaux [(Wang, 1994), (Chang, 2001), (Labioud, 2004)] dont le schéma de l'algorithme peut être illustré par la figure (1.8), généralement deux système flous de T-S de la forme (1.20) sont utilisés pour approcher les non linéarités  $f(x)$  et  $g(x)$  du système à commander. Puis, la loi de commande idéale  $u^*$  est alors déduite à partir de ces approximations en suivant la technique de linéarisation entrée-sortie. Cette approche souffre du problème de singularité dans le cas où l'approximation du gain de commande est nulle. Des solutions ont été proposées pour remédier à ce problème. Généralement, un algorithme de projection est utilisé dans les lois d'adaptation pour les forcer de rester dans des ensembles admissibles [(Spooner, 1996), (Labioud, 2003)]. Tandis que, d'autres algorithmes utilisent une loi de commande additive de robustification, à savoir la commande par mode de glissement et la technique  $H_\infty$ , pour éviter le problème de singularité et compenser les effets des erreurs d'approximation et des perturbations externes [(Chang 2001), (Labioud, 2003)].

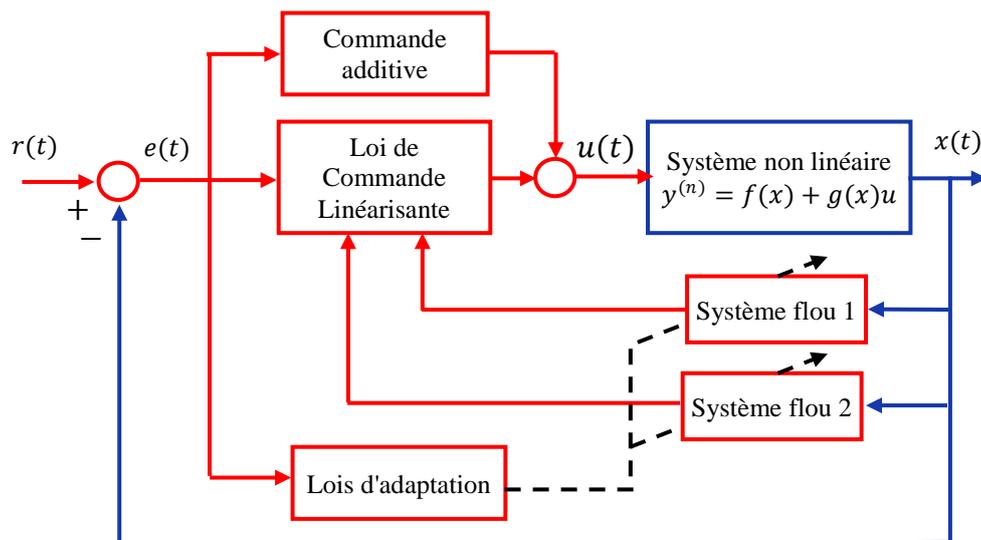


Figure 1.8 : Commande adaptative floue indirecte.

L'analyse de la stabilité des lois de commande adaptative est généralement basée sur la méthode de Lyapunov qui consiste à choisir une fonction candidate puis à chercher des lois de commande ou d'adaptation assurant la stabilité du système bouclé. Cependant, le problème de la commande traité dans le cadre de cette thèse est focalisé sur l'approche de commande adaptative floue indirecte de cette classe de système dont l'analyse de la stabilité est réalisée par la théorie d'hyperstabilité.

## 1.5. Conclusion

Ce chapitre nous a permis de présenter les notions et les outils nécessaires pour appréhender nos travaux qui seront développées aux chapitres suivants.

Dans une première partie, nous avons rappelé quelques notions de base sur la modélisation des systèmes linéaires et non linéaires ainsi que les systèmes flous de T-S qui présentent l'avantage d'être des approximateurs universels. Grâce à l'expression analytique de ces derniers, les problèmes d'analyse tels que la stabilité des systèmes de commande pourront être abordés. Dans une deuxième partie, et dans un souci d'exposer le concept à exploiter pour l'analyse des approches de commande proposées, nous avons présenté les définitions, théorèmes et propriétés de la théorie d'hyperstabilité. La notion de positivité d'un système linéaire et l'inégalité de Popov sont particulièrement importants pour l'analyse de stabilité et la synthèse de lois de commande des systèmes non linéaires. La dernière partie, a été consacrée à l'exposition de trois méthodes de commande, à savoir, la commande multi-contrôleurs par l'approche multi-modèle, la théorie de commande adaptative à modèle de référence et la commande adaptative floue. Des définitions et caractéristiques de chaque théorie sont données dans le but de développer des architectures de commande en utilisant le concept d'hyperstabilité. En conséquence, trois approches de commande seront proposées dans les prochains chapitres pour la commande des systèmes non linéaires. La première approche, concerne la synthèse de lois de commande multi-contrôleurs par l'approche multi-modèle floue T-S pour des systèmes non linéaires mono-variables en utilisant la théorie d'hyperstabilité. La seconde approche est consacrée à l'élaboration de lois de commande adaptatives décentralisées pour des systèmes non linéaires complexes en utilisant des algorithmes de synthèse stabilisants, tels que les algorithmes MCS et Er-MCSI. Enfin, la troisième approche est consacrée à l'analyse de la stabilité et la synthèse de lois de commande par logique floue adaptatives indirectes pour une classe particulière de systèmes non linéaires.

## Chapitre 2.

# Commande multi-contrôleurs à commutation floue des systèmes non linéaires SISO



## **Chapitre 2.**

---

# **Commande multi-contrôleurs à commutation floue des systèmes non linéaires SISO**

---

< L'usage et la pratique ont précédé toutes les sciences et tous les arts; mais les sciences et les arts ont ensuite perfectionné la pratique. >

↔ *César Chesneau*

---

### **2.1. Introduction**

La commande d'un système non linéaire est une tâche difficile même quand le modèle dynamique du système est disponible. Ce problème de commande est d'autant plus difficile si le modèle dynamique est inconnu ou mal connu. Néanmoins, il est souvent possible d'avoir une connaissance partielle du procédé. Nous supposons donc que nous sommes en mesure de connaître les environnements dans lesquels le système va évoluer. Si nous pouvons caractériser chacun de ces environnements par un modèle et lui associer un contrôleur local performant, le problème se simplifiera grandement. Cette idée a constitué un point de départ important chez les automaticiens pour proposer des méthodes de commande "Multi-contrôleurs" des systèmes non linéaires basées sur de multiples modèles. Ce concept permet de réaliser un bon compromis entre les performances et la simplicité de mise en œuvre du système de commande. La synthèse de la loi de commande est réalisée souvent en deux étapes. La première étape consiste à effectuer des synthèses de contrôleurs à partir de chacun des modèles locaux et des performances requises en utilisant une méthode de commande adéquate. La deuxième étape consiste à élaborer une loi de commande à partir d'une commutation franche entre les différents contrôleurs, ou d'une combinaison linéaires des lois de commande locales en utilisant un système flou. Ce dernier permet d'avoir des transitions moins brutales pour passer d'un contrôleur à un autre à travers une pondération des signaux de commande.

Dans le cadre de la commutation floue, différentes stratégies de commande multi-contrôleurs avec des preuves de stabilité (locale ou globale) par la méthode de Lyapunov ont été développées, en particulier, avec l'apparition des travaux de Takagi-Seguno (Takagi, 1985). Nous pouvons citer entre autres, les commandes multi-contrôleurs robustes développées pour des applications industrielles. Ces approches sont basées sur la combinaison floue des contrôleurs locaux robustes synthétisés dans différentes régions de fonctionnement, tels que la commande multi-contrôleurs à structure variable (Dubois, 1994), la commande multi-contrôleurs composée d'un mélange de régulateurs PID adaptatif (Xu, 2000) et la commande par séquençement des gains flou (Sarma, 2001). Il existe aussi, dans la littérature d'autres travaux concernant la commande multi-contrôleurs à commutation floue, comme, par exemple, l'approche de commande adaptative multi-modèle [(Golea, 2003), (Hyun, 2010), (Huang, 2014)]. Cette méthode consiste à combiner l'approche multi-modèle et les techniques de commande adaptative. L'idée est d'avoir uniquement une seule structure de commande fixe mais dont les paramètres sont obtenus à partir d'un jeu de coefficients correspondant à plusieurs zones de fonctionnement. Les jeux de coefficients sont pondérés via un système flou de type T-S pour synthétiser la loi de commande globale.

D'autre part, la stabilisation des systèmes non linéaires par des commandes multi-contrôleurs utilisant l'approche multimodèle floue de T-S trouve de nouvelles orientations avec l'introduction de la méthode PDC (Parallel Distributed Compensation). Cette méthode permet d'élaborer des lois de commande, par retour d'état [(Wang, 1996), (Tanaka, 1996), (Chadli, 2002)] ou par retour de sortie [(Lie, 2000), (Guerra, 2006), (Guelton, 2009)] d'un multimodèle flou T-S. Généralement, l'analyse de la stabilité dans cette méthode est effectuée par la méthode de Lyapunov en utilisant des fonctions quadratiques (Chadli, 2002), ou non quadratiques [(Bernal, 2011), (Guerra, 2012)] conduisant en fin de compte à la résolution des inégalités matricielles MLI par des techniques d'optimisation convexes (Boyd, 1994). Cependant, dans certains problèmes de commande, les solutions obtenues conduisent souvent à des contraintes conservatrices et des domaines de validité restrictives, et ceci, malgré les efforts de recherche effectués pour la relaxation de ces contraintes [(Manamanni, 2007), (Zhu, 2013), (Xie, 2015)].

En revanche, l'utilisation de la théorie d'hyperstabilité pour résoudre les problèmes de la stabilité et de la synthèse des lois de commande multi-contrôleurs à commutation floue, et au mieux de nos connaissances, un nombre limité de résultats a été obtenu. Nous pouvons citer, par exemple, les travaux de [(Golea, 2002), (Ban, 2007)]. Dans (Golea, 2002), les auteurs proposent une commande multi-modèle floue adaptative indirecte pour un système non linéaire mono-variable affine en la commande. L'approche proposée est basée sur la compensation des

fonctions non linéaires du système par des modèles flous de T-S adaptatifs. Tandis que, Ban et al. dans (Ban, 2007) ont proposé des conditions de stabilité dans le domaine fréquentielle avec une interprétation graphique d'une commande floue en se basant sur une représentation multi-modèle de T-S.

Dans ce chapitre, une commande multi-contrôleurs à commutation floue dédiée aux systèmes non linéaires mono-entrée mono-sortie est proposée. Le développement de la méthode est basée principalement sur la propriété d'approximation du système non linéaire par un descripteur multi-modèle de T-S dans l'espace de fonctionnement et lui associé un ensemble de contrôleurs locaux. La commande finale appliquée au système est calculée à travers la pondération des commandes locales. Pour cela, deux approches seront proposées en considérant la structure de la loi de commande. Dans la première approche, la loi de commande est linéaire à gains régulateurs statiques où les gains sont calculés en fonction de la dynamique linéaire locale. Le problème de la stabilité et la convergence du système de commande en présence des erreurs de reconstruction est traité par l'augmentation du nombre des contrôleurs locaux. Dans la seconde approche, la loi de commande linéaire locale est augmentée par une composante adaptative. Cette composante est utilisée pour introduire explicitement une action de correction adaptative, permettant de traiter les problèmes de stabilité et des erreurs d'approximation avec un nombre réduit de contrôleurs. Les gains d'adaptation dans ce schéma de commande suit une loi de type P.I. La stabilité et la robustesse de la structure de commande sont étudiées par la théorie d'hyperstabilité. Notons que dans cette approche aucun terme de robustification n'est utilisé, et la robustesse de la structure de commande est renforcée par une loi d'adaptation.

Pour toutes les approches de commande développées, des résultats de simulation effectuée sur un pendule inversé sont donnés pour montrer les performances de ces approches.

## **2.2. Contexte et formulation**

Considérant le système non linéaire mono-variable d'ordre  $n$  décrit par la représentation d'état suivante (Isidori, 1989) :

$$\dot{x} = \mathcal{F}(x, u) + \mathfrak{H}(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

où  $\mathcal{F} \in \mathfrak{R}^n$  est un vecteur de fonctions, et  $\mathfrak{H}(t) \in \mathfrak{R}^n$  un vecteur de perturbations.

Pour le cas d'un système non affine, le système (2.1) peut être décrit par la représentation entrée-sortie suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n &= f(x, u) + d(t) \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

où  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}]^T$  est le vecteur d'état de valeur initiale  $x_0$ ,  $u(t) \in \mathfrak{R}$  est l'entrée de commande du système,  $y(t) \in \mathfrak{R}$  est sa sortie,  $f(x, u)$  est une fonction non linéaire continue et bornée, et  $d(t) \in \mathfrak{R}$  est une perturbation externe supposée bornée.

Notre objectif par la suite sera de concevoir une loi de commande pour l'entrée  $u(t)$  afin d'assurer pour la sortie  $y(t)$  la poursuite d'une trajectoire de référence  $r(t)$ , et le vecteur d'état  $x(t)$  suit, le plus proche possible, une dynamique d'un modèle de référence linéaire de même ordre donné par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r(t) \tag{2.3}$$

avec

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{m1} & -a_{m2} & -a_{m3} & \dots & -a_{mn} \end{bmatrix}; B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

où  $x_m = [x_{m1}, \dots, x_{mn}]^T \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur état du modèle de référence,  $A_m \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  et  $B_m \in \mathfrak{R}^n$  sont la matrice dynamique et le vecteur d'entrée respectivement, décrivant les performances souhaitées du système de commande en boucle fermée, où  $a_{mi}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) et  $b_{mn}$  sont des éléments constants choisis afin que la fonction de transfert  $(sI - A_m)^{-1}B_m$  soit stable.

Ainsi, notre objectif est de déterminer la commande  $u(t)$  qui permet de conduire l'erreur de poursuite  $x_e(t)$  définie par :

$$x_e(t) = x_m(t) - x(t) \tag{2.5}$$

à converger asymptotiquement vers zéro et garantir la stabilité globale du système de commande. Pour ce faire, les hypothèses suivantes sont retenues dans le reste de ce chapitre.

**Hypothèses :** Le système (2.1) est soumis à certaines hypothèses pour des raisons de simplification et de réalisation à savoir :

- **Hyp 2.1** : la fonction  $f$  est lisse continûment dérivables deux fois, c'est-à-dire les dérivées partielles de premier ordre de  $f$  par rapport à  $x$  et  $u$  sont continues sur  $\mathfrak{R}$  ;
- **Hyp 2.2** : Le système est supposé localement commandable au premier ordre (Fossard, 1989), c'est-à-dire  $\frac{\partial}{\partial u} f(x, u) \neq 0, \forall x \in \mathfrak{R}^n$  et ,  $\forall u \in \mathfrak{R}$ ;
- **Hyp 2.3** : Le vecteur d'état du système  $x$  est supposé observable ou mesurable;
- **Hyp 2.4** : La trajectoire de référence  $r(t)$  est supposée connue, continue et bornée.

Dans le but d'atteindre cet objectif, nous proposons une approche de commande basée sur la synthèse des lois de commande linéaire et/ou adaptative pour le système non linéaire (2.1) en utilisant un descripteur multi-modèle flou de T-S. Cette approche est basée sur la décomposition du comportement dynamique du système en un nombre de zones de fonctionnement, chaque zone étant caractérisée par un sous-modèle linéaire. La contribution de chaque sous-modèle est définie par une fonction de validité. En effet, le système non linéaire est approximé avec une précision imposée en augmentant le nombre de sous-modèles et en optimisant les fonctions de pondération. Pour chaque sous-modèle, une commande locale associée est synthétisée en utilisant les outils d'analyse et de commande des systèmes linéaires. Dans notre cas, la loi de commande par séquençement du gain et la loi adaptative sont introduites afin d'imposer la dynamique désirée et assurer la stabilité du système bouclé. La commande finale à appliquer au système non linéaire est obtenue à travers une commutation floue entre les différents contrôleurs locaux

Ainsi, l'approche de commande qu'on désire développer consiste, en premier lieu, à la détermination du multi-modèle flou de T-S permettant d'approximer le système non linéaire (2.1) et en second lieu, la synthèse de lois de commande stabilisantes des contrôleurs locaux correspondants.

### **2.3. Détermination du multimodèle flou de T-S**

Le multi-modèle flou de T-S exposé dans le chapitre précédent est adopté pour approximer le système non linéaire (2.2). Nous supposons que nous disposons de  $N$  modèles locales descriptifs de son comportement dans différentes zones de fonctionnement (voir figure 2.1). Le modèle de T-S recherché est obtenu par une combinaison floue des modèles linéaires locaux décrivant la dynamique du système dans des points de fonctionnement judicieusement choisis.

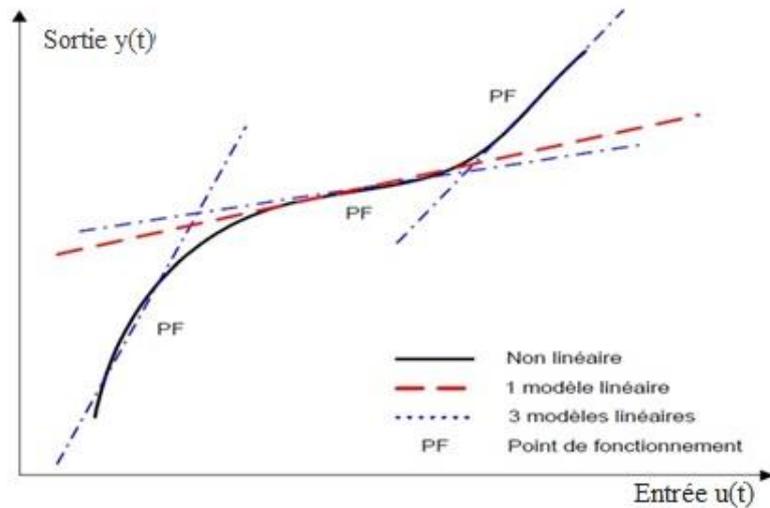


Figure 2.1: Linéarisation du système non linéaire et choix des points de fonctionnement.

Considérons le cas où, la forme analytique du modèle non linéaire (2.2) sans perturbation ( $d(t) = 0$ ) est connue, les modèles locaux peuvent être déterminés ainsi par une linéarisation tangentielle du modèle. Donc, le modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement  $P_f(x_i^*, u_i^*)$  définit par la valeur d'état  $x_i^* = (x_{1i}^*, x_{2i}^*, \dots, x_{ni}^*)^T$  et la commande  $u_i^*$ ,  $i = 1, \dots, N$  est calculé par développement en série de Taylor du premier ordre de la fonction  $\mathcal{F}(x, u)$  comme suit :

$$\mathcal{F}(x, u) = \nabla_x \mathcal{F}(x_i^*, u_i^*)(x - x_i^*) + \nabla_u \mathcal{F}(x_i^*, u_i^*)(u - u_i^*) + E_i(x - x_i^*, u - u_i^*) \quad (2.6)$$

avec

$$\nabla_x \mathcal{F}(x_i^*, u_i^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_i^*, u_i^*) & \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_i^*, u_i^*) & \frac{\partial}{\partial x_3} f(x_i^*, u_i^*) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f(x_i^*, u_i^*) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\nabla_u \mathcal{F}(x_i^*, u_i^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} f(x_i^*, u_i^*) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

où  $\nabla_x \mathcal{F}$  et  $\nabla_u \mathcal{F}$  sont les matrices Jacobiennes de  $\mathcal{F}(x, u)$  par rapport aux variables  $x(t)$  et  $u(t)$  au point de fonctionnement  $P_f(x_i^*, u_i^*)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Notons que la valeur de  $N$ , nombre des modèles locaux, dépend de la précision d'approximation souhaitée, de la complexité du système non linéaire et du choix des fonctions d'activation.

Si on note :

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_{1i} & a_{2i} & a_{3i} & \cdots & a_{ni} \end{bmatrix}; \text{ avec } a_{ji} = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_i^*, u_i^*), j = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{ni} \end{bmatrix}; \text{ avec } b_{ni} = \frac{\partial}{\partial u} f(x_i^*, u_i^*) \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} \underline{x}_i = x - x_i^* \\ \underline{u}_i = u - u_i^* \end{cases} \quad (2.11)$$

De (2.6) à (2.11), le modèle local linéarisé au voisinage du point de fonctionnement  $P_f$  est donné par :

$$\dot{x}(t) = A_i \underline{x}_i(t) + B_i \underline{u}_i(t) + E_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i) \quad (2.12)$$

où  $\underline{x}_i \in \mathfrak{R}^n$  et  $\underline{u}_i \in \mathfrak{R}$  sont le vecteur d'état et la commande scalaire du modèle linéaire local,  $A_i \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  et  $B_i \in \mathfrak{R}^n$  sont respectivement la matrice dynamique et le vecteur d'entrée local a éléments constants,  $E_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i) = [0, \dots, 0, \varepsilon_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i)]^T \in \mathfrak{R}^n$  est le vecteur erreurs d'approximation locale.

De (2.12), nous pouvons représenter le système non linéaire (2.2) sur son espace de fonctionnement par le modèle flou T-S obtenu par l'agrégation des différents modèles locaux :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^N \xi_i(z) \left( A_i \underline{x}_i(t) + B_i \underline{u}_i(t) + E_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i) \right) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^N \xi_i(z) C_i(\underline{x}_i(t) + x_i^*) \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec  $C_i = [1, 0, \dots, 0]$ , et  $z(t) = [z_1, \dots, z_p]$  est le vecteur des variables prémisses,  $\xi_i(z)$  est le coefficient de pondération de chaque modèle local, avec  $\sum_{i=1}^N \xi_i(z) = 1$ .

En général, l'élaboration d'une loi de commande peut être effectuée principalement en deux étapes, à savoir : le choix de la structure de la commande et la détermination d'une loi de commande assurant la stabilité du système bouclé. Dans notre cas, la commande multi-contrôleurs, que nous allons développer, s'articule sur le modèle dynamique exprimé en terme d'erreur de poursuite.

## 2.4. Structure générale de la commande multi-contrôleurs adoptée

La méthode de commande proposée dans ce chapitre est basée sur la synthèse de lois de commande linéaires et/ou adaptatives pour les modèles locaux de la représentation (2.13) permettant de faire converger les états du système vers les état du modèle de référence (2.3). Telle que schématisée par la figure (2.2), la commande est directe (sans supervision) à commutation floue peut être résumée en deux principales étapes (Pagès, 2001) :

La première étape est consacrée à la synthèse de la loi de commande locale  $\underline{u}_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , pour le sous-modèle linéaire de la représentation (2.13) permettant de satisfaire les objectifs de commande en boucle fermée, c'est-à-dire  $x_e(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  ainsi que la bornitude de tous les signaux du systèmes

Dans la seconde étape, le signal de commande finale  $u(t)$  est calculé à partir de la pondération des signaux de commande locale  $u_1, \dots, u_N$ . Cette tâche est remplie par le même système flou T-S utilisé pour définir le degré de validité du modèle local, tel que :

La  $i^{\text{ème}}$  règle floue du système flou T-S de commande est écrite sous la forme :

$$R^{(i)}: \text{Si } z_1(t) \text{ est } \check{F}_1^i \text{ et } \dots, \text{ et } z_p(t) \text{ est } \check{F}_p^i \text{ Alors } u(t) = \underline{u}_i(t) + u_i^* \quad (2.14)$$

En utilisant une défuzzification barycentrique, la commande finale  $u(t)$  à appliquer au système est calculée ainsi par la relation suivante :

$$u(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i(z) (\underline{u}_i(t) + u_i^*) \quad (2.15)$$

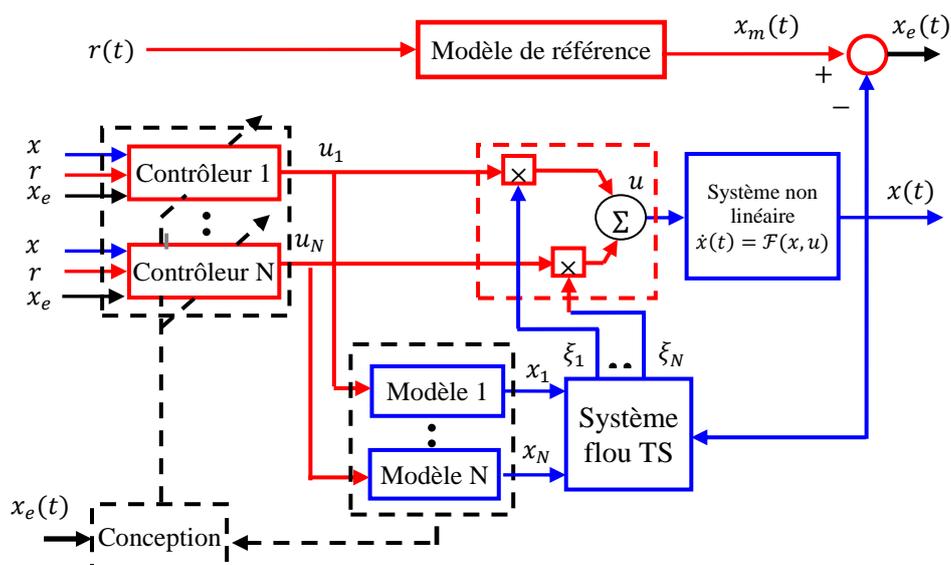


Figure 2.2: Schéma de commande multi-contrôleurs à commutation floue.

Pour réaliser cette commande, deux types de contrôleurs sont envisagés. Dans la première structure, nous proposons des contrôleurs linéaires à gains régulateurs statiques dont la loi de commande est un retour d'état avec anticipation de la référence. Puis, avec la même loi de commande augmentée par une composante adaptative, une deuxième structure est proposée. Les prochaines sections seront consacrées à la synthèse de ces lois de commande à partir de l'étude de la stabilité, dont les algorithmes et théorème sont donnés.

## 2.5. Commande multi-contrôleurs à gains régulateurs statiques

La commande multi-contrôleurs développée dans cette section est basée sur la synthèse des gains régulateurs statiques pour l'ensemble des modèles linéaires locaux (2.13) dont la loi de commande locale  $\underline{u}_j(t)$  est un retour d'état avec anticipation de la référence donnée par l'expression suivante :

$$\underline{u}_j(t) = -K_i \underline{x}_j(t) + K_{r_i} \underline{r}_j(t) \quad (2.16)$$

où  $K_i^T \in \mathfrak{R}^n$  et  $K_{r_i} \in \mathfrak{R}$  sont des gains constants positifs,  $\underline{r}_j = r - r_i^*$  est un signal de référence local avec  $r_i^* = C_i x_i^*$ .

L'équation dynamique de l'erreur du système bouclé est obtenue à partir de (2.5) en utilisant les représentations d'état du modèle de référence (2.3), le descripteur multi-modèle (2.13), et en introduisant la loi de commande (2.16), telle que :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) = & A_m x_m(t) + B_m r(t) - \sum_{i=1}^N \xi_i(z) \left( (A_i - B_i K_i) \underline{x}_j(t) + B_i K_{r_i} \underline{r}_j(t) + \right. \\ & \left. E_i(\underline{x}_j, \underline{u}_j) \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

En ajoutant et soustrayant  $A_m x(t)$ , l'équation (2.17) devient :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) = & A_m x_e(t) + A_m x(t) + B_m r(t) - \sum_{i=1}^N \xi_i(z) \left( (A_i - B_i K_i) \underline{x}_j(t) + \right. \\ & \left. B_i K_{r_i} \underline{r}_j(t) + E_i(\underline{x}_j, \underline{u}_j) \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Avec les relations déterminant l'état  $x(t)$  et la référence  $r(t)$  en fonction des grandeurs locaux sur tout l'espace de fonctionnement données par :

$$x(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i(z) (\underline{x}_j + x_i^*) \text{ et } r(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i(z) (\underline{r}_j + r_i^*) \quad (2.19)$$

Nous pouvons réécrire la dynamique des erreurs comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) = & A_m x_e(t) + \sum_{i=1}^N \xi_i(z) \left( (A_m - A_i + B_i K_i) \underline{x}_j(t) + (B_m - B_i K_{r_i}) \underline{r}_j(t) + \right. \\ & \left. (B_m C_i + A_m) x_i^* - E_i(\underline{x}_j, \underline{u}_j) \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

De (2.20), nous pouvons conclure que le problème de la commande multi-contrôleurs du système non linéaire consiste à synthétiser les gains régulateurs  $K_i$  et  $K_{ri}$ ,  $i = 1, \dots, N$  des contrôleurs locaux de telle manière à ce que l'erreur de poursuite converge vers zéro et assurer la stabilité du système bouclé.

### 2.5.1. Synthèse de la loi de commande

Sur la base du modèle dynamique des erreurs donnée par l'équation (2.20), les gains régulateurs  $K_i$  et  $K_{ri}$ ,  $i = 1, \dots, N$  peuvent être obtenus à partir des relations suivantes :

$$A_m - A_i + B_i K_i = 0 \quad (2.21)$$

$$B_m - B_i K_{ri} = 0 \quad (2.22)$$

avec

$$A_m + B_m C_i = 0 \quad (2.23)$$

Les deux premières conditions, sont satisfaites si les gains statiques  $K_i$  et  $K_{ri}$   $i = 1, \dots, N$  sont calculés par :

$$K_i = B_i^+ (A_i - A_m) \quad (2.24)$$

$$K_{ri} = B_i^+ B_m \quad (2.25)$$

Cependant, la dernière condition permet de calculer le vecteur d'entrée du modèle de référence  $B_m$  comme suit :

$$B_m = -A_m C_i^+ \quad (2.26)$$

Avec  $(^+)$  représente le pseudo inverse d'une matrice :  $B_i^+ = (B_i^T B_i)^{-1} B_i^T$  et  $C_i^+ = (C_i C_i^T)^{-1} C_i^T$ .

Il est évident, que les gains d'adaptation  $K_i$  et  $K_{ri}$  donnés respectivement par les relations (2.24) et (2.25) peuvent avoir lieu seulement si le vecteur de commande  $B_i$  est de rang maximal qui est garanti par l'Hypothèse 2.4. De plus, ils doivent vérifier les conditions d'Erzberger données en annexe A. De même, de l'équation (2.26), le vecteur de sortie locale  $C_i$   $i = 1, \dots, N$  doit être inversible pour pouvoir établir le lien entre la matrice dynamique et le vecteur d'entrée du modèle de référence.

De (2.21) à (2.23), l'équation dynamique de l'erreur (2.20) est réduite alors à :

$$\dot{x}_e(t) = A_m x_e(t) - \sum_{i=1}^N \xi_i(z) E_i(x_i, u_i) \quad (2.27)$$

Le vecteur erreurs  $x_e(t)$  est exponentiellement stable si l'erreur d'approximation locale  $E_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i) = [0, \dots, 0, \mathcal{E}_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i)]^T$ ,  $i = 1, \dots, N$ , pour tous les points de fonctionnement, est suffisamment petite et supposée négligeable devant la dynamique de l'erreur, c'est-à-dire  $\mathcal{E}_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i) \cong 0$ . Cette condition peut être obtenue, si on suppose que la dynamique du système non linéaire est fidèlement approximée par le multi-modèle (2.13) dans son espace de fonctionnement, et ceci, en augmentant le nombre des modèles locaux avec un choix judicieux de son emplacement (choix des points de fonctionnement) d'une part, en d'autre part en choisissant convenablement les fonctions d'activation à travers une optimisation des paramètres des fonctions d'appartenance.

### 2.5.2. Simulation et résultats

Pour illustrer les performances de la méthode de la loi de commande proposée, nous considérons la commande d'un pendule inversé représenté par la figure (2.3) où son modèle dynamique est donné par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - \frac{mlx_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{m_c+m}}{l\left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c+m}\right)} + \frac{\frac{\cos x_1}{m_c+m}}{l\left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c+m}\right)} u \end{aligned} \quad (2.28)$$

où  $x_1 = \theta$  (rad) désigne l'angle de rotation de la perche par rapport à la vertical,  $x_2 = \dot{\theta}$  (rad/s) est la vitesse de rotation de la perche prend,  $u$  (N), force appliquée au chariot (variable de commande),  $m_c = 1$ (kg) est la masse du chariot,  $m = 0.1$ (kg) est la masse de la perche et  $l = 0.5$  (m) est le demi-longueur de la perche.

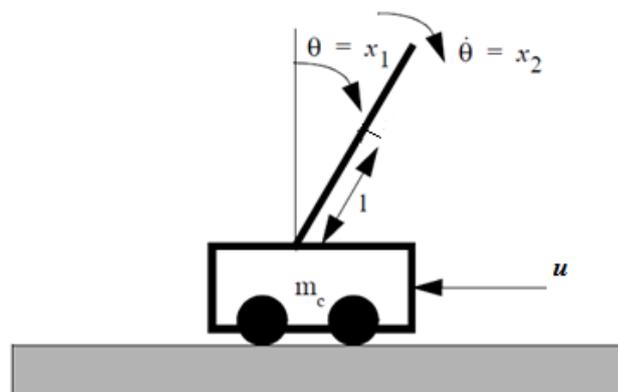


Figure 2.3 : Système pendule inversé.

Le but est de présenter la mise en œuvre en simulation de la commande multi-contrôleurs à gain régulateurs, développée dans cette section, pour le pilotage du pendule. Les performances

de cette approche seront illustrées au travers des résultats de simulation issus de cette application. Pour ce système, l'objectif de la commande était d'assurer la convergence des deux états position et vitesse ( $\theta$  et  $\dot{\theta}$ ) vers des états d'un modèle de référence décrit les performances désirées. La procédure de mise en œuvre de cette commande est effectuée en deux phases :

**Phase de conception:**

- étape 1 : spécifier la trajectoire désirée  $r$ ;
- étape 2 : choisir  $N$  et la position de  $P_f(x_i^*, u_i^*)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;
- étape 3 : calculer  $(A_i, B_i)$  et vérifier que  $b_{ni} \neq 0$ ;
- étape 4 : choisir  $(A_m, B_m)$  selon (2.3) en vérifiant (2.26);
- étape 5 : calculer  $K_i$  et  $K_{r_i}$  par les équations (2.24) et (2.25);
- étape 6 : définir  $z(t)$  et  $\tilde{F}_j^i$ ,  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, p$  du système flou.

**Phase de calcul en temps réel:**

- étape 1 : calculer les états  $\underline{x}_i(t)$  et  $\underline{r}_j(t)$   $i = 1, \dots, N$  ;
- étape 2: calculer les commandes locales  $\underline{u}_i(t)$  par (2.16);
- étape 3 : calculer  $\xi_i(z)$  de chaque contrôleur;
- étape 4 : calculer  $u(t)$  par (2.15);
- étape 5 : répéter les mêmes calculs pour l'itération suivante en allant à l'étape 1.

Conformément à la procédure de conception indiquée antérieurement, la trajectoire de référence est définie par  $r = 0.6 \sin(0.2\pi t)$ . L'angle de position est définie sur l'intervalle  $x_1 \in [-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}]$  subdivisé en  $N = 5$  zone de fonctionnement tels que les cinq points de fonctionnement sont choisis régulièrement entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$  ( $-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ ).

Nous effectuons d'abord la linéarisation du modèle (2.28) autour des points de fonctionnement choisis. D'après les équations du pendule inversé, il est trivial de trouver  $u_i^* = -g(m_c + m) \tan(x_{1i}^*) \forall i = 1, \dots, N$ , tels que :

pour  $y_1^* = x_{11}^* = -\frac{\pi}{3}$  et  $u_1^* = 18.6715$  :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6.6995 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6936 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

pour  $y_2^* = x_{12}^* = -\frac{\pi}{6}$  et  $u_2^* = 6.2238$  :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12.9346 & 0 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.2446 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

pour  $y_3^* = x_{13}^* = 0$  et  $u_3^* = 6.2238$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15.7756 & 0 \end{bmatrix}; B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.4634 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

pour  $y_4^* = x_{15}^* = \frac{\pi}{6}$  et  $u_4^* = 18.6715$  :

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12.9346 & 0 \end{bmatrix}; B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.2446 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

pour  $y_5^* = x_{15}^* = \frac{\pi}{3}$  et  $u_5^* = 18.6715$  :

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6.6995 & 0 \end{bmatrix}; B_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6936 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = [1 \ 0] \quad (2.34)$$

Notre exemple est d'ordre deux. Pour cela, nous proposons le modèle de référence donné par la paire  $(A_m, B_m)$  suivante :

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}; B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

où  $\zeta$  est le facteur d'amortissement,  $\omega_n$  est la pulsation naturelle calculée par  $\omega_n \simeq 4/t_s$  où  $t_s$  est le temps de réponse désiré. Pour une application numérique les paramètres de synthèse  $t_s$  et  $\zeta$  sont choisis :  $t_s = 0.3$  et  $\zeta = 0.7$ . Du coup, cinq contrôleurs à gains régulateurs statiques de la forme (2.16) avec les paramètres  $K_i$  et  $K_{r_i}$ ,  $i \in \{1,2,3,4,5\}$  calculés par la relation (2.24) et (2.25) ont été utilisés afin d'atteindre les objectif de commande. Les résultats sont donnés par :

$$K_1 = K_5 = [-265.9547 \quad -26.9111] \text{ et } K_{r_1} = K_{r_5} = 256.2963. \quad (2.36)$$

$$K_2 = K_4 = [-153.2334 \quad -14.9983] \text{ et } K_{r_2} = K_{r_4} = 142.8407. \quad (2.37)$$

$$K_3 = [-132.2615 \quad -12.7556] \text{ et } K_{r_3} = 121.4815. \quad (2.38)$$

Le système flou permettant de pondérer ces contrôleurs est choisi de type directe avec variable de prémisse la sortie  $y(t) = x_1(t)$ , où on définit cinq fonctions d'appartenance gaussiennes données par :

$$\begin{aligned} \check{F}^1(x_1) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+pi/3}{pi/12}\right)^2\right\} \\ \check{F}^2(x_1) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+pi/6}{pi/12}\right)^2\right\} \\ \check{F}^3(x_1) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{pi/12}\right)^2\right\} \\ \check{F}^4(x_1) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-pi/6}{pi/12}\right)^2\right\} \\ \check{F}^5(x_1) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-pi/3}{pi/12}\right)^2\right\} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Les résultats de simulation présentés par les figures (2.4) à (2.6) révèlent de bonne performance de poursuite et mettent en évidence les capacités de la structure de commande conçue pour un pendule inversé. L'évolution de l'angle de position  $\theta$  et sa vitesse  $\dot{\theta}$  sont illustrées sur les figures (2.4a) et (2.4b) qui montrent que la poursuite est atteinte en un temps de réponse de 0.3 secondes avec une erreur de poursuite pratiquement nulle (voir figure 2.5). La commande appliquée, qui est montrée par la figure (2.6), suit globalement la dynamique de la sortie avec une allure lisse et reste dans la plage de fonctionnement. La pondération des lois de commande locales a permis d'éviter l'apparition des pics sur la commande lors de commutations d'un contrôleur à un autre.

Il est à noter que pendant les essais de simulation, le nombre et l'emplacement des points de fonctionnement ainsi que les paramètres des fonctions d'activations du système flou sont continuellement corrigés jusqu'à avoir un choix judicieux qui permet d'améliorer les résultats en terme de vitesse, de convergence et d'effort de commande. Donc, le nombre et l'emplacement des contrôleurs dans l'espace de fonctionnement dépendent du degré de complexité du système non linéaire et les informations disponibles sur son comportement dynamique.

Dans le but de montrer l'influence du nombre de contrôleurs (modèles) locaux sur la performance de la commande, nous avons simulé également la structure proposée avec trois contrôleurs ( $N = 3$ ) correspondant aux points de fonctionnement  $(-\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3})$  pour le même signal de référence. Les modèles linéaires à retenir pour le calcul de la loi de commande sont donnés donc par les équations (2.29), (2.31) et (2.33). Pour le même modèle de référence (2.35), les gains régulateurs statiques  $K_i$  et  $K_{r_i}$   $i = 1, 3$ , correspondant aux point  $\mp \frac{\pi}{3}$ , sont calculés par l'équation (2.36) et  $K_2$  et  $K_{r_2}$  sont calculés par (2.38). Le système flou de commutation est défini par les trois fonctions d'appartenance gaussiennes suivantes :

$$\begin{aligned}\check{F}^1(x_1) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + \pi/3}{\pi/6}\right)^2\right\} \\ \check{F}^2(x_1) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{\pi/6}\right)^2\right\} \\ \check{F}^3(x_1) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - \pi/3}{\pi/6}\right)^2\right\}\end{aligned}\tag{2.40}$$

Les résultats de simulation sont donnés par les figures (2.7) et (2.8). Les figures (2.7a) et (2.7b) montrent que les réponses du pendule en position et en vitesse divergent des trajectoires désirés, avec des erreurs de poursuite de l'ordre de 100% de la référence (voir figure 2.8). D'après ces résultats, nous pouvons constater que la configuration de multi-contrôleurs à trois

contrôleurs n'a pas pu maintenir les performances obtenues par un multi-contrôleurs à cinq contrôleurs.

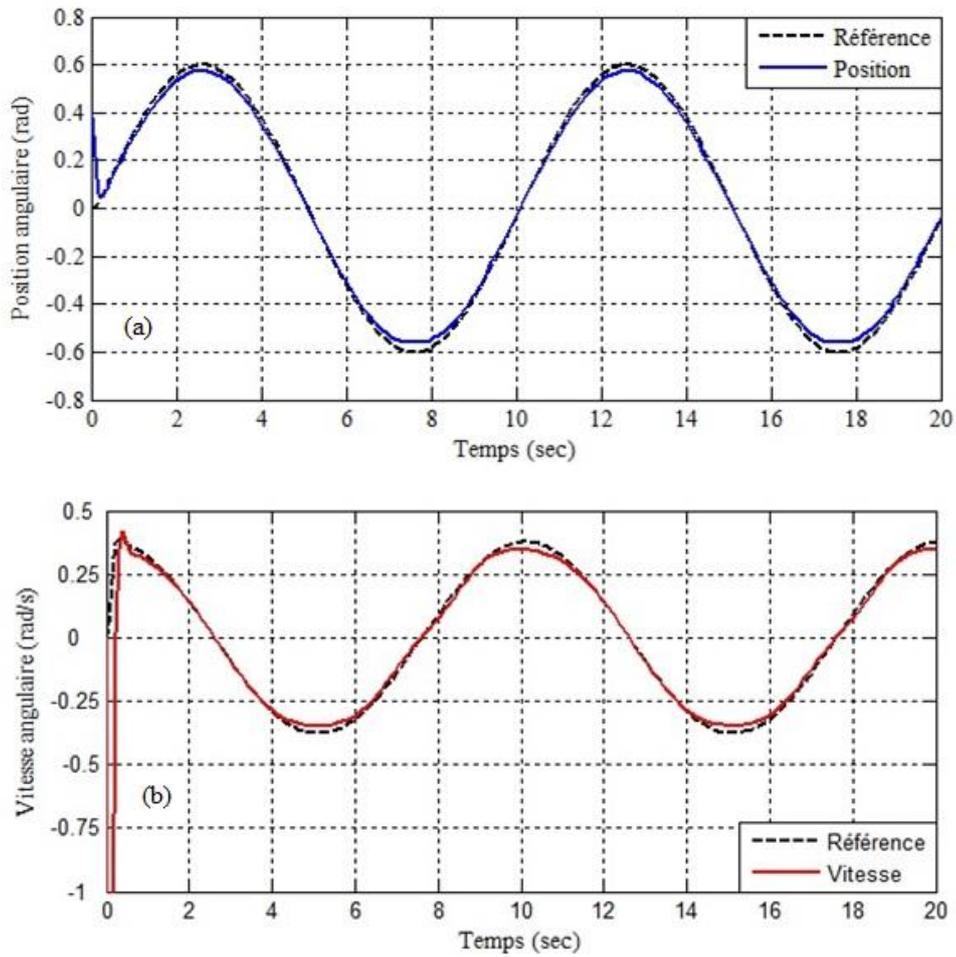


Figure 2.4 : Réponses du système pendule inversé (cas de  $N = 5$  gains régulateurs ).

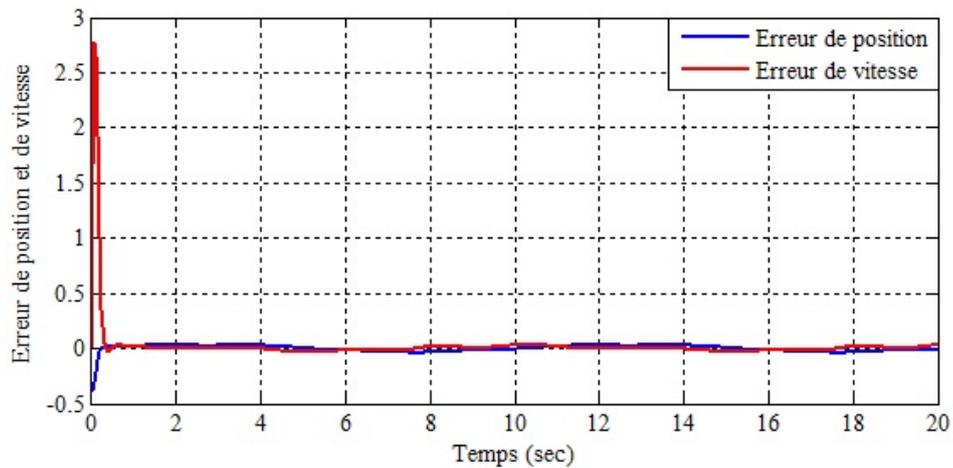


Figure 2.5: Erreurs de poursuite (cas  $N = 5$  gains régulateurs).

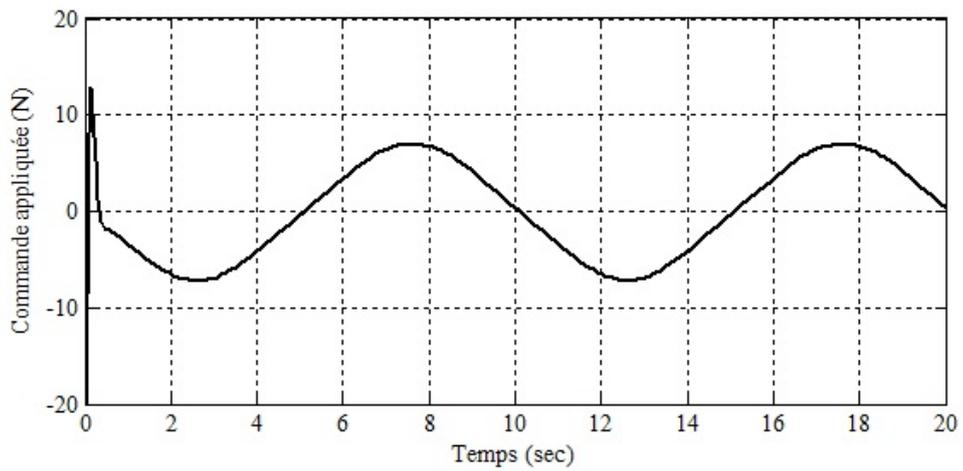


Figure 2.6: Commande appliquée au pendule inversé (cas de  $N = 5$  gains régulateurs)

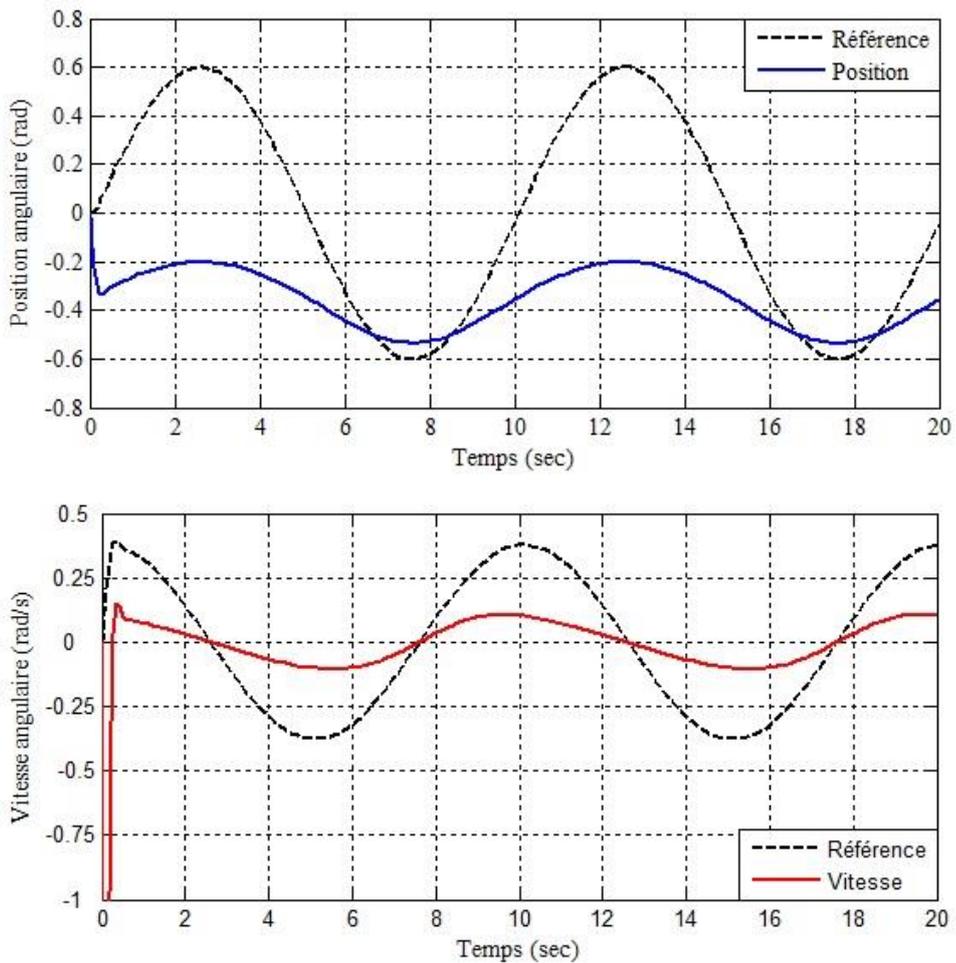


Figure 2.7 : Réponses du système pendule inversé (cas de  $N = 3$  gains régulateurs)

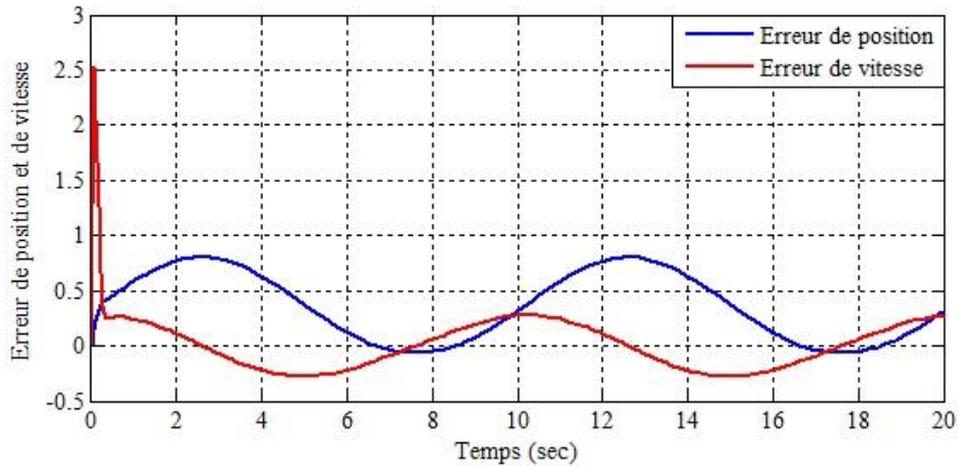


Figure 2.8: Erreurs de poursuite (cas de  $N = 3$  gains régulateurs).

Donc, pour avoir de bonnes performances en poursuite de trajectoire par cette loi de commande, il faut augmenter le nombre des modèles (contrôleurs) locaux, avec un choix judicieux de leurs positions dans l'espace de fonctionnement. Cependant, cette condition ne peut être toujours vérifiée, car en réalité, nous sommes en mesure de connaître partiellement la dynamique du système non linéaire. De ce fait, l'erreur d'approximation de ce dernier par une structure multi-modèle, généralement, ne peut être négligée. De plus, un choix optimum des fonctions d'appartenance du système d'inférence n'est toutefois pas évident à trouver, son expression la plus simple et de forme triangulaires qui mène généralement à des résultats dégradés.

Pour remédier à ces inconvénients, nous proposons dans la prochaine section une modification de loi de commande dans le but d'atteindre deux objectifs. Le premier objectif est d'utiliser un nombre minimal d'informations sur le système à commander et par conséquent un nombre réduit de contrôleurs locaux dans l'élaboration du système de commande. Le deuxième objectif est de faire compenser l'effet des erreurs d'approximation et impliquer la théorie d'hyperstabilité dans l'analyse et la synthèse de la loi de commande afin d'assurer la stabilité du système de commande en boucle fermée et la convergence des erreurs de poursuite vers zéro.

#### 2.4. Commande multi-contrôleurs à loi de commande locale adaptative

Dans cette section, nous envisageons modifier la structure du contrôleur en ajoutant à la loi de commande locale à gains régulateurs statiques une composante de correction adaptative à action intégrale. L'objectif est de faire compenser l'effet des erreurs d'approximation  $\mathcal{E}_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  avec un nombre réduit de correcteurs locaux et assurer la stabilité du système bouclé

avec une erreur de poursuite qui converge vers zéro. Pour cela, pour chaque contrôleur, la loi de commande locale  $\underline{u}_i(t)$  (2.40) est modifiée comme suit :

$$\underline{u}_i(t) = -K_i \underline{x}_i(t) + K_{ri} \underline{r}(t) + \delta K_{ei}(t) \int_0^t x_{ei}(\tau) d\tau \quad (2.41)$$

où  $\delta K_{ei}^T(t) \in \mathfrak{R}^n$  est un gain adaptatif local,  $x_{ei}(t) \in \mathfrak{R}^n$  est une erreur de poursuite locale définie par :

$$x_{ei}(t) = x_{mi}(t) - \underline{x}_i(t) \quad (2.42)$$

où  $x_{mi} = x_m - x_i^*$  est défini comme étant le vecteur d'état de référence locale.

**Remarque 2.1:**

L'analyse de cette commande, permet de remarquer qu'elle est constituée de deux parties. La première partie est un régulateur à gains régulateurs constants son rôle est de ramener la dynamique du système vers un modèle de référence. La seconde partie est un correcteur de commande adaptative introduit pour compenser l'effet des erreurs d'approximation  $\mathcal{E}_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i)$   $i = 1, \dots, N$  et assurer la stabilité du système bouclé.

Afin d'établir le schéma de commande, nous donnons les hypothèses suivantes nécessaires au développement et la convergence de la méthode de commande.

**Hypothèses :**

- **Hyp 2.5 :** Le gain de commande local  $b_{ni}$  est supposé strictement positif, c'est-à-dire  $b_{ni} > 0, i = 1, \dots, N$ . Notons que le résultat de ce chapitre peut être facilement adapté au cas où  $b_{ni} < 0, i = 1, \dots, N$ .
- **Hyp 2.6 :** L'erreur d'approximation locale  $\mathcal{E}_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i)$  du multimodèle de T-S au tour du point de fonctionnement est supposée petite et bornée estimée par (Landau, 1979):

$$\mathcal{E}_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i) = \delta A_i(t) \int_0^t x_{ei}(\tau) d\tau \quad (2.43)$$

où  $\delta A_i^T(t) \in \mathfrak{R}^n$  est un vecteur de paramètres supposés bornés varient lentement dans le temps.

**2.4.1. Synthèse de la loi de commande**

L'objectif principal est de synthétiser la loi de commande locale adaptative (2.41) capable de compenser ou d'atténuer l'influence des erreurs d'approximation sur les performances de commande et ainsi forcer les états du système (2.13) à poursuivre le modèle de référence (2.3) avec la contrainte que tous les signaux impliqués soient bornés.

La formulation du problème de commande, nous conduisons à réécrire de nouveau l'équation dynamique des erreurs à partir des équations (2.3), (2.5), (2.13) et (2.41), telle que :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) = & A_m x_m(t) + B_m r(t) - \sum_{i=1}^N \xi_i(z) ((A_i - B_i K_i) \underline{x}_i(t) + B_i K_{ri} \underline{r}_i(t) + \\ & B_i \delta K_{ei}(t) \int_0^t x_{ei}(\tau) d\tau + E_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i)) \end{aligned} \quad (2.44)$$

En ajoutant et soustrayant  $A_m x(t)$ , et en considérant les relations de l'équation (2.19), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) = & A_m x_e(t) + \sum_{i=1}^N \xi_i(z) ((A_m - A_i + B_i K_i) \underline{x}_i(t) + (B_m - B_i K_{ri}) \underline{r}_i(t) + \\ & (B_m C + A_m) x_i^*) - \sum_{i=1}^N \mu_i (B_i \delta K_{ei}(t) \int_0^t x_{ei}(\tau) d\tau + E_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i)) \end{aligned} \quad (2.45)$$

En tenant compte la forme particulière des vecteurs  $B_i$  et  $E_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i)$ , l'équation d'erreur (2.45) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_e(t) = & A_m x_e(t) + \sum_{i=1}^N \xi_i(z) ((A_m - A_i + B_i K_i) \underline{x}_i(t) + (B_m - B_i K_{ri}) \underline{r}_i(t) + \\ & (B_m C + A_m) x_i^*) - \Gamma (b_{ni} \delta K_{ei}(t) \int_0^t x_{ei}(\tau) d\tau + \mathcal{E}_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i)) \end{aligned} \quad (2.46)$$

où  $\Gamma = [0, \dots, 0, 1]^T \in \mathfrak{R}^n$ .

Sur la base du modèle dynamique de l'erreur de poursuite (2.46), nous pouvons calculer les gains régulateurs  $K_i$  et  $K_{ri}$   $i = 1, \dots, N$  par les équations (2.24) et (2.25) respectivement et  $B_m$  par l'équation (2.26). Tandis que, pour le gain d'adaptation locale  $\delta K_{ei}(t)$   $i = 1, \dots, N$ , nous proposons la loi d'adaptation suivante :

$$\delta K_{ei}(t) = \int_0^t \alpha_i y_e(t) \int_0^t x_{ei}^T(\tau) d\tau dt + \beta_i y_e(t) \int_0^t x_{ei}^T(\tau) d\tau \quad (2.47)$$

où  $\alpha_i \in \mathfrak{R}$  et  $\beta_i \in \mathfrak{R}$  sont des poids d'adaptation définis positifs,  $y_e \in \mathfrak{R}$  est une erreur filtrée calculée par :

$$y_e(t) = C_e x_e(t) = \Gamma^T P x_e(t) \quad (2.48)$$

où  $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  est une matrice définie symétrique positive.

Dès lors, le problème de la synthèse d'une commande un multi-contrôleurs à loi de commande locale adaptative consiste à calculer les gains régulateurs  $K_i$  et  $K_{ri}$  statiques et le gain d'adaptation local  $\delta K_{ei}(t)$  afin que le système de commande soit stable et l'erreur de poursuite  $x_e(t)$  convergences asymptotique vers zéro.

Rappelons qu'un système hyperstable est un système globalement asymptotiquement stable au sens de Lyapunov. Donc, le résultat précédent peut être obtenu par la théorie d'hyperstabilité en établissant le théorème suivant :

**Théorème 2.1 :**

Considérant le système non linéaire monovarié (2.1) approximé par le multimodèle de T-S (2.14). Supposons que les hypothèses 2.1 à 2.6 sont satisfaites. La loi de commande locale (2.41) avec les gains régulateurs (2.24) et (2.25) et la loi d'adaptation (2.47) garantit l'hyperstabilité du système en boucle fermée, ainsi que :

- (i) La bornitude de tous les signaux et paramètres du système.
- (ii) L'erreur de poursuite  $x_e(t)$  est bornée et converge asymptotiquement vers zéro;

**Preuve :**

Le calcul de  $K_i$ ,  $K_{ri}$  et  $B_m$  respectivement par les équations (2.24), (2.25) et (2.26) permet de réduire l'équation d'erreur (2.46), où le résultat peut être écrit sous une forme compacte comme suit :

$$\dot{x}_e(t) = A_m x_e(t) - \Gamma v(t) \tag{2.49}$$

avec

$$v(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i(z) v_i(t) \tag{2.50}$$

$$v_i = b_{ni} \delta K_{ei}(t) \int_0^t x_{ei}(\tau) d\tau + \mathcal{E}_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i) \tag{2.51}$$

Le système d'erreur obtenu est composé de deux blocs en contre-réaction (voir figure 2.9). Un bloc linéaire dans la chaîne directe défini par la fonction de transfert  $C_e(sI - A_m)$  et un bloc non linéaire dans la chaîne de retour décrit par les équations (2.50) et (2.51) dépend des éléments  $b_{ni}$ ,  $\delta K_{ei}(t)$  et  $\mathcal{E}_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i)$  avec  $i = 1, \dots, N$ . Le système est hyperstable si les deux conditions suivantes sont satisfaites (Popov, 1973) :

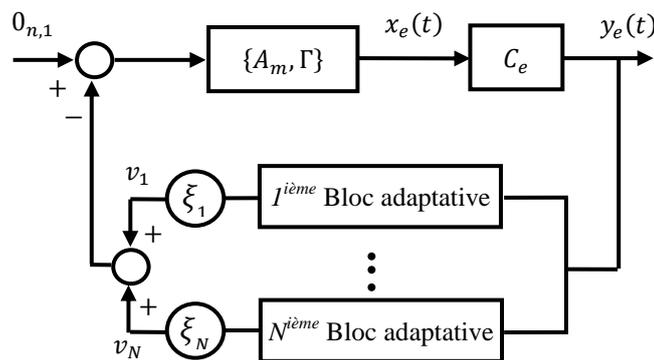


Figure 2.9 : Schéma bloc équivalent du système d'erreur

Dans la première condition, le bloc linéaire défini par le triplet  $\{A_m, \Gamma, C_e\}$  doit être SPR. Cette condition est satisfaite si le vecteur de gains  $C_e$  est calculé selon le théorème de Kalman-Yakubovich-Popov, solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$PA_m + A_m^T P = -Q \quad (2.52)$$

avec

$$C_e = \Gamma^T P \quad (2.53)$$

où  $Q \in \mathcal{R}^{n \times n}$  est une matrice diagonale définie positive.

Dans la deuxième condition, le bloc non linéaire doit satisfaire l'inégalité de Popov (Popov, 1973) :

$$\int_0^t y_e^T(t) v(t) dt \geq -\gamma_0^2, \gamma_0 > 0, \text{ pour tout } t \geq 0 \quad (2.54)$$

En remplaçant  $v(t)$  par son expression (2.50), l'inégalité (2.54) devient:

$$\sum_{i=1}^N \xi_i \int_0^t y_e^T(t) v_i(t) dt \geq -\gamma_0^2 \quad (2.55)$$

Comme  $\xi_i$   $i = 1, \dots, N$  sont positifs et bornés, la preuve de l'inégalité (2.55) conduit à démontrer les inégalités élémentaires suivantes :

$$\int_0^t y_e^T(t) v_i(t) dt \geq -\gamma_{0i}^2 \quad (2.56)$$

où  $\gamma_{0i}$  sont des constants positifs avec  $\gamma_0^2 = \sum_{i=1}^N \xi_i \gamma_{0i}^2$ .

Introduisant  $v_i(t)$  par son expression dans l'inégalité (2.56), on obtient :

$$\int_0^t y_e^T(t) \left( b_{ni} \delta K_{ei}(t) \int_0^t x_{ei}(\tau) d\tau + \varepsilon_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i) \right) dt \geq -\gamma_{0i}^2 \quad (2.57)$$

De (2.47) et (2.43), l'inégalité (2.57) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} b_{ni} \alpha_i \int_0^t \left( \int_0^t y_e(t) \int_0^t x_{ei}^T(\tau) d\tau dt + \delta A_i(t) / \alpha_i \right) y_e^T(t) \int_0^t x_{ei}(\tau) d\tau dt \\ + b_{ni} \beta_i \int_0^t y_e^T(t) y_e(t) \int_0^t x_{ei}^T(\tau) d\tau \int_0^t x_{ei}(\tau) d\tau dt \geq -\gamma_{0i}^2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Sous l'hypothèse que les variations paramétriques dans un système de commande adaptative sont considérées négligeables devant la cadence du processus d'adaptation, on note  $\eta_i(t) = \int_0^t y_e^T(t) \int_0^t x_{ei}(\tau) d\tau dt + \delta A_i / \alpha_i$  avec  $\dot{\eta}_i(t) = y_e^T(t) \int_0^t x_{ei}(\tau) d\tau$ , le premier terme de l'inégalité (2.58) peut être calculé ainsi par :

$$\begin{aligned} b_{ni} \alpha_i \int_0^t \eta_i^T(t) \dot{\eta}_i(t) dt &= \frac{b_{ni} \alpha_i}{2} [\eta_i^T(t) \eta_i(t)]_{t=0}^t \\ &\geq -\frac{b_{ni} \alpha_i}{2} \eta_i^T(0) \eta_i(0) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Cependant,

$$b_{ni} \beta_i \int_0^t y_e^T(t) y_e(t) \int_0^t x_{ei}^T(\tau) d\tau \int_0^t x_{ei}(\tau) d\tau dt \geq 0 \quad (2.60)$$

Les deux inégalités intégrales (2.59) et (2.60) sont satisfaites puisque les deux conditions  $b_{ni}\alpha_i \geq 0$  et  $b_{ni}\beta_i \geq 0$  sont remplies sous l'hypothèse 2.4. Ce qui implique que l'inégalité de Popov (2.54) est vérifiée et par conséquent le système (2.49) à (2.51) est hyperstable.

Donc, en se basant sur le théorème d'hyperstabilité, le système de commande est globalement asymptotiquement stable et l'erreur de poursuite  $x_e(t)$  converge asymptotiquement vers sa consigne  $0_{n,1}$ . De plus, tous les signaux et paramètres impliqués sont bornés, c'est-à-dire  $x_e(t)$ ,  $v(t)$ ,  $x_{ei}(t)$ ,  $v_i(t)$  et  $\delta K_{ei}$  sont tous bornés pour  $t \geq 0$ .

D'après les relations (2.5), (2.15) et (2.16), et sous l'hypothèse 2.4, on peut déduire que l'état  $x(t)$  et la commande  $u(t)$  sont bornés.

### 2.4.2. Simulation et résultats

Pour montrer l'efficacité de la commande proposée en poursuite de trajectoire et la comparer à celle à gains régulateurs statiques en terme d'erreur maximale, on procède à une application à la commande du pendule inversé utilisé dans la section précédente. Pour la mise en œuvre de la loi de commande, on utilise trois contrôleurs calculés pour les trois points de fonctionnement  $-\frac{\pi}{3}$ ,  $0$ ,  $\frac{\pi}{3}$ , correspondants aux modèles d'état définis par les équations d'états (2.26), (2.28) et (2.30) respectivement. Les gains régulateurs statiques des trois contrôleurs sont calculés par (2.36) et (2.38), et le système flou de commutation est défini par les fonctions d'appartenance uniformément distribuées sur l'univers de discours de la position données par l'équation (2.40).

Pour satisfaire la positivité du système de commande, l'équation de Lyapunov est résolue pour le choix suivant de la matrice  $Q$  :

$$Q = 2 \begin{bmatrix} \omega_n & 0 \\ 0 & (2d - 1)/\omega_n \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

où  $d$  est une constante positive, avec  $d > 0.5$ .

En utilisant le modèle de référence (2.35), la résolution de l'équation de Lyapunov (2.52) et (2.53) pour le choix (2.61) permet d'obtenir les solutions  $P$  et  $C_e$  suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} d/\zeta + 2\zeta & 1/\omega_n \\ 1/\omega_n & d/(\zeta\omega_n^2) \end{bmatrix} \text{ et } C_e = 2[1/\omega_n \quad d/(\zeta\omega_n^2)] \quad (2.62)$$

Le test de performance est effectué pour une entrée  $r = 0.6 \sin(0.2\pi t)$  avec différentes positions initiales tels que on a considéré trois points :  $x(0) = 0.4$ ,  $x(0) = 1$  et  $x(0) = -0.8$ . La vitesse du pendule est initialisée toujours à zéro. Les gains d'adaptations  $\delta K_{ei}(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont initialisés à zéro. Pour avoir un bon compromis entre le temps de réponse et l'amplitude de

l'effort appliqué, nous avons choisi les paramètres de synthèse suivantes :  $\zeta = 0.7$ ,  $t_s = 1$  secondes,  $d = 10$ ,  $\alpha_i = 6$  et  $\beta_i = 0.6$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Les figures (2.10) à (2.12) exposent les résultats de simulation issus de cette application. Nous remarquons que la sortie du système et sa dérivée rejoignent rapidement leurs signaux de référence même lorsque les conditions initiales sont loin de la trajectoire désirée. Pour toutes les conditions initiales, le système maintient un temps de réponse de  $t_s = 1$  seconde (voir figures 2.10a et 2.10b). La figure (2.11) montre que les erreurs de poursuite convergent toutes vers zéro après un court régime transitoire. L'allure temporelle de la commande  $u$  appliquée au système est exposée sur la figure (2.12). Malgré l'utilisation d'un nombre réduit de contrôleurs, la commande pour toutes les conditions initiales ne présente aucune variation brusque (discontinuité) ni de saturation et prend ces valeurs dans la région admissible. Nous pouvons constater que l'approche de commande proposée a permis de réduire considérablement l'effet des erreurs d'approximation tout en maintenant un niveau acceptable de performances.

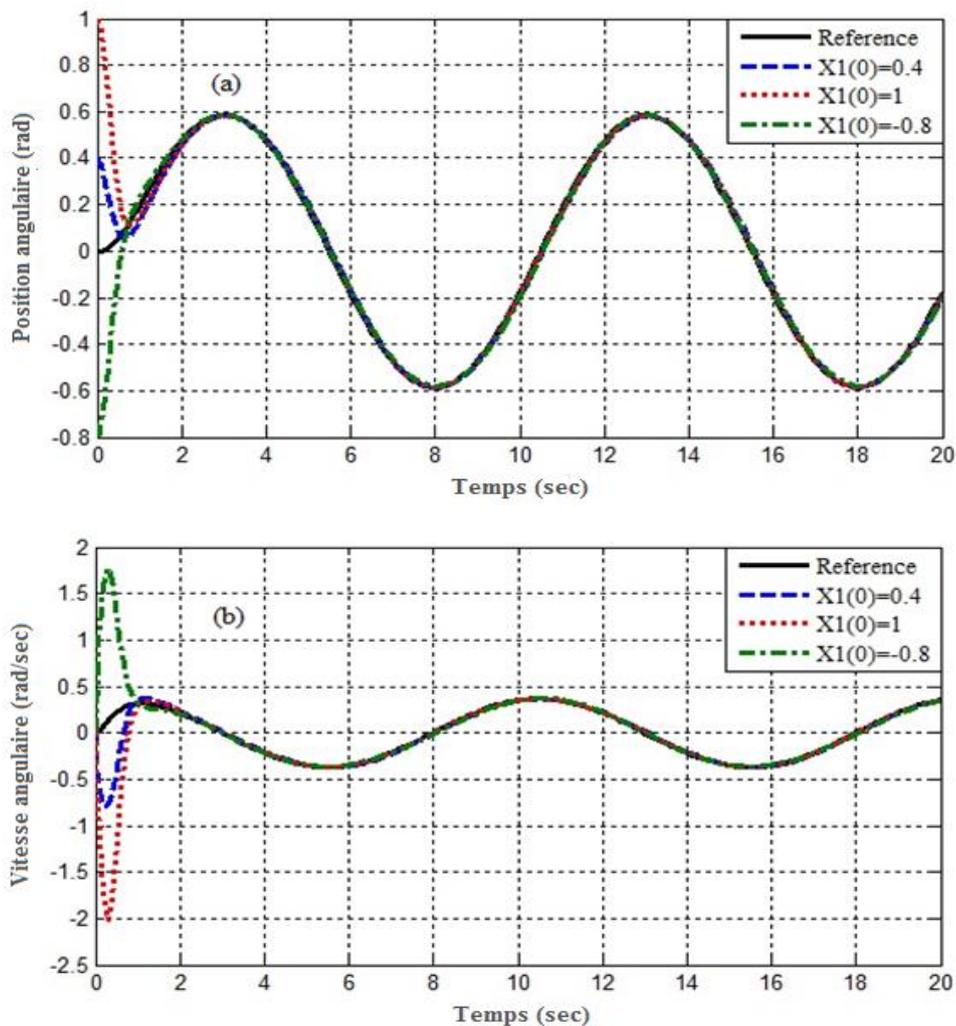


Figure 2.10 : Réponses du système pendule inversé (cas de loi de commande adaptative)

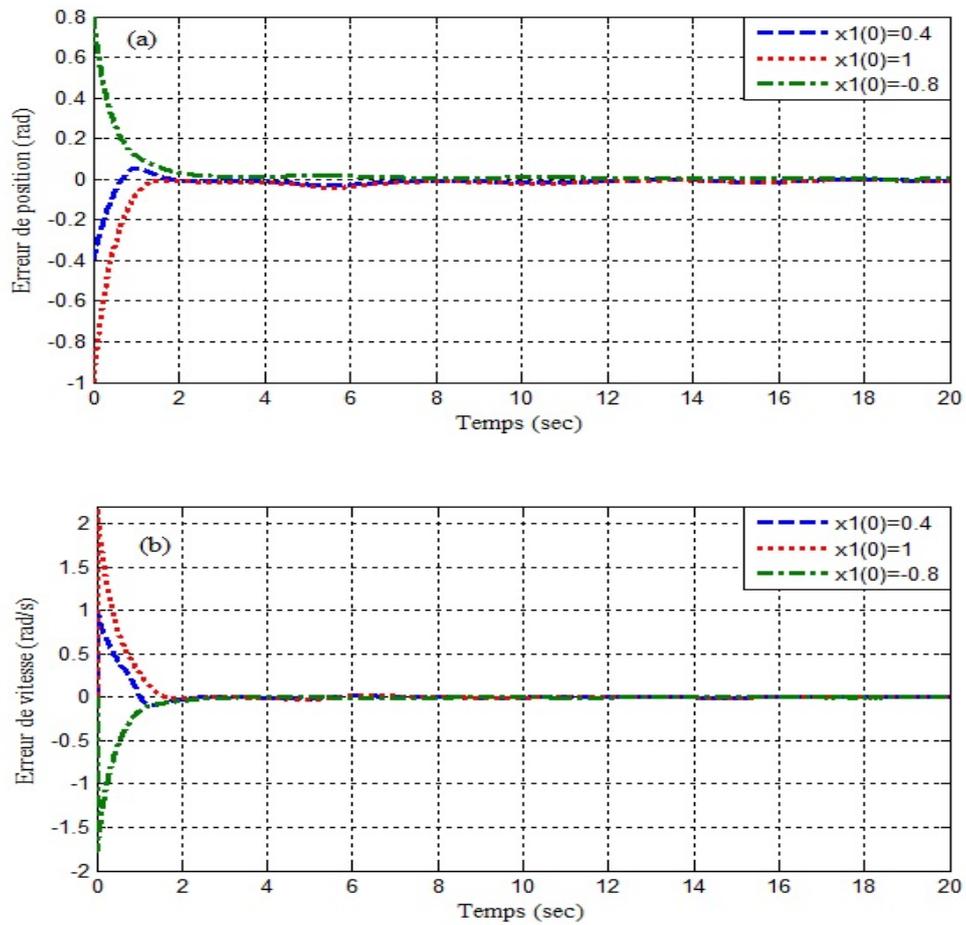


Figure 2.11 : Erreurs de poursuite (cas de loi de commande adaptative).

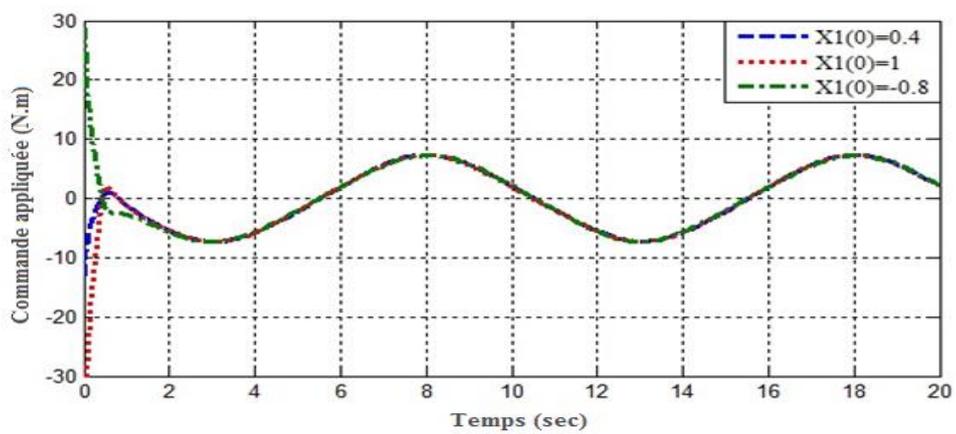


Figure 2.12: Commandes appliquées au pendule inversé (cas de loi de commande adaptative).

## **2.5. Conclusion**

Les travaux présentés dans ce chapitre portent sur la commande multi-contrôleurs des systèmes non linéaires SISO non perturbés. En se basant sur une approximation du système par un descripteur multi-modèle de T-S, deux approches ont été présentées en considérant l'architecture du contrôleur local. Nous avons proposé, tout d'abord, une commande multi-contrôleurs à gains régulateurs où la loi de commande locale est un retour d'état avec anticipation de la référence. La commande finale est calculée à partir d'une pondération des commandes locales qui permet une évolution progressive de la commande. Néanmoins, cet algorithme présente l'inconvénient que, la convergence et la stabilité du système de commande nécessitent une approximation précise du système par le multi-modèle flou de T-S et un choix optimum des fonctions d'activation.

Comme solution, nous avons proposé une deuxième commande multi-contrôleurs dont la loi de commande locale à gains régulateurs est augmentée par une composante adaptative. Deux principales contributions sont présentées dans cette proposition. Dans la première contribution, les avantages de la commande adaptative et la commande multi-contrôleurs sont réunis dans une seule configuration. En effet, l'adaptation de la loi de commande locale permet de surmonter les problèmes de la première structure de commande (erreur d'approximation et preuve de stabilité) et d'obtenir une commande performante. La deuxième contribution réside dans l'utilisation de la théorie d'hyperstabilité qui a permis de garantir la stabilité du système bouclé sans aucune restriction sur le modèle du système ou sur la loi de commande et son domaine de validité.

Pour valider les approches de commande proposées, une application à un pendule inversé est présentée en exposant les résultats de simulation.

### **Chapitre 3.**

## **Commandes adaptatives décentralisées des systèmes non linéaires interconnectés**



## Chapitre 3.

---

# Commandes adaptatives décentralisées des systèmes non linéaires interconnectés

---

< Se révolté ou s'adapter, il n'y a guère d'autre choix dans la vie. >

↔ **Gustave Le Bon**

---

### 3.1. Introduction

La commande des systèmes complexes constitue une des préoccupations majeures des chercheurs en automatique. Généralement, les outils mathématiques classiques, développés pour l'analyse et la conduite des systèmes, reposent en majorité sur des structures de commande centralisées où tout le traitement de l'information se fait dans une même unité de commande. En effet, la centralisation engendre souvent des problèmes aussi bien en théorie qu'en pratique. Les difficultés proviennent d'une part, de la structure de ces systèmes qui sont généralement constitués de plusieurs sous-systèmes interconnectés, parfois géographiquement éloignés et d'autre part de leurs dimensions élevées.

Pour pallier à ces inconvénients, la structure de commande décentralisée a été proposée. Il s'agit de décomposer la structure complexe en sous systèmes interconnectés dont chacun est menu de capteurs et d'actionneurs qui lui sont propres, et commandé par une unité de commande locale. L'intérêt de cette approche de commande est la simplification des algorithmes de commande ainsi que la rapidité dans le traitement des données. Cependant, la décentralisation introduit une contrainte supplémentaire à cause de la présence des interconnexions entre les sous-systèmes, ce qui engendre souvent la dégradation des performances du système lorsque les lois de commande locales sont synthétisées par des approches centralisées.

En effet, plusieurs chercheurs se sont intéressés aux problèmes liés à la commande décentralisée. Les premiers résultats sur l'aspect analyse virent le jour vers le début des années soixante-dix avec les travaux de Wang (Wang, 1973) qui a étudié le problème de stabilisation d'une commande décentralisée linéaire en introduisant la notion de modes fixes. Depuis, un nombre important de résultats ont été obtenus dans le domaine de la théorie de la commande décentralisée durant ces dernières années, allant de la commande linéaire jusqu'à la commande adaptative. La contribution des chercheurs dans le domaine de la commande adaptative décentralisée des systèmes complexes est d'une importance particulière dont les résultats sont pertinents et grouillants dans la littérature.

Nous pouvons citer entre autres les stratégies de commande adaptative décentralisées qui ont été développées dans [(Ioannou, 1986), (Doraraju, 2000)]. Ces stratégies sont limitées aux cas des sous-systèmes linéaires connus et des interconnexions linéaires ou non linéaires. La commande adaptative décentralisée des robots manipulateurs a été étudiée aussi dans [(Liu, 1997), (Boukhetala, 2002)]. Les structures proposées considère que les articulations sont des sous-systèmes interconnectés, et la commande du robot est réalisée à travers la commande décentralisée de chaque sous-systèmes. Dans (Spooner, 1996), les auteurs proposent une approche de commande pour une classe de systèmes interconnectés avec des sous-systèmes non linéaires et des interconnexions inconnues. Néanmoins, cette approche est limité au cas de non linéarités exprimées linéairement par rapport aux paramètres inconnus. Les stratégies de commandes adaptatives des systèmes non linéaires utilisant la logique floue et les réseaux de neurones, comme éléments de base pour l'approximation de fonctions inconnues, sont largement utilisées pour proposer des approches de commande décentralisées des systèmes non linéaires complexes [(Spooner, 1997), (Spooner, 1999), (Boukhatela, 2003), (Labioud, 2004), (Tong, 2004), (Huang, 2005)]. D'autres techniques de commande ont été aussi introduites, comme la commande prédictive (Pomerleau, 2003), la commande par mode de glissement (Tsai, 2001), la commande optimale (Lagoa, 2004), la commande tolérante au défauts (Panagi, 2011) et la commande  $H_\infty$  (Dhbaibi, 2009). Jusqu'à nos jours, cet axe de recherche est très actif et la tendance est de plus en plus orientée vers des algorithmes qui ne requièrent pas la connaissance du modèle de système à commander dans l'implémentation.

Généralement, l'analyse de la stabilité des lois de commande adaptative décentralisées est effectuée par la méthode de Lyapunov qui est assurée dans la mesure où tous les signaux d'entrées et de sorties restent bornés [(Wang, 1973), (Hill, 1988), (Spooner, 1999), (Liu, 2002)]. Cependant, peu de travaux utilisant la théorie d'hyperstabilité ont été introduits. Dans le cadre linéaire, nous pouvons citer les travaux [(Benchoubane, 1992), (Arif, 2008), (Doraraju, 2000)]

qui traitent la commande des systèmes linéaires interconnectés par des contrôleurs de commande adaptative décentralisés. Dans (Benchoubane, 1992) et (Arif, 2008), les auteurs développent des lois de commande adaptative décentralisées stabilisantes des systèmes linéaires à paramètres variables en utilisent un algorithme de commande MCS (Stoten, 1990). Dans ces approches les perturbations et les interactions entre les sous-systèmes sont considérées comme étant des variations paramétriques. La référence (Doraraju, 2000), présente une approche de commande décentralisée pour commander un système électrique multi-machines. La loi de commande élaborée est constituée de deux composantes, la première composante est linéaire calculée explicitement à partir des paramètres du processus pour compenser certaines dynamiques. Tandis que la deuxième composante est un contrôleur local adaptatif synthétisé par la théorie d'hyperstabilité afin de compenser les interconnexions du système et garantir sa stabilité.

Motivé par les travaux de Benchoubane et Arif [(Benchoubane, 1992), (Arif, 2008)], ce chapitre est consacré à la stabilisation d'une classe de systèmes non linéaires complexes par des lois de commande adaptatives décentralisées. Le système est considéré comme étant un ensemble fini de sous-systèmes monovariabiles interconnectés, où chaque sous-système est commandé par une unité de commande locale. Le développement de la méthode de commande proposée est basé principalement sur la propriété d'approximation du sous-système non linéaire par un modèle linéaire à temps variant, ainsi que les algorithmes de Stoten (Stoten, 1990) et (Stoten et Neild, 2003), dans lesquels ils proposèrent des lois de commande adaptative stabilisantes pour des systèmes linéaires variant dans le temps. En utilisant la théorie d'hyperstabilité de Popov, nous montrons que les lois de commande décentralisées proposées assurent la convergence asymptotique des erreurs de poursuite ainsi que la bornitude des différents signaux intervenant dans la commande.

Afin de tester la faisabilité des schémas de commande proposés et d'évaluer ses performances en poursuite de trajectoire, une application à la commande d'un simulateur de vol d'hélicoptère (TRMS: Twin Rotor MIMO System) a été effectuée. Les résultats de simulation pour des testes de performance et de robustesse seront également présentées.

### 3.2. Contexte et formulation

Concédons un système non linéaire multivariable complexe  $S$  constitué de  $N$  sous-systèmes non linéaires monovariabiles affines en la commande  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  dont la dynamique est décrite par l'équation d'état suivante (Khalil, 2002) :

$$S_i : \dot{x}_i(t) = A_i(x_i)x_i + B_i(x_i)u_i + H_i(x, t) \quad (3.1)$$

où,  $x \in \mathfrak{R}^{n_1 + \dots + n_N}$  est le vecteur d'état total du système complexe,  $x_i = [x_{i1}, \dots, x_{ini}] \in \mathfrak{R}^{n_i}$  et  $u_i \in \mathfrak{R}$  sont le vecteur d'état et la commande scalaire du sous-système  $S_i$  respectivement.  $A_i(x_i) \in \mathfrak{R}^{n_i \times n_i}$  et  $B_i(x_i) \in \mathfrak{R}^{n_i}$  sont la matrice dynamique et le vecteur d'entrée non linéaires respectivement, tels que :

$$A_i(x_i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{i1}(x_i) & -a_{i2}(x_i) & -a_{i3}(x_i) & \dots & -a_{ini}(x_i) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$B_i(x_i) = [0, \dots, 0, b_i(x_i)]^T \quad (3.3)$$

où  $a_{ij}(x_i)$ ,  $j = 1, \dots, n_i$  sont des fonctions non linéaires bornées généralement inconnues,  $b_i(x_i)$  est une fonction non linéaire bornée de signe connu,  $H_i(x, t) \in \mathfrak{R}^{n_i}$  représente l'effet des perturbations et des interconnexions entre le sous-système  $S_i$  et les autres sous-systèmes, avec :

$$H_i(x, t) = [0, \dots, 0, h_i(x, t)]^T \quad (3.4)$$

où  $h_i(x, t)$  est une fonction non linéaire supposée bornée.

**Hypothèses :** Afin de développer notre contrôleur décentralisé, pour chaque sous-système  $S_i$ , nous adoptons les hypothèses de simplification et de réalisation suivantes :

- **Hyp 3.1 :** Pour chaque sous-système, les fonctions  $a_{ij}(x_i)$  et  $B_i(x_i)$  sont supposées lisses continûment dérivables par rapport à  $x_i \in \mathfrak{R}^{n_i}$  ;
- **Hyp 3.2 :** Le vecteur d'état global du système complexe  $x(t)$  est supposé observable ou mesurable;
- **Hyp 3.3 :** Pour l'ensemble des sous-systèmes  $S_i$  le gain de commande local  $B_i(x_i)$  est strictement positif, c'est-à-dire  $B_i(x_i) > 0 \forall x_i \in \mathfrak{R}^{n_i}$ .

L'objectif est la synthèse de lois de commande adaptatives pour chaque sous-système  $S_i$   $i = 1, \dots, N$  et, ceci, en utilisant uniquement les informations locales (variables d'état locales) propres à chaque sous-systèmes, de telle sorte que chaque état  $x_i(t)$  suit, le plus proche possible, une dynamique d'un modèle de référence local de même ordre donné par l'équation d'état suivante :

$$\bar{S}_i: \dot{\bar{x}}_i(t) = \bar{A}_i \bar{x}_i(t) + \bar{B}_i r_i(t) \quad (3.5)$$

avec

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\bar{a}_{i1} & -\bar{a}_{i2} & -\bar{a}_{i3} & \cdots & -\bar{a}_{in_i} \end{bmatrix}, \bar{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{b}_i \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

où  $\bar{x}_i = [\bar{x}_{i1}, \dots, \bar{x}_{in_i}]^T \in \mathfrak{R}^{n_i}$  est le vecteur état du modèle de référence,  $r_i \in \mathfrak{R}$  est le signal de référence borné.  $\bar{A}_i \in \mathfrak{R}^{n_i \times n_i}$  et  $\bar{B}_i \in \mathfrak{R}^{n_i}$  sont la matrice dynamique et le vecteur d'entrée respectivement décrivant les performances souhaitées du sous-système en boucle fermée où  $\bar{a}_{ij}$  et  $\bar{b}_i$  sont des éléments constants qui définissent la fonction de transfert locale stable  $(sI - \bar{A}_i)^{-1} \bar{B}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Dans le but d'atteindre cet objectif, nous proposons une approche de commande basée sur la synthèse de lois de commande adaptative décentralisées pour le système non linéaire (3.1). La méthode proposée consiste à approximer chaque sous-système non linéaire (3.1) par un modèle LTV (Linéaire à Temps Variant). Puis, pour chaque sous-modèle linéarisé une commande locale est synthétisée en utilisant un algorithme adaptatif de conception [(Chelihi, 2014a), Chelihi, 2014b). L'analyse de la stabilité est effectuée par la théorie d'hyperstabilité permettant d'assurer la stabilité du système global et la bornitude de tous les signaux du système entier.

Pour l'établissement des schémas de commande, nous nous basons sur l'approximation du système non linéaire par un modèle LTV (Linéaires à Temps Variant). Afin d'obtenir ce dernier, nous procédons à une linéarisation des fonctions non linéaires du modèle (3.1) autour d'un ensemble continu de points de fonctionnement  $P_f = (x_i^*(t), u_i^*(t))$  conduisant ainsi au modèle d'état linéarisé suivant :

$$\dot{\underline{x}}_i(t) = A_i^*(x_i^*(t)) \underline{x}_i + B_i^*(x_i^*(t)) \underline{u}_i + \mathcal{R} \quad (3.7)$$

avec

$$\begin{cases} \underline{x}_i(t) = x_i - x_i^*(t) \\ \underline{u}_i(t) = u_i - u_i^*(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $x_i^*(t)$  et  $u_i^*(t)$  représentent respectivement, la valeur des états et la commande au point de fonctionnement  $P_f$ ,  $\underline{x}_i(t)$  et  $\underline{u}_i(t)$  sont respectivement le vecteur d'état et la commande scalaire locaux autour du point de fonctionnement,  $\mathcal{R}$  est le vecteur erreur d'approximation qui représente l'ensemble des termes d'ordre supérieur du développement de Taylor qui sont supposés négligeables devant la dynamique du système,  $A_i^*$  et  $B_i^*$  sont respectivement la matrice dynamique et le vecteur d'entrée du modèle linéarisé calculés à partir de développement en série Taylor des fonctions non linéaires du système, tels que :

$$\begin{aligned}
A_i^* &= \frac{d}{dx_i} [A_i(x_i)x_i + B_i(x_i)u_i + H_i(x, t)]_{(x_i^*, u_i^*)} \\
&= A_i(x_i^*(t)) + \frac{d}{dx_i} [A_i(x_i)]_{(x_i=x_i^*)} x_i^*(t) + u_i^*(t) \frac{d}{dx_i} [B_i(x_i)]_{(x_i=x_i^*)} \\
&+ \frac{d}{dx_i} [H_i(x, t)]_{(x_i=x_i^*)}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
B_i^* &= \frac{d}{du_i} [A_i(x_i)x_i + B_i(x_i)u_i + H_i(x, t)]_{(x_i^*, u_i^*)} \\
&= B_i(x_i^*(t))
\end{aligned} \tag{3.10}$$

En substituant  $A_i^*$  et  $B_i^*$  par leurs expressions (3.9) et (3.10) dans l'équation (3.7), on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{x}}_i(t) &= \left[ A_i(x_i^*(t)) + \frac{d}{dx_i} [A_i(x_i)]_{(x_i=x_i^*)} x_i^*(t) + u_i^*(t) \frac{d}{dx} [B_i(x_i)]_{(x_i=x_i^*)} \right] \underline{x}_i \\
&+ \frac{d}{dx_i} [H_i(x, t)]_{(x_i=x_i^*)} + B_i(x_i^*(t)) \underline{u}_i + \mathcal{R}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Après réarrangement, nous pouvons écrire (3.11) comme suit :

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{x}}_i(t) &= A_i(x_i^*(t)) \underline{x}_i + B_i(x_i^*(t)) \underline{u}_i \\
&+ \left( \frac{d}{dx_i} [A_i(x_i)]_{(x_i=x_i^*)} x_i^*(t) + u_i^*(t) \frac{d}{dx} [B_i(x_i)]_{(x_i=x_i^*)} \right) \underline{x}_i \\
&+ \frac{d}{dx_i} [H_i(x, t)]_{(x_i=x_i^*)} + \mathcal{R}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

En utilisant l'équation (3.8), le modèle (3.12) est réécrit de nouveau en fonction des grandeurs réels  $x_i(t)$  et  $u_i(t)$  comme suit :

$$\dot{x}_i(t) = A_i(x_i^*(t))x_i + B_i(x_i^*(t))u_i + H_i^*(x, t) \tag{3.13}$$

avec

$$\begin{aligned}
H_i^*(x, t) &= \left( \frac{d}{dx_i} [A_i(x_i)]_{(x_i=x_i^*)} x_i^*(t) + u_i^*(t) \frac{d}{dx} [B_i(x_i)]_{(x_i=x_i^*)} \right) (x_i - x_i^*(t)) \\
&+ \frac{d}{dx_i} [H_i(x, t)]_{(x_i=x_i^*)} - A_i(x_i^*(t))x_i^* - B_i(x_i^*(t))u_i^*(t) + \mathcal{R}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Il est clair que le modèle linéarisé (3.13) obtenu dépend à chaque instant du vecteur d'état  $x_i^*(t)$  et la commande  $u_i^*(t)$  de la trajectoire de fonctionnement. Il représente la dynamique du sous-système non linéaire à chaque point de fonctionnement sous l'hypothèse que le passage d'un point à un autre se fait de façon continue et lisse. Le terme  $H_i^*(x, t)$  regroupe l'ensemble des erreurs d'approximation et les interactions avec les autres sous-systèmes.

Dans les prochains sections, nous exposons en détails les structures de commande adaptative proposées en se basant sur le modèle d'état linéarisé (3.13) et en utilisant les algorithmes

adaptatifs MCS et Er-MCSI présentés au premier chapitre [(Stoten, 1990), (Stoten et Neild, 2003)]. Ces structures permettent de proposer des lois de commande adaptative décentralisées sans contraintes sur les interconnexions du système et facilitera l'analyse de stabilité de la boucle fermée.

### 3.3. Commande adaptative décentralisée via un algorithme MCS

Dans cette section, nous proposons une structure de commande adaptative décentralisée pour le système complexe (3.1). La loi de commande décentralisée du sous-système  $S_i$  est élaborée via l'algorithme MCS et le modèle LTV (3.13). Cet algorithme permet la conception de lois de commande simples indépendantes et stabilisantes, où l'analyse de stabilité et la synthèse de la loi de commande sont faites par la théorie d'hyperstabilité (Chelih, 2014a).

#### 3.3.1. Synthèse de la loi de commande MCS locale

Notre objectif consiste à synthétiser une loi de commande décentralisée via un algorithme MCS pour chaque sous-système  $S_i$ . En effet, le  $i^{\text{ème}}$  contrôleur génère la commande locale  $u_i(t)$  en utilisant seulement les variables locales de telle manière à ce que  $x_i(t)$  suit la dynamique d'un état de référence  $\bar{x}_i(t)$ . D'autre par, elle doit garantir l'hyperstabilité du système en boucle fermée.

Pour chaque sous-système  $S_i$ , on définit le vecteur erreurs de poursuite  $x_{ei} = [x_{ei1}, \dots, x_{ei}^{(n_i)}]^T$  avec :

$$x_{ei}(t) = \bar{x}_i(t) - x_i(t) \quad (3.15)$$

La formulation du problème de commande pour chaque sous-système, nous conduit à écrire l'équation dynamique de l'erreur à partir des équations (3.5), (3.13) et (3.15), telle que :

$$\dot{x}_{ei}(t) = \bar{A}_i x_{ei}(t) - B_i(x_i^*(t))u_i(t) - (A_i(x_i^*(t)) - \bar{A}_i)x_i(t) + \bar{B}_i r_i(t) - H_i^*(x, t) \quad (3.16)$$

Selon (Stoten, 1990), le terme  $H_i^*(x, t)$  est supposé borné et peut être estimé par la relation suivante :

$$H_i^*(x, t) = \delta A_i(t)x_i(t) \quad (3.17)$$

où  $\delta A_i(t) \in \mathfrak{R}^{n_i \times n_i}$  sont des variations paramétriques admissibles et/ou des erreurs d'identification du sous-système  $S_i$  supposés bornés varient lentement dans le temps.

De (3.16) et (3.17), l'équation d'erreur devient :

$$\dot{x}_{ei}(t) = \bar{A}_i x_{ei}(t) - B_i(x_i^*(t))u_i(t) - (A_i(x_i^*(t)) + \delta A_i - \bar{A}_i)x_i(t) + \bar{B}_i r_i(t) \quad (3.18)$$

Pour le modèle dynamique de l'erreur, donné par l'équation (3.18), nous formulons la loi de commande décentralisée suivante (Stoten, 1990) :

$$u_i(t) = \delta K_i(t)x_i(t) + \delta K_{r_i}(t)r_i(t) \quad (3.19)$$

avec  $\delta K_i^T \in \mathfrak{R}^{n_i}$  et  $\delta K_{r_i} \in \mathfrak{R}$  sont des gains d'adaptation, pour une action de correction proportionnelle-intégrale, prennent la forme suivante :

$$\delta K_i(t) = \int_0^t \alpha_i y_{ei}(\tau) x_i^T(\tau) d\tau + \beta_i y_{ei}(t) x_i^T(t) \quad (3.20)$$

$$\delta K_{r_i}(t) = \int_0^t \alpha_i y_{ei}(\tau) r_i(\tau) d\tau + \beta_i y_{ei}(t) r_i(t) \quad (3.21)$$

où  $y_{ei}(\tau)$  est l'erreur filtrée locale calculée par l'équation (3.29),  $\alpha_i \in \mathfrak{R}^{1 \times n_i}$  et  $\beta_i \in \mathfrak{R}^{1 \times n_i}$  sont des vecteurs de poids d'adaptation définis positifs spécifiés par l'utilisateur, avec :

$$\alpha_i = [\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i}] \text{ et } \beta_i = [\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{in_i}] \quad (3.22)$$

Le schéma de principe de la commande adaptative décentralisée via l'algorithme MCS, en utilisant la loi de commande (3.19), (3.20) et (3.21) est illustré par la figure (3.1).

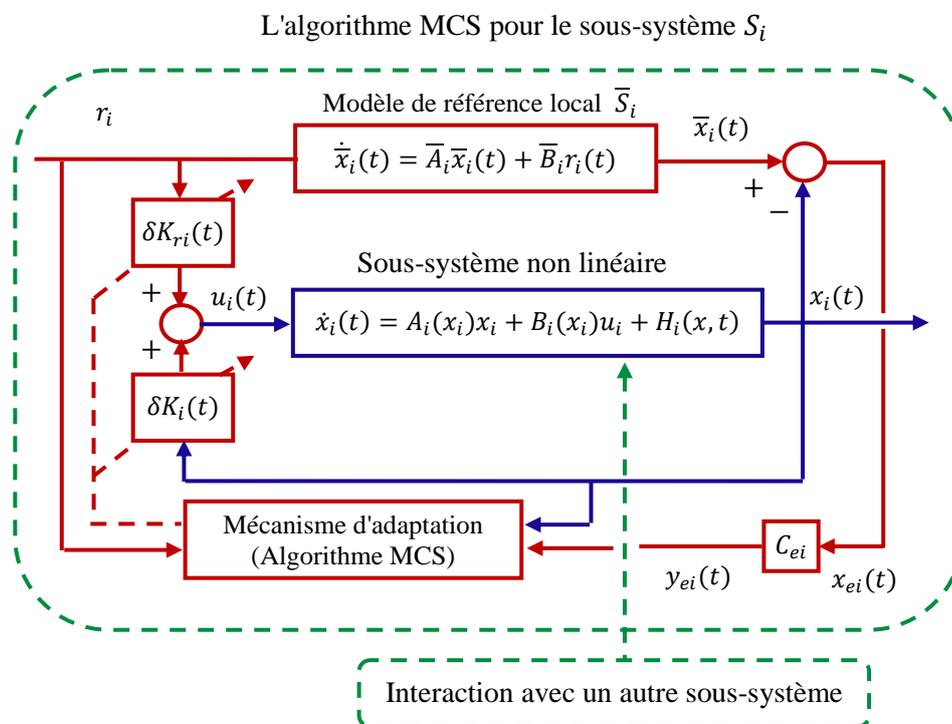


Figure 3.1 : Schéma de commande adaptative décentralisée via un algorithme MCS.

Ainsi, la commande adaptative décentralisée via un algorithme MCS consiste à déterminer à chaque instant les lois d'adaptation des gains  $\delta K_i(t)$  et  $\delta K_{r_i}(t)$  qui permettent le calcul de la commande locale  $u_i(t)$   $i = 1, \dots, N$ , de manière à assurer l'hyperstabilité et la convergence asymptotique des erreurs de poursuite  $x_{ei}(t)$  vers zéro. Ce résultat est obtenu par le théorème suivant:

**Théorème 3.1 :**

Etant donné un système non linéaire interconnecté (3.1), approximé par le modèle LTV (3.13), dont la dynamique d'erreur peut être mis sous la forme (3.18), et en tenant compte des hypothèses 3.1, 3.2 et 3.3,

si on choisit la loi de commande (3.19) avec les lois d'adaptation (3.20) et (3.21), alors le système en boucle fermée est hyperstable dans le sens où:

- (i) Tous les signaux entrées, états et sorties seront bornés.
- (ii) Les gains  $K_{Ei}(t)$  et  $K_{Ii}(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$  seront bornés;
- (iii) Les erreurs  $x_{ei}(t)$   $i = 1, \dots, N$  seront bornées et convergent asymptotiquement vers zéro.

**Preuve :**

Pour assurer l'hyperstabilité du système bouclé, nous commençons par remplacer la loi de commande locale (3.19) dans le système d'erreur (3.18), ce qui donne :

$$\dot{x}_{ei}(t) = \bar{A}_i x_{ei} + (A_{0i} - B_i \delta K_i(t)) x_i(t) + (\bar{B}_i - B_i \delta K_{r_i}(t)) r_i(t) \quad (3.23)$$

où  $A_{0i} = \bar{A}_i - A_i(x_i^*) - \delta A_i(t)$  est définie comme étant la matrice des erreurs paramétriques locales.

L'équation (3.23) est réécrite sous une forme compacte comme suit :

$$\dot{x}_{ei}(t) = \bar{A}_i x_{ei}(t) - I_{n_i} v_i(t) \quad (3.24)$$

avec

$$v_i(t) = (B_i \delta K_i(t) - A_{0i}) x_i(t) + (B_i \delta K_{r_i}(t) - \bar{B}_i) r_i(t) \quad (3.25)$$

où  $I_{n_i} \in \mathfrak{R}^{n_i}$  est la matrice identité.

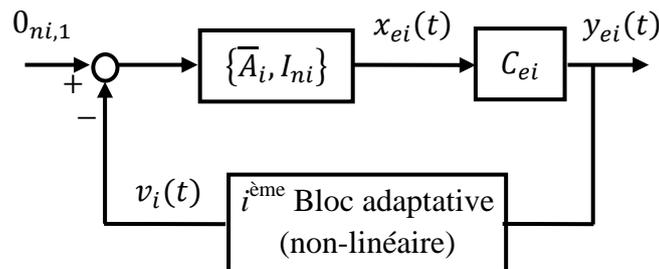


Figure 3.2 : Schéma bloc équivalent du sous-système  $S_i$  (Algorithme MCS)

Les équations (3.24) et (3.25) présentent un système de commande standard équivalent constitué d'un bloc linéaire dans la chaîne directe avec un bloc non linéaire dans la chaîne de retour qui peut être schématisé par la figure (3.2). Le système équivalent obtenu est hyperstable si les deux blocs satisfont les conditions suivantes (Popov, 1973):

La première condition: la fonction de transfert du bloc linéaire définie par le triplet  $\{\bar{A}_i, I_{n_i}, C_{ei}\}$  doit être SPR. Selon le théorème de Kalman-Yakubovich-Popov, la positivité est satisfaite si le vecteur des gains  $C_{ei}$  est calculé par :

$$P_i \bar{A}_i + \bar{A}_i^T P_i = -Q_i \quad (3.26)$$

$$C_{ei} = I_{n_i}^T P_i = P_i \quad (3.27)$$

où  $P_i \in \mathcal{R}^{n_i \times n_i}$  est une matrice symétrique définie positive et  $Q_i$  est une matrice diagonale définie positive choisie arbitrairement par l'utilisateur.

La deuxième condition: le bloc non linéaire (3.25) dans la chaîne de retour doit satisfaire l'inégalité suivante (Popov, 1973):

$$\int_0^t y_{ei}^T(t) v_i(t) dt \geq -\gamma_i^2, \gamma_i > 0, \text{ pour tout } t \geq 0 \quad (3.28)$$

avec

$$y_{ei}(t) = C_{ei} x_{ei}(t) \quad (3.29)$$

En remplaçant  $v_i(t)$  par son expression, l'inégalité de Popov (3.28) devient :

$$\int_0^t y_{ei}^T(t) (B_i \delta K_i(t) - A_{0i}) x_i(t) dt + \int_0^{t_1} y_{ei}^T(t) (B_i \delta K_{ri}(t) - \bar{B}_i) r_i(t) dt \geq -\gamma_i^2 \quad (3.30)$$

L'inégalité résultante peut être réécrite de nouveau en une somme de deux intégrales comme suit:

$$\int_0^t y_{ei}^T(t) (B_i \delta K_i(t) - A_{0i}) x_i(t) dt \geq -\gamma_{1i}^2 \quad (3.31)$$

et

$$\int_0^t y_{ei}^T(t) (B_i \delta K_{ri}(t) - \bar{B}_i) r_i(t) dt \geq -\gamma_{2i}^2 \quad (3.32)$$

où,  $\gamma_{1i}^2 + \gamma_{2i}^2 = \gamma_i^2$

En utilisant l'expression de  $\delta K_i(t)$ , l'inégalité (3.31) devient :

$$\int_0^t y_{ei}^T(t) B_i \left( \int_0^t \alpha_i y_{ei}(\tau) x_i^T(\tau) d\tau - A_{0i} \right) x_i(t) dt \geq -\lambda_{11}^2 \quad (3.33)$$

avec

$$\int_0^t y_{ei}^T(t) B_i \beta_i y_{ei}(t) x_i^T(t) x_i(t) \geq -\lambda_{12}^2 \quad (3.34)$$

$$\text{où } \gamma_{11}^2 + \gamma_{12}^2 = \gamma_{1i}^2$$

De la même manière, en utilisant l'expression de  $\delta K_{r_i}(t)$ , (3.32) est écrite en une somme de deux inégalités :

$$\int_0^t y_{ei}^T(t) B_i \left( \int_0^t \alpha_i y_{ei}(\tau) r_i(\tau) d\tau - \bar{B}_i \right) r_i(t) dt \geq -\gamma_{21}^2 \quad (3.35)$$

avec

$$\int_0^t y_{ei}^T(t) B_i \beta_i y_{ei}(t) r_i(t) r_i(t) \geq -\gamma_{22}^2 \quad (3.36)$$

$$\text{où } \gamma_{21}^2 + \gamma_{22}^2 = \gamma_{2i}^2$$

Si en prend en considération les expressions de  $x_i(t)$ ,  $A_{0i}$  et  $y_{ei} = [y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in_i}]^T$ , l'inégalité (3.33) peut être écrite sous une forme plus détaillée :

$$\int_0^t (b_i y_{in_i} \sum_{j=1}^{n_i} \left( \int_0^t \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} y_{ik} x_{ij} d\tau x_{ij} \right) - y_{in_i} \sum_{j=1}^{n_i} a_{0ij} x_{ij}) dt \geq -\gamma_{11}^2 \quad (3.37)$$

De même, les inégalités (3.34) à (3.36) sont développées respectivement comme suit :

$$\int_0^t b_i y_{in_i} \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij} y_{ij}(t) \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik} x_{ik} \geq -\gamma_{12}^2 \quad (3.38)$$

$$\int_0^t (b_i y_{in_i} \int_0^t \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} y_{ij} r_i d\tau r_i - y_{in_i} \bar{B}_i r_i) dt \geq -\gamma_{21}^2 \quad (3.39)$$

$$\int_0^t b_i y_{in_i} \sum_{j=1}^{n_i} \beta_{ij} y_{ij}(t) r_i^2 \geq -\gamma_{22}^2 \quad (3.40)$$

Pour des vecteurs de poids d'adaptation  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  particuliers, telle que :

$$\alpha_i = [0, 0, \dots, 0, \alpha_{in_i}] \text{ et } \beta_i = [0, 0, \dots, 0, \beta_{in_i}] \quad (3.41)$$

Les inégalités (3.37) à (3.40) sont simplifiées davantage comme suit :

$$\int_0^t b_i \alpha_{in_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{in_i} x_{ij} \left( \int_0^t y_{in_i} x_{ij} d\tau - \frac{a_{0ij}}{b_i \alpha_{in_i}} \right) dt \geq -\gamma_{11}^2 \quad (3.42)$$

$$\int_0^t b_i \beta_{in_i} y_{in_i}^2 \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} x_{ij} dt \geq -\lambda_{12}^2 \quad (3.43)$$

$$\int_0^t b_i \alpha_{in_i} y_{in_i} r_i \left( \int_0^t y_{in_i} r_i d\tau - \frac{\bar{b}_i}{b_i \alpha_{in_i}} \right) dt \geq -\gamma_{21}^2 \quad (3.44)$$

$$\int_0^t b_i \beta_{in_i} y_{in_i}^2 r_i^2 dt \geq -\gamma_{22}^2 \quad (3.45)$$

Par inspection, les deux inégalités (3.43) et (3.45) sont satisfaites si  $b_i > 0$ . En plus, si on note  $\eta_{ij} = \int_0^t y_{in_i} x_{ij} d\tau - \frac{a_{oij}}{b_i \alpha_i}$  pour (3.42) et  $\eta_i = \int_0^t y_{in_i} r_i d\tau - \frac{\bar{b}_i}{b_i \alpha_i}$  pour (3.44), avec l'hypothèse que les variations paramétriques sont considérées négligeables devant la cadence du processus d'adaptation, c'est-à-dire  $\dot{\eta}_{ij} \simeq y_{in_i} x_{ij}$  et  $\dot{\eta}_i = y_{in_i} r_i$ . Les inégalités (3.42) et (3.44) peuvent être calculées comme suit :

$$\begin{aligned} b_i \alpha_{in_i} \sum_{j=1}^{n_i} \int_0^t \eta_{ij}(t) \dot{\eta}_{ij}(t) dt &= \frac{b_i \alpha_{in_i}}{2} \left[ \sum_{j=1}^{n_i} \eta_{ij}^2(t) \right]_{t=0}^t \\ &\geq -\frac{b_i \alpha_{in_i}}{2} \sum_{j=1}^{n_i} \eta_{ij}^2(0) \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} b_i \alpha_{in_i} \int_0^t \eta_i(t) \dot{\eta}_i(t) dt &= \frac{b_i \alpha_{in_i}}{2} \left[ \eta_i^2(t) \right]_{t=0}^t \\ &\geq -\frac{b_i \alpha_{in_i}}{2} \eta_i^2(0) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Les deux inégalités intégrales (3.46) et (3.47) sont satisfaites si les conditions  $b_i \alpha_{in_i} \geq 0$  et  $b_i \alpha_{in_i} \geq 0$  sont remplies. Ces deux inégalités sont remplies pour  $b_i > 0$ . D'après l'hypothèse 3.3, cette condition est vérifiée et en conséquence l'inégalité de Popov (3.28) est satisfaite. Donc, le système équivalent (3.24) et (3.25) est hyperstable, et par conséquent, l'erreur de poursuite  $x_{ei}(t)$  converge asymptotiquement vers zéro.

L'utilisation des lois d'adaptation (3.20) et (3.21) dans la loi de commande (3.19), pour chaque sous-système assure l'hyperstabilité et la convergence asymptotique des erreurs de poursuite vers zéro de tous les sous-systèmes  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ainsi que la bornitude des différents signaux adaptatifs.

**Remarque 3.1 :** Il est à noter que la loi de commande proposée est générale dans le sens où elle ne nécessite pas la connaissance explicite du modèle dynamique du système. Cela est dû principalement à la présence d'une adaptation en temps réel des gains  $\delta K_i$ ,  $\delta K_{r_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

**Remarque 3.2 :** Il est à noter que le résultat obtenu en tenant compte l'hypothèse 3.3, c'est-à-dire  $B_i(x_i) > 0 \forall x_i \in \mathfrak{R}^{n_i}$ , peut être facilement adapté au cas  $B_i(x_i) < 0$ .

### 3.3.2. Application à un simulateur de vol d'hélicoptère (TRMS)

Dans le but de valider la méthode proposée, une application de la loi de commande décentralisée via l'algorithme MCS a été effectuée sur un simulateur de vol d'hélicoptère TRMS (Twin Rotor MIMO System). Notre objectif est de faire piloter cet appareil dans son espace de fonctionnement avec des performances acceptables tout en assurant sa stabilité (Chelihi, 2014a).

### 3.3.2.1 Description et modélisation du TRMS

Le TRMS est un banc d'essai conçu par feedback instruments Ltd spécialisé dans la conception des équipements d'ingénierie (Manual, 1996). C'est un système non linéaire multivariable son comportement dans certains aspects ressemble à celui d'un hélicoptère à 2DOF (DOF : Degree Of Freedom). Comme c'est illustré dans la figure (3.3), il est constitué d'une poutre pivotant par rapport à la base de façon qu'elle puisse tourner librement dans les plans horizontal et vertical, à ses extrémités se trouvent deux hélices entraînées par deux moteurs à courant continu. L'hélice de queue permet un déplacement angulaire  $\theta_h$  (angle d'orientation) dans le plan horizontal. Cependant, l'hélice principale permet un déplacement angulaire  $\theta_v$  (angle d'élévation) dans le plan vertical. Un contre poids est fixé à la poutre pour ajuster le TRMS à une position d'équilibre désirée. Deux encodeurs optiques montés au niveau du pivot permettent de mesurer les deux angles de position. Les entrées de commande du TRMS sont les tensions d'alimentation du moteur principal et secondaire. Cependant, les autres grandeurs sont inaccessibles à la mesure.

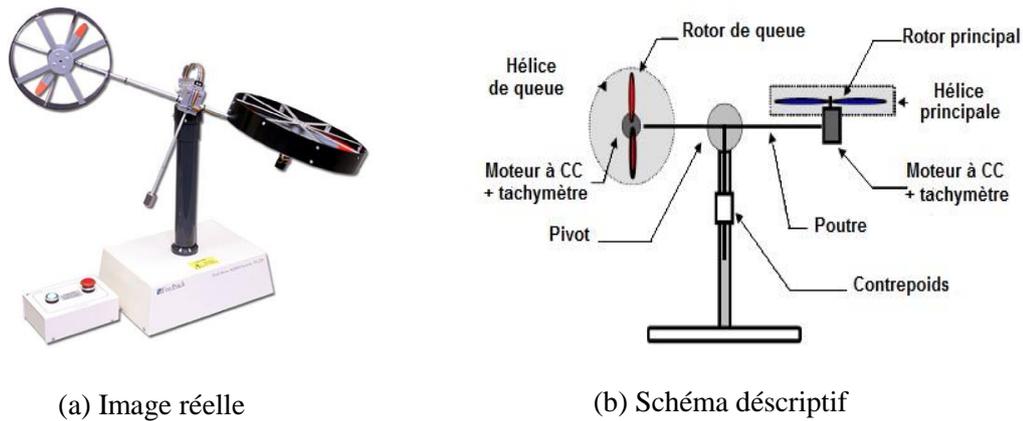


Figure 3.3 : TRMS (Twin Rotor MIMO System)

Le mouvement du TRMS dans le plan horizontal est décrit par les équations de Newton suivantes :

$$\dot{\theta}_h = \Omega_h = \frac{S_h + Jmr\omega_m \cos \theta_v}{J_h} \quad (3.48)$$

$$\dot{S}_h = l_t F_h(\omega_t) \cos \theta_v - \Omega_h k_h \quad (3.49)$$

Cependant, le mouvement dans le plan vertical est décrit par les équations suivantes :

$$\dot{\theta}_v = \Omega_v = \frac{S_v + J_{tr}\omega_t}{J_v} \quad (3.50)$$

$$\dot{S}_v = l_m F_v(\omega_m) + g((a-b)\cos\theta_v - e\sin\theta_v) - \Omega_v k_v + g_{hv} \quad (3.51)$$

où  $\Omega_{h/v}$  est la vitesse angulaire de la poutre autour de l'axe vertical/horizontal respectivement,  $S_{h/v}$  est le moment cinétiques dans le plan horizontal/vertical. Les autres constantes et paramètres sont définis en annexe B.

Les forces aérodynamiques  $F_h(\omega_t)$  et  $F_v(\omega_m)$  générées par les propulseurs secondaire et principale respectivement sont des fonctions non linéaires dépendantes des vitesses de rotation des moteurs  $\omega_t$  et  $\omega_m$ , telles que :

$$F_h(\omega_t) = -3 \cdot 10^{-14} \omega_t^5 - 1,595 \cdot 10^{-11} \omega_t^4 + 2,511 \cdot 10^{-7} \omega_t^3 - 1,808 \cdot 10^{-4} \omega_t^2 + 0,0801 \cdot \omega_t \quad (3.52)$$

$$F_v(\omega_m) = -3,48 \cdot 10^{-12} \omega_m^5 + 1,09 \cdot 10^{-9} \omega_m^4 + 4,123 \cdot 10^{-6} \omega_m^3 - 1,632 \cdot 10^{-4} \omega_m^2 + 9,544 \cdot 10^{-2} \omega_m \quad (3.53)$$

Les propulseurs (Moteur et Hélice) sont décrits par des équations différentielles du premier ordre avec des fonctions non linéaires  $P_h$  et  $P_v$  déterminants les caractéristiques statiques des frottements. Elles sont définies par :

$$\begin{cases} \dot{u}_{hh} = \frac{1}{T_{tr}} (-u_{hh} + K_{tr} u_h) \\ \omega_t = P_h(u_{hh}) \end{cases} \quad (3.54)$$

$$\begin{cases} \dot{u}_{vv} = \frac{1}{T_{mr}} (-u_{vv} + K_{mr} u_v) \\ \omega_m = P_v(u_{vv}) \end{cases} \quad (4.55)$$

avec

$$\omega_t = 2020 u_{hh}^5 - 194,69 u_{hh}^4 - 4283,15 u_{hh}^3 + 262,27 u_{hh}^2 + 3796,83 u_{hh} \quad (3.56)$$

$$\omega_m = 90,99 u_{vv}^6 + 599,73 u_{vv}^5 - 129,26 u_{vv}^4 - 1238,64 u_{vv}^3 + 63,45 u_{vv}^2 + 1283,41 u_{vv} \quad (3.57)$$

où  $u_{h/v}$  est la tension d'alimentation du moteur secondaire/principal,  $K_{mr/tr}$  et  $T_{mr/tr}$  sont des constants des moteurs.

La figure ci-dessous (voir figure 3.4) représente un schéma fonctionnel directement exploitable dans un environnement Simulink/Matlab obtenu à partir des équations (3.48) à (3.57) (Ahmad, 2002). Il est clair que le TRMS peut être assimilé à un système complexe, constitué de deux sous-systèmes non linéaires monovariables interconnectés représentant son comportement dynamique dans les plans horizontal et vertical. Les tensions  $u_h$  et  $u_v$  sont leurs entrées,  $\theta_h$  et  $\theta_v$  représentent les sorties en position de chaque modèle. Ainsi, la commande du simulateur peut être faite par une commande décentralisée en appliquant la méthode proposée aux sous-systèmes horizontal et vertical. Pour ce faire, les sous-modèles du TRMS sont déterminés et mis sous la forme canonique (3.1) en vérifiant en même temps, pour chaque sous-modèle, la condition d'hyperstabilité (hypothèse 3.3) nécessaire à la convergence de l'erreur de poursuite vers zéro. Puis, les lois de commande à appliquer au simulateur sont présentées avec leurs paramètres de conception.

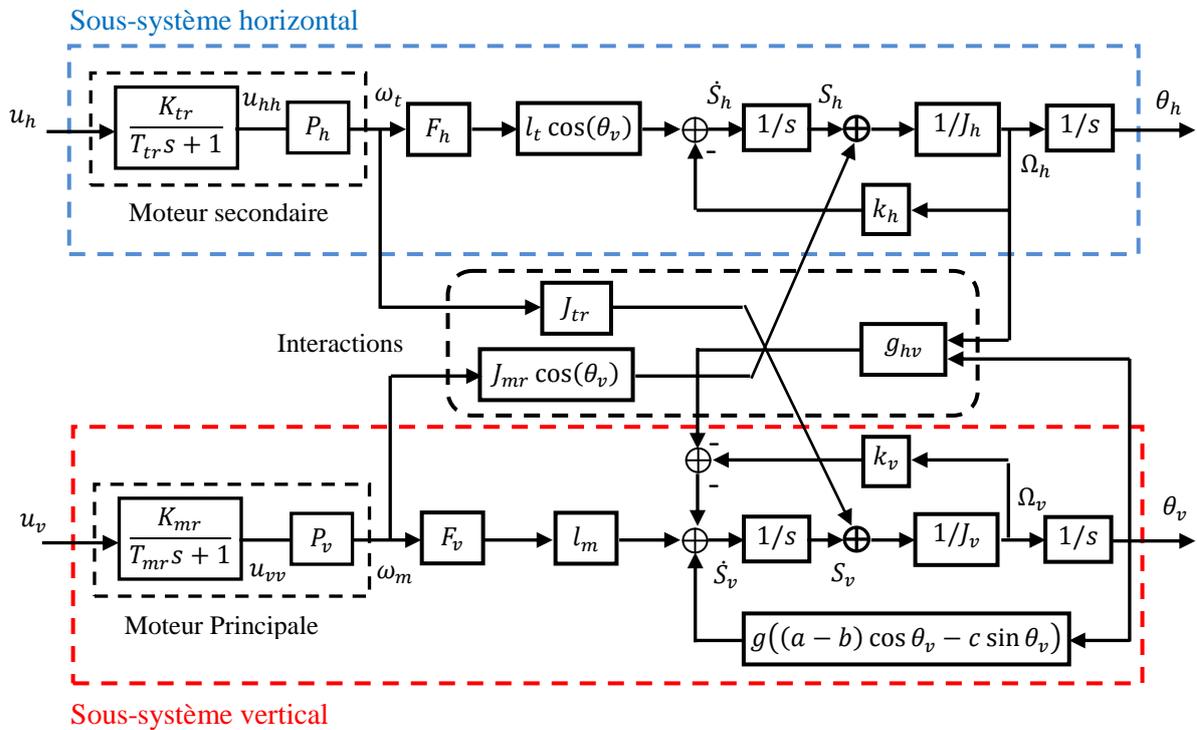


Figure 3.4 : Schéma bloc détaillé du TRMS.

### 3.3.2.2. Modèle découplé du TRMS

Les modèles découplés du TRMS décrivent le mouvement de la poutre dans les plans horizontal et vertical, ayant chacun un degré de liberté, sont déterminés à partir du modèle couplé. Tel que, le modèle horizontal est obtenu en fixant l'angle d'élévation  $\theta_v = \theta_{v0}$  (rad) et en posant  $u_v = 0$  (V) (arrêt du moteur principal,  $\omega_m = 0$ (rd/s) ) dans les équations (3.48) et (3.49), ce qui conduit aux équations suivantes :

$$\frac{d\theta_h}{dt} = \Omega_h \quad (3.58)$$

$$\frac{d\Omega_h}{dt} = \frac{l_t F_h(\omega_t) \cos(\theta_{v0}) - K_h \Omega_h}{J_{h0}} \quad (3.59)$$

où  $J_{h0} = d \sin^2 \theta_{v0} + e \cos^2 \theta_{v0} + f$ .

De la même manière, le modèle vertical est obtenu en fixant  $\theta_h = 0$  (*rad*) et  $u_h = 0$  (*V*) (arrêt moteur secondaire,  $\omega_t = 0$  (*rd/s*)) dans les équations (3.50) et (3.51) permettant d'obtenir les équations suivantes :

$$\frac{d\theta_v}{dt} = \Omega_v \quad (3.60)$$

$$\frac{d\Omega_v}{dt} = \frac{l_m F_v(\omega_m) - K_v \Omega_v + g((A-B) \cos(\theta_v) - C \sin(\theta_v))}{J_v} \quad (3.61)$$

L'étape suivante est consacrée à la mise en forme canonique des modèles découplés horizontal et vertical du TRMS où elles sont obtenues par le calcul de la dérivée de Lie des sorties commandées  $\theta_h$  et  $\theta_v$  et en utilisant les équations (3.58) à (3.61).

### 3.3.2.3 Forme canonique des modèles horizontal et vertical :

Pour le modèle horizontal, nous choisissons la variable d'état  $x_h = [\theta_h, \Omega_h, \sigma_h]^T$  où les équations (3.58) et (3.59) représentent la dérivée première et seconde de l'angle d'orientation  $\theta_h$ . Cependant, la troisième dérivée est obtenue à partir des équations (3.59) et (3.54) comme suit :

$$\dot{\sigma}_h = \frac{l_t K_{tr} \cos(\theta_{v0})}{J_{h0}} \Delta_h u_h - K_h \sigma_h - \frac{l_t \cos(\theta_{v0})}{J_{h0} T_{tr}} \Delta_h u_{hh} \quad (3.62)$$

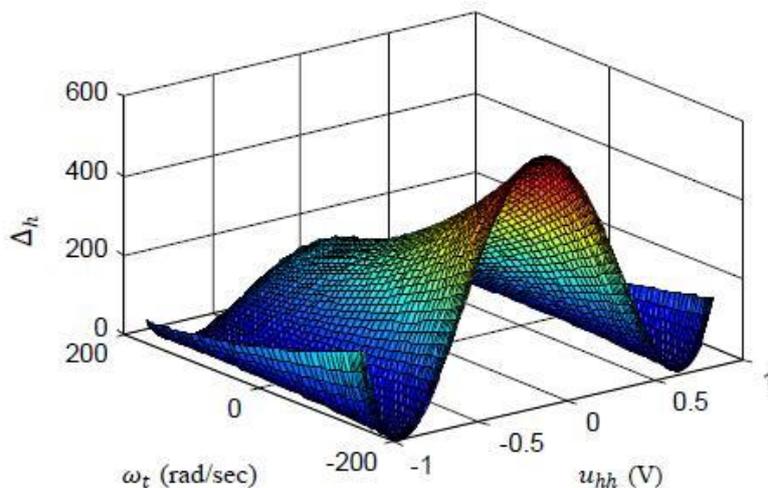
où  $\sigma_h = \dot{\Omega}_h$  est l'accélération de la poutre du TRMS dans le plan horizontal avec  $\Delta_h = (\partial F_h / \partial \omega_t)(\partial P_h / \partial u_{hh})$ .

De (3.58), (3.59) et (3.62), on obtient le modèle d'état du sous-système horizontal :

$$\dot{x}_h = A_h(t)x_h + B_h(t)u_h + H_h(t) \quad (3.63)$$

avec

$$A_h(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -K_h \end{bmatrix}, B_h(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_t K_{tr}}{J_{h0}} \cos(\theta_{v0}) \Delta_h \end{bmatrix} \text{ et } H_h(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{l_t \cos(\theta_{v0})}{J_{h0} T_{tr}} \Delta_h u_{hh} \end{bmatrix}$$

Figure 3.5 : Evolution de  $\Delta_h$  en fonction de  $\omega_t$  et  $u_{hh}$ 

Le modèle d'état du sous-système horizontal (3.63) est commandable si le gain de commande d'entrée  $\frac{l_t K_{tr}}{J_{ho}} \cos(\theta_{v0}) \Delta_h$  est strictement positif, c'est-à-dire  $\Delta_h > 0$ . Le calcul de  $\Delta_h$  à partir des équations (3.52) et (3.56) permet de tracer l'évolution de  $\Delta_h$  en fonction de  $\omega_t$  et  $u_{hh}$  dans la figure (3.5). On peut conclure que  $\Delta_h > 0$ , et que la condition de convergence et d'hyperstabilité (hypothèse 3.3) du sous-système horizontal est garantie.

Pour le modèle vertical, nous choisissons la variable d'état  $x_v = [\theta_v, \Omega_v, \sigma_v]^T$ , où les équations (3.60) et (3.61) représentent la première et la seconde dérivée de l'angle d'élévation  $\theta_v$ . La troisième dérivée est calculée à partir des équations (3.61) et (3.55) par :

$$\dot{\sigma}_v = \frac{l_m K_{mr}}{J_v} \Delta_v u_v - \frac{g}{J_v} ((A - B) \sin(\theta_v) + C \cos(\theta_v)) \Omega_v - \frac{K_v}{J_v} \sigma_v - \frac{l_m}{J_v T_{mr}} \Delta_v u_{vv} \quad (3.64)$$

où  $\sigma_v$  est l'accélération de la poutre du TRMS dans le plan vertical avec  $\Delta_v = (\partial F_v / \partial \omega_m) (\partial P_v / \partial u_{vv})$ .

De façon similaire, on peut écrire le modèle d'état du sous-système vertical à partir des équations (3.60), (3.61) et (3.64) comme suit :

$$\dot{x}_v = A_v(t)x_v + B_v(t)u_v + H_v(t) \quad (3.65)$$

avec

$$A_v(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{g}{J_v} ((A - B) \sin(\theta_v) + C \cos(\theta_v)) & -\frac{K_v}{J_v} \end{bmatrix}, B_v(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l_m K_{mr}}{J_v} \Delta_v \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$H_v(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{l_m}{J_v T_{mr}} \Delta_v u_{vv} \end{bmatrix}$$

Le modèle d'état vertical obtenu est commandable si le gain d'entrée  $\frac{l_m K_{mr}}{J_v} \Delta_v$  est strictement positif, c'est-à-dire  $\Delta_v > 0$ . Le calcul de  $\Delta_v$  à partir des équations (3.53) et (3.57) permet de tracer l'évolution de  $\Delta_v$  en fonction de  $\omega_m$  et  $u_{vv}$  dans la figure (3.6). Il est clair que  $\Delta_v > 0$  sur son intervalle de variation, et la condition d'hyperstabilité est vérifiée pour le sous-système vertical.

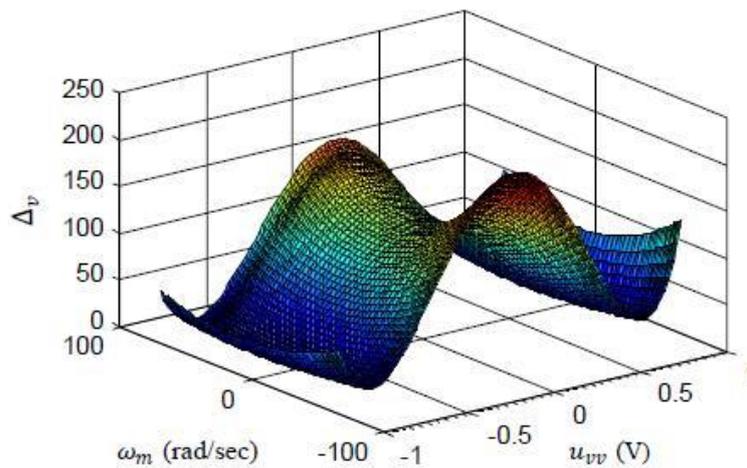


Figure 3.6: L'évolution de  $\Delta_v$  en fonction de  $\omega_m$  et  $u_{vv}$

#### 3.3.2.4. Lois de commande décentralisées du TRMS

Pour les sous-systèmes horizontal et vertical décrits respectivement par les représentations d'états (3.63) et (3.65), nous formulons dans cette partie les commandes décentralisées à appliquer au TRMS selon l'équation (3.19) comme suit :

$$u_h(t) = \delta K_h(t)x_h(t) + \delta K_{rh}(t)\theta_h^*(t) \quad (3.66)$$

$$u_v(t) = \delta K_v(t)x_v(t) + \delta K_{rv}(t)\theta_v^*(t) \quad (3.67)$$

où  $\theta_h^*$  et  $\theta_v^*$  sont respectivement les trajectoires de référence des angles d'orientation et d'élévation  $\theta_h$  et  $\theta_v$ ,  $\delta K_i$  et  $\delta K_{ri}$ ,  $i = h, v$  sont leurs gains d'adaptation formulés selon les équations (3.20) et (3.21) :

$$\delta K_h(t) = \int_0^t \alpha_h y_{eh}(\tau) \theta_h^*(\tau) d\tau + \beta_h y_{eh}(t) \theta_h^*(t) \quad (3.68)$$

$$\delta K_{rh}(t) = \int_0^t \alpha_h y_{eh}(\tau) x_h^T(\tau) d\tau + \beta_h y_{eh}(t) x_h^T(t) \quad (3.69)$$

$$\delta K_v(t) = \int_0^t \alpha_v y_{ev}(\tau) x_v^T(\tau) d\tau + \beta_v y_{ev}(t) x_v^T(\tau) \quad (3.70)$$

$$\delta K_{rv}(t) = \int_0^t \alpha_v y_{ev}(\tau) \theta_v^*(\tau) d\tau + \beta_v y_{ev}(t) \theta_v^*(t) \quad (3.71)$$

où  $\alpha_h$ ,  $\beta_h$ ,  $\alpha_v$  et  $\beta_v$  sont leurs poids d'adaptation,  $y_{eh}$  et  $y_{ev}$  sont les erreurs filtrées calculées suivant l'équation (3.29) comme suit :

$$y_{eh}(t) = C_{eh} x_{eh}(t) \text{ et } x_{eh}(t) = \bar{x}_h(t) - x_h(t) \quad (3.72)$$

$$y_{ev}(t) = C_{ev} x_{ev}(t) \text{ et } x_{ev}(t) = \bar{x}_v(t) - x_v(t) \quad (3.73)$$

où  $\bar{x}_h = [\bar{\theta}_h, \bar{\Omega}_h, \bar{\sigma}_h]^T$  et  $\bar{x}_v = [\bar{\theta}_v, \bar{\Omega}_v, \bar{\sigma}_v]^T$  sont les vecteurs d'état des modèles de référence associés aux sous-systèmes de commande horizontal et vertical respectivement,  $C_{eh}$  et  $C_{ev}$  sont calculées en fonction des matrices  $P_h$  et  $P_v$  solutions de l'équation de Lyapunov (3.26) et (3.27). Enfin, les lois de commande adaptative (3.66) et (3.67) sont appliquées au modèle non linéaire multivariable du TRMS selon le schéma de commande donné par la figure (3.7).

Après avoir illustré et décortiqué la structure des deux contrôleurs adaptatif et leurs lois de mise à jour, nous allons présenter dans la partie suivante les résultats de simulation obtenus.

### 3.3.3. Simulation et résultats

Dans le but de valider la structure de commande élaborée pour la conduite du TRMS (voir figure 3.7), des tests de performance et de robustesse ont été effectués. La procédure de mise en œuvre de la commande adaptative décentralisée du TRMS est réalisée selon l'algorithme suivant:

#### Phase de conception:

étape 1 : choisir un modèle de référence sous la forme canonique (3.5) et (3.6)

étape 2 : calculer  $C_{ei}$ ,  $i = h, v$ , par les équations (3.26) à (3.27) et vérifier la positivité de  $\{\bar{A}_i, I_{ni}, C_{ei}\}$ .

étape 3 : choisir les poids d'adaptations  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ ,  $i = h, v$ , selon (3.41).

#### Phase de calcul en temps réel:

étape 1 : calculer les erreurs filtrées à partir des équations (3.72) et (3.73).

étape 2 : calculer les gains d'adaptations  $\delta K_i(t)$  et  $\delta K_{ri}(t)$ ,  $i = h, v$ , suivant les équations (3.68), (3.69), (3.70) et (3.71).

étape 3 : calculer les signaux de commande  $u_i(t)$ ,  $i = h, v$ , à partir des équations (3.66) et (3.67).

étape 4 : répéter les mêmes calculs pour l'itération suivante en allant à l'étape 1.

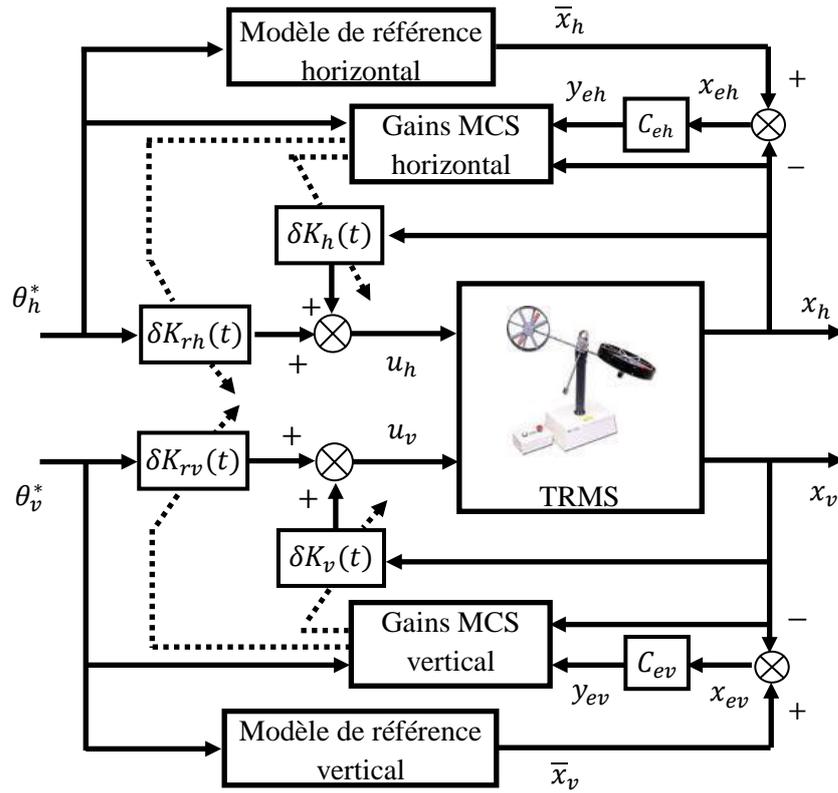


Figure 3.7 : Bloc diagramme de commande adaptative décentralisée du TRMS via un algorithme MCS

Les modèles de référence sont choisis identiques, où leurs expressions sont formulées à partir d'une répartition des racines de l'équation caractéristique désirée, tels que la matrice dynamique  $\bar{A}$  et le vecteur du gain d'entrée  $\bar{B}$  sont donnés par :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\omega_n^3 & -2.15\omega_n^2 & -1.75\omega_n \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_n^3 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Avec  $\omega_n t_s = 4.81$ , où  $t_s$  représente le temps de réponse.

La positivité de la partie linéaire des sous-systèmes horizontal et vertical définies respectivement par les triplets  $\{\bar{A}_h, I_{nh}, C_{eh}\}$  et  $\{\bar{A}_v, I_{nv}, C_{ev}\}$  est satisfaite en résolvant l'équation de Lyapunov (3.26) avec  $Q_h = \text{diag}\{60, 50, 10\}$   $Q_v = \text{diag}\{70, 50, 15\}$  et un temps de réponse  $t_s = 5$  secondes. Les calculs mènent aux résultats suivants :

$$P_h = \begin{bmatrix} 170.10 & -30.00 & -69.35 \\ -30.00 & 69.35 & -25.00 \\ -69.35 & -25.00 & 69.19 \end{bmatrix} \text{ et } P_v = \begin{bmatrix} 188.96 & -35.00 & -73.4142 \\ -35.00 & 73.41 & -25.00 \\ 73.41 & -25.00 & 72.82 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Les poids d'adaptation sont  $\alpha_h = [0, 0, 0.1]$  et  $\beta_h = [0, 0, 1.1]$  pour le sous-système horizontal, et  $\alpha_v = [0, 0, 0.5]$  et  $\beta_v = [0, 0, 2]$  pour le sous-système vertical. Les simulations sont effectuées avec les conditions initiales  $x_h(0) = [0, 0, 0]^T$  et  $x_v(0) = [-0.63, 0, 0]^T$  représentant la position du TRMS au repo, et les valeurs numériques des paramètres du TRMS données par le tableau (b.1) en annexe B.

Nous allons dans la suite présenter les résultats issus de la mise en oeuvre en simulation des lois de commande (4.66) (4.67) et ses lois de mise à jour (4.68) à (4.72) pour la commande du simulateur. Pour cela, trois variantes des signaux de référence sont considérées :

- (1) *Deux signaux alternatifs de période 100 secondes et d'amplitude 0.4 rad : un signal à dent de six pour l'angle d'orientation et un signal carré pour l'angle d'élévation dans le but d'observer l'effet des interactions entre les sous-systèmes.*
- (2) *Un signal carré de période 30 secondes et d'amplitude 0.4 rad pour les deux angles du TRMS avec une perturbation impulsionnelle injecté à  $t = 25$  secondes.*
- (3) *Un signal sinusoïdal de période 50 secondes et d'amplitude 0.5 rad pour les deux angles du TRMS avec une perturbation impulsionnelle injectée à  $t = 25$  secondes.*

Les résultats de simulation du test de performance sont donnés par les figures (3.8) et (3.9). la dynamique des angles d'orientation et d'élévation du TRMS et ses vitesses de variation, dans la figure (3.8), suivent leurs trajectoires de référence après un court régime transitoire dû aux effets des conditions initiales et des interactions. Quand aux tensions de commande, illustrées par la figure (3.9a) sont admissibles, elles présentent des allures lisses avec des valeurs saturées uniquement au moment du changement de consigne (changement de sens de mouvement), alors que les gains d'adaptation pour les deux sous-systèmes horizontal et vertical (voir figure 3.9b et 3.9c) sont bornés sans dérives et convergent vers des valeurs constantes.

Les figures (3.10), (3.11), (3.12) et (3.13) exposent les résultats issus du test de robustesse. Les deux premières figures représentent la réponse du TRMS pour un signal de référence carré, et les deux autres représentent la réponse pour un signal de référence sinusoïdale. Dans les deux cas une perturbation impulsionnelle est injectée à l'instant  $t = 25$  secondes. Les constatations sont pratiquement les mêmes en terme de robustesse, telles que, les tensions de commande ont pu stabiliser les états du système vis-à-vis l'effet de la perturbation en quelques instants après son injection. Quand aux gains d'adaptation, ils restent toujours bornés et ne présentent aucune dérive.

A partir des résultats obtenus, nous pouvons conclure que la loi de commande adaptative décentralisée proposée conduit à de bonnes performances et garantit la stabilité globale même en présence de perturbations. En plus, nous constatons aussi que cette méthode ne nécessite pas la connaissance des paramètres du TRMS pour l'élaboration des lois de commande, et que seules

des informations locales sur les états de chaque sous-système ont été utilisées pour générer le signal de commande. Cependant, dans toutes les simulations réalisées, les tensions de commande ont atteint des valeurs de saturation ( $\pm 2.5 V$ ) au démarrage et aux instants du changement de sens de rotation (voir figure 3.9a et 3.11a), ce qui peut conduire à un état d'instabilité du simulateur pour des trajectoires de référence plus importantes en amplitude et en fréquence.

Pour corriger ce problème, nous allons proposer dans la section suivante une autre structure de commande décentralisée pour le système complexe (3.1) basée sur l'algorithme Er-MCSI.

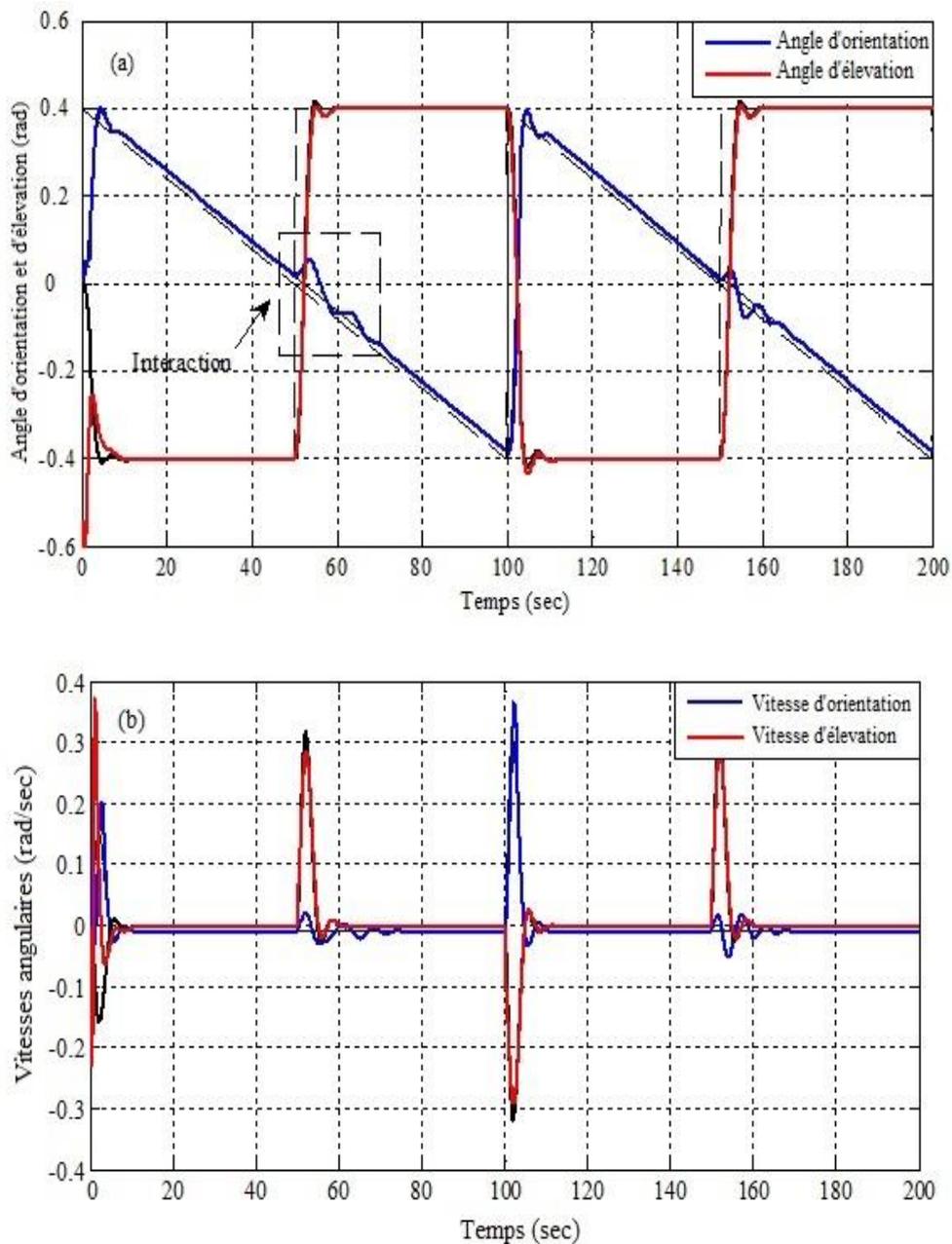


Figure 3.8 : Réponses en position et en vitesse du TRMS.

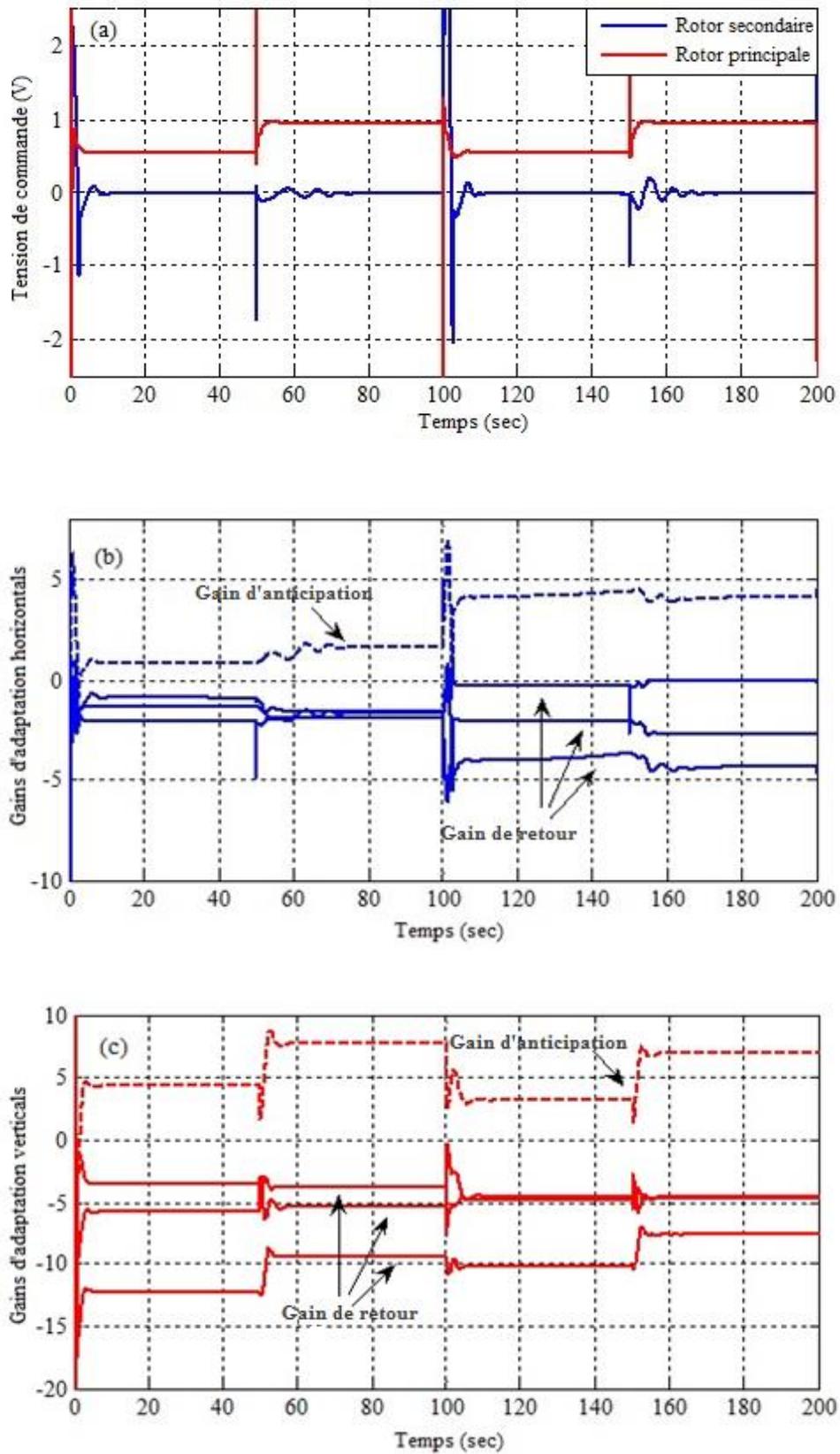


Figure 3.9 : Tensions de commande et gains d'adaptation du TRMS.

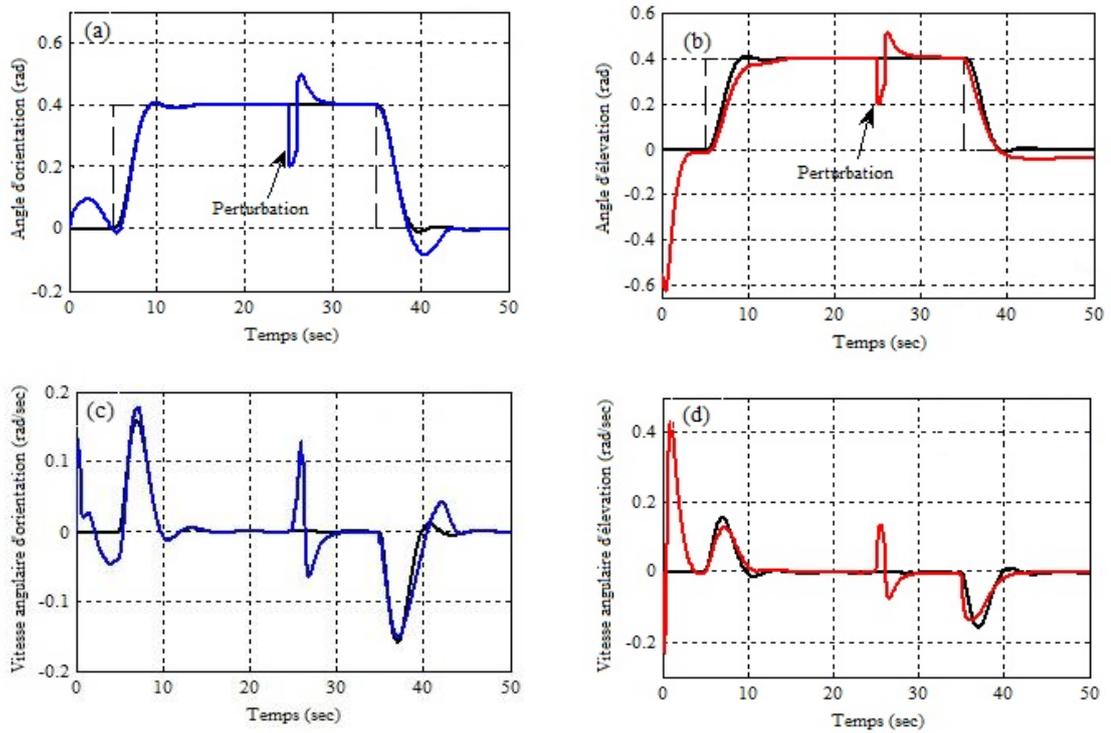


Figure 3.10 : Réponses en position et en vitesse du TRMS perturbé pour des signaux de référence carrés.

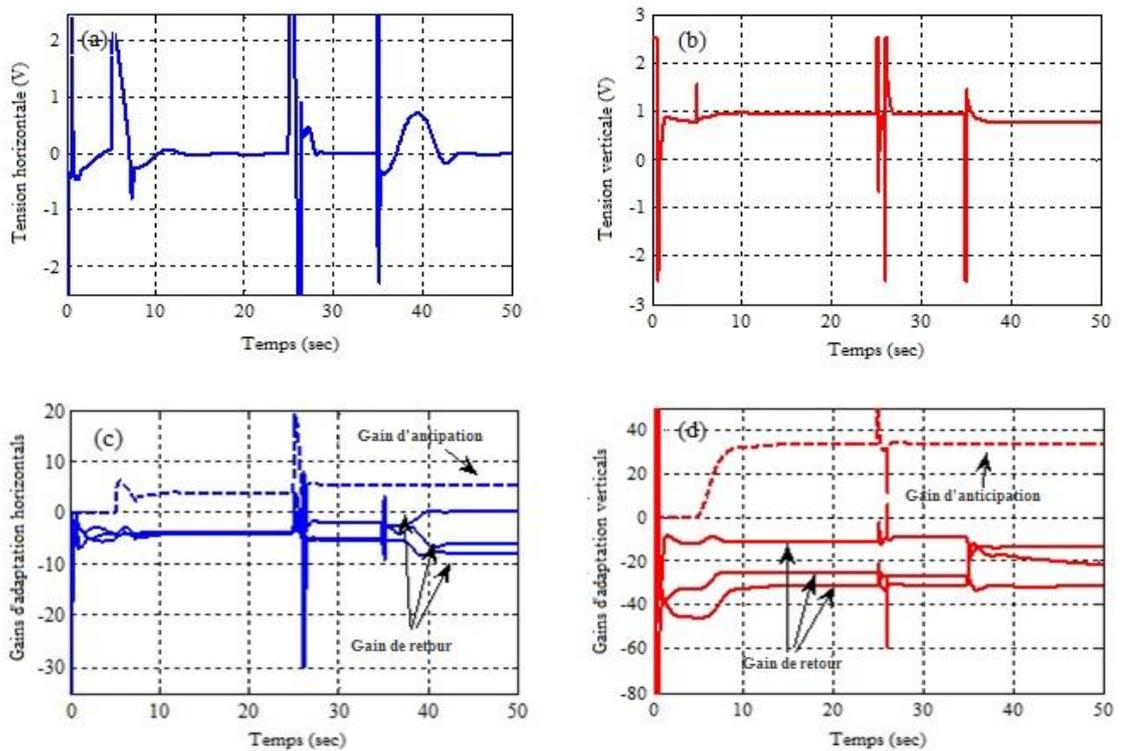


Figure 3.11 : Tensions de commande et gains d'adaptation du TRMS perturbé pour des signaux de référence carrés.

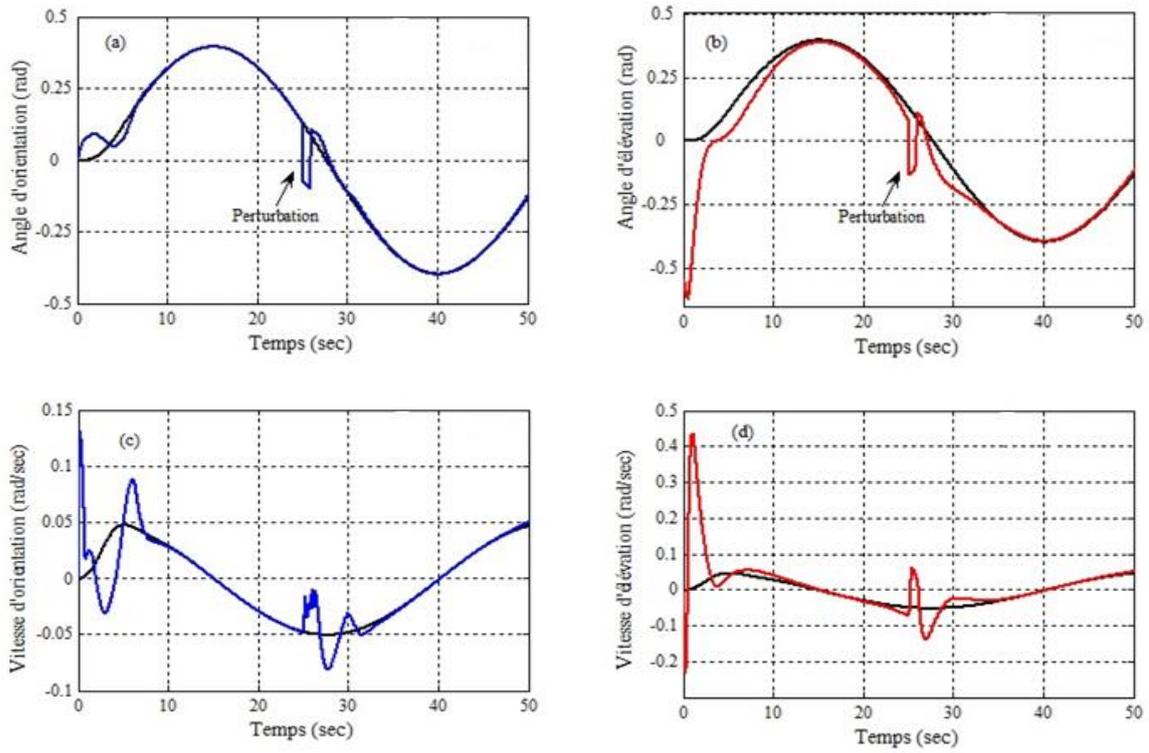


Figure 3.12 : Réponses en position et en vitesse du TRMS perturbé pour des signaux de référence sinusoïdales.

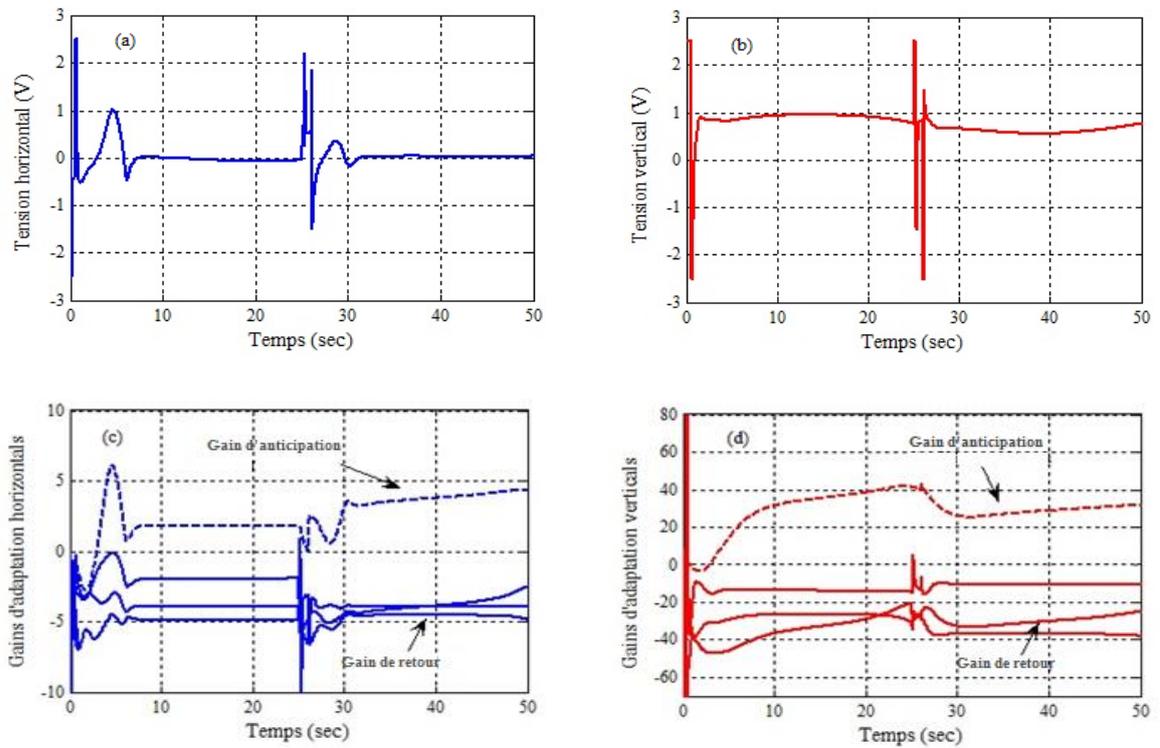


Figure 3.13 : Tensions de commande et gains d'adaptation du TRMS perturbé pour des signaux de référence sinusoïdales.

### 3.4. Commande adaptative décentralisée via un algorithme Er-MCSI

Dans cette section, nous proposons un nouveau schéma de commande adaptative décentralisée pour la commande en poursuite des systèmes non linéaires complexes (Chelihi, 2014b). L'objectif visé est d'éliminer le problème de saturation qui s'est présenté dans les travaux de simulation de la section précédente. Le développement de la méthode proposée est basé sur l'approximation du modèle non linéaire (3.1) par un modèle LTV (3.13), et en utilisant l'algorithme de conception Er-MCSI (Stoten et Neild, 2003). Les améliorations apportées par cet algorithme sont multiples, à savoir : la loi de commande ne dépend plus du signal de référence, elle est calculée seulement à partir du signal d'erreur. De plus, il fait introduire une action intégrale de correction dans la loi de commande, ce qui permet d'améliorer sa robustesse vis-à-vis des perturbations. La synthèse de la loi de commande est effectuée par la théorie d'hyperstabilité qui permet d'assurer la stabilité globale et la convergence des erreurs de poursuite.

#### 3.4.1. Synthèse de la loi de commande Er-MCSI locale

Le problème consiste à synthétiser une loi de commande locale adaptative en utilisant l'algorithme de conception Er-MCSI permettant d'assurer la stabilité et la convergence asymptotique de l'erreur de poursuite ainsi que la bornitude des différents paramètres intervenant dans la loi de commande. Pour cela, nous proposons la loi de commande Er-MCSI locale suivante (Stoten et Neild, 2003) :

$$u_i(t) = K_{Ei}(t)x_{ei}(t) + K_{Ii}(t)x_{Ii}(t) \quad (3.76)$$

où  $x_{Ii}(t) \in \mathfrak{R}$  est une variable scalaire calculée par la relation suivante :

$$x_{Ii}(t) = c_i \int_0^t x_{ei}(\tau) d\tau \quad (3.77)$$

où  $c_i \in \mathfrak{R}^{n_i}$  est le vecteur de sortie local.

$K_{Ei}(t)^T \in \mathfrak{R}^{n_i}$  et  $K_I(t) \in \mathfrak{R}$  sont des gains d'adaptation calculés en temps réel. Leurs expressions pour une action de correction proportionnelle-intégrale sont données par :

$$K_{Ei}(t) = \alpha_i \int_0^t y_{ei}(\tau)x_{ei}^T(\tau)d\tau + \beta_i y_{ei}(t)x_{ei}^T(t) \quad (3.78)$$

$$K_{Ii}(t) = \alpha_i \int_0^t y_{ei}(\tau)x_{Ii}(\tau)d\tau + \beta_i y_{ei}(t)x_{Ii}(t) \quad (3.79)$$

où  $\alpha_i \in \mathfrak{R}^{n_i}$  et  $\beta_i \in \mathfrak{R}^{n_i}$  sont des vecteurs de poids d'adaptation.

#### Remarque 3.3

De ces expressions, on remarque qu'il s'agit d'un régulateur PI adaptatif, où les lois d'adaptation sont calculées seulement à base d'erreurs locales. Cela permettra de limiter leurs sensibilités aux



**Preuve :**

Reprenons l'équation d'erreur sans correction (3.16) du sous-système  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ :

$$\dot{x}_{ei}(t) = \bar{A}_i x_{ei}(t) + \bar{B}_i r_i(t) - B_i(x_i^*(t))u_i(t) - (A_i(x_i^*(t)) - \bar{A}_i)x_i(t) - H_i^*(x, t) \quad (3.80)$$

En introduisant la loi de commande (3.76) dans (3.80), l'équation dynamique de l'erreur devient :

$$\dot{x}_{ei}(t) = \bar{A}_i x_{ei}(t) + (A_i(x_i^*) - \bar{A}_i - B_i(x_i^*)K_{Ei}(t))x_{ei}(t) + (\bar{A}_i - A_i(x_i^*))\bar{x}_i(t) + \bar{B}_i r_i(t) - H_i^*(x, t) - B_i(x_i^*)K_{Ii}(t)x_{Ii}(t) \quad (3.81)$$

En tenant compte de la forme canonique du modèle de référence (3.5) et du système à commander (3.2) et (3.3), l'approximation suivante est introduite (Stoten et Neild, 2003):

$$(\bar{A}_i - A_i(x_i^*))\bar{x}_i(t) + \bar{B}_i r_i(t) = B_{0i}(t)x_{Ii}(t) \quad (3.82)$$

où  $B_{0i}(t) = [0, \dots, 0, b_{0i}(t)]^T \in \mathfrak{R}^{n_i}$  est un vecteur de paramètres supposés variables.

De (3.17) et (3.82), l'équation dynamique de l'erreur (3.81) est réécrite après réarrangement comme suit:

$$\dot{x}_{ei}(t) = \bar{A}_i x_{ei} + (A_{0i} - B_i \delta K_{Ei}(t))x_{ei}(t) + (B_{0i}(t) - B_i K_{Ii}(t))x_{Ii}(t) \quad (3.83)$$

L'équation (3.83) peut être écrite encore sous une forme compacte :

$$\dot{x}_{ei}(t) = \bar{A}_i x_{ei}(t) - I_{n_i} v_{Ei}(t) \quad (3.84)$$

avec

$$v_{Ei}(t) = (B_i \delta K_{Ei}(t) - A_{0i})x_{ei}(t) + (B_i \delta K_{Ii}(t) - B_{0i}(t))x_{Ii}(t) \quad (3.85)$$

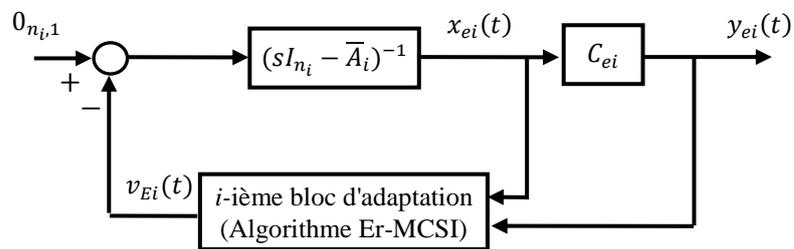


Figure 3.15 : Schéma bloc équivalent du sous-système  $S_i$  (Algorithme Er-MCSI)

Le système obtenu, schématisé par la figure (3.15), est hyperstable si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

Premièrement, le bloc linéaire défini par le triplet  $\{\bar{A}_i, I_{ni}, C_{ei}\}$  soit SPR. Cette condition est remplie si  $C_{ei}$  est calculé par l'équation de Lyapunov (3.26) et (3.27).

Secondement, le bloc d'adaptation non linéaire (3.85) doit satisfaire l'inégalité de Popov suivante (Popov, 1973) :

$$\int_0^t y_{ei}^T(t) v_{Ei}(t) dt \geq -\gamma_i^2, \gamma_i > 0, \text{ pour tout } t \geq 0 \quad (3.86)$$

En remplaçant  $v_{Ei}(t)$  par son expression (3.85), l'inégalité (3.86) devient :

$$\int_0^t y_{ei}^T(t) (B_i \delta K_{Ei}(t) - A_{0i}) x_{ei}(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} y_{ei}^T(t) (B_i \delta K_{Ii}(t) - B_{0i}(t)) x_{Ii}(t) dt \geq -\gamma_i^2 \quad (3.87)$$

En substituant  $K_{Ei}(t)$  et  $K_{Ii}(t)$  dans (3.87) par leurs expressions (3.78) et (3.79) respectivement, nous obtenons une somme de quatre fonctions intégrales :

$$\begin{aligned} & \int_0^t y_{ei}^T(t) B_i \left( \alpha_i \int_0^t y_{ei}(\tau) x_{ei}^T(\tau) d\tau - A_{0i} \right) x_{ei}(t) dt \\ & + \int_0^t y_{ei}^T(t) B_i \beta_i y_{ei}(t) x_{ei}^T(t) x_{ei}(t) dt \\ & + \int_0^t y_{ei}^T(t) B_i \left( \alpha_i \int_0^t y_{ei}(\tau) x_{Ii}(\tau) d\tau - B_{0i}(t) \right) x_{Ii}(t) dt \\ & + \int_0^t y_{ei}^T(t) B_i \beta_i y_{ei}(t) x_{Ii}(t) x_{Ii}(t) dt \geq -\gamma^2 \end{aligned} \quad (3.88)$$

La démonstration de cette inégalité, nous conduisons ainsi à suivre les mêmes étapes qui ont été présentées dans la section précédente pour démontrer l'inégalité (3.29). Donc, les mêmes conditions sont obtenues pour assurer l'hyperstabilité et la convergence des erreurs de poursuite vers zéro du système en boucle fermée, c'est-à-dire tous les gains de commande  $B_i(x_i)$  doivent être strictement positif.

### 3.4.2. Application à la commande du TRMS :

Afin de valider l'approche de commande proposée, nous l'avons appliquée également au TRMS pour la commande en poursuite de trajectoire (Chelihi, 2014b). En effet, les mouvements dans les plans vertical et horizontal définis par les états  $\theta_i, \Omega_i, \sigma_i$ ,  $i = h, v$  sont contrôlés séparément par les tensions de commande  $u_i$ ,  $i = h, v$  des sous-systèmes horizontal et vertical. L'objectif principal est de déterminer le comportement du simulateur avec cette commande. En plus, éliminer le problème de saturation des tensions de commande qui a été apparu dans le système de commande décentralisée développé via un algorithme MCS. Pour cela, nous avons considéré des trajectoires de mouvement de référence  $\theta_h^*$  et  $\theta_v^*$  avec des amplitudes plus importants.

### 3.4.2.1. Synthèse des lois de commande locales du TRMS

La commande adaptative décentralisée du TRMS via un algorithme Er-MCSI, schématisée par la figure (3.16), consiste à formuler les tensions de commande appliquées au TRMS selon l'équation (3.76) pour les sous-systèmes horizontal et vertical comme suit :

$$u_h(t) = K_{Eh}(t)x_{eh}(t) + K_{Ih}(t)x_{Ih}(t) \quad (3.89)$$

$$u_v(t) = K_{Ev}(t)x_{ev}(t) + K_{Iv}(t)x_{Iv}(t) \quad (3.90)$$

où  $x_{Ih}$  et  $x_{Iv}$  sont les erreurs des sorties intégrées des sous-systèmes horizontal et vertical respectivement définies par :

$$x_{Ih}(t) = \int_0^t [\bar{\theta}_h(\tau) - \theta_h(\tau)] d\tau, \quad x_{Iv}(t) = \int_0^t [\bar{\theta}_v(\tau) - \theta_v(\tau)] d\tau \quad (3.91)$$

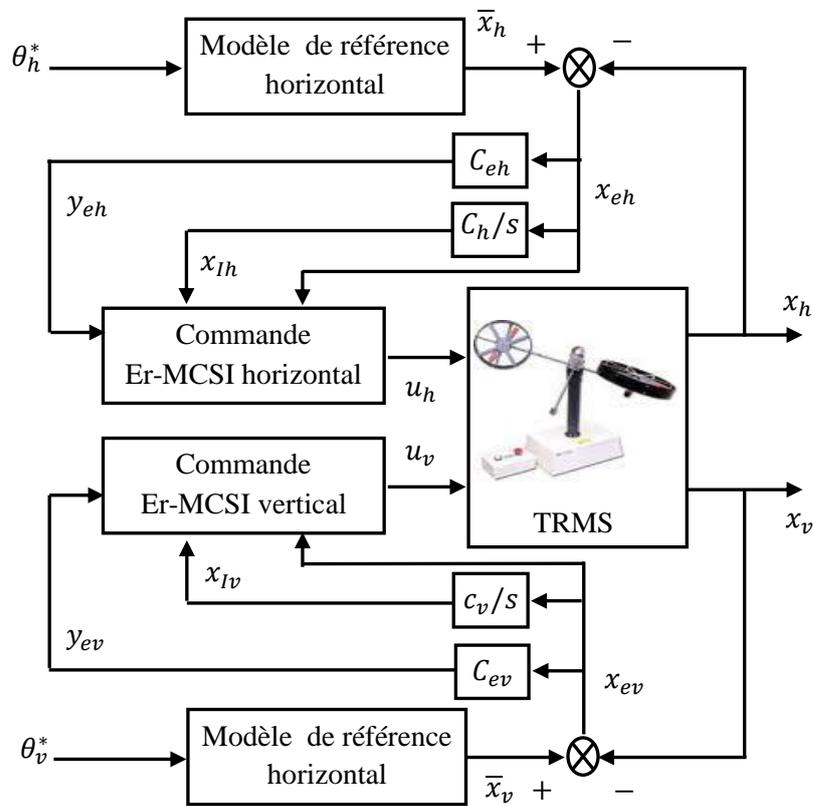


Figure 3.16 : Bloc diagramme de commande adaptative décentralisée du TRMS via un algorithme Er-MCSI

Les gains d'adaptation  $K_{Ei}$  et  $K_{Ii}$ ,  $i = h, v$  sont formulés selon les équations (3.78) et (3.79) comme suit :

$$K_{Ih}(t) = \alpha_h \int_0^t y_{eh}(\tau)x_{Iv}(t)d\tau + \beta_h y_{eh}(t)x_{Iv}(t) \quad (3.92)$$

$$K_{Eh}(t) = \alpha_h \int_0^t y_{eh}(\tau) x_{eh}^T(\tau) d\tau + \beta_h y_{eh}(t) x_{eh}^T(t) \quad (3.93)$$

$$K_{Iv}(t) = \alpha_v \int_0^t y_{ev}(\tau) x_{Iv}(\tau) d\tau + \beta_v y_{ev}(t) x_{Iv}(t) \quad (3.94)$$

$$K_{Ev}(t) = \alpha_v \int_0^t y_{ev}(\tau) x_{ev}^T(\tau) d\tau + \beta_v y_{ev}(t) x_{ev}^T(t) \quad (3.95)$$

où  $y_{eh}$  et  $y_{ev}$  sont calculées par les équations (3.72) et (3.73).

Pour satisfaire la condition d'hyperstabilité, nous avons considéré le même modèle de référence (3.74) avec  $t_s = 5$  secondes pour les deux sous-systèmes. Le choix des matrices  $Q_h$  et  $Q_v$  effectué dans les travaux de simulation avec un algorithme MCS pour résoudre l'équation de Lyapunov est préservé, ce qui conduit aux mêmes résultats donnés par l'équation (3.75). Les poids d'adaptations sont choisis durant les essais de simulation par  $\alpha_h = [0, 0, 2]$ ,  $\beta_h = [0, 0, 5]$ ,  $\alpha_v = [0, 0, 2]$  et  $\beta_v = [0, 0, 10]$ . Les conditions initiales choisies sont :  $x_h = [0, 0, 0]^T$  et  $x_v = [-0.63, 0, 0]^T$ . Les gains d'adaptation sont initialisés à zéro.

### 3.5.3.2. Simulation et résultats

Le schéma de commande adaptative décentralisée du TRMS est simulé également pour des tests de performance et de robustesse. Dans le test de performance, nous avons choisis un signal de référence sinusoïdale d'amplitude  $0.5 \text{ rad}$  pour l'angle d'orientation et un signal de référence carré de même amplitude pour l'angle d'élévation.

Les résultats de simulation sont illustrés par les figures (3.17) et (3.18). Les états du système TRMS suivent parfaitement la dynamique du modèle de référence. Telle que, les angles d'orientations et d'élévation et leurs vitesses de variation (voir figures 3.17a et 3.17b) ne sont pas affectées par les interactions. Les tensions de commande montrées par la figure (3.18a) prennent ses valeurs dans la région admissible sans aucune saturation, en particulier aux instants du changement de sens de mouvement. Les gains  $K_{Ii}$  et  $K_{Ei}$  ( $i = h, v$ ), dans les figures (3.18b) et (3.18c), suivent l'évolution des erreurs avec un abaissement d'amplitude le long du profil de simulation contrairement aux résultats obtenus par une commande décentralisée élaborée via un algorithme MCS. La contribution de l'action intégrale explicite introduite dans la loi de commande apparait clairement à travers ces résultats.

Un test de robustesse est effectué également pour des trajectoires de référence sinusoïdales et carrées sur un profil de temps de 50 secondes en injectant une perturbation impulsionnelle à l'instant  $t = 25$  secondes. Les résultats de simulation sont illustrés dans les figures (3.19), (3.20), (3.21) et (3.22) où les mêmes remarques ont été enregistrées pour le suivi des trajectoires de référence avec un rejet complet et immédiat de la perturbation. Les tensions de commande

prennent toujours ses valeurs dans la région admissible sans aucune saturation, en particulier aux instants de changement de rotation et à l'instant d'injection de la perturbation. Tel que, ils ont pu stabiliser l'appareil dans 5 *secondes* avec des valeurs inférieures à 2 (V).

Pour montrer l'importance de la décentralisation dans le schéma de commande, nous avons effectué un autre test de robustesse. Ce test consiste à simuler une répture de liaisons. il est supposé qu'à l'instant  $t = 80$  *secondes*, que l'unité de commande verticale arrête de fonctionner, la commande devient donc nulle. Les résultats de simulation de la figure (3.23) montrent les réponses en position et en vitesse ainsi que les signaux de commande. On peut remarquer que la poursuite est assurée sauf pour le sous-système horizontal. Il est à noter que ce test a plus de signification dans les grands systèmes complexes interconnectés tels que les réseaux d'énergie électrique.

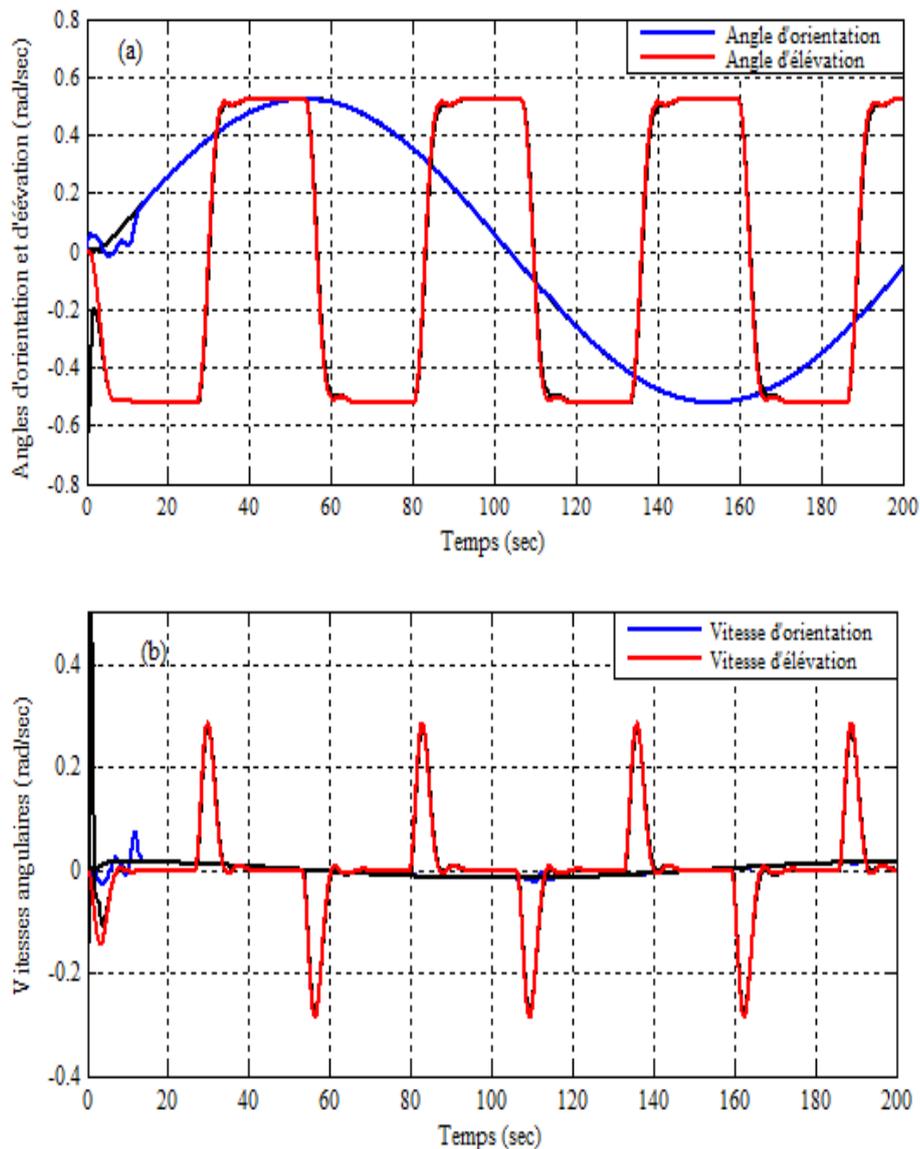


Figure 3.17 : Réponses en position et en vitesse du TRMS.

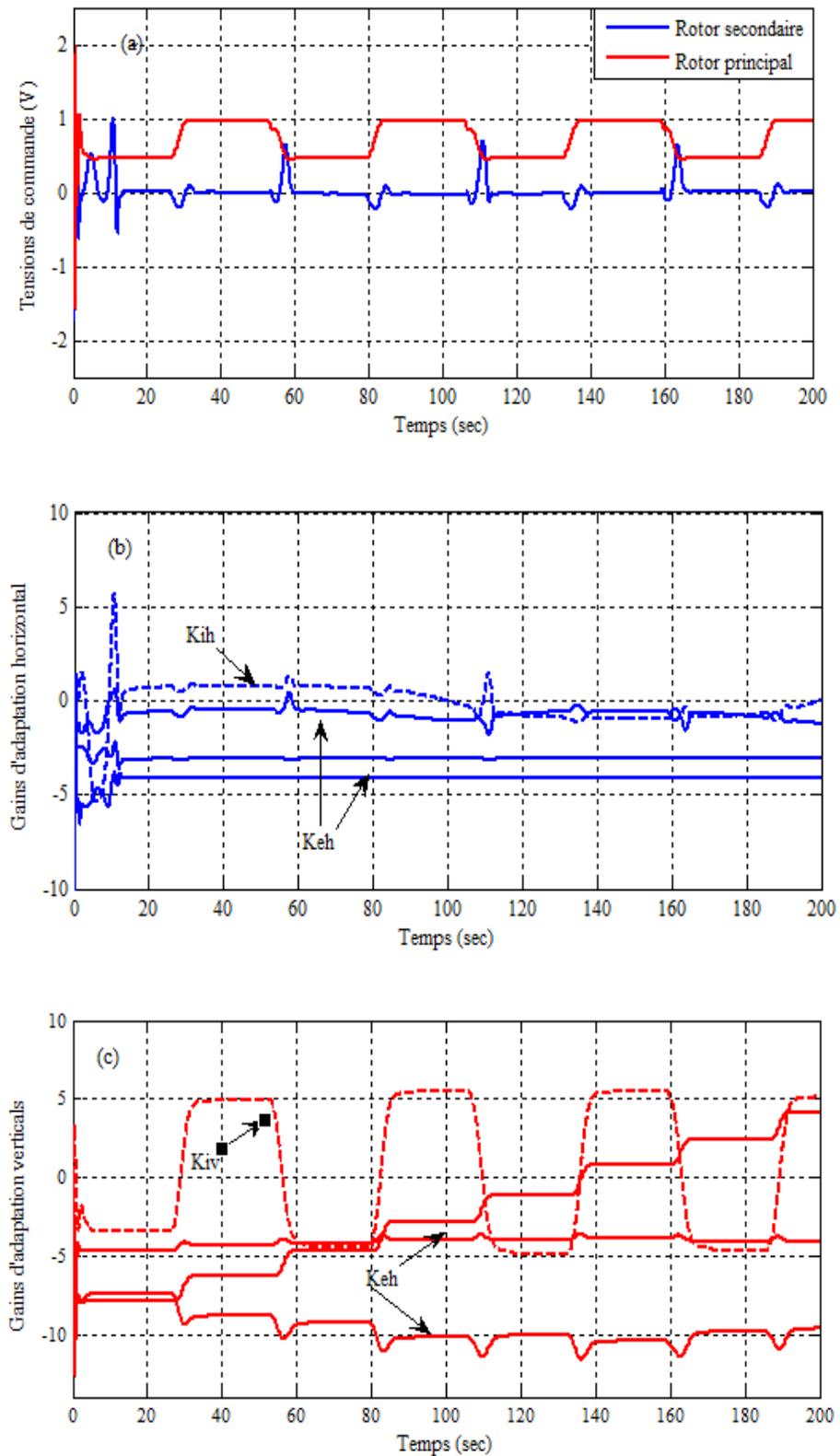


Figure 3.18 : Tensions de commande et gains d'adaptation du TRMS.

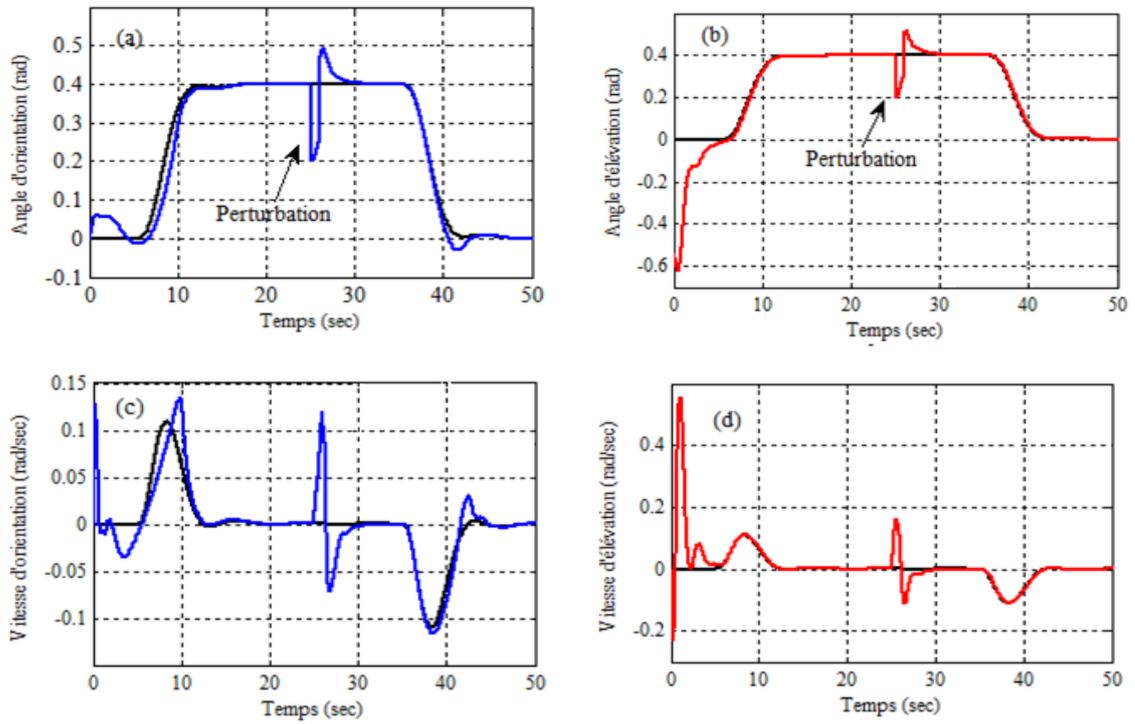


Figure 3.19 : Réponses en position et vitesse du TRMS perturbé pour des signaux de référence carrés.

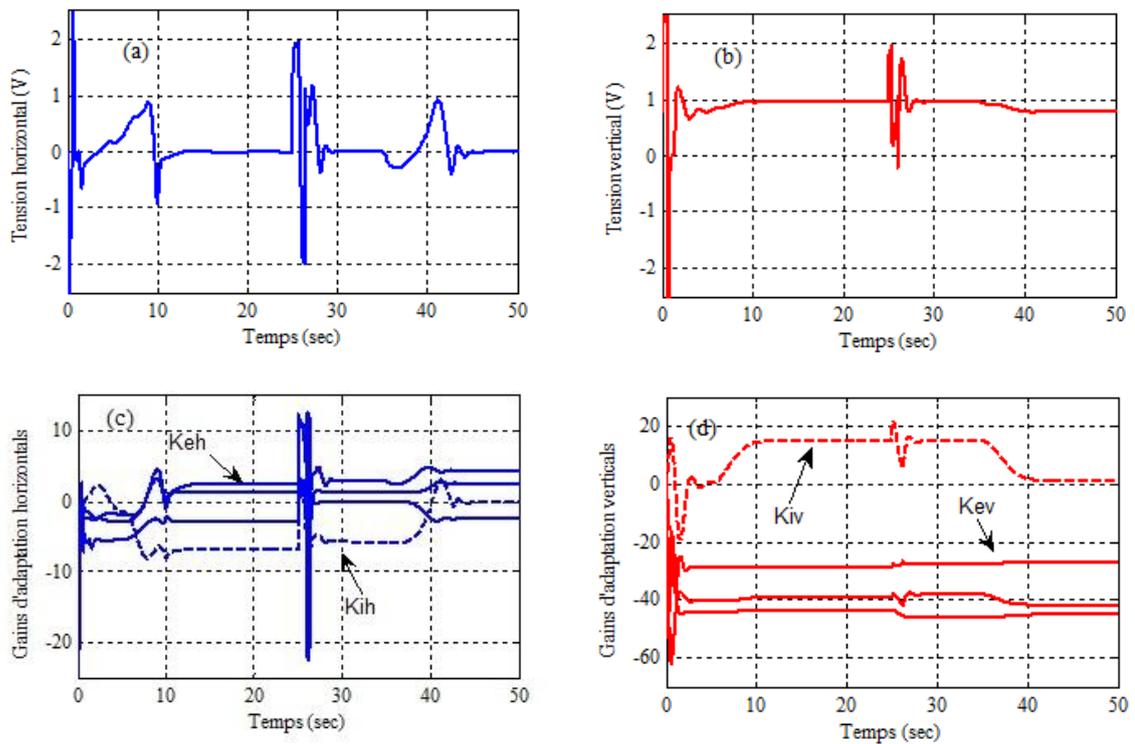


Figure 3.20 : Tensions de commande et gains d'adaptation du TRMS pour des signaux de référence carrés.

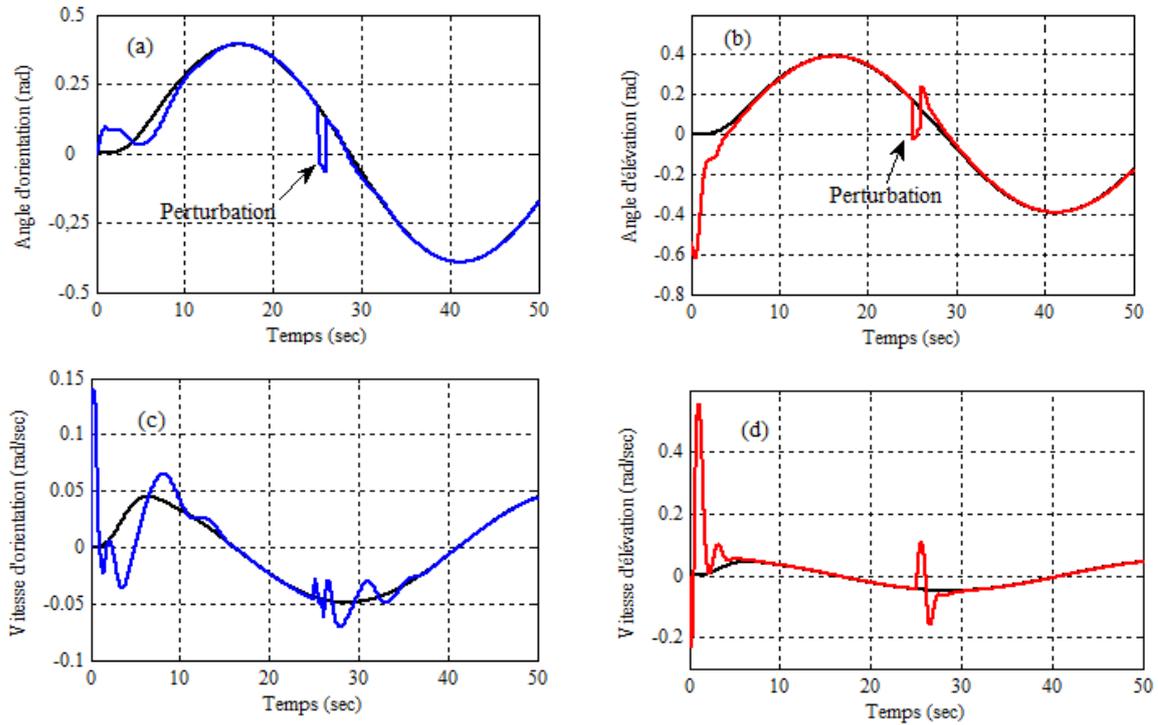


Figure 3.21 : Réponses en position et en vitesse du TRMS perturbé pour des signaux de référence sinusoïdaux.

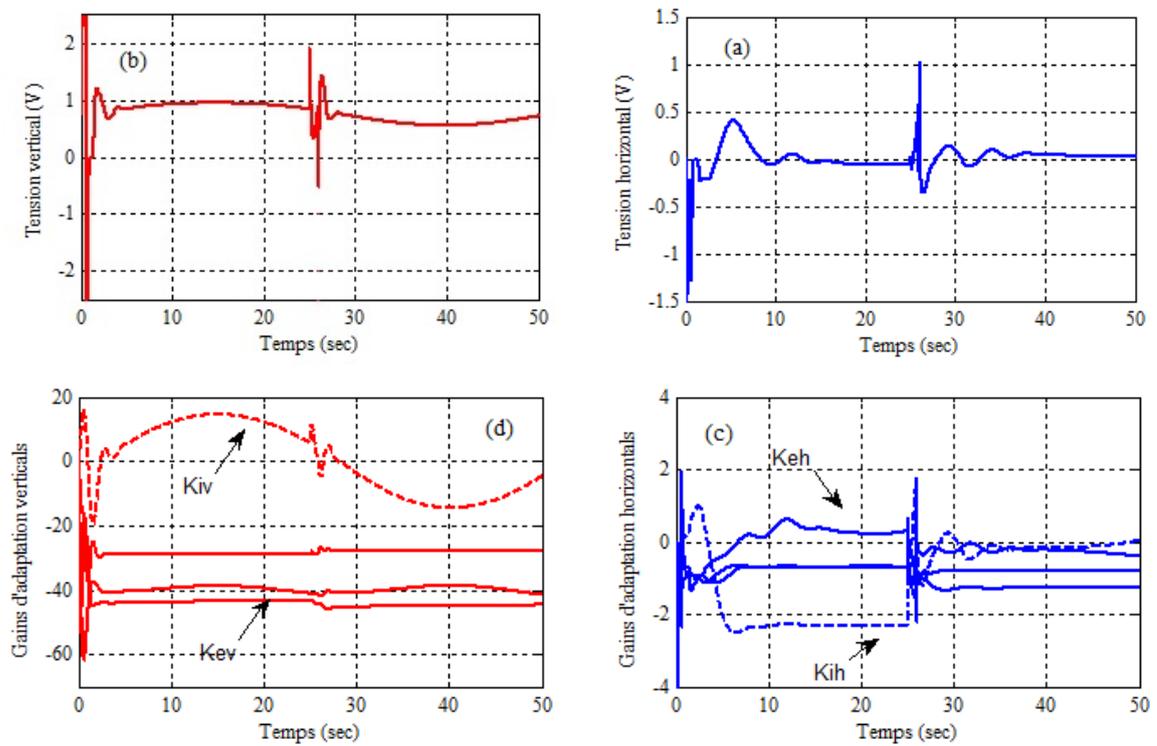


Figure 3.22 : Tensions de commande et gains d'adaptation du TRMS perturbé pour des signaux de référence sinusoïdaux.

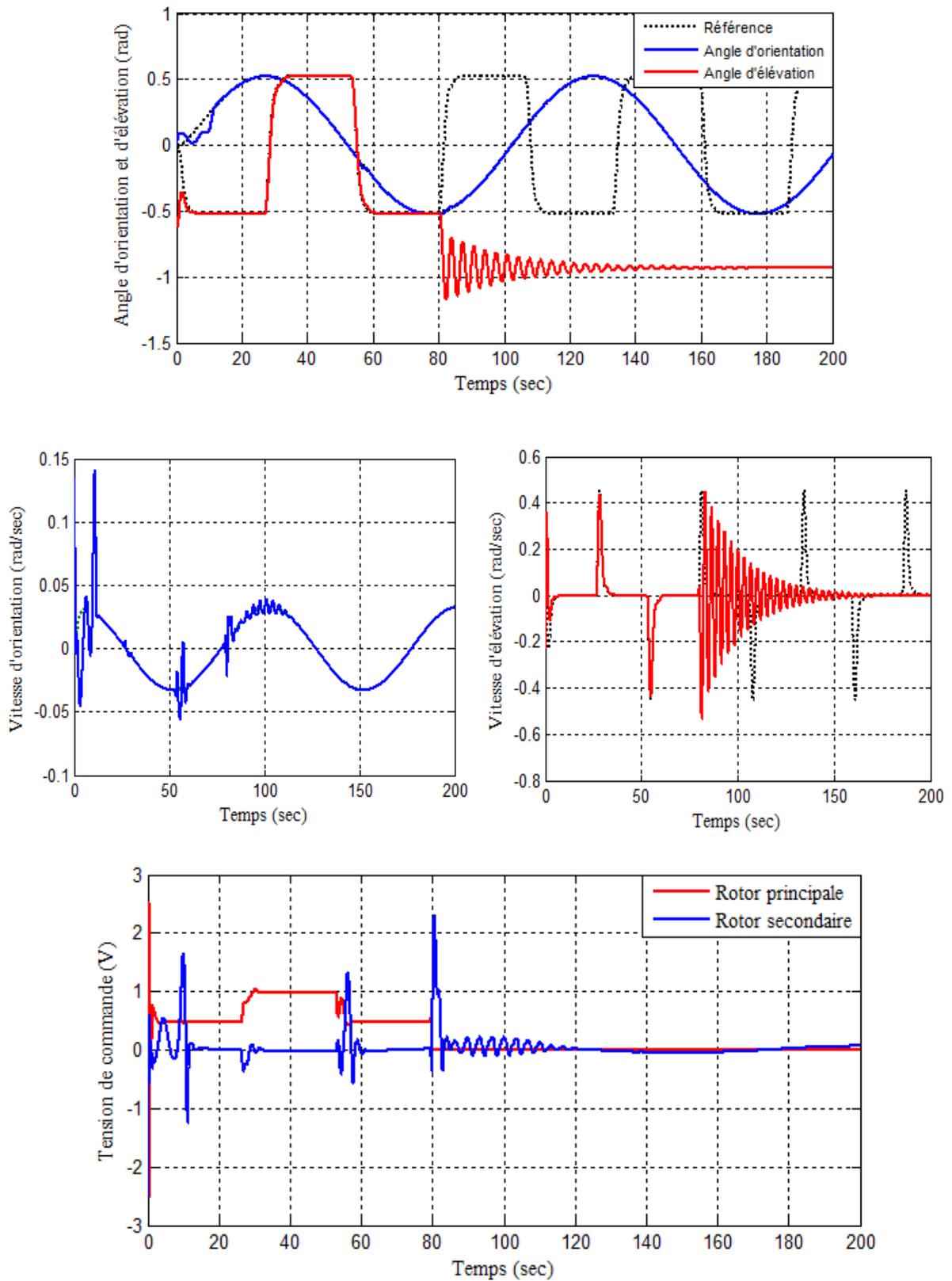


Figure 3.23 : Réponses et tensions de commande du TRMS avec test de rupture de liaison.

### 3.6. Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons traité le problème de stabilisation d'une classe de systèmes non linéaires complexes par des lois de commande adaptatives décentralisées. Le système complexe à commander est défini comme étant un ensemble de sous-systèmes non linéaires monovariante d'ordre réduit interconnectés. Le développement de la méthode est basé sur l'approximation des sous-systèmes non linéaires par des modèles LTV, ainsi que l'utilisation des algorithmes de commande adaptatifs hyperstables.

En effet, les lois de commande proposées assurent la stabilité et la convergence des différents signaux du système bouclé en présence des perturbations et des interactions. L'utilisation du critère d'hyperstabilité dans l'analyse de stabilité et la synthèse de lois de commande a permis de garantir la stabilité globale sans aucune restriction sur les interactions, ce qui n'est pas toujours le cas lors de l'utilisation de la méthode de Lyapunov. D'autre part, les lois de commande proposées présentent un caractère général du fait qu'elles sont simples et calculées seulement à partir des informations locales, et qu'on n'utilise pas le modèle explicite du système lors de la synthèse. Cette caractéristique intéressante rend possible l'utilisation de ces schémas pour la commande de n'importe quel système complexe pouvant être mis sous la forme (3.1). Toutefois, le schéma de commande développée via un algorithme MCS présente un problème de saturation qui a été résolu dans un système de commande élaboré via l'algorithme Er-MCSI à travers une modification de la loi de commande.

**Chapitre 4.**

**Commandes adaptatives floues des systèmes non linéaires  
incertains**



## Chapitre 4.

---

# Commandes adaptatives floues des systèmes non linéaires incertains

---

< La vie est l'adaptation continue de relations internes à des relations externes. >

↷ *Herbert Spencer*

---

### 4.1. Introduction

Les progrès enregistrés ces deux dernières décennies dans la théorie de la commande des systèmes non linéaires ont donné naissance à certaines méthodes systématiques de synthèse de lois de commande non linéaires. L'une des méthodes de commande non linéaires les plus connues est la commande par linéarisation exacte. Cette technique de commande consiste à linéariser le système par compensation et appliquer à ce nouveau système une commande linéaire classique telle que la commande par retour d'état [(Isidori, 1989), (Bodson, 1989)]. Néanmoins, elle est sensible aux variations paramétriques et aux erreurs de modélisation voir même non utilisable dans le cas où le modèle dynamique est inconnu. Pour résoudre ce problème, plusieurs travaux se sont focalisés sur la combinaison de la commande adaptative classique et les approximateurs universels, à savoir les systèmes flous et les réseaux de neurones [(Wang, 94), (Noriega, 1998), (Tang, 1999), (Chang, 2000), (Spooner, 2003), (Khabar, 2006), (Labioud, 2007), (Chemachema, 2007)].

La commande adaptative floue a été largement utilisée avec succès dans la littérature pour résoudre le problème de la commande des systèmes non linéaires affine en la commande. Conceptuellement, il y a deux approches distinctes formulées pour la commande adaptative floue : l'approche directe et l'approche indirecte. Dans l'approche directe, le système flou est utilisé pour approximer un contrôleur idéal inconnu [(Tang, 1999) (Chang, 2000), (Labioud, 2007),

(Phan, 2008)]. En revanche, la commande indirecte exploite deux systèmes flous pour estimer la dynamique inconnue du système non linéaire à commander et qui sont employés dans l'élaboration de la loi de commande du système afin de résoudre le problème de poursuite [(Park, 2006) et (Boukroune, 2008)]. Néanmoins, un choix arbitraire de la valeur initiale des paramètres ajustables ne peut pas toujours assurer la convergence de l'algorithme adaptatif dû au problème de singularité et, dans ce cas la loi de commande n'est pas bien définie. Pour résoudre ce problème, plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature. Par exemple, dans [(Spooner, 1996), (Chang, 2001), (Labiou, 2004)] pour garantir que la loi de commande est bien définie à tout moment, les auteurs proposent l'utilisation d'un algorithme de projection pour l'adaptation des paramètres des systèmes flous. Dans (Koo, 2001), un mécanisme de réinitialisation des paramètres est utilisé pour bien définir la loi de commande sans donner de preuve de stabilité. Par contre, dans les références [(Tong 1999), (Han, 2001)] les auteurs estiment directement l'inverse du gain de commande. Dans (Labiou, 2003), les auteurs proposent une solution à ce problème via l'approximation de l'inverse du gain de commande estimé (inverse régularisé). Il faut noter que la plupart des solutions proposées sont basées sur des modifications de la loi de commande floue pour la bien définir. Cependant, pour améliorer les performances de poursuite et assurer la robustesse du système bouclé vis-à-vis des incertitudes structurelles et des perturbations externes, la plupart des approches de commande adaptative floue qui ont été proposées utilisent un terme de commande robuste. Dans la littérature, ce terme est soit une commande par mode de glissement [(Labiou, 2003), (Ho, 2009)], soit un terme de commande par l'optimisation  $H_\infty$  [(Chen, 1996), (Chang 2001)], et/ou un terme de commande en utilisant l'approche LMI (Park, 2006). Les stratégies de commande adoptées consiste donc à combiner une commande floue à l'une des techniques de synthèse déjà citées..

L'analyse de la stabilité des lois de commande adaptative floue dans la littérature est achevée généralement par la méthode de Lyapunov qui est assurée dans la mesure où tous les signaux d'entrée et de sortie restent bornés [(Wang, 1997), (Spooner 1997), (Chang 2001), (Labiou, 03)]. Cependant, à ma connaissance, la théorie d'hyperstabilité est utilisée seulement dans (Golea, 2000) où une commande adaptative floue directe a été développée pour un système monovisible affine en la commande. Dans ce travail, le gain de commande, les erreurs de reconstruction et la perturbation externe sont soumises aux hypothèses de simplification pour garantir l'hyperstabilité du système en boucle fermée, ce qui réduit l'importance de l'approche dans des applications réels.

Dans ce chapitre, nous proposons des lois de commande adaptative floue pour une classe de systèmes non linéaires dont l'analyse et la synthèse sont effectuées par la théorie

d'hyperstabilité. En premier lieu, une approche de commande adaptative floue indirecte pour un système non linéaire mono-variable affine en la commande utilisant les systèmes d'inférence flous est proposée. Un système flou est utilisé pour estimer en ligne la dynamique transformée du système et la loi de commande est synthétisée en se basant sur cette estimée. Dans cette approche, la loi de commande est bien définie à tout moment, et les problèmes des erreurs de reconstruction et de singularité sont traités par des manipulations mathématiques sur le modèle du système. La loi de commande et les lois d'adaptation sont obtenues en se basant la théorie d'hyperstabilité.

En second lieu, nous proposons l'extension au cas décentralisé l'approche de commande floue développée pour les systèmes mono-variables. Le problème des interactions et des perturbations externes est résolu par l'introduction d'un terme de robustification de type mode glissant. Le schéma de commande proposé présente deux principaux avantages. D'une part, l'utilisation du système flou qui permet de surmonter le problème de connaissance des non linéarités locales de chaque sous-système. D'autre part, la structure décentralisée rend l'implantation sur des architectures parallèles possible et, de ce fait, le temps de calcul peut être considérablement réduit par rapport à la structure centralisée.

## 4.2. Contexte et formulation

Considérant le système non linéaire mono-variable d'ordre  $n$  affine en la commande qui peut être décrit par les équations différentielles du premier ordre suivantes (Isidori, 1989):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f(x) + g(x)u \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

où  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}]^T$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathfrak{R}$  est la commande scalaire,  $y \in \mathfrak{R}$  est la sortie du système,  $f(x)$  et  $g(x)$  sont des fonctions non linéaires continues incertaines et bornées.

Cette description permet d'utiliser facilement les différentes approches basées sur la rétroaction pour résoudre les problèmes de poursuite de trajectoire ou de régulation. L'écriture du système (4.1) sous une forme matricielle conduit à une expression plus compacte :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Lambda x + \Gamma[f(x) + g(x)u] \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{4.2}$$

où

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

L'objectif de la commande est de forcer la sortie  $y(t)$  à suivre un signal de référence borné  $r(t)$ , et le vecteur d'état  $x(t)$  suit un vecteur d'état  $x_m(t)$  du modèle de référence (2.3) sous contrainte que tous les signaux impliqués doivent être bornés. Plus spécifiquement, il s'agit de déterminer la commande  $u$  qui permet de conduire l'erreur de poursuite  $x_e(t)$  donnée par (2.5) à converger vers zéro.

**Hypothèses :** Le système (4.2) est soumis à certaines hypothèses pour des raisons de simplification et de réalisation à savoir :

- **Hyp 4.1 :** Le vecteur d'état du système  $x(t)$  est supposé observable ou mesurable;
- **Hyp 4.1 :** La trajectoire de référence  $r(t)$  est connue et bornée;
- **Hyp 4.3 :** Le gain de commande  $g(x)$  est supposé différent de zéro et ne change pas de signe sur l'espace de fonctionnement. Alors, il est soit positif ou négatif.

A partir des équations (2.3), (2.5) et (4.2), on peut aisément montrer que la dynamique de l'erreur de la poursuite du modèle de référence peut être formulée comme suit:

$$\dot{x}_e(t) = A_m x_e(t) + (A_m - \Lambda)x + B_m r - \Gamma[f(x) + g(x)u] \quad (4.4)$$

Si on note  $K_m^T = [-a_{m1}, \dots, -a_{mn}]$ , la simplification suivante peut être introduite :

$$(A_m - \Lambda)x + B_m r = \Gamma[K_m^T x + b_{mn}r] \quad (4.5)$$

L'équation d'erreur (4.4) peut être réécrite ainsi comme suit :

$$\dot{x}_e(t) = A_m x_e(t) + \Gamma[-f(x) - g(x)u + K_m^T x + b_{mn}r] \quad (4.6)$$

Dans le cas où la dynamique du système est parfaitement connue ( $f(x)$  et  $g(x)$  sont parfaitement connues) et ne subit aucune perturbation externe, la poursuite du modèle de référence peut être assurée par une commande linéarisante formulée comme suit (Isidori, 1989):

$$u^* = \frac{1}{g(x)}[-f(x) + K_m^T x + b_{mn}r] \quad (4.7)$$

L'introduction de loi de commande (4.7) dans (4.6) donne :

$$\dot{x}_e = A_m x_e(t) \quad (4.8)$$

Comme  $A_m$  est choisi afin que toutes ses valeurs propres soient à parties réelles négatives, alors le système bouclé obtenu sera exponentiellement stable. Néanmoins, la loi de commande (4.7) ne peut être implémentée car elle nécessite la connaissance parfaite des fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$ . Cependant, ces fonctions étant incertaines ou inconnues, des systèmes flous sont introduits pour fournir une valeur approchée de la loi de commande idéale (4.7).

### 4.3. La commande adaptative floue indirecte d'un système non linéaire incertain

Généralement, la commande adaptative indirecte floue des système présentés dans la section précédente passe par l'utilisation des systèmes d'inférence flous pour approcher les fonctions non linéarités  $f(x)$  et  $g(x)$ . A partir des approximations floues, une loi de commande est souvent proposée avec ses lois d'adaptation pour atteindre les objectifs de commande et garantir la bornitude de tous les signaux du système bouclé. La synthèse des paramètres de la loi de commande est effectuée via la théorie de Lyapunov où l'expression de la loi de commande prend la forme (4.7), avec une approximation des fonctions non linéaires  $f(x)$  et  $g(x)$  par des systèmes flous  $\hat{f}(x, \hat{\pi}_f)$  et  $\hat{g}(x, \hat{\pi}_g)$  définis comme suit :

$$\hat{f}(x, \hat{\pi}_f) = \xi_f^T(x) \hat{\pi}_f \quad (4.9)$$

$$\hat{g}(x, \hat{\pi}_g) = \xi_g^T(x) \hat{\pi}_g \quad (4.10)$$

avec  $\xi_f(x)$  et  $\xi_g(x)$  sont des vecteurs de fonctions floues de base supposés convenablement fixés en avance par l'utilisateur,  $\hat{\pi}_f$  et  $\hat{\pi}_g$  sont les vecteurs de paramètres à ajuster.

Les fonctions réelles  $f(x)$  et  $g(x)$  peuvent être exprimées donc en fonction des approximations floues de la manière suivante :

$$f(x) = \hat{f}(x, \hat{\pi}_f) + \Delta_f(x) \quad (4.11)$$

$$g(x) = \hat{g}(x, \hat{\pi}_g) + \Delta_g(x) \quad (4.12)$$

avec  $\Delta_f(x)$  et  $\Delta_g(x)$  représentent les erreurs d'approximation floue supposées petites et bornées, puisque les systèmes flous utilisés possèdent la propriété d'approximation universelle.

La commande résultante de cette approximation floue est donnée par :

$$u = \frac{1}{\hat{g}(x, \hat{\pi}_g)} [-\hat{f}(x, \hat{\pi}_f) + K_m^T x + b_{mn} r] \quad (4.13)$$

La loi de commande (4.13) est obtenue en remplaçant les les fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  par leurs approximation floues  $\hat{f}(x, \hat{\pi}_f)$  et  $\hat{g}(x, \hat{\pi}_g)$  dans l'expression (4.7). Cependant, cette loi ne

peut garantir la stabilité du système bouclé à cause de l'existence des erreurs d'approximation d'une part, et d'autre part au fait que cette loi de commande n'est pas définie lorsque  $\hat{g}(x, \hat{\pi}_g) = 0$ . Pour traiter ces problèmes, les solutions proposées dans la littérature interviennent à deux niveaux, soit en modifiant la loi d'adaptation soit en modifiant carrément la loi de commande. La première solution utilise généralement les algorithmes de projection afin d'éviter la singularité, mais les preuves de stabilité ne tiennent pas compte de cette contrainte, tandis que la deuxième solution (Labioud, 2003) introduit une modification de la loi linéarisante de base (4.7), mais le prix est multiplication des paramètres à mettre dans la conception et la complexité des lois d'adaptation afin de garantir la stabilité. Les approches proposées dans la littérature font appels à des termes de commande additifs pour pallier aux problèmes dus aux erreurs d'approximation et des perturbations externes.

### 4.3.1 L'approche de commande proposée:

Dans cette section nous présentons une approche de commande adaptative floue pour surmonter et/ou alléger quelques restrictions imposées par les approches proposées dans la littérature telle que la condition sur la connaissance de signe du gain de commande ainsi que sa borne inférieure. Le point essentiel de cette contribution réside dans la simplicité de la loi de commande proposée parce qu'elle présente peu de paramètres de conception du fait qu'un seul approximateur est utilisé dans cette structure adaptative indirecte et donc nécessite un temps réduit pour leur ajustement. Dans cet algorithme, le problème de singularité est évité complètement sans passer par les algorithmes de projection ni par l'inverse régularisé en se servant d'une transformation introduite sur le modèle du système à commander. Cette contribution est rendu possible grâce à l'utilisation de la théorie d'hyperstabilité de Popov.

Pour ces raisons, et dans le but de simplifier d'avantage la structure de commande, nous proposons dans cette section une loi de commande adaptative floue bien définie et garantissant les objectifs de commande.

On propose d'effectuer d'abord une manipulation mathématique sur le modèle du système non linéaire de sorte qu'un seul approximateur soit requis pour formuler la loi de commande. Ensuite, on regroupera toutes les fonctions inconnues en une seule fonction en vue de son approximation. Le système (4.1) est modifié ainsi comme suit :

$$0 = -g^{-1}(x)\dot{x}_n + g^{-1}(x)f(x) + u \quad (4.14)$$

En ajoutant  $\dot{x}_n(t)$  au deux cotés, nous obtenons :

$$\dot{x}_n = \dot{x}_n - g^{-1}(x)\dot{x}_n + g^{-1}(x)f(x) + u \quad (4.15)$$

L'équation (4.15) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\dot{x}_n = f_d(x) + u \quad (4.16)$$

avec

$$f_d(x) = (1 - g^{-1}(x))\dot{x}_n + g^{-1}(x)f(x) \quad (4.17)$$

Maintenant et après avoir modifié la représentation du système étudié (4.1), l'étape suivante sera consacrée à la conception de la loi de commande floue adaptative avec la loi d'adaptation du vecteur paramètres réglables pour le nouveau modèle non linéaire (4.16). Cela est dans l'objectif d'assurer la stabilité du système bouclé et la convergence asymptotique de l'erreur de poursuite vers zéro.

#### 4.3.1.1 Structure de la loi de commande

Dans cette section, nous allons concevoir une loi de commande pour le système (4.16) qui contient uniquement une fonction non linéaire, et ceci, en exploitant un seul approximateur flou pour l'estimation de la commande idéale. La loi d'adaptation du vecteur paramètres sera développée en utilisant le concept d'hyperstabilité. Ainsi, partons du modèle (4.16), nous pouvons modifier la loi de commande floue (4.13) comme suit :

$$u = -\hat{f}_d(x, \hat{\pi}_{f_d}) + K_m^T x + b_{mn} r \quad (4.18)$$

avec  $\hat{f}_d(x, \hat{\pi}_{f_d})$  est l'approximation floue de la fonction non linéaire  $f_d(x)$  donnée par :

$$\hat{f}_d(x, \hat{\pi}_{f_d}) = \xi_{f_d}^T(x) \hat{\pi}_{f_d} \quad (4.19)$$

où  $\xi_f(x)$  est un vecteur de fonctions floues de base et  $\hat{\pi}_{f_d}$  est le vecteur des paramètres ajustés.

Soit l'erreur d'estimation floue  $\tilde{f}_d(x, \tilde{\pi}_{f_d})$  de la fonction non linéaire  $f_d(x)$  définie par :

$$f_d(x) - \hat{f}_d(x, \hat{\pi}_{f_d}) = \xi_{f_d}^T(x) \tilde{\pi}_{f_d} + \Delta_{f_d}(x) \quad (4.20)$$

avec  $\tilde{\pi}_{f_d} = \pi_{f_d}^* - \hat{\pi}_{f_d}$  est l'erreur paramétrique, et  $\pi_{f_d}^*$  est le vecteur de paramètres optimaux de  $\hat{\pi}_{f_d}$  qui minimise la fonction  $|\Delta_{f_d}(x)|$ , c'est-à-dire  $\pi_{f_d}^* = \operatorname{argmin}\{\sup |f_d(x) - \hat{f}_d(x, \hat{\pi}_{f_d})|\}$ . Leur valeur n'est pas nécessaire pour l'implantation de la loi de commande, il est introduit seulement pour des raisons de démonstration de la stabilité.

**Hypothèse 4.4 :**

L'erreur d'approximation  $\Delta_{f_d}(x)$  est considérée arbitrairement petite et bornée selon la théorie de l'approximation universelle, c'est-à-dire  $\exists \Delta_{d0} \in \mathfrak{R}$  une constante positive, telle que :

$$|\Delta_{f_d}(x)| \leq \Delta_{d0} \quad (4.21)$$

Il est évident que la loi de commande (4.18) ne peut garantir la stabilité du système bouclé ainsi que la bornitude des erreurs de poursuite, et ceci, est dû à la présence de l'erreur d'estimation de la fonction  $f_d(x)$ . Pour traiter ce problème, on ajoute un terme robuste par mode de glissement de sorte que la loi de commande prend la forme :

$$u = -\hat{f}_d(x, \hat{\pi}_{f_d}) + K_m^T x + b_{mn} r + \hat{\Delta}_{f_d} \text{sgn}(y_e^T) \quad (4.22)$$

où  $\hat{\Delta}_{f_d}$  est un paramètre estimé en ligne pour compenser l'approximation variable  $\Delta_{f_d}(t)$ , sa loi d'adaptation sera donnée ultérieurement,  $\text{sgn}(y_e^T)$  est la fonction signe définie par :

$$\text{sgn}(y_e^T) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_e^T > 0 \\ 0 & \text{si } y_e^T = 0 \\ -1 & \text{si } y_e^T < 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

où  $y_e(t)$  est l'erreur filtrée calculée par l'équation (2.48).

Pour assurer les objectifs de commande, les lois de mise à jour suivantes sont adoptées :

$$\hat{\pi}_{f_d} = -\alpha_{f_d} \int_0^t y_e(t) \xi_{f_d}(x) dt - \beta_{f_d} y_e(t) \xi_{f_d}(x) \quad (4.24)$$

$$\hat{\Delta}_{f_d} = \delta_{f_d} \int_0^t |y_e^T(t)| dt \quad (4.25)$$

où  $\alpha_{f_d}$ ,  $\beta_{f_d}$  et  $\delta_{f_d}$ , sont des poids d'adaptation spécifiés par l'utilisateur.

Il est important de signaler que les lois d'adaptation (4.24) et (4.25) sont modifiées de telle sorte que l'intégrale de Popov utilisé dans la section suivante pour analyser l'hyperstabilité du système de commande en boucle fermée, soit vérifié dans l'espace des paramètres estimés lorsque ces paramètres dépassent certaines bornes.

**4.3.1.2 Analyse de la stabilité en boucle fermée**

La synthèse de la loi de commande floue proposée (4.22) consiste à déterminer les lois d'adaptation du vecteur paramètres  $\hat{\pi}_{f_d}$  et de l'estimateur  $\hat{\Delta}_{f_d}$  du terme robuste afin d'assurer la stabilité du système bouclé et la convergence asymptotique de l'erreur de poursuite vers zéro, c'est-à-dire  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_e(t) = 0$ . Pour ce faire, nous établissons le théorème suivant en se basant sur l'approche d'hyperstabilité et ses propriétés.

**Théorème 4.2 :**

Considérons le système non linéaire monovarié (4.1), sous les hypothèses 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4, la loi de commande définie par l'équation (4.22) avec les lois d'adaptation (4.23) et (4.24) appliquée au système (4.1) garantit l'hyperstabilité du système en boucle fermée, avec :

- (i) Le vecteur erreurs  $x_e(t)$  converge asymptotiquement vers zéro.
- (ii) Tous les signaux et les paramètres sont bornés.

**Preuve :**

L'élaboration du système de commande à partir de (2.3), (2.5), (4.16) et la loi de commande floue (4.22) conduit à écrire l'équation dynamique de l'erreur suivante :

$$\dot{x}_e = A_m x_e - \Gamma [\xi_{fd}^T(x) \tilde{\pi}_{fd} + \Delta_{fd}(x) + \hat{\Delta}_{fd} \text{sgn}(y_e^T)] \quad (4.26)$$

qui peut s'écrire sous une forme compacte comme suit :

$$\dot{x}_e = A_m x_e - \Gamma v_{d\pi} \quad (4.27)$$

avec

$$v_{d\pi} = \xi_{fd}^T(x) \tilde{\pi}_{fd} + \Delta_{fd}(x) + \hat{\Delta}_{fd} \text{sgn}(y_e^T) \quad (4.28)$$

Le système obtenu est hyperstabilité si les deux conditions suivantes sont satisfaites (Popov, 1973) :

Le bloc linéaire décrit par le triplet  $\{A_m, \Gamma, C_e\}$  soit SPR. Selon le théorème de Kalman-Yakubovich-Popov. Cette condition est remplie si le vecteur de gains  $C_e$  est calculé par les équations de Lyapunov (2.52) et (2.53).

En plus, le bloc non linéaire doit satisfaire l'inégalité de Popov suivante (Popov, 1973) :

$$\int_0^t y_e^T(t) v_{d\pi}(t) dt \geq -\gamma_0^2, \gamma_0 > 0, \text{ pour tout } t \geq 0 \quad (4.29)$$

En remplaçant  $v_{d\pi}(t)$  par son expression (4.28), l'inégalité (4.29) devient :

$$\int_0^t y_e^T(t) (\xi_{fd}^T(x) \tilde{\pi}_{fd} + \Delta_{fd}(x) + \hat{\Delta}_{fd} \text{sgn}(y_e^T)) dt \geq -\gamma_0^2 \quad (4.30)$$

En substituant (4.24) et (4.25) dans (4.30) et après réarrangement, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^t \xi_{fd}^T(x) y_e^T(t) \left( \alpha_{fd} \int_0^t y_e(\tau) \xi_{fd}(x) d\tau + \pi_{fd}^* \right) dt + \int_0^t \xi_{fd}^T(x) y_e^T(t) \beta_{fd} y_e(t) \xi_{fd}(x) dt \\ & + \int_0^t y_e^T(t) \left( \Delta_{fd}(x) + \delta_{fd} \text{sgn}(y_e^T) \int_0^t |y_e^T| dt \right) dt \geq -\gamma_0^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

L'inégalité (4.31) peut être écrite sous une forme de deux inégalités. La première est liée au modèle flou d'estimation tandis que la deuxième dépend de la composante de robustification, d'où il vient

$$\int_0^t \xi_{f_d}^T(x) y_e^T(t) \left( \alpha_{f_d} \int_0^t y_e(t) \xi_{f_d}(x) d\tau + \pi_{f_d}^* \right) dt + \int_0^t \xi_{f_d}^T(x) y_e^T(t) \beta_{f_d} y_e(t) \xi_{f_d}(x) dt \geq -\gamma_{0f}^2 \quad (4.32)$$

et

$$\int_0^t y_e^T(t) \left( \Delta_{f_d}(x) + \delta_{f_d} \operatorname{sgn}(y_e^T) \int_0^t |y_e^T| dt \right) dt \geq -\gamma_{0\Delta}^2 \quad (4.33)$$

où,  $\gamma_{0f}^2 + \gamma_{0\Delta}^2 = \gamma_0^2$

De plus, l'inégalité (4.32) peut être mise sous une forme plus compacte comme suit :

$$\int_0^t \hat{\pi}_{f\alpha}^T \alpha_{f_d}^{-1} \dot{\hat{\pi}}_{f\alpha} d\tau + \int_0^t \hat{\pi}_{f\beta}^T \beta_{f_d}^{-1} \dot{\hat{\pi}}_{f\beta} d\tau \geq -\gamma_{0f}^2 \quad (4.34)$$

avec

$$\hat{\pi}_{f\alpha} = \alpha_{f_d} y_e \xi_{f_d}(x) + \pi_{f_d}^* \quad (4.35)$$

$$\hat{\pi}_{f\beta} = \beta_{f_d} y_e \xi_{f_d}(x) \quad (4.36)$$

Le calcul intégrale de (4.34) donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int_0^t \hat{\pi}_{f\alpha}^T \alpha_{f_d}^{-1} \dot{\hat{\pi}}_{f\alpha} d\tau = -\frac{1}{2} \left[ \hat{\pi}_{f\alpha}^T \alpha_{f_d}^{-1} \hat{\pi}_{f\alpha} \right]_{t=0}^t \\ &\geq -\frac{1}{2\alpha_{f_d}} \hat{\pi}_{f\alpha}^T(0) \hat{\pi}_{f\alpha}(0) \end{aligned} \quad (4.37)$$

avec

$$I_\beta = \int_0^t \hat{\pi}_{f\beta}^T \beta_{f_d}^{-1} \dot{\hat{\pi}}_{f\beta} d\tau \geq 0 \quad (4.38)$$

D'autre part, l'inégalité (4.33) avec  $y_e^T = |y_e^T| \operatorname{sgn}(y_e^T)$  devient :

$$\int_0^t |y_e^T| \left( \delta_{f_d} \int_0^t |y_e^T| dt + \Delta_{f_d}(x) \operatorname{sgn}(y_e^T) \right) dt \geq -\gamma_{0\Delta}^2 \quad (4.39)$$

De (4.21), il vient

$$\int_0^t |y_e^T| \left( \delta_{f_d} \int_0^t |y_e^T| dt + \Delta_{f_d}(x) \operatorname{sgn}(y_e^T) \right) dt \geq \int_0^t |y_e^T| \left( \int_0^t \delta_{f_d} |y_e^T| dt - \Delta_{d0} \right) dt \quad (4.40)$$

avec

$$\int_0^t |y_e^T| \left( \delta_{f_d} \int_0^t \delta_{f_d} |y_e^T| dt - \Delta_{d0} \right) dt = \frac{\delta_{f_d}}{2} \left( \int_0^t |y_e^T| dt - \Delta_{d0} / \delta_{f_d} \right)^2 \geq 0 \quad (4.41)$$

De (4.30) à (4.41), l'inégalité de Popov (4.29) est vérifiée, ce qui prouve l'hyperstabilité du système décrit par les équations (4.27) et (4.28). Par conséquent, l'erreur de poursuite  $x_e(t)$  converge vers zéro et tous les signaux et paramètres adaptatifs du système bouclé sont bornés, et ceci, sans aucune condition sur les dynamiques non linéaires.

#### Remarque 4.1

D'après l'expression de la loi d'adaptation des paramètres (4.24) proposée, on remarque que cette loi permet de réaliser une action de correction proportionnelle intégrale (une action de correction à deux degrés de liberté) afin de mieux approximer les dynamiques inconnues du système. D'autre part, le modèle flou utilisé avec cette loi d'adaptation traduit le principe de perturbation minimale "Minimal disturbance principe" (Jang, 1995), qui stipule que l'adaptation ne doit pas seulement réduire l'erreur d'approximation mais aussi minimiser les perturbations sur les variables déjà utilisées dans l'adaptation.

**Remarque 4.2:** La terme de robustification donné par (2.23) peut être lissé en remplaçant la fonction discontinue  $sgn(y_e^T)$  par la fonction continue  $\tanh(y_e^T/\lambda)$ , où  $\lambda$  est une constante positive arbitrairement petite sa valeur influe principalement sur les performances en régime établi.

#### 4.3.2. Simulation et résultats

Pour montrer l'efficacité et la performance de l'approche proposée en poursuite de trajectoire, deux exemples sont considérés, un système composé d'une masse, un ressort et un amortisseur, et le système pendule inversé. Les testes sur les deux exemples sont effectués avec des trajectoires de référence sinusoïdales. La procédure de mise en œuvre de la loi de commande appliquée aux deux systèmes physiques est effectuée selon l'algorithme suivant :

##### Phase de conception:

- étape 1 : spécifier l'ordre du système à commander ( $n$ ) et le trajectoire désiré  $r$ ;
- étape 2 : définir les fonctions d'appartenance des entrées du modèle flou  $\hat{f}_d$  (4.19);
- étape 3 : choisir le couple  $(A_m, B_m)$  du modèle de référence (2.3);
- étape 4 : calculer  $C_e$  selon (2.52) et (2.53) et vérifier la positivité de  $\{A_m, \Gamma, C_e\}$ ;
- étape 5 : choisir les poids d'adaptation  $\alpha_{f_d}$ ,  $\beta_{f_d}$  et  $\delta_{f_d}$ .

##### Phase de calcul en temps réel:

- étape 1 : calculer l'erreur filtrée par (2.48);
- étape 2 : calculer les estimés  $\hat{\pi}_{f_d}$  et  $\hat{\Delta}_{f_d}$  par (4.24) et (4.25) respectivement;
- étape 3 : calculer le signal de commande  $u(t)$  par (4.22);

étape 4 : répéter les mêmes calculs pour l'itération suivante en allant à l'étape 1.

#### 4.3.2.1 Système masse-ressort-amortisseur

Le système masse-ressort-amortisseur donné par la figure (4.1) est décrit par l'équation dynamique suivante :

$$M\ddot{y} = u - f_k(x) - f_r(x) - f_c(x) \quad (4.42)$$

où  $y$  désigne la position supposée mesurable,  $x = [y, \dot{y}]$  sont les états du système,  $f_k(x) = 2y$  est la force du ressort due au raideur  $c_k$ ,  $f_r(x) = f_r(x) = 2\dot{y}$  est la force du frottement due au coefficient  $c_r$ ,  $f_c(x) = 0.01\text{sign}(\dot{y})$  est la force des frottements de Coulomb,  $u$  est l'effort appliqué,  $M$  est la masse. Les valeurs des paramètres sont :  $M = 1$ ,  $c_k = 2$  et  $c_r = 2$ . Pour tester la robustesse de la commande proposée, nous avons introduit des variations paramétriques données par :  $\Delta M = 0.1\sin(y)$ ,  $\Delta c_k = 0.5$  et  $\Delta c_r = 0.5$ .

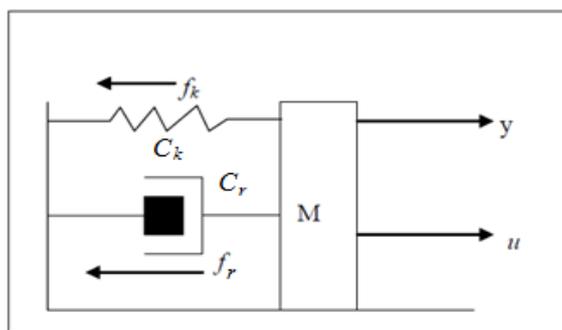


Figure 4.1 : Système masse-ressort-amortisseur

Un test de performances est effectué par simulation pour un problème de poursuite avec un trajectoire de référence  $y_d = 0.5 \sin(t)$  et des conditions initiales  $x_1(0) = 0.4$  et  $x_2(0) = 0$ . Les fonctions  $f_k(x)$ ,  $f_r(x)$  et  $f_c(x)$  avec les incertitudes paramétriques sont estimées par un seul système flou dont les entrées sont les variables d'état  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ . Les fonctions d'appartenance de chaque entrée sont données par :

$$\begin{aligned} \mu_{F_i^1}(x_i) &= \frac{1}{(1+\exp(7(x_i+1)))} \\ \mu_{F_i^2}(x_i) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i+0.7}{0.2}\right)^2\right\} \\ \mu_{F_i^3}(x_i) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{0.2}\right)^2\right\} \\ \mu_{F_i^4}(x_i) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-0.7}{0.2}\right)^2\right\} \\ \mu_{F_i^5}(x_i) &= \frac{1}{(1+\exp(-7(x_i-1)))} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Les performances désirées sont définies par le modèle de référence (2.35) permettant ainsi de calculer  $K_m$  et  $b_{mn}$  par les relations suivantes:

$$K_m^T = [-\omega_n^2 \quad -2\zeta\omega_n] \text{ et } b_{mn} = \omega_n^2 \quad (4.44)$$

Le bloc défini par  $\{A_m, \Gamma, C_e\}$  est SPR si la matrice  $Q$  est choisi selon l'équation (2.61) et qui permet de calculer  $P$  et  $C_e$  par l'équation (2.62) solution des équations de Lyapunov (2.52) et (2.53). Les paramètres du contrôleur adoptés en simulation sont donnés comme suit :  $\zeta = 0.7$ ,  $t_s = 0.5$ ,  $d = 10$  pour le modèle de référence et le compensateur  $C_e$ ,  $\alpha_{fd} = 1$ ,  $\beta_{fd} = 0.1$  et  $\delta_{fd} = 0.2$  pour le mécanisme d'adaptation. Le terme de robustification lissé (remarque 4.2) est utilisé avec  $\lambda = 0.2$ . Les vecteurs  $\hat{\pi}_{fd}$  et  $\hat{\Delta}_{fd}$  sont initialisés à zéro.

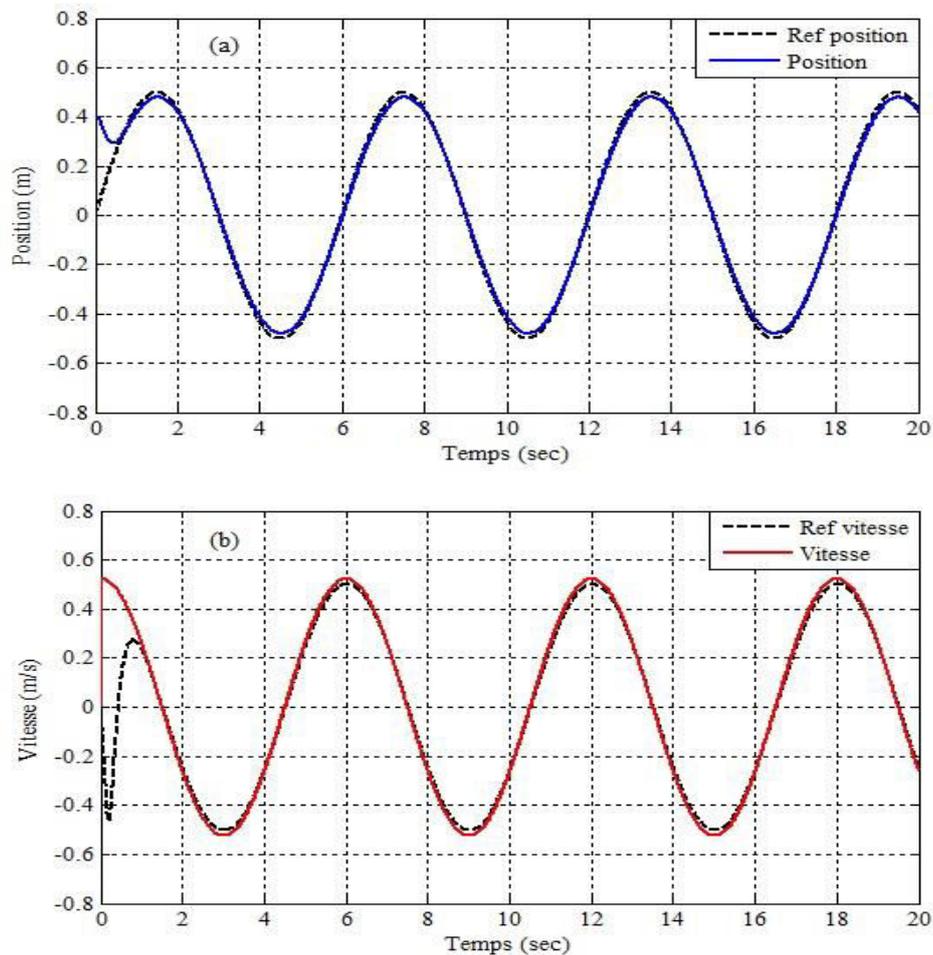


Figure 4.2 : Réponses en position et en vitesse du système masse-ressort-amortisseur.

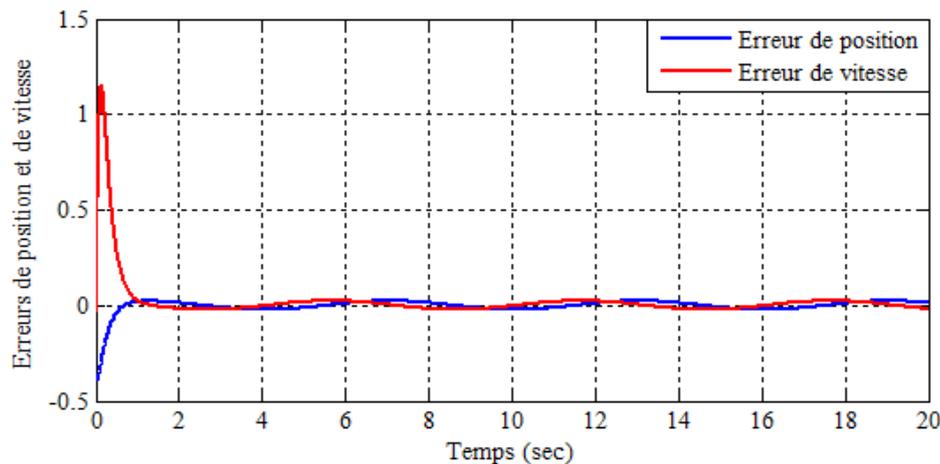


Figure 4.3 : Erreurs de poursuite du système masse-ressort-amortisseur.

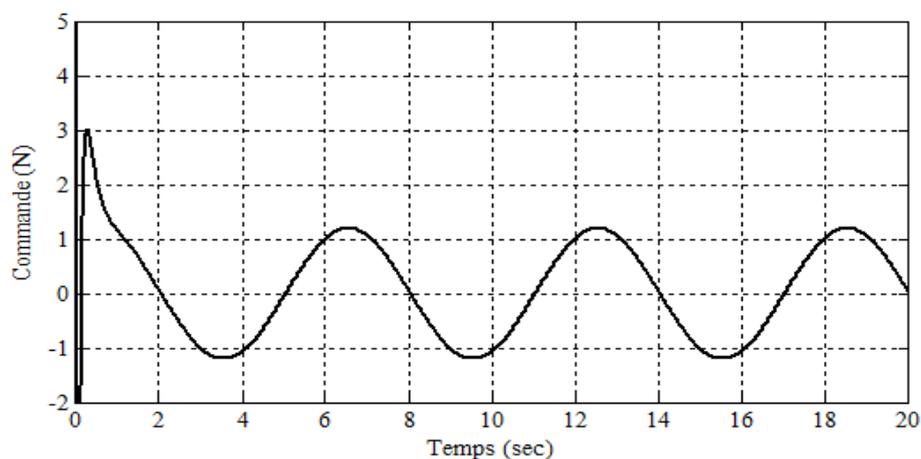


Figure 4.4 : Commande appliquée au système masse-ressort-amortisseur.

Les figures (4.2) à (4.4) exposent les résultats de simulation en utilisant les paramètres de synthèse choisis dans le paragraphe précédent. D'après les figures (4.2a) et (4.2b), il est clair que la sortie et sa vitesse de variation rejoignent rapidement leurs signaux de référence même en présence des variations paramétriques. Un temps de réponse assez court est obtenu en raison de la bonne approximation du système flou, avec une erreur de poursuite pratiquement nulle (voir figure 4.3). En outre, le signal de commande appliqué, comme est illustré dans la figure (4.4), ne contient pas de variations brusques et reste dans la plage de fonctionnement.

#### 4.3.2.2 Système pendule inversé :

Egalement, une application de cette structure de commande au système pendule inversé est réalisée. Le modèle dynamique du pendule est donné par l'équation (2.28). Conformément aux procédures de conception données précédemment, les deux fonctions du système sont estimées

par un seul système flou dont les entrées sont les états  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ . Pour chaque variable d'entrée, on définit cinq fonctions d'appartenance comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mu_{F_1^1}(x_1) &= \frac{1}{(1+\exp(11(x_1+1)))} \\
 \mu_{F_1^2}(x_1) &= \exp\left\{-0.5\left(\frac{x_i+0.6}{0.2}\right)^2\right\} \\
 \mu_{F_1^3}(x_1) &= \exp\left\{-0.5\left(\frac{x_i}{0.2}\right)^2\right\} \\
 \mu_{F_1^4}(x_1) &= \exp\left\{-0.5\left(\frac{x_i-0.6}{0.2}\right)^2\right\} \\
 \mu_{F_1^5}(x_1) &= \frac{1}{(1+\exp(-11(x_i-1)))}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Les paramètres  $K_m$ ,  $Q$ ,  $P$  et  $C_e$  sont définis par les équations (4.44), (2.61) et (2.62) respectivement. Pour une application numérique nous choisissons  $\zeta = 0.7$ ,  $t_s = 0.5$ ,  $d = 10$ ,  $\alpha_{fd} = 2$ ,  $\beta_{fd} = 0.2$ ,  $\delta_{fd} = 0.1$  et  $\lambda = 0.2$ . Les valeurs des paramètres estimés sont initialisés à zéro.

Généralement, la validation en simulation d'un contrôleur se fait pour une trajectoire de référence donnée. Afin de montrer l'efficacité et la flexibilité de notre approche, Pour cette application, le scénario de la commande que nous avons adopté c'était de déplacer le pendule de la position initiale ( $\theta = 0.6 \text{ rad}$ ,  $\dot{\theta} = 0 \text{ rad/sec}$ ) en poursuite d'un signal de référence dont le module et la fréquence changent. Pour cela, on considère la trajectoire suivante :

$r = \sin(0.4\pi t)$  pour l'intervalle  $[0, 10[$  seconde.

$r = \sin(0.6\pi t)$  pour l'intervalle  $[10, 20[$  seconde.

$r = 0.5\sin(0.2\pi t)$  pour l'intervalle  $[20, 30[$  seconde.

$r = 0$  pour l'intervalle  $[30, 35]$  seconde.

Les figures (4.5) à (4.7) exposent les résultats de simulation obtenues lors de l'application de la commande adaptative floue proposée au pendule inversé. Ces figures illustrent l'évolution temporelle de : l'angle de position  $\theta$  et sa vitesse  $\dot{\theta}$ , les erreurs de poursuite et la commande appliquée. Comme elles le montrent les figures (4.5a) et (4.5b), la position et a vitesse du pendule suivent bien leurs trajectoires de référence avec un temps de convergente rapide, et des erreurs de poursuite qui convergent rapidement vers zéro après l'instant de démarrage.(voir figure 4.6). L'effort appliqué au système est donné par la figure (4.7) qui ne présente aucune variation brusque ni saturation et prend ces valeurs dans la région admissible. Les deux pics observés, correspondant au changement de référence, illustrent un rattrapage immédiat du contrôleur pour s'adapter à la nouvelle trajectoire imposée et ne dure pas longtemps (pratiquement nulle), ce qui montre l'efficacité de notre approche.

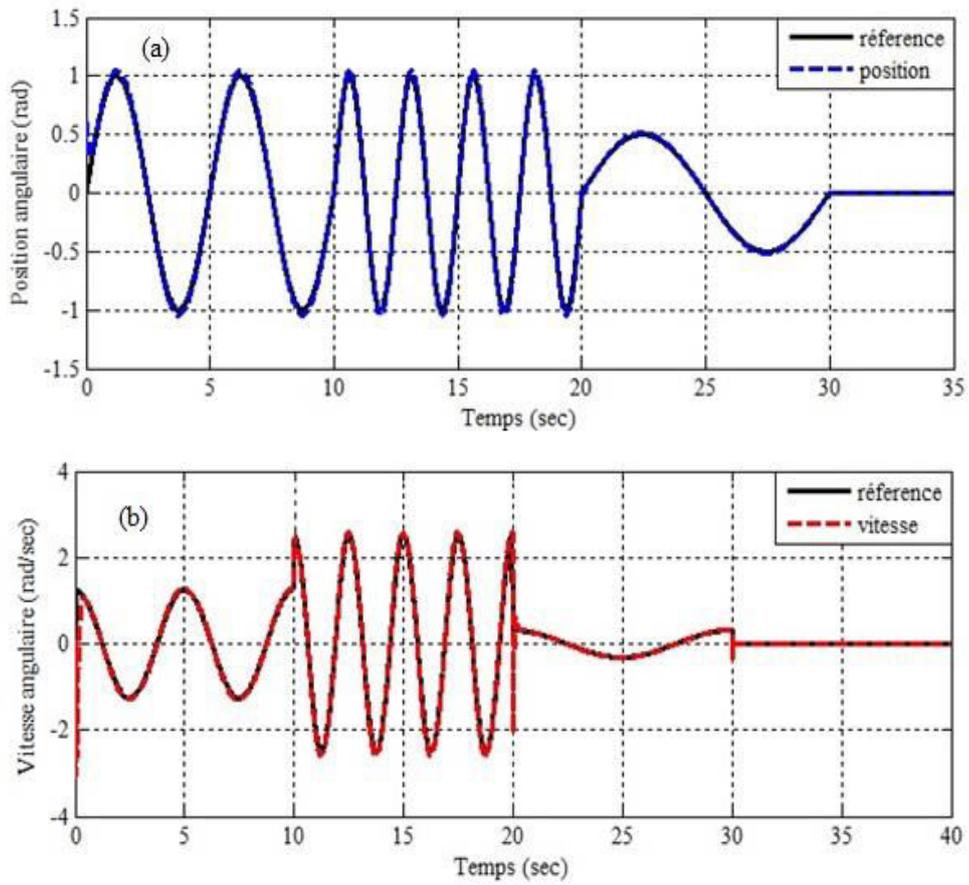


Figure 4.5 : Réponses en position et vitesse du système pendule inversé.

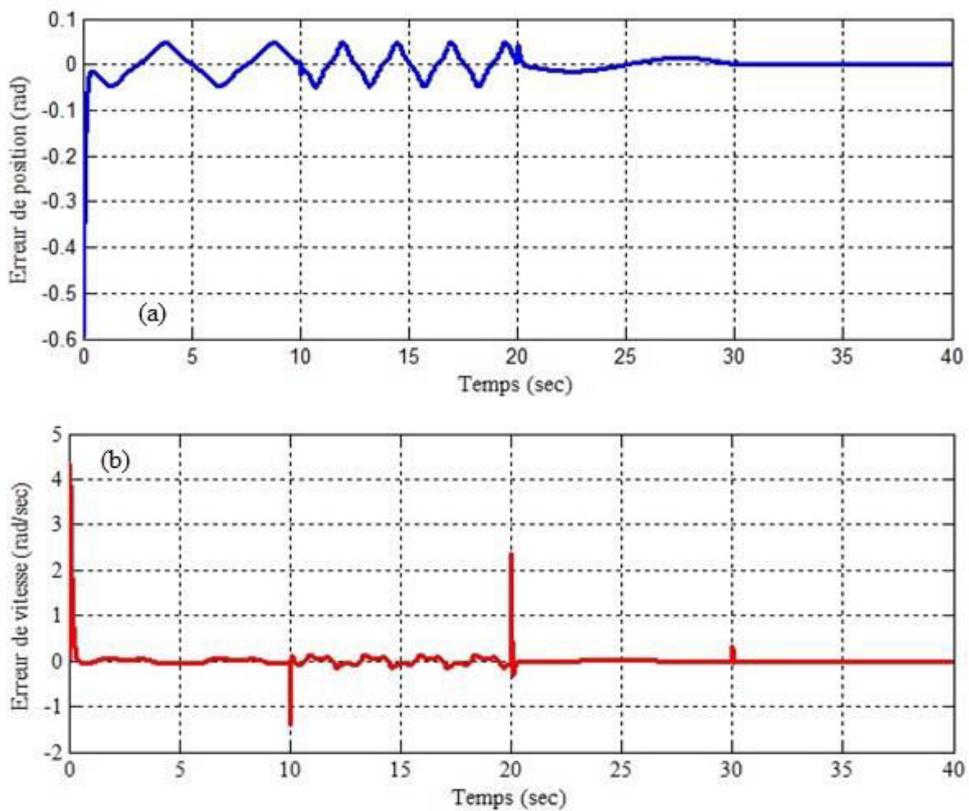


Figure 4.6 : Erreurs de poursuite du système pendule inversé.

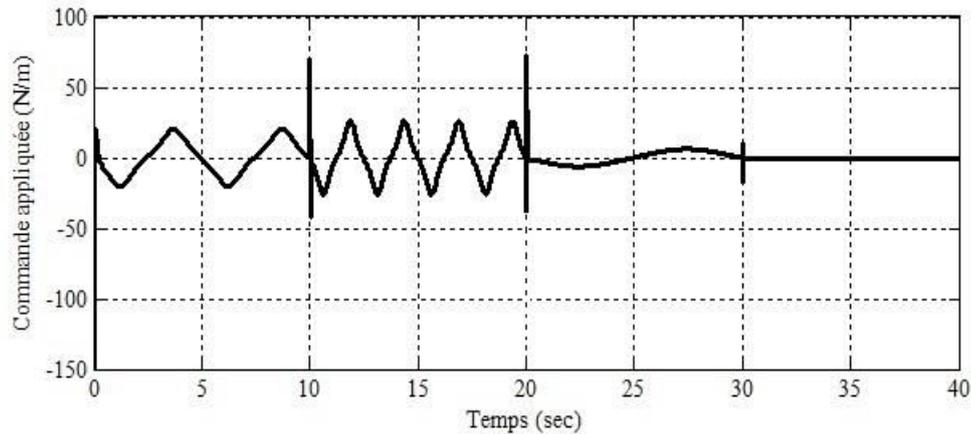


Figure 4.7 : Commande appliquée au système pendule inversé.

À partir des résultats obtenus, on peut mettre en évidence les avantages de la commande adaptative floue proposée, tels que :

- Des connaissances sur les dynamiques non linéaire du système à commander n'est pas nécessaire, en particulier, sur le gain de commande.
- Aucune contrainte n'est imposée sur les fonctions non linéaires du système à commander;
- Le problème de singularité posé par la commande adaptative floue indirecte est complètement résolu par la loi de commande proposée;
- Le nombre des modèles flous et leurs paramètres adaptatifs impliqués dans l'élaboration de la loi de commande est réduit de façon remarquable sans affecter les performances de commande.
- La stabilité est toujours garantie en utilisant la théorie d'hyperstabilité.

#### 4.4. Commande adaptative floue décentralisée des systèmes non linéaires incertains interconnectés

La loi de commande adaptative par logique floue développée dans la section précédente est employée dans cette partie d'étude pour développer une approche de commande adaptative indirecte décentralisée pour une classe de systèmes non linéaires interconnectés en utilisant les systèmes flous. La loi de commande est élaborée à travers une commande adaptative floue de chaque sous-système non linéaire robustifiée vis-à-vis les interactions et les perturbations externes par une composante additionnelle à structure variable. L'analyse de la stabilité et la synthèse des paramètres sont effectuées par la théorie d'hyperstabilité afin de garantir la stabilité globale et la convergence des erreurs de poursuite vers zéro ainsi que la bornitude de tous les signaux du système en boucle fermée. Comparé aux contrôleurs indirects présentés dans

[(Spooner, 1997), (Zhung 2001), (Labioud, 2003)], le contrôleur adaptatif décentralisé proposé est toujours bien défini, et ceci, sans utilisation d'un algorithme d'adaptation avec projection ou l'inverse régularisé pour éviter le problème de singularité. De plus, il ne requiert pas de connaissances a priori concernant les valeurs désirées des paramètres ajustés des systèmes flous et aucune condition n'est imposée sur les dérivées temporelles des gains de commande des sous-systèmes.

#### 4.4.1. Contexte et formulation

Considérant un système non linéaire interconnecté  $S$  composé de  $N$  sous-systèmes  $S_i$   $i = 1, \dots, N$  non linéaires monovariables donné par l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i,j}(t) &= x_{i,j+1}(t), j = 1, \dots, n_i \\ \dot{x}_{i,n_i}(t) &= f_i(x_i) + g_i(x_i)u_i + h_i(x_1, \dots, x_n, t) \\ y_i(t) &= x_{i,1}(t), i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.46)$$

où  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$  est le vecteur d'état du système complet,  $x_i = [x_{i1}, \dots, x_{in_i}]^T \in \mathfrak{R}^{n_i}$  est le vecteur d'état du sous-système  $S_i$  supposé mesurable,  $u_i \in \mathfrak{R}$  est l'entrée de commande locale,  $f_i(x_i)$  et  $g_i(x_i)$  sont des fonctions non linéaires continues bornées incertaines.  $h_i(x, t)$  est une fonction continue bornée représente l'ensemble des interactions avec les autres sous-systèmes et les perturbations externes.

L'objectif de commande est de synthétiser une loi de commande adaptative floue pour chaque sous-système, et ceci, en utilisant uniquement les informations locales propres à chaque sous-système, de telle sorte que les états locaux  $x_i(t)$  suit, le plus proche possible, la dynamique des états  $\bar{x}_i(t)$  du modèle de référence  $\bar{S}_i$  donné par l'équation (3.5) tout en garantissant la bornitude de tous les signaux du système entier.

L'approche proposée consiste à effectuer tout d'abord une manipulation mathématique sur le modèle du système complexe de façons similaire à celle exécutée dans le cas mono-variables, où la  $n_i$ <sup>ieme</sup> équation différentielle de chaque sous-système (4.46) est réécrite comme suit :

$$0 = -g_i^{-1}(x_i)\dot{x}_{i,n_i}(t) + g_i^{-1}(x_i)f_i(x_i) + u_i + g_i^{-1}(x_i)h_i(x, t) \quad (4.47)$$

En ajoutant  $\dot{x}_{i,n_i}(t)$  aux deux côtés de l'équation, nous obtenons :

$$\dot{x}_{i,n_i}(t) = \dot{x}_{i,n_i}(t) - g_i^{-1}(x_i)\dot{x}_{i,n_i}(t) + g_i^{-1}(x_i)f_i(x_i) + u_i + g_i^{-1}(x_i)h_i(x, t) \quad (4.48)$$

L'équation (4.48) peut être réécrite de nouveau sous la forme suivante :

$$\dot{x}_{i,n_i}(t) = f_{di}(x_i) + u_i + h_{di}(x, t) \quad (4.49)$$

où  $f_{di}(x_i) = (1 - g_i^{-1}(x_i))\dot{x}_{i,n_i}(t) + g_i^{-1}(x_i)f_i(x_i)$  et  $h_{di}(x, t) = g_i^{-1}(x_i)h_i(x, t)$

ou encore sous une forme matricielle :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \Lambda_i x_i(t) + \Gamma_i [f_{di}(x_i) + u_i(t) + h_{di}(x, t)] \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) \end{aligned} \quad (4.50)$$

où  $\Lambda_i \in \mathfrak{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $\Gamma_i \in \mathfrak{R}^{n_i}$  et  $C_i^T \in \mathfrak{R}^{n_i}$  sont donnés par (4.3).

Le problème de commande du système (4.46) est ramené donc à synthétiser une loi de commande pour le modèle modifié (4.50) qui assure la stabilité du système bouclé et la convergence asymptotique de l'erreur de poursuite vers zéro. Pour ce faire, nous formulons pour chaque sous-système l'équation dynamique de l'erreur à partir des équations (3.5), (3.15) et (4.50) :

$$\dot{x}_{ei}(t) = \bar{A}_i x_{ei}(t) + \Gamma_i [-f_{di}(x_i) - u_i(t) - h_{di}(x, t) + K_{mi}^T x_i + \bar{b}_i r] \quad (4.51)$$

où  $K_{mi}^T = [-\bar{a}_{i1}, \dots, -\bar{a}_{in_i}]$  et  $\bar{b}_i$  sont des éléments déterminants la dynamique du modèle de référence local.

Afin de développer notre contrôleur décentralisé, pour chaque sous-système  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , nous adoptons les hypothèses suivantes.

**Hypothèse 4.5 :** Chaque trajectoire de référence  $r_i(t)$  est supposée continue, connue et bornée.

**Hypothèse 4.6 :** Le gain de commande local  $g_i(x_i)$  est non nul et de signe connu. Alors, il est soit strictement positif, soit strictement négatif, c'est-à-dire  $\exists \underline{g}_i > 0$  avec  $\infty > |g_i(x_i)| > \underline{g}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  pour tout  $x_i(t) \in \mathfrak{R}^{n_i}$ .

**Hypothèse 4.7 :** La fonction non linéaire  $h_i(x, t)$  est supposée bornée telle que  $\exists h_{i,max}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , une constante strictement positive avec :

$$|h_i(x, t)| \leq h_{i,max} \quad (4.52)$$

D'après l'équation (4.51) et selon le concept de la commande par linéarisation, l'objectif de commande peut être atteint si les sous-systèmes sont isolés l'un de l'autre avec absence des perturbations, c'est-à-dire  $h_{di}(x, t) = 0$ . D'autre part, la dynamique du système non linéaire  $f_{di}(x_i)$  est parfaitement connue. La loi de commande permettant d'avoir cet objectif est formulé comme suit :

$$u_i^*(t) = -f_{di}(x_i) + K_{mi}^T x_i(t) + \bar{b}_i r_i \quad (4.53)$$

Cependant, il est supposé dans cette étude, que la fonction non linéaire  $f_{di}(x_i)$  est incertaine ( $f_i(x_i)$  et  $g_i(x_i)$  sont incertaines) et l'ensemble de sous-systèmes sont soumis à des interactions et des perturbations  $h_{di}(x, t)$  non nulles ( $h_i(x, t)$  est incertaine et non nulle). De ce fait, l'implantation de la loi de commande (4.53) est difficile voir même impossible. Notre but consiste alors à essayer d'approcher cette loi de commande idéale inconnue par un algorithme de commande floue utilisant un seul système flou avec un mécanisme d'adaptation robuste et stable

#### 4.4.2. Synthèse de la loi de commande floue décentralisée

Dans cette section, notre tâche consiste à utiliser le systèmes flou de T-S d'ordre zéro pour approcher la fonction incertaine  $f_{di}(x_i)$ , et à développer, à partir de cette approximation, une loi de commande adaptative floue décentralisée afin d'atteindre les objectifs de commande. A partir du modèle modifié (4.50) décrit la dynamique du sous-système  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , nous pouvons définir la commande adaptative floue locale de chaque sous-système sous la forme (4.53) comme suit :

$$u_i(t) = -\hat{f}_{di}(x_i, \hat{\pi}_{f_{di}}) + K_{mi}^T x_i(t) + \bar{b}_i r_i \quad (4.54)$$

avec  $\hat{f}_{di}(x_i, \hat{\pi}_{f_{di}})$  est l'approximation floue de la fonction non linéaire  $f_{di}(x_i)$  donnée par :

$$\hat{f}_{di}(x_i, \hat{\pi}_{f_{di}}) = \xi_{f_{di}}^T(x_i) \hat{\pi}_{f_{di}} \quad (4.55)$$

où  $\xi_{f_{di}}(x_i)$  et  $\hat{\pi}_{f_{di}}$  sont respectivement le vecteur de fonctions floues de base et le vecteur de paramètres ajustés.

Définissons l'erreur d'identification floue  $\tilde{f}_{di}(x, \tilde{\pi}_{f_{di}})$  de la fonction non linéaire  $f_{di}(x)$  par :

$$f_d(x) - \hat{f}_d(x, \hat{\pi}_{f_d}) = \xi_{f_d}^T(x) \tilde{\pi}_{f_d} + \Delta_{f_d}(x) \quad (4.56)$$

avec  $\tilde{\pi}_{f_{di}} = \pi_{f_{di}}^* - \hat{\pi}_{f_{di}}$  est l'erreur d'estimation paramétrique,  $\pi_{f_{di}}^*$  est le vecteur paramètres optimaux minimisant la fonction  $|\Delta_{f_{di}}(x_i)|$ . D'après la propriété d'approximation universelle, on peut supposer alors la bornitude des erreurs d'approximation, c'est-à-dire  $\exists \Delta_{0i} > 0$  une constante positive telle que :

$$|\Delta_{f_{di}}(x_i)| \leq \Delta_{0i}, i = 1, \dots, N \quad (4.57)$$

L'utilisation de la loi de commande floue (4.54) toute seule pour commander le système complexe (4.50) ne peut garantir la stabilité du système bouclé. Ceci est dû aux effets des erreurs de reconstruction  $\Delta_{f_{di}}(x_i)$  et la présence du terme  $h_{di}(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, N$  qui regroupe l'ensemble

des perturbations. Ainsi, pour surmonter ce problème, nous proposons d'ajouter à la loi de commande locale  $u_i(t)$  un terme de commande robuste noté  $u_{si}$ , telle que :

$$u_i(t) = -\xi_{f_{di}}^T(x_i)\hat{\pi}_{f_{di}} + K_{mi}^T x_i + \bar{b}_i r_i + u_{si} \quad (4.58)$$

Afin d'avoir une loi de commande bien définie à tout moment, la loi d'adaptation des paramètres  $\hat{\pi}_{f_{di}}$  du système flou approximateur ainsi que le terme robuste  $u_{si}$  de chaque sous système seront synthétisés de la même manière des systèmes non linéaires SISO étudiés dans la section 4.3.1.1. Telles que, nous proposons les lois locales suivantes:

$$\hat{\pi}_{f_{di}} = \alpha_{f_{di}} \int_0^t y_{ei}(t) \xi_{f_{di}}(x_i) dt + \beta_{f_{di}} y_{ei}(t) \xi_{f_{di}}(x_i) \quad (4.59)$$

$$u_{si}(t) = \delta_{f_{di}} \int_0^t |y_{ei}^T| dt \operatorname{sgn}(y_{ei}^T) \quad (4.60)$$

avec  $y_{ei} = C_{ei} x_{ei}$  est l'erreur filtrée de chaque sous-système de commande dont le compensateur linéaire  $C_{ei}$  sera déterminé ultérieurement.  $\alpha_{f_{di}}$ ,  $\beta_{f_{di}}$  et  $\delta_{f_{di}}$  sont des constantes positives choisies par le concepteur pour configurer les lois de commande locales.

Rappelons que le terme robuste  $u_{si}$  est ajouté à la commande floue nominale pour forcer les erreurs de poursuite à converger vers zéro et garantir la stabilité du système bouclé avec la contrainte que tous les signaux impliqués soient bornés.

#### 4.4.3. Analyse de la stabilité en boucle fermée

Maintenant et après avoir spécifié la structure du contrôleur décentralisée avec ses lois d'adaptation, Nous allons étudier les performances de la boucle fermée. En particulier, la convergence de des erreurs de poursuite ainsi que la stabilité de la boucle fermée et les conditions sur le choix des paramètres de conception. Cela, peut être montré en utilisant la théorie d'hyperstabilité par le biais du théorème suivant:

##### **Théorème 4.2 :**

Considérant le système non linéaire interconnecté (4.47), et supposons que les hypothèses 4.5, 4.6 et 4.7 sont satisfaites. Alors la loi de commande définie par l'équation (4.58) avec les lois d'adaptation données par les relations (4.59) et (4.60) garantit l'hyperstabilité du système en boucle fermée dans le sens où tous les signaux sont bornés et les erreurs de poursuite convergent vers zéro, c'est-à-dire  $x_{ei}(t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  pour  $i = 1, \dots, N$ .

##### **Preuve :**

En introduisant la loi de commande (4.58) dans (4.51), l'équation dynamique de l'erreur locale après correction devient :

$$\dot{x}_{ei}(t) = \bar{A}_i x_{ei}(t) - \Gamma_i [\xi_{f_{di}}^T(x_i) \tilde{\pi}_{f_{di}} + \Delta_{f_{di}}(x_i) + u_{si} + h_{di}(x, t)] \quad (4.61)$$

Sous une forme compacte, on peut écrire :

$$\dot{x}_{ei}(t) = \bar{A}_i x_{ei}(t) - \Gamma_i v_i \quad (4.62)$$

avec

$$v_i = \xi_{f_{di}}^T(x_i) \tilde{\pi}_{f_{di}} + \Delta_{f_{di}}(x_i) + u_{si} + h_{di}(x, t) \quad (4.63)$$

L'hyperstabilité du système (4.62) et (4.63) est vérifiée si  $\{\bar{A}_i, \Gamma_i, C_{ei}\}$  est SPR. Cette condition est remplie pour  $C_{ei}$  calculé par l'équation de Lyapunov (3.26), tel que :

$$C_{ei} = \Gamma_i^T P_i \quad (4.64)$$

où  $P_i \in \mathfrak{R}^{n_i \times n_i}$  est une matrice symétrique définie positive.

En plus, le bloc non linéaire défini par l'équation (4.63) doit satisfaire l'inégalité de Popov suivante (Popov, 1973):

$$\int_0^t y_{ei}^T(t) v_i(t) dt \geq -\gamma_{0i}^2, \gamma_{0i} > 0, \text{ pour tout } t \geq 0 \quad (4.65)$$

De (4.63) et (4.60), l'inégalité (4.65) devient :

$$\int_0^t y_{ei}^T(t) (\xi_{f_{di}}^T(x_i) \tilde{\pi}_{f_{di}} + \Delta_{f_{di}}(x_i) + h_{di}(x, t) + \delta_{f_{di}} \int_0^t |y_{ei}^T| dt \operatorname{sgn}(y_{ei}^T)) dt \geq -\gamma_i^2 \quad (4.66)$$

L'inégalité (4.66) est satisfaite si les deux inégalités suivantes sont satisfaites en même temps :

$$\int_0^t y_{ei}^T(t) \xi_{f_{di}}^T(x_i) \tilde{\pi}_{f_{di}} dt \geq -\gamma_{1i}^2 \quad (4.67)$$

et

$$\int_0^t y_{ei}^T(t) [h_{di}(x, t) + \Delta_{f_{di}}(x_i) + \delta_{f_{di}} \int_0^t |y_{ei}^T| dt \operatorname{sgn}(y_{ei}^T)] dt \geq -\gamma_{2i}^2 \quad (4.68)$$

où  $\gamma_{0i}^2 = \gamma_{1i}^2 + \gamma_{2i}^2$

En substituant (4.59) dans (4.67), il vient

$$\int_0^t y_{ei}^T(t) \xi_{f_{di}}^T(x_i) \left( \alpha_{f_{di}} \int_0^t y_{ei}(t) \xi_{f_{di}}(x_i) dt + \pi_{f_d}^* \right) dt + \int_0^t y_{ei}^T(t) \xi_{f_{di}}^T(x_i) \beta_{f_{di}} y_{ei}(t) \xi_{f_{di}}(x_i) dt \geq -\gamma_{1i}^2 \quad (4.69)$$

L'inégalité (4.69) peut être vérifiée suivant les mêmes étapes présentées dans le cas SISO pour prouver l'inégalité (4.32), c'est-à-dire en utilisant le calcul intégrale (4.34) à (4.38), avec

$$\hat{\pi}_{i\alpha} = \alpha_{f_d} y_{ei} \xi_{f_{di}}^T + \pi_{f_{di}}^* \text{ et } \hat{\pi}_{i\beta} = \beta_{f_{di}} y_{ei} \xi_{f_{di}}^T, i = 1, \dots, N.$$



#### 4.4.4. Simulation et résultats

Afin de valider la méthode de commande proposée, nous considérons la commande en poursuite du TRMS pour des trajectoires de vol variant en fréquence et en amplitude. La commande de l'appareil est effectuée par des commandes adaptatives floues décentralisées développées pour les sous-systèmes horizontal et vertical. Les modèles dynamiques des sous-systèmes sont donnés au chapitre 3, section 3.3.2.

Rapelons que l'ordre des sous-systèmes horizontal et vertical sont égaux  $n_h = n_v = 3$ , et les fonctions non linéaires locales de chaque sous-systèmes sont supposées inconnues. L'élaboration des lois de commande horizontale et verticale est effectuée selon le séquencement des étapes de l'algorithme proposé par le théorème 4.2. Alors, un seul système flou à trois entrées est utilisé pour approcher la dynamique de chaque sous-système, où on définit cinq fonctions d'appartenance pour chaque variable d'entrée conduisant à 125 règles, telles que:

Pour le sous-système horizontal,  $j = 1,2,3$

$$\begin{aligned}
 \mu_{F_{hj}^1}(x_{hj}) &= \frac{1}{(1+\exp(3\pi i/2(x_{hj}+2\pi i/3)))} \\
 \mu_{F_{hj}^2}(x_{hj}) &= \exp\left\{-\left(\frac{x_{hj}+\pi i/6}{\pi i/3}\right)^2\right\} \\
 \mu_{F_{hj}^3}(x_{hj}) &= \exp\left\{-\left(\frac{x_{hj}}{\pi i/3}\right)^2\right\} \\
 \mu_{F_{hj}^4}(x_{hj}) &= \exp\left\{-\left(\frac{x_{hj}-\pi i/6}{\pi i/3}\right)^2\right\} \\
 \mu_{F_{hj}^5}(x_{hj}) &= \frac{1}{(1+\exp(-3\pi i/2(x_{hj}-2\pi i/3)))}
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

Pour le sous-système vertical,  $j = 1,2,3$

$$\begin{aligned}
 \mu_{F_{vj}^1}(x_{vj}) &= \frac{1}{(1+\exp(4\pi i/2(x_{vj}+\pi i/5)))} \\
 \mu_{F_{vj}^2}(x_{vj}) &= \exp\left\{-\left(\frac{x_{vj}+\pi i/8}{\pi i/20}\right)^2\right\} \\
 \mu_{F_{vj}^3}(x_{vj}) &= \exp\left\{-\left(\frac{x_{vj}}{\pi i/20}\right)^2\right\} \\
 \mu_{F_{vj}^4}(x_{vj}) &= \exp\left\{-\left(\frac{x_{vj}-\pi i/8}{\pi i/20}\right)^2\right\} \\
 \mu_{F_{vj}^5}(x_{vj}) &= \frac{1}{(1+\exp(-4\pi i/2(x_{vj}-2\pi i/5)))}
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

L'hyperstabilité des parties linéaires des sous-systèmes de commande est satisfaite si nous choisissons  $Q_h = \text{diag}\{40, 20, 10\}$  et  $Q_v = \text{diag}\{50, 15, 15\}$ . En effet, la résolution de l'équation de Lyapunov (3.26) avec le modèle de référence décrit par l'équation d'état (3.74) et un temps de réponse  $T_s = 5$  (sec) mène aux résultats suivants :

$$P_h = \begin{bmatrix} 97.44 & -20.00 & -33.83 \\ -20.00 & 33.83 & -10.00 \\ -33.83 & -10.00 & 32.68 \end{bmatrix} \text{ et } P_v = \begin{bmatrix} 109.84 & -25.00 & -32.99 \\ -25.00 & 32.99 & -7.50 \\ -32.99 & -7.50 & 30.76 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

avec

$$K_{mi} = [-0.89 \quad -1.99 \quad -1.68] ; \quad \bar{b}_i = 0.89 \quad \text{pour } i = h, v \quad (4.76)$$

Les lois d'adaptation des paramètres des modèles flous  $\hat{f}_{di}(x_i, \hat{\pi}_{f_{di}})$ ,  $i = h, v$  sont calculés selon l'équation (4.59) comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{f_{dh}} &= -\alpha_{f_{dh}} \int_0^t \xi_{fh}^T(x_h) y_{eh}(t) d\tau + \beta_{f_{dh}} \xi_{fh}^T(x_h) y_{eh}(t) \\ \hat{\pi}_{f_{dv}} &= -\alpha_{f_{dv}} \int_0^t \xi_{fv}^T(x_v) y_{ev}(t) d\tau + \beta_{f_{dv}} \xi_{fv}^T(x_v) y_{ev}(t) \end{aligned} \quad (4.77)$$

où  $\xi_{fh}^T(x_h)$  et  $\xi_{fv}^T(x_v)$  sont les fonctions floues de base définies respectivement par les fonctions d'appartenances (4.73) et (4.74). Les erreurs filtrées  $y_{eh}(t)$  et  $y_{ev}(t)$  sont calculées par les relations (3.72) et (3.73) du chapitre 3, section 3.3.2.4.  $\alpha_{f_{dh}}$ ,  $\alpha_{f_{dv}}$ ,  $\beta_{f_{dh}}$  et  $\beta_{f_{dv}}$  sont leurs poids d'adaptations.

Les termes robustes des deux tensions de commande sont formulé selon la relation (4.60) en considérant la fonction de lissage donnée dans la remarque (4.2), tels que :

$$\begin{aligned} u_{sh}(t) &= \delta_{f_{dh}} \int_0^t |y_{eh}^T| dt \tanh(y_{eh}^T/\lambda) \\ u_{sv}(t) &= \delta_{f_{dv}} \int_0^t |y_{ev}^T| dt \tanh(y_{ev}^T/\lambda) \end{aligned} \quad (4.78)$$

Les paramètres du contrôleur utilisés en simulation sont les suivants :  $\alpha_{f_{dh}} = \alpha_{f_{dv}} = 10$ ,  $\beta_{f_{dh}} = \beta_{f_{dv}} = 5$  pour les lois d'adaptations des paramètres.  $\delta_{f_{dh}} = \delta_{f_{dv}} = 1.5$  et  $\lambda = 0.5$  pour les termes robustes.

Les lois de commande adaptative floue décentralisées appliquées au simulateur d'hélicoptère TRMS ont été implémentée sous l'environnement SIMULINK de MATLAB. La structure de commande est illustrée sur la figure (4.9) et les paramètres de l'hélicoptère utilisés sont donnés dans le Tableau (b.1). Pour cette application, le scénario de la commande que nous avons adopté c'était de piloter l'appareil pour trois types de test:

- (1) *Un test de performance en poursuite des signaux de référence sinusoïdaux de même amplitude 0.4 rad avec une fréquence de 50 secondes pour l'angle d'orientation, et de 100 secondes pour l'angle d'élévation. Les résultats de simulation sont présentés par les figures (4.10) à (4.13).*

- (2) Un test de robustesse de la loi de commande décentralisée vis-à-vis l'effet d'une perturbation. Le TRMS est exposé à une rafale de vent continue modélisée en simulation par une impulsion de largeur 50 secondes et d'amplitude 0.2 rad. Les trajectoires de référence ainsi que les résultats de simulation sont donnés par les figures (4.14) à (4.18).
- (3) Un test de robustesse de la loi de commande par rapport à la décentralisation, dans lequel nous simulons à l'instant  $t = 100$  secondes la rupture de commande (annulation de la commande) au niveau de rotor principal. Les résultats sont montrés par la figure (4.19) et (4.20).

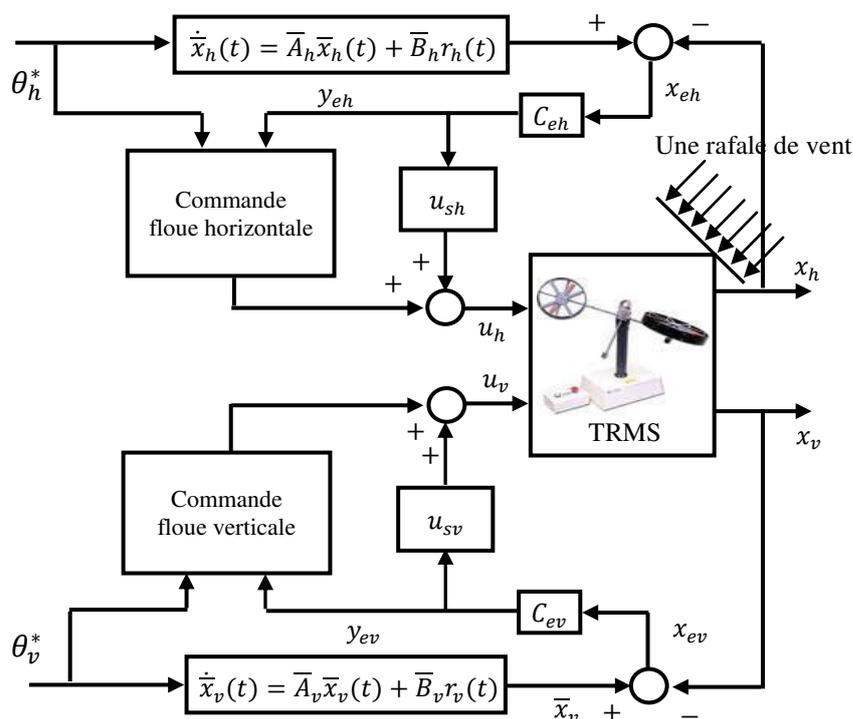


Figure 4.9 : Bloc diagramme de commande adaptative floue décentralisée du TRMS.

Les figures (4.10) et (4.11) montre l'évolution des trajectoires de référence et les réponses du TRMS en position et vitesse sur un horizon de  $[0, 200]$  secondes. On remarque qu'après quelques oscillations, les angles d'orientation et d'élévation  $(\theta_h, \theta_v)$  convergent vers leurs références  $(\theta_h^*$  et  $\theta_v^*$ ). Nous pouvons constater que les deux angles rejoignent ses trajectoires désirés en environ 5 secondes. Les mêmes remarques ont été observées pour les vitesses angulaires de mouvement  $(\Omega_h, \Omega_v)$ . Les erreurs de suivies montrées par la figure (4.12) restent bornées et convergent vers zéro. Elles prennent des valeurs importantes au démarrage dû aux conditions initiales et à l'initialisation des paramètres d'adaptations. Cependant, un bon choix de ces derniers permet de contourner ce problème. Il est important de rappeler que la composante de

commande par mode de glissement est introduite dans l'objectif de compenser les effets des erreurs d'approximation et des interactions entre les grandeurs des sous-systèmes horizontal et vertical. Les tensions de commande  $u_h$  et  $u_v$  appliquées aux deux moteurs, secondaire et principal sont présentées sur la figure (4.13). Nous remarquons bien que les deux tensions ne saturent pas et restent dans la plage de fonctionnement, c'est-à-dire  $[-2.5V, +2.5V]$ , et elle ne présentent aucunes variations brusques ni de broutement.

Les figures (4.13) à (4.17) montrent l'évolution des angles d'orientation et d'élévation, ses vitesses de variation et les tensions de commande avec injection d'une perturbation impulsionnelle. On remarque que la perturbation est immédiatement rejetée et les angles du TRMS poursuivent leurs trajectoires de référence. Les constatations sont pratiquement les mêmes pour les erreurs de poursuite malgré l'effet des approximations et de la perturbation importante injectée. Quant à eux, les tensions de commande restent dans la plage de fonctionnement et il n'y en a pas des grands pics de saturation.

Dans le troisième test, les réponses du TRMS en position et en vitesse avec les tensions de commande (voir figure 4.19 et 4.20) montrent que le rotor secondaire prenne en charge cette perturbation d'une manière convenable, et ceci, par la poursuite continue des trajectoires de référence. Le système est soumis à des oscillations de commande plus grandes au niveau du rotor principal. Ce dernier, ayant une dynamique lente, impose un temps plus long pour l'établissement du régime permanent. Donc, on peut constater que la commande appliquée au TRMS a pu réaliser une bonne conduite à travers une commande séparée des deux rotors.

A partir des résultats obtenus, nous pouvons conclure aussi que la structure de commande décentralisée par logique floue proposée conduit à de bonnes performances et stabilise le système même en présence des perturbations importantes.

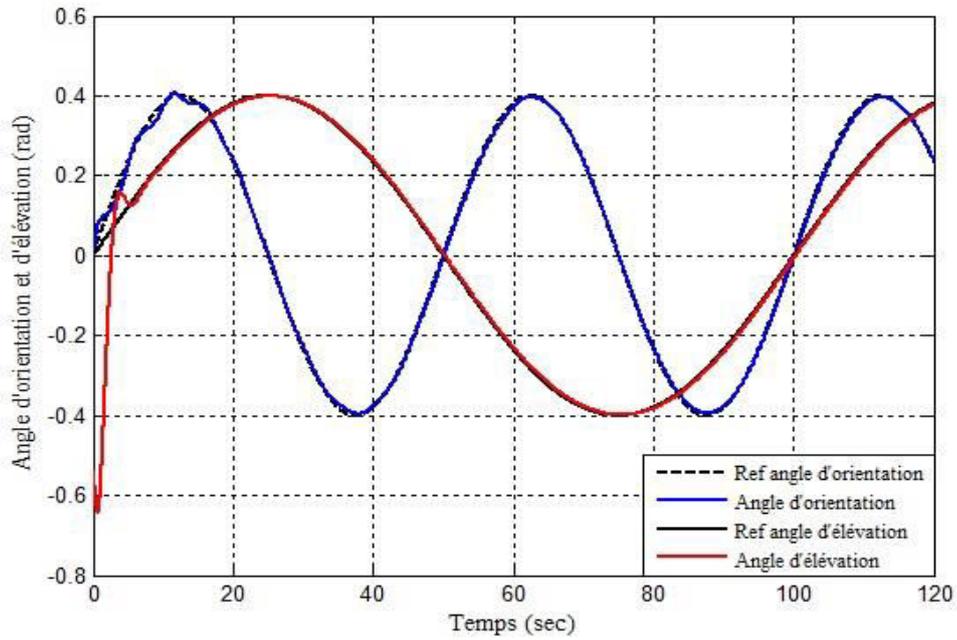


Figure 4.10 : Réponse en position  $\theta_h$  et  $\theta_v$  du TRMS non perturbé

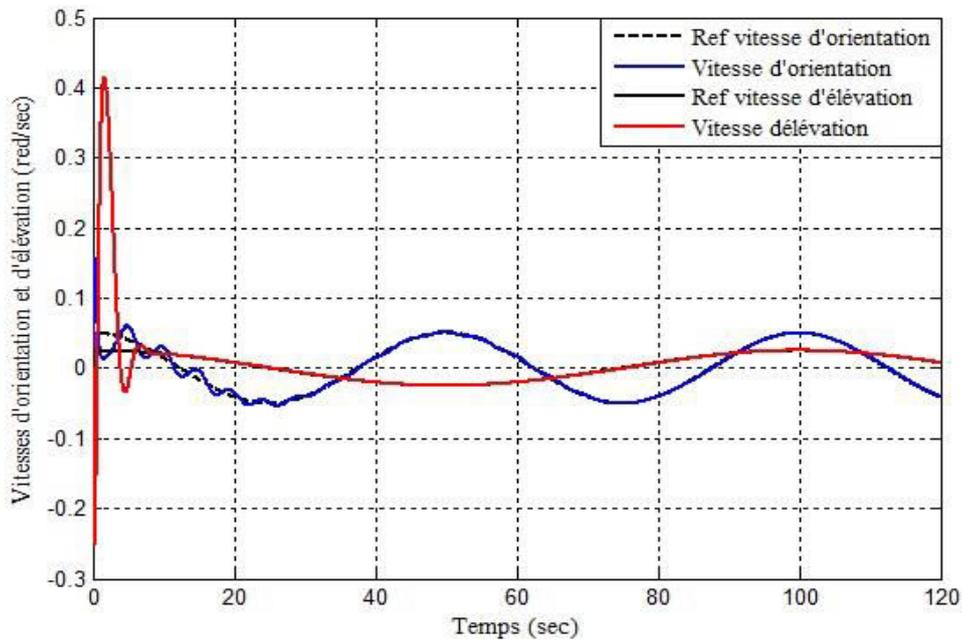


Figure 4.11 : Réponse en vitesse  $\Omega_h$  et  $\Omega_v$  du TRMS non perturbé.

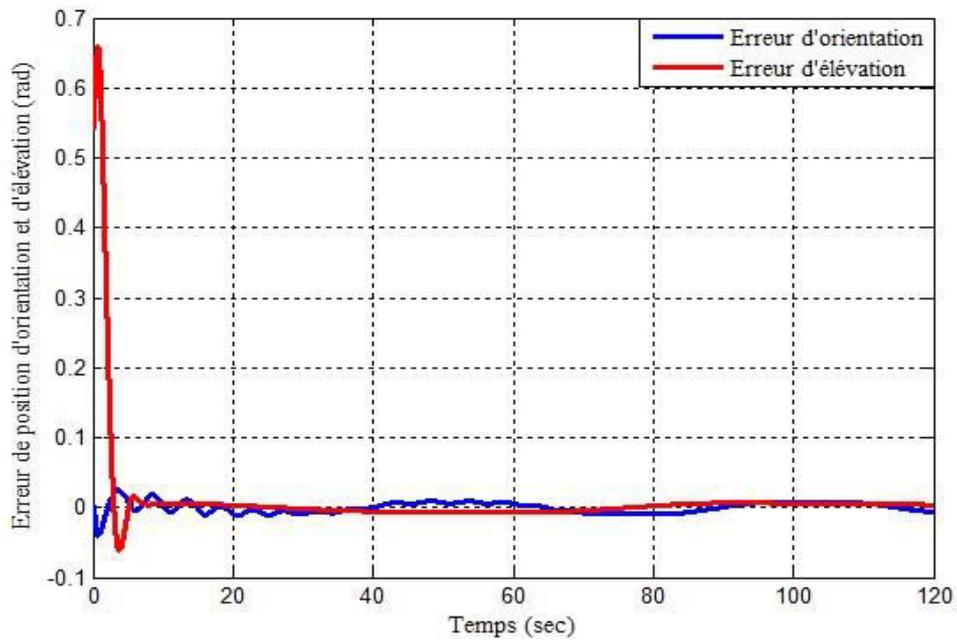


Figure 4.12: Erreurs de poursuite en position du TRMS non perturbé.

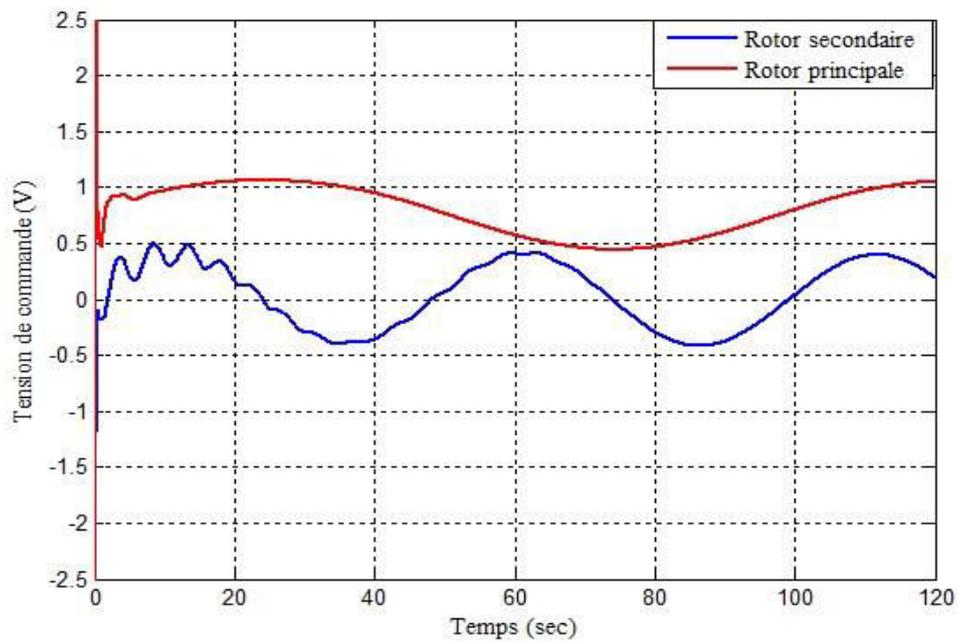


Figure 4.13: Tensions de commande  $u_h$  et  $u_v$  du TRMS non perturbé.

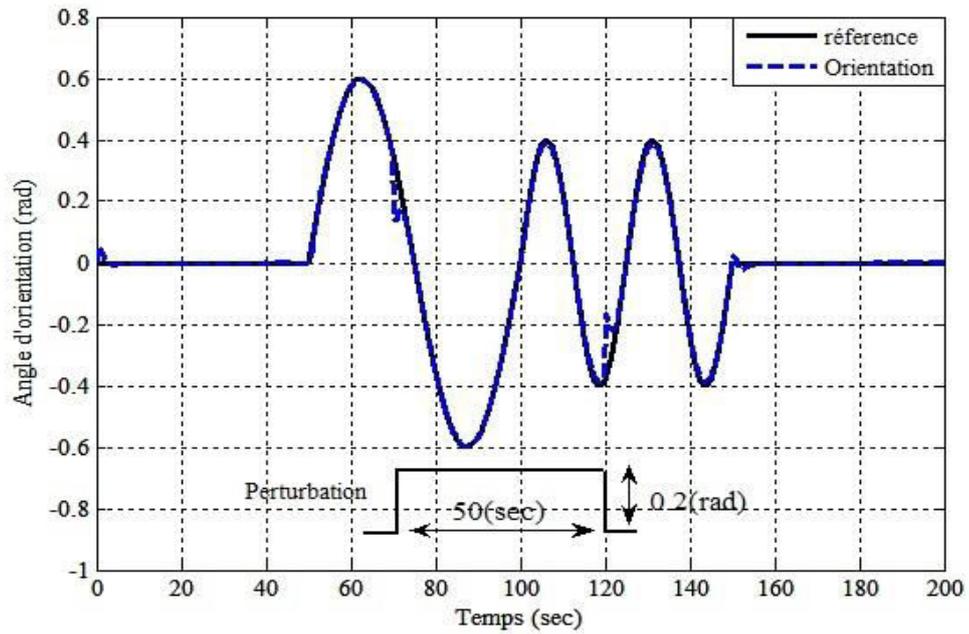


Figure 4.14: Angle d'orientation  $\theta_h(t)$  du TRMS perturbé.

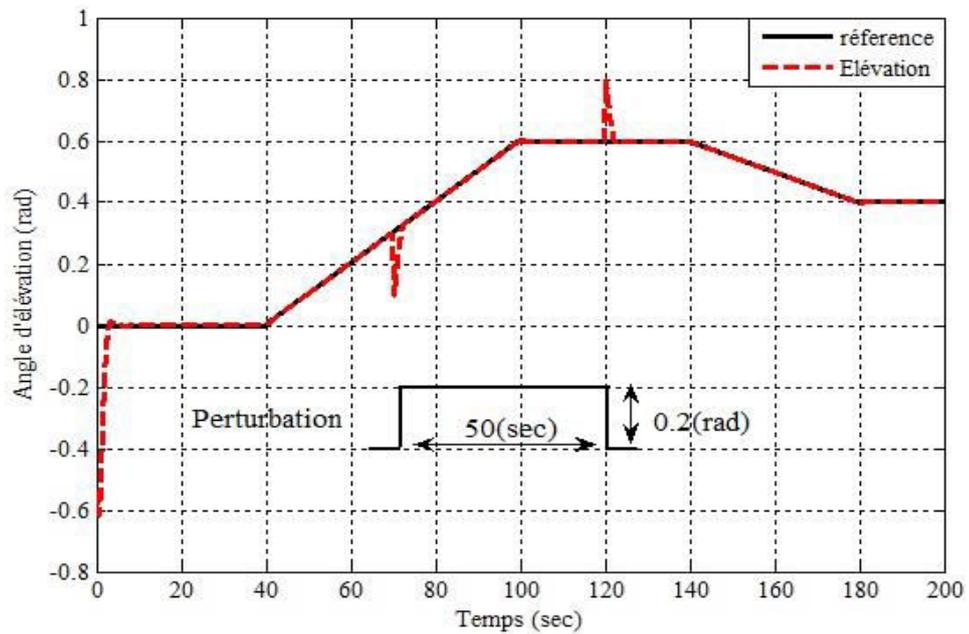


Figure 4.15: Angle d'élévation  $\theta_v(t)$  du TRMS perturbé.

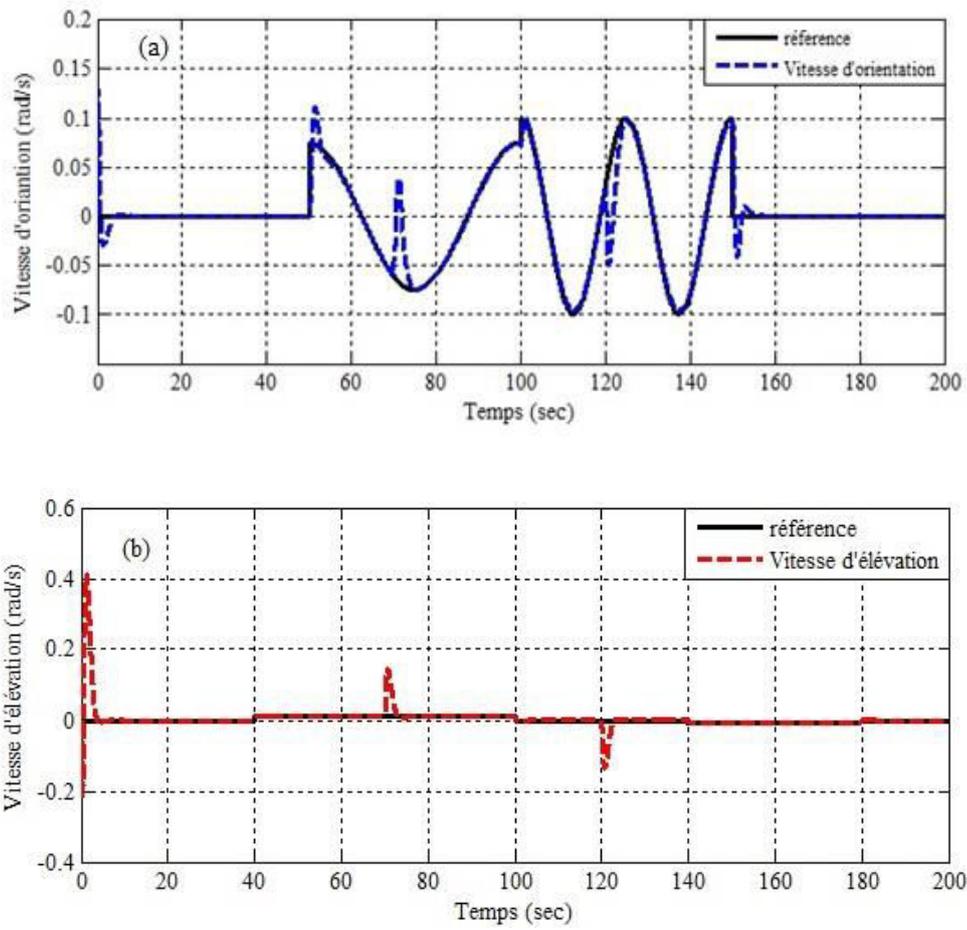


Figure 4.16: Réponse en vitesse  $\Omega_h$  et  $\Omega_v$  du TRMS perturbé.

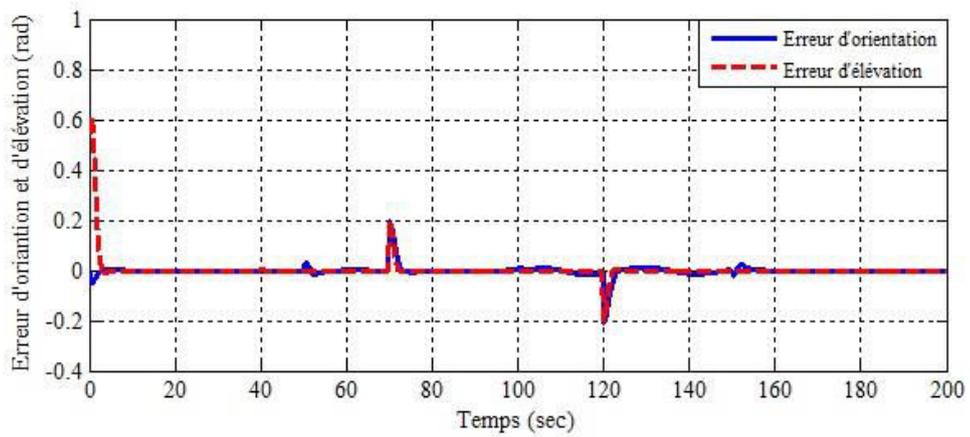


Figure 4.17: Erreurs de poursuite en position du TRMS perturbé.

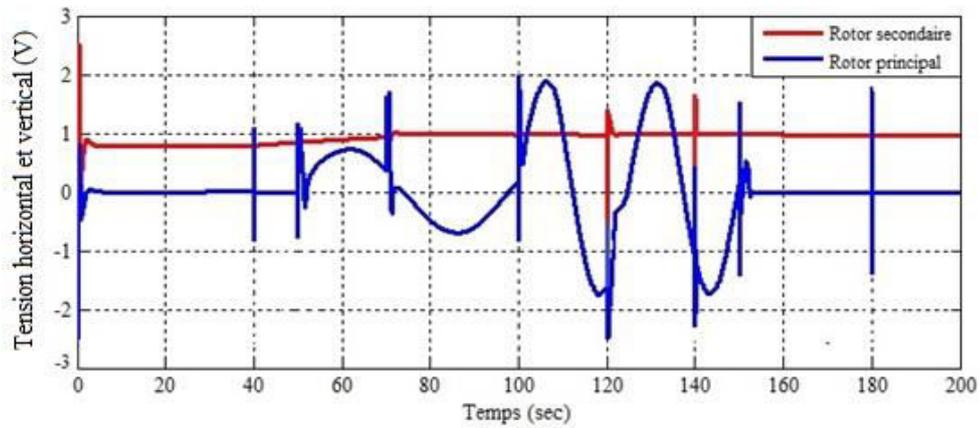


Figure 4.18: Tensions de commande  $u_h$  et  $u_v$  du TRMS perturbé.

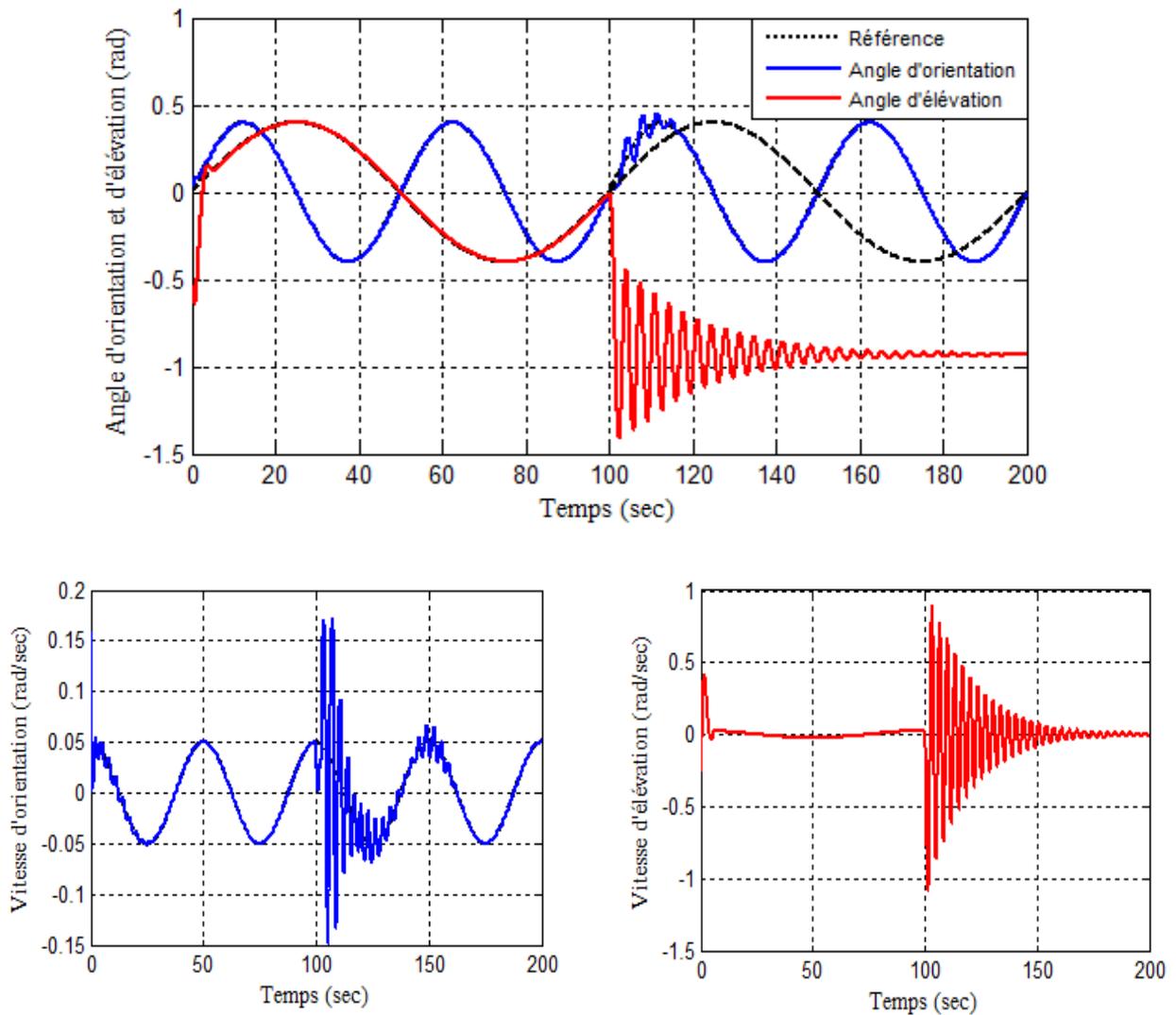


Figure 4.19 : Réponse en position et vitesse du TRMS avec test de rupture de liaison.

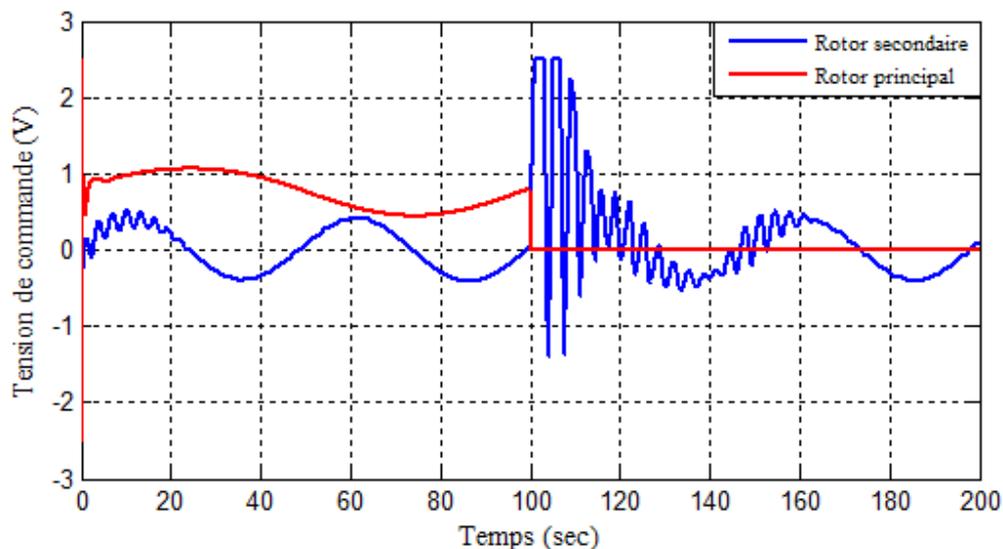


Figure 4.20 : Tensions de commande  $u_h$  et  $u_v$  du TRMS avec test de rupture de liaison.

#### 4.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de stabilisation de lois de commande adaptative floue indirectes par la théorie d'hyperstabilité pour prendre en charge une classe de systèmes non linéaires incertains.

En premier lieu, nous avons proposé une loi de commande adaptative floue indirecte pour une classe des systèmes non linéaires monovariables incertains. Dans ce schéma de commande, un système d'inférence flou est utilisé pour approcher la dynamique modifiée du système inconnu. L'ajustement des paramètres des estimateurs flous est fait par des lois d'adaptation permettant de garantir l'hyperstabilité et la convergence du système de commande. L'approche de commande proposée n'exige pas la connaissance du modèle du système, garantie la bornitude de tous les signaux dans le système bouclé et assure la convergence vers zéro l'erreur de poursuite. De plus, cette approche évite le problème de singularité de la loi de commande sans faire recours aux algorithmes de projections ni à l'inverse régularisé. Deux principales contributions sont présentées dans cette proposition. Dans la première, un seul système flou est utilisé pour élaborer la loi de commande par la transformation introduite sur le modèle du système permettant de surmonter les restrictions sur le gain de commande et résoudre le problème de singularité. La deuxième contribution consiste dans l'utilisation de la théorie d'hyperstabilité pour la synthèse de la loi de commande qui permet de garantir la stabilité globale sans aucune restriction sur les lois d'adaptation des paramètres du système flou. Les résultats de la simulation effectuée sur les

systèmes masse-ressort-amortisseur et pendule inversé montrent des résultats prometteurs de ces méthodes.

En second lieu, nous avons développé une commande adaptative décentralisée pour une classe de systèmes non linéaires interconnectés en utilisant les systèmes flous. Cette approche repose sur l'identification en ligne des non linéarités locales de chaque sous-système par un seul système flou. La loi de commande consiste d'une loi de commande adaptative floue simplifiée augmentée d'une composante de robustification par mode de glissement. La composante robuste est introduite pour assurer la stabilité et la robustesse de la structure de commande par rapport aux effets des erreurs d'approximation et aux effets des interconnexions entre les sous-systèmes et les perturbations externes. La loi de commande est toujours bien définie, c'est-à-dire le problème de division par zéro ne se pose pas, et l'initialisation des paramètres adaptatifs par zéro est possible avec une réduction remarquable dans la complexité de l'algorithme de commande.

Une application sur un simulateur de vol d'hélicoptère est présentée montre la convergence rapide, la bonne poursuite et la robustesse du système en boucle fermée.

---

## Conclusion générale

---

< La vie, c'est comme une bicyclette, il faut avancer pour ne pas perdre l'équilibre. >

↪ **Albert Einstein**

---

L'ensemble des travaux présentés dans cette thèse concerne la synthèse de lois de commande stabilisantes des systèmes non linéaires par la théorie d'hyperstabilité. Notre objectif a été d'essayer de donner de nouvelles orientations à cette théorie d'analyse, et ceci, on l'introduisons dans des domaines de commande traitant la stabilisation des systèmes non linéaires. Les résultats issus de ce travail de recherche est la synthèse des lois de commande suivantes:

- Lois de commande multi-contrôleurs pour des systèmes non linéaires mono-variables non perturbés,
- Lois de commande adaptative décentralisées pour des systèmes non linéaires interconnectés.
- Lois de commande adaptative floue indirecte pour une classe de systèmes non linéaires.

Le concept d'hyperstabilité utilisé pour l'analyse et la synthèse de ces lois de commande s'appui sur le fait que le système de commande en boucle fermée peut toujours être représentée par un schéma équivalent à contre-réaction qui comprend deux blocs : un bloc d'anticipation linéaire invariant dont la sortie est l'erreur de poursuite généralisée qui satisfait les conditions de positivité; un bloc de contre-réaction non linéaire contient les paramètres de synthèse de la loi de commande qui vérifié l'inégalité intégrale de Popov. En effet, la satisfaction de ces deux conditions assure la stabilité globale du système bouclé et la convergence asymptotique de l'erreur vers zéro. Cette démarche nous a permis d'étudier les performances de toutes les approches de commande proposées de façon aisée et générale, et ceci, malgré la diversité des problèmes et des domaines de commande abordées.

Contrairement à la méthode de Lyapunov qui nécessite, pour chaque problème de commande, la détermination d'une fonction candidate afin d'atteindre les objectifs visés.

Dans ce qui suit, nous donnons un résumé des résultats obtenus et des perspectives à notre travail.

Dans une première partie, nous avons donné un aperçu général sur les notions et les outils utilisés pour le développement de l'ensemble des méthodes que nous avons proposé. En premier lieu, tout d'abord, quelques outils mathématiques de modélisation des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires, qui nous ont servis dans le présent manuscrit, ont été rappelés. Puis, nous avons présenté le concept des systèmes d'inférence flous de type Takagi-Sugeno (T-S). Leur propriété d'approximation universelle lui permet d'être utilisé comme éléments de base pour la modélisation et la commande des systèmes complexes dont les modèles sont incertains ou difficiles à obtenir. Nous avons ensuite présenté, au travers des définitions, théorèmes et propriétés, la théorie d'hyperstabilité introduite par Popov pour l'analyse de la stabilité des systèmes physiques. Particulièrement, la notion de positivité et l'inégalité intégrale de Popov, sont des outils puissants permettant l'analyse des performances et la synthèse des lois de commande d'une classe importante de systèmes. Un bref état de l'art sur les théories de commande multi-contrôleurs par l'approche multi-modèle, la commande adaptative à modèle de référence et la commande adaptative floue sont exposées en dernier lieu. Leurs structures, leurs caractéristiques ainsi que leurs domaines d'application en automatique ont été présentés dans le but de développer des architectures de commande en utilisant le concept d'hyperstabilité.

Dans la seconde partie, nous avons proposé et développé une approche de commande multi-contrôleurs des systèmes non linéaires mono-variables non perturbés. En se basant sur une approximation du système par un descripteur multi-modèle flou de T-S, deux approches ont été présentées en considérant l'architecture du contrôleur local. Dans la première approche, des conditions de stabilité pour une loi de commande locale linéaire à retour d'état avec anticipation de la référence sont données. Celles-ci dépendent de la dynamique des modèles locaux, de la précision d'approximation du système non linéaire par le modèle flou de T-S et le choix optimum des fonctions d'activations. Dans une seconde approche, la loi de commande linéaire locale est augmentée par une composante adaptative permettant, avec un nombre réduit de contrôleurs, de surmonter le problème des erreurs d'approximation et assurer la stabilité du système en boucle fermée. Le mécanisme d'adaptation de la composante adaptative est conçu par la théorie d'hyperstabilité qui a permis d'aboutir à de nouveaux

conditions de stabilité sans aucune restriction sur le modèle du système à commander ou sur la loi de commande élaborée et son domaine de validité. Les résultats de la simulation effectuée sur un pendule inversé vérifient l'analyse théorique.

Dans la troisième partie, nous avons abordé le problème de stabilisation des systèmes non linéaires interconnectés par des lois de commande adaptative décentralisées hyperstables. L'idée était d'approximer l'ensemble des sous-systèmes par des modèles LTV autour d'une trajectoire de fonctionnement continue et lisse et d'utiliser des algorithmes de commande adaptative synthétisés par la théorie d'hyperstabilité, tels que, les algorithmes MCS et Er-MCSI développés par (Stoten, 1990) et (Neild, 2003) pour élaborer des lois de commande décentralisées. Ces lois sont simples calculées à partir des informations locales et ne requiert pas la connaissance du modèle global du système à commander. Donc, les contraintes de l'ordre et de non-linéarité imposées généralement par des schémas de commande non linéaires centralisés ont été résolus par des structures de commande adaptative décentralisées. En plus, l'utilisation du concept d'hyperstabilité dans la preuve de stabilité de la boucle fermée et la convergence des erreurs de poursuite, nous a permis d'éviter les problèmes rencontrés souvent en utilisant la méthode de Lyapunov, à savoir, le choix d'une fonction candidate.

Ces lois de commande ont été testées en simulation pour la commande en poursuite d'un simulateur de vol d'hélicoptère (TRMS). Les résultats obtenus ont montré la faisabilité des commandes réalisées ainsi que leurs robustesses vis-à-vis les variations paramétriques, les interconnexions et les perturbations externes.

Dans la quatrième et dernière partie, nous avons traité le problème de stabilisation des lois de commande adaptative floue indirecte par la théorie d'hyperstabilité pour prendre en charge une classe de systèmes non linéaires incertains. En premier lieu, une approche de commande est proposée pour la commande des systèmes mono-variables. Un seul système flou est utilisé pour approcher en ligne la dynamique inconnue du système. A partir de cette approximation, une loi de commande adaptative floue, avec la loi d'adaptation paramétrique est proposée. Le problème des erreurs de reconstruction, inhérent à ce type de stratégies de commande, est traité par l'emploi d'un terme robuste par mode de glissement. L'approche proposée repose sur une modification mathématique du modèle non linéaire pour surmonter les restrictions sur le gain de commande et résoudre le problème de singularité. En effet, cette loi de commande nous a permis de réduire le nombre de paramètres de conception et simplifier davantage la structure de commande. Les résultats de simulation effectuée sur

les systèmes masse-ressort-amortisseur et pendule inversé ont montré la capacité du contrôleur proposé pour la commande en poursuite des systèmes non linéaires SISO à dynamique inconnue.

En second lieu, nous avons développé une commande adaptative décentralisée pour une classe de systèmes non linéaires interconnectés. La loi de commande consiste en une loi de commande adaptative floue indirecte simplifiée augmentée d'une composante de robustification. Ce terme de commande robuste est introduit pour assurer l'hyperstabilité et la robustesse de la structure de commande par rapport aux effets des erreurs d'approximation et aux effets des interconnexions entre les sous-systèmes et les perturbations externes. Cette approche, comparée aux approches proposées dans la littérature, aucune condition restrictive n'est imposée sur les gains de commande, sur la loi de commande décentralisée ou sur les interconnexions du système. En effet, la loi de commande est toujours bien définie pour le système entier avec une réduction remarquable dans la complexité de l'algorithme de commande.

Cette technique a été appliquée en simulation sur le simulateur de vol d'hélicoptère (TRMS). Les résultats de simulation montrent clairement l'efficacité de la commande et sa robustesse par rapport aux interactions et aux perturbations externes.

L'ensemble des travaux réalisés au cours de cette thèse ouvre la voie à plusieurs perspectives aussi bien théoriques qu'applicatives. Deux perspectives théoriques à court terme pour ce travail peuvent être envisagées :

- Dans les stratégies de commande développées dans cette thèse, le vecteur d'état est supposé disponible. En pratique, la mesure de tous les états est généralement impossible à cause de contraintes physiques et/ou du coût élevé des capteurs. Il serait alors intéressant de reprendre les mêmes travaux de commande avec développement d'un observateur capable d'estimer les états du système non linéaire.
- L'approche de commande multi-contrôleurs développée au deuxième chapitre traite le cas d'un système monovarié non perturbé, une extension au cas d'un système perturbé et multivarié serait intéressante.

Cependant, plusieurs perspectives applicatives peuvent être envisagées pour profiter des avantages des algorithmes de commande proposés à titre d'exemple une commande adaptative décentralisée hyperstable appliquée à un quadri-rotor.

## Annexe a.

---

### Condition d'Ezberger

---

Dans cette section, nous présentons les conditions d'Ezberger permettant de vérifier l'existence des gains régulateurs  $K_i$  et  $K_{ri}$ .

La première condition est obtenue en substituant l'expression de  $K_i$  donnée par (2.24) dans l'équation (2.21), telle que :

$$B_i B_i^+ (A_i - A_m) - A_i + A_m = 0 \quad (\text{a.1})$$

avec

$$B_i^+ = (B_i^T B_i)^{-1} B_i^T \quad (\text{a.2})$$

Nous obtenons ainsi :

$$(I_n - B_i B_i^+) (A_i - A_m) = 0 \quad (\text{a.3})$$

La deuxième condition est déterminée à partir de (2.22) en utilisant l'expression de  $K_{ri}$  dans (2.25):

$$B_m - B_i B_i^+ B_m = 0 \quad (\text{a.4})$$

De façon plus simple :

$$(I_n - B_i B_i^+) B_m = 0 \quad (\text{a.5})$$

## Annexe b.

---

### Paramètres du TRMS

---

Le modèle du TRMS présenté dans le chapitre 4 représente la dynamique du mouvement de l'appareil dans les plans horizontal et vertical sous l'effet des différentes forces qui peut être schématisées par les figures suivantes (Manuel, 1996) :

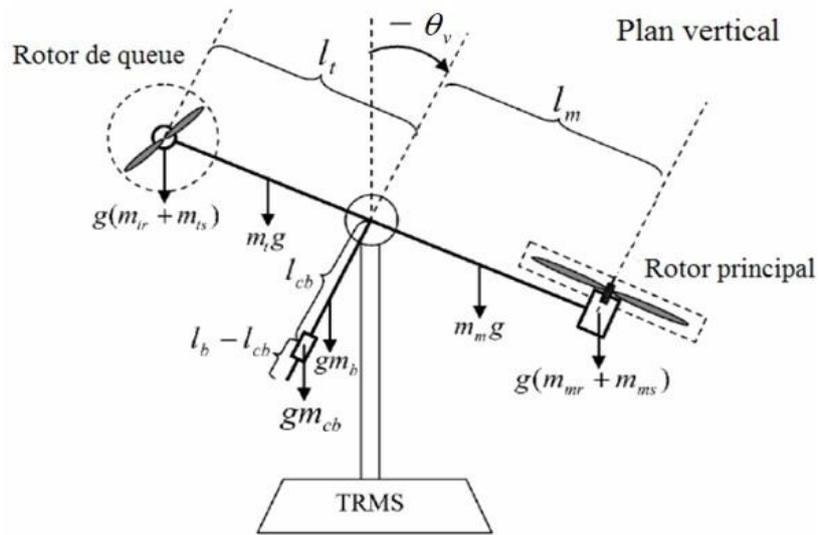


Figure b.1 : Forces de gravité agissantes sur le TRMS dans le plan vertical

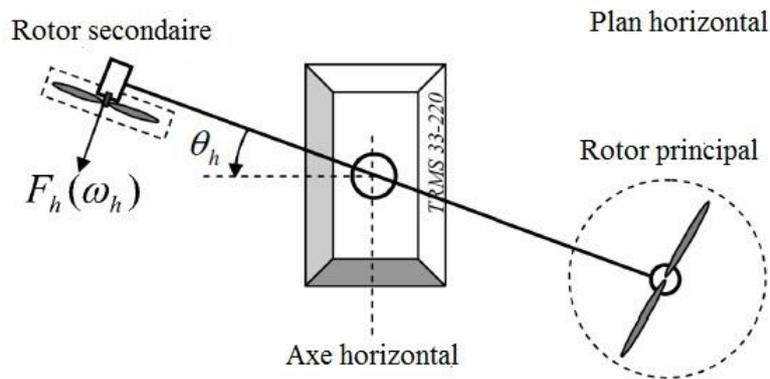


Figure b.2 : Forces agissantes sur le TRMS dans le plan horizontal

La masse de la poutre lorsqu'elle effectue un mouvement de rotation dans le plan horizontal génère une force orthogonale à la direction de rotation. Cette force est proportionnelle au carré de la vitesse angulaire de la poutre dans le plan horizontal. Tel que, le moment résultant autour de l'axe vertical est défini par :

$$g_{hv} = 0.5\Omega_h^2(a + b + c) \sin 2\theta_v \quad (b.1)$$

avec

$$a = \left(\frac{m_t}{2} + m_{tr} + m_{ts}\right) l_t \quad (b.2)$$

$$b = \left(\frac{m_m}{2} + m_{mr} + m_{ms}\right) l_m \quad (b.3)$$

$$c = \left(\frac{m_b}{2} l_b + m_{cb} l_{cb}\right) \quad (b.4)$$

Le mouvement du TRMS dans le plan horizontal est influencée par l'angle d'élévation  $\theta_v$  tel que la somme des moments d'inertie par rapport à l'axe vertical  $J_h$  est définie par :

$$J_h = d \sin^2 \theta_v + e \cos^2 \theta_v + f \quad (\text{b.5})$$

avec

$$d = \left( \frac{m_m}{3} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m^2 + \left( \frac{m_t}{3} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t^2 \quad (\text{b.6})$$

$$e = \frac{m_b}{2} l_b^2 + m_{cb} l_{cb}^2 \quad (\text{b.7})$$

$$f = m_{ms} r_{ms}^2 + \frac{m_{ts}}{2} r_{ts}^2 \quad (\text{b.8})$$

où l'ensemble des paramètres avec leurs valeurs numériques sont données par le tableau suivant :

**Tableau b.1** : Paramètres du simulateur d'hélicoptère TRMS.

Paramètres	Définitions	Valeurs
$m_{mr}$ (kg)	La masse du moteur principal	0.228
$m_m$ //	La masse de la partie principale de la poutre	0.0145
$m_{tr}$ //	La masse du rotor secondaire	0.206
$m_t$ //	La masse de la partie secondaire de la poutre	0.0155
$m_{cb}$ //	La masse du contrepoids	0.068
$m_b$ //	La masse de la poutre du contrepoids	0.022
$m_{ms}$ //	La masse de l'hélice principale	0.225
$m_{ts}$ //	La masse de l'hélice secondaire	0.165
$l_m$ (m)	La longueur de la partie principale de la poutre	0.240
$l_t$ //	La longueur de la partie secondaire de la poutre	0.250
$l_b$ //	La longueur de la poutre du contrepoids	0.260
$l_{cb}$ //	La distance entre le contrepoids et l'articulation	0.130
$r_{ms}$ //	Le rayon de l'hélice principale	$2.65 \cdot 10^{-5}$
$r_{ts}$ //	Le rayon de l'hélice secondaire	$1.6543 \cdot 10^{-5}$
$g$ ( $m/s^2$ )	L'accélération gravitationnelle	9.81
$J_v$ ( $kg.m^2$ )	La somme des moments d'inertie par rapport à l'axe horizontal	0.055448
$J_{mr}$ ( $kg.m^2$ )	Le moment d'inertie dans le moteur principal	$2.65 \cdot 10^{-5}$
$J_{tr}$ ( $kg.m^2$ )	Le moment d'inertie dans le moteur secondaire	$1.6543 \cdot 10^{-5}$
$T_{mr}$ --	La constante du temps du moteur principal	1.432
$T_{tr}$ --	La constante du temps du moteur secondaire	0.3842
$K_{mr}$ --	Le gain statique du moteur principal	1
$K_{tr}$ --	Le gain statique du moteur secondaire	1
$K_v$ (Nms/rad)	La constante de friction vertical	0.00545371
$K_h$ (Nms/rad)	La constante de friction horizontal	0.0095

---

## Bibliographie

---

### A

---

- Ahmad S. M., Chipperfield A. and Tokhi M. (2002). Dynamic modelling and open-loop control of a twin rotor multi-input multi-output system. *Journal of Systems and Control Engineering* , 216 (6), 477-496.
- Anderson B. D. (1967). A system theory criterion for positive real matrices. *Journal SIAM Control* , 5, 172-182.
- Arif T. (2008). Adaptive Control of Rigid Body satellite. *International Journal of Automation and Computing* , 5 (3), 296-306.

### B

---

- Balakrishnan J. (1996). Control System Design Using Multiple Models, Switching and Tuning. *Ph.D. Dissertation*, Yale University, USA.
- Ban X., Gao X. Z., Huang X. and Yin H. (2007). Stability analysis of the simplest Takagi-Sugeno fuzzy control system Using Popov Criterion, *Soft Computing in Industrial Applications*, 39, 63-71
- Beard G. S. & Stoten, D. P. (1996). Energy efficient pressure control of a hydraulic actuator circuit using MCS adaptive control. *In UKACC International Conference on Control*, (pp. 1474–1478). Exeter.
- Bodson S. S. & Sastry M. (1989). *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness*. NJ: Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Benchoubane H. & Stoten D. P. (1992). The Decentralized Minimal Controller Synthesis Algorithm . *International Journal of Control* , 56 (4), 967-983.
- Bernal M., Sala A., Jaadari A. and Guerra T. (2011). Stability analysis of polynomial fuzzy models via polynomial fuzzy Lyapunov functions, *Fuzzy Sets and Systems*, 185 (1), pp. 5–14,.
- Bernardo M. D. & Stoten, D. P. (1997). A new extended minimal control synthesis algorithm with an application to the control of chaotic systems. *Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control*. San Diego, California USA.
- Bernardo M. D., Montanaro U. and Santini S. (2008). Novel hybrid MRAC-LQ control schemes: synthesis, analysis and application. *International Journal of Control* , 81 (6), 940–961.

- Boukhatela D. (2002). *Contribution à la commande décentralisée des systèmes complexes interconnectés. Application en robotique*. Thèse de doctorat, Ecole nationale polytechnique Alger.
- Boukhatela D., Boudjema F., Madani T., Boucherit M. S. and M'Sirdi N. K. (2003). A new decentralized variable structure control for robot manipulators. *Int. J. of Robotics and Automation*, 18(1), 28-40.
- Borne P., Dauphin-Tanguy G., Richard J. P., Rotella F. and Zambettakis I. (1993). *Modélisation et identification des processus* (Vol. tome 1). Paris: In Editions Technip.
- Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., and Balakrishnan V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA.
- Bowes S. R. & Li J. (2000). New Robust Adaptive Control Algorithm for High Performance AC Drives. *IEEE Trans. Industrial Electronics* , 47 (2), 325-336.
- Buhler H. (1994). *Le réglage par logique floue*. Presses Polytechniques Rommandes.

## C

---

- Catino B., Santini S. and Bernardo M. d. (2003). MCS Adaptive Control of Vehicle Dynamics: an Application of Bifurcation Techniques to Control System Design . *Proceeding of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, (pp. 2252-2257). Maui, Hawaii, USA.
- Chadli M. (2002). *Stabilité et commande des systèmes décrits par des multimodèles*. Thèse de doctorat. Institut national polytechnique de lorraine.
- Chang M. H. & Davison E. J. (1999). Adaptive Switching Control of LTI MIMO Systems using a Family of Controllers Approach. *Automatica* , 35, 453-465.
- Chang Y. C. (2000). Robust Tracking Control for Nonlinear MIMO Systems via Fuzzy. *Automatica*, 36, 1535–1545.
- Chang W. (2001). Adaptive fuzzy-based tracking control for nonlinear SISO systems via VSS and  $H_{\infty}$  approaches. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 9, 278-292.
- Chen B. S., Lee C.H. and Chang Y.C. (1996).  $H_{\infty}$  Tracking Design of Uncertain Nonlinear SISO Systems: Adaptive Fuzzy Approach, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 4(1), 32-43.
- Chelihi A. (2005). *Synthèse d'une commande adaptative à modèle de référence par la théorie d'hyperstabilité application à la machine asynchrone*. Mémoire de magister. Université de boumerdes.
- Chelihi A. & Chemachema M. (2013a). Model reference adaptive control of twin rotor MIMO system via minimal controller synthesis, *Journal of Systems and Control Engineering* , 228 (6), 406-418.
- Chelihi A. & Chemachema M. (2013b). A Modified Decentralized Adaptive Control For Twin Rotor MIMO System using hyperstability theory. *Conférence internationale des Energies Renouvelables 19-21 Décembre 2014, Monastir Tunisie*.
- Chemachema M. (2007). *Contribution a la commande adaptative neuronale floue des systèmes non linéaires*. Thèse de Doctorat . Université de Constantine.
- Claveau F. (2005). *Contribution à l'analyse et la commande structurée des grands systèmes*. Thèse de doctorat, l'Ecole Centrale de Nantes.

## D

---

- Doraraju P. & Nondy R. K. (2000). A Decentralized Adaptive Stabilizer based on Minimal Controller Synthesis Algorithm for a Multi-machine Power System . *Proceedings of IEEE International Conference on Industrial Technology*, (pp. 307-312). Goa, India.
- Dubois L., Dieulot J. and Borne P. Use of Fuzzy Logic in Multi-Models Control. In *the Proceedings of the International Conference on Systems, Man and Cybernetics, IEEE SMC'94*, (pp. 471-474). San Antonio, Texas, USA, October 1994.
- Duan Z., Wang J. and Huang L. (2007). Special decentralized control problems in discrete-time interconnected systems composed of two subsystems. *Systems & Control Letters*, 56, 206-214.
- Driankov D., Hellendorn H. and Palm R. (1996). *Model based fuzzy control*, In Springer-Verlag, New York.

## E

---

- Essounbouli N., Hamzaoui A., and Zaytoon J. ( 2006). Direct and Indirect Robust Adaptive Fuzzy Controllers for a Class of Nonlinear Systems . *Inter Jour of Control, Automation, and Systems*, 4, 146-154.
- Elfelly N. (2010). *Approche neuronale de la représentation et de la commande multimodèles De processus complexes*. Thèse de doctorat, Université de Savoie.

## F

---

- Fierro R., Lewis F. and Liu K. (1998). Hybrid Control System Design Using Fuzzy Logic Interface. *Circuits Systems Signal Processing* , 17 (3), 401-419.
- Fossard A.J. & Normand-Cyrot D. (1989) Systèmes non linéaires, Tome 3: Commande. Ouvrage collectif réalisé dans le cadre du Groupe Non Linéaire DRET/AF CET, Ed. Masson.

## G

---

- Golea N., Golea A, and Kadjoudj M. (2002). Indirect fuzzy adaptive control: Hyperstability approach, *IEEE Industrial Electronics Society ( IECON'02)*,2,1487-1492.
- Golea N., Golea A. and Benmahammed K. (2000). Fuzzy adaptive control : an hyperstability approach. *The 7th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS)*, (pp. 550 - 553). Jounieh.
- Golea N., Golea A. and Benmahammed K. (2003). Stable Indirect Fuzzy Adaptive Control. *Fuzzy Sets and Systems*, 137, 353–366.
- Golea N., Golea A. and Kadjoudj K. (2003). Fuzzy approximation-based model reference adaptive control nonlinear systems. *IEEE International Conference on control applications (CAA)*, (pp. 836–840), Istanbul, TURKEY.
- Guerra T.M., Kruszewski A., Vermeiren L. and Tirmant H. (2006). Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi–Sugeno form, *Fuzzy Sets and Systems*, 157, 1248–1259.

Guerra T., Bernal M., Guelton K. and Labiod S. (2012). Non-quadratic local stabilization for continuous-time Takagi–Sugeno models, *Fuzzy Sets and Systems*, 201, 40–54.

Guo Y., Jiang Z. and Hill, D. (1999). Decentralized robust disturbance attenuation for a class of large-scale nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 37, 71-85.

## H

---

Han H., Chun-Y. S. and Stepanenko Y. (2001). Adaptive control of a class of nonlinear systems with nonlinearly parameterized fuzzy approximators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2), 315-322.

Hill D. J., Wen C. and Goodwin G. C. (1988). Stability analysis of decentralized robust adaptive control. *Systems & control letters*, 11 (4), 277-285.

Hammed A. & Radouane I. (1983). Decentralized nonlinear adaptive feedback stabilization of large scale interconnected systems. *IEE Proceeding-Control Theory and Applications*, 130 (1), 57-62.

Ho H., Wong Y., and Rad A. (2009). Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control with Chattering Elimination for Nonlinear SISO Systems . *Simulation Modeling Practice and Theory*, 17, 1199-1210.

Hodgson S. P. & Stoten D. P. (1996). Passivity-based Analysis of the Minimal Control Synthesis Algorithm. *International Journal of Control*, 63 (1), 67-84.

Hodgson S. P. & Stoten D. P. (1999). Robustness of the Minimal Control Synthesis Algorithm to Non-linear Plant with Regard to the Position Control of Manipulator. *International Journal of Control*, 72 (14), 1288-1298.

Hua C., Guan X. and Shi P. (2004). Decentralized robust model reference adaptive control for interconnected time-delay systems. *Proceeding of the American Control Conf.*, 5, 4285-4289.

Huang S.N., Tan K.K. and Lee T.H. (2005). Decentralized control of a class of large-scale nonlinear systems using neural networks. *Automatica*, 41(9), 1645–1649.

Huang Y., Qi R. and Tao G. (2014). An adaptive state tracking control scheme for T–S fuzzy models in non-canonical form and with uncertain parameters, *Journal of the Franklin Institute*, 351, 3610–3632.

Hyun C. H., Park C.W. and Kim S. (2010). Takagi–Sugeno fuzzy model based indirect adaptive fuzzy observer and controller design, *Information Sciences*, 180, 2314–2327.

## I

---

Ioannou P. A. (1986). Decentralized adaptive control of interconnected systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 31 (4), 413-426.

Isidori A. (1989.). *Non linear control systems*. Berlin: (2nd edition) Springer Verlag.

## J

---

Jang J. S. R. (1995) Neuro fuzzy modelling and control. *IEEE Trans. Automatic Control*, 83 (3), 378-404.

- Jiang Z. P. (2000). Decentralized and adaptive nonlinear tracking of large-scale systems via output feedback. *IEEE Trans. Automatic Control* , 45 (11), 2122-2128.
- Jin Y. & Pagilla P. (1998). Decentralized adaptive fuzzy control of robot manipulators. *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetic-B* , 8 (1), 47-57.

## K

---

- Khaber F., Hamzaoui A., Zehar, K., and Essounbouli N. ( 2006). New Stable Adaptive Fuzzy Approach to Control Uncertain Nonlinear SISO Systems. *Inter. Jour of Systems Science*, 37, 437-445.
- Kau S., Lee H., Yang C., Lee C., Hong L. and Fang C. (2007). Robust H1 fuzzy static output feedback control of T-S fuzzy systems with parametric uncertainties. *Fuzzy sets and systems*, 158, 135-146.
- Khalil H. (2002). *Nonlinear Systems* (Vol. Upper Saddle River). NJ: Prentice-Hall.
- Koo T. J. (2001). Stable model reference adaptive fuzzy control of class of nonlinear systems *IEEE Trans. Fuzzy systems* , 9 (4), 624 - 636.

## L

---

- Labiod S., Boucherit, M. S., and Guerra, T. M. (2003). Commande adaptative floue d'une classe de systèmes non linéaires monovariabiles. *LFA'03*, (pp. 169-176) Tours, France, 2003.
- Labiod S. & Boucherit M. (2004). Stable Indirect Fuzzy Adaptive Control of a Class of SISO Nonlinear Systems. *Arch. Control Science* 14(1), 27–43.
- Labiod S., & Guerra T. (2007). Direct Adaptive Fuzzy Control for a Class of MIMO Nonlinear Systems . *Inter Jour of Systems Science*, 38, 665–675.
- Lagoa C. M., Hao C. and Movsichoff B. A. (2004). Adaptive control algorithms for decentralized optimal traffic engineering in the internet . *IEEE Trans. Networking* , 12 (2), 415-428.
- Landau Y. D. (1979). *Adaptive control, the model reference approach*. New York: Marcel Dekker.
- Lie J., Wang H. O., Newmann D. and Tanaka K. (2000). Dynamic parallel distributed compensation for Takagi-Sugeno fuzzy systems : An LMI approach. *Information Sciences*, 123, 201-221.
- Lian K. L., Chiu C. S. and Liu P. (2002). semi-decentralized adaptive fuzzy control for cooperative multirobot systems with  $H_{\infty}$  motion/internal force tracking performance. *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetic-B* , 32 (3), 269-280.
- Liu M. (1997). Decentralized adaptive control for robot arm tracking. *In Proc. Int. Conf. Robotics Automat.*, 1731-1736.
- Liu Y. & Li X. Y. (2002). Decentralized robust adaptive control of nonlinear systems with unmodeled dynamics. *IEEE Trans. Automatic Control* , 47 (5), 848-856.

## M

---

- Mancilla-Aguilar J. L. (2000). A Condition for the Stability of Switched Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* , 45 (11), 2077-2079.
- Manamanni N., Mansouri B., Hamzaoui A. and Zaytoon J. (2007). Relaxed conditions in tracking control design for T–S fuzzy model, *JIFS – Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 18 (2), 185–210.
- Manual. (1996). *Twin Rotor MIMO System Manual*. UK: Feedback Instruments Ltd.
- Marino R. & Tomei P. (1995). *Nonlinear Control Design, NJ: Prentice*. NJ: Prentice Hall: Englewood Cliffs.
- Mendel J. M. Fuzzy systems for engineering: A tutorial,” *Proc. IEEE*, 83(3), 347-377, Mar. 1995.

## N

---

- Narendra K. S., & Balakrishnan J. (1994). A Common Lyapunov Function for Stable LTI Systems with Commuting A-Matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39 (12), 2469-2471.
- Noriega J., & Wang H. (1998), A direct adaptive neural network control for unknown nonlinear systems and its application. *IEEE trans. Neural Networks*, 9, 27-34.

## P

---

- Pagès O. (2001). *Etude et comparaison de différentes structures de commande multi-contrôleurs, application a un axe robotisé*. Thèse de doctorat, Université de Savoie.
- Passino K.M. and Yurkovich S. (1998). *Fuzzy Control*. Addison-Wesley Longman Inc.
- Park J. H., Kim S., and Moon C. (2006). Adaptive fuzzy controller for the nonlinear systems with unknown sign of the input gain . *International Journal of Control, Automation and Systems*, 4, 178-186.
- Phan P., & Gale T. (2008). Direct Adaptive Fuzzy Control with a Self-Structuring Algorithm. *Fuzzy Sets and Systems*, 159, 871–899.
- Perutka K. & Dostalek P. (2009). Simple decentralized autonomous adaptive nonlinear real-time controller with controller source code optimization: Case study. *Proceedings of IEEE International Symposium on Autonomous Decentralized Systems ISADS* , 87-92.
- Popov V. M. (1962). Absolute stability of nonlinear control system of automatic control. *Automation Rem. Control* , 22, 857-875.
- Popov V. M. (1964). Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions. *Rev. Roum. Sci. Tech., Ser. Electrotech. Energ* , 9, 629-690.
- Popov V. M. ( 1973). *Hyperstability of control systems*. Berlin: Springer-Verlag.
- Boukroune A., Tadjine M., M'Saad M., & Farza M. (2008). A unified approach for design of indirect adaptive output-feedback fuzzy controller. *International Journal of Intelligent Systems Technologies and Applications*, 5, 83-103.

## R

---

Rantzer A. (1996). On the Kalman–Yakubovich–Popov lemma. *Systems and Control Letters*, 28 (1), 7–10.

## S

---

Sarma P. (2001) Multivariable gain-scheduled fuzzy logic control of an exothermic reactor. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 14(4), 457-471.

Serrani A. (2004). Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems. *Automatica* , 40 (4), 709–710.

Slotine J. & Weiping, L. (1991). *Applied Nonlinear Control*. New Jersey, USA: Prentice-Hall.

Spooner J.T. & Passino K. M. (1996). Stable adaptive control using fuzzy systems and neural networks. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6 (2), 250-265.

Spooner J.T. & Passino K.M. (1996). Adaptive control of a class of decentralized nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 41(2), 280-284.

Spooner J.T. & Passino K. M. (1997). Indirect adaptive fuzzy control for a class of decentralized systems. *American Control Conference (ACC),(1)* 2863-2867, Albuquerque, NM.

Spooner J.T. & Passino K.M. (1997). Direct adaptive fuzzy control for a class of decentralized systems. In Proc. ACC, 2863-2867.

Spooner J.T. & Passino K.M. (1999). Decentralized adaptive control of nonlinear systems using radial basis neural networks. *IEEE Tans. Aut. Contr.*, 44(11), 2050-2057.

Spooner J. T., Maggiore M., Ordonez R. and Passino K. M. (2002). *Stable Adaptive Control and Estimation for Nonlinear Systems: Neural and Fuzzy Approximator Techniques*. John Wiley & Sons.

Stoten D. P. (1992). Implementation of MCS on a servo-hydraulic testing-machine. *Proceeding Instn Mech. Engrs, Part I: J. Systems and Control Engineering*, 13 (206), 189–194.

Stoten D. P. & Benchoubane H. (1990). Robustness of a Minimal Controller Synthesis Algorithm. *International Journal of Control*, 3 (4), 851-861.

Stoten D. P. & Benchoubane H. (1992). The extended minimal controller synthesis algorithm. *Int. J. Control*, 56, 1139-1165.

Stoten D. P. & Hodgson S. P. (1991). Comparative implementation studies of the minimal controller synthesis algorithm on a class 1 manipulator . *Proceeding Instn Mech. Engrs, Part I: J. Systems and Control Engineering*, 11 (205), 23–33.

Aziz K. I. & Thomson M. (1996). Robustness of a minimal observer synthesis algorithm. *Int. J. Control*, 64(1), 141–154.

Stoten D. P. & Hodgson S. P. (1998). Passivity-based analysis of the decentralized and extended minimal control synthesis algorithms. *Int. J. Control*, 69(5), 633–646.

Stoten D. P. & Benchoubane H. (1992). The extended minimal controller synthesis algorithm. *Int. J. Control*, 56, 1139-1165.

Stoten D. P. & Neild S. A. (2003). The error-based minimal control synthesis algorithm with integral action. *Proc of Inst. Mech. Eng. - Part I Journal of System and Control Engineering*, 217, 187-201.

di Bernardo M., di Gennaro F., Olm J.M. and Santini S. (2010). Discrete-time minimal control synthesis adaptive algorithm. *Int. J. Control*, 56, 1139-1165.

---

## T

---

Takagi T. & Sugeno M. (1985). Fuzzy Identification of Systems and its Application to Modelling and Control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-15 no (1), 116-130.

Tanaka K., Ikeda T. and Wang H. O. (1998). Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers: Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6 (2), 250-265.

Tanaka K., Ikeda T., and Wang H. O. (1996). Robust Stabilization of a Class of Uncertain Nonlinear Systems via Fuzzy Control: Quadratic Stabilizability, H Control Theory and Linear Matrix. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4 (1), 1-13.

Tong S. & Chai T. Y. (1999). Fuzzy adaptive control for a class of nonlinear systems, *Fuzzy Sets and Systems*, 101, 31–39.

Tong S., Li H. X. and Chen G. (2004). Adaptive fuzzy decentralized control for a class of large-scale nonlinear systems. *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetic-B*, 34 (1), 770-775.

Tsai, Y.W., Shyu, K.K. & Chang, K.C. (2001). Decentralized variable structure control for mismatched uncertain large-scale systems: a new approach. *Systems & Control Letters*, 43, 117-125.

---

## W

---

Wang L.X. (1994). *Adaptive Fuzzy Systems and Control*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1994.

Wang H. O., Tanaka K. and Griffin M. F. (1996). An Approach to Fuzzy Control of Nonlinear Systems: Stability and Design Issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4 (1), 14-23.

Wang S. H. & Davison E. (1973). On the stabilisation of decentralized control systems. *IEEE Trans. Automatic control*, 18 (5), 473-478.

Wang W., Chien Y., Leu Y. and Lee T. (2010, May). Adaptive T–S fuzzy-neural modeling and control for general MIMO unknown nonaffine nonlinear systems using projection update laws. *Automatica*, , 852-863.

Willems J. C. (1972). Dissipative dynamical systems, Part II: Linear-systems with quadratic supply rates. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 352- 393.

---

## X

---

Xie X.P. & Hu S.L. (2015) Relaxed stability criteria for discrete-time Takagi–Sugeno fuzzy systems via new augmented non-quadratic Lyapunov functions, *Neurocomputing*, 166, 416–421.

- Xu D. & Ugrinovskii V. (2013). Decentralized measurement feedback stabilization of large-scale systems via control vector Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 62 (12), 1187-1195.
- Xu J., Hang C. and Liu C. (2000). Parallel Structure and Tuning of a Fuzzy PID Controller. *Automatica*, 36, 673-684.

## Z

---

- Zhung T. P. (2001). Stable adaptive fuzzy sliding mode control of interconnected systems fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems*, 122, 5–19.
- Zhu X. L., Chen B., Wang Y. and Yue D. (2013).  $H_\infty$  Stabilization criterion with less complexity for non uniform sampling fuzzy systems, *Fuzzy Sets and Systems*, 225, 58–73.