UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

THÈSE présentée par
Abdallah ROUBI

pour obtenir le grade de docteur en mathématiques

Spécialité : **Analyse Stochastique**

Équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) avec application au contrôle stochastique et aux équations aux dérivées partielles (EDP)

Soutenue le : 12 novembre 2022

Devant le jury composé de :

Nabil Khelfallah	Université de Biskra	Président du jury
Boubakeur Labed	Université de Biskra	Directeur de thèse
Khaled Bahlali	Université de Toulon	Directeur de thèse
Khaled Melkemi	Université de Batna 2	Examinateur
Said Hamadene	Université du Maine, Le Mans	Examinateur
Adrian Zalinescu	Université de Alexandru Ioan Cuza, Iasi	Examinateur

Dedicace

A mes chers parents
et à toute ma famille

REMERCIEMENTS

Je tiens à présenter toute ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds tout particulièrement mon directeur de thèse Khaled Bahlali de l'université de Toulon pour le temps consacré à la lecture et aux réunions qui ont rythmé les différentes étapes de ma thèse, les discussions que nous avons partagées ont permis d'orienter mon travail d'une manière pertinente. Je remercie également mon directeur de thèse Boubakeur Labed de l'université de Biskra de m'offrir l'occasion de travailler sous sa direction dans le cadre d'une thèse en cotutelle entre l'université de Toulon et l'université de Biskra. Monsieur Bahlali m'a accueilli pendant six mois au laboratoire IMATH, pendant la préparation de cette thèse et s'est occupé de tous les aspects, de mon séjour avec beaucoup d'attention. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude

Je voudrais ensuite remercier Nabil khelfallah de l'université de Biskra, Khaled Melkemi de l'université de Batna 2, Said Hamadene de l'université du maine, Le Mans et Adrian Zalinscu de l'université Université de Alexandru Ioan Cuza, Iasi de m'offrir cet honneur qu'ils ont accepté de faire partir de mon jury. J'aimerais également exprimer toute ma reconnaissance à Khaled Melkemi et Said Hamadene pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

Un grand merci aux membres du laboratoire IMATH à Toulon et le laboratoire de mathématiques appliquées à Biskra, qui m'ont offert toutes les conditions favorables pour réussir ma thèse et de travailler dans les bonnes conditions.

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades (en abrégé EDSR, BSDE en anglais) avec application au contrôle stochastique et aux équations aux dérivées partielles (EDP, PDE en anglais). Les EDSR ont été introduites en 1973 par J.-M. Bismut pour la première fois dans le cas linéaire, E. Pardoux et S. Peng en 1990 ont établi le premier résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR dans le cas non linéaire. Depuis, la littérature sur les EDSR ne cesse de s'accroître. Ceci est essentiellement dû aux nombreuses applications qu'elles ont pu apporter dans divers domaines de mathématiques tels que les équations aux dérivées partielles, les mathématiques Financières, le contrôle optimal, les jeux différentiels et la géométrie différentielle.

Cette thèse contient une introduction générale et trois chapitres.

Dans l'introduction générale on donne un aperçu général sur la théorie des équation différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR). On donne les résultats antérieurs sur les équations différentielles stochastiques rétrogrades et sur les EDSR reflechiés et les EDSR avec champ moyen. On présente les résultats de la présente thèse.

Le premier chapitre traite un problème d'existence de solutions faibles d'équations différentielles stochastiques progressives-rétrogrades (EDSPR). Le générateur de l'EDSPR est supposé continu en (y, z) mais éventuellement discontinu en x. Le drift de la composante progressive est simplement un drift mesurable et le coefficient de diffusion peut être discontinu. Notre approche est basée sur des équations aux dérivées partielles.

Le deuxième chapitre traite le principe du maximum de Pontryagin pour un système dont la dynamique est dirigé par une EDSR à champ moyen et à horizon infini, où les coefficients dépendent de la loi marginale du processus d'état par l'espérance de sa valeur. De plus, la fonction du coût est aussi de type champ-moyen. Les conditions nécessaires d'optimalité pour ses systèmes seront établies sous la forme de principe du maximum par les techniques de perturbation convexe.

Dans le troisième chapitre, nous étudions les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies lorsque le générateur est à croissance quadratique en la variable z et la

condition terminale est dans $\mathbb{L}^2$.

Mots clés : EDSR – EDS de type champ moyen – Horizon infini – principe du maximum – EDP –Martingale – Existence – Control de type champ moyen – Estimation de Krylov – Formule d'Itô Krylov – Formule de Tanaka.

Abstract

The objective of this thesis is the study of backward stochastic differential equations (abbreviated BSDEs) with application to stochastic control and partial differential equations (PDE). BSDEs was introduced in 1973 by J.-M. Bismut for the first time in the case where the generator is linear, E. Pardoux and S. Peng in 1990 who established the first result of existence and uniqueness of the solution in the non-linear case. Since then, the literature on BSDEs has continued to grow. This is mainly due to the many applications they have been able to bring in various areas of mathematics such as partial differential equations, financial mathematics, optimal control, differential games and differential geometry.

This thesis contains a general introduction and three chapters. The main results of which are presented in the general introduction which also contains the previous results on the bakward stochastic differential equations, reflected BSDEs and the BSDEs with mean-field type.

The first chapter deals with a problem of existence of weak solutions of forward-backward stochastic differential equations (FBSDE). The FBSDE generator is assumed to be continuous in (y, z) but possibly discontinuous in x. The drift of the progressive component is simply measurable and the diffusion coefficient can be discontinuous. Our approach is based on partial differential equations.

The second chapter deals with the Pontryagin's maximum principle for a system whose dynamic is governed by an BSDEs with mean-field and infinite horizon, where the coefficients depend on the marginal law of the state process by the expectation of its value. In addition, the cost function is also of the mean-field type. The necessary conditions of optimality for this system will be established in the form of the maximum principle by the techniques of convex perturbation.

In the third chapter, we study reflected backward stochastic differential equations when the generator is quadratic growing in the variable z and terminal condition in $\mathbb{L}^2$.

Key words : BSDE – Mean-Field SDE – Infinite horizon – maximum principle – PDE – Martingale – Existence – Mean-Field control– Krylov's estimate – Itô-Krylov's formula – Tanaka's formula.

Table des matières

Introduction générale

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) avec des applications au contrôle stochastique et aux équations aux dérivées partielles (EDP). Ce genre d'équations est apparue sous forme linéaire en 1973 dans un travail de J.M. Bismut [21]. La théorie des EDSR non linéaires a commencé avec l'article de Pardoux et Peng [65] dans lequel les auteurs ont établi un résultat d'existence et d'unicité des solutions pour ce type d'équation dans le cas où le générateur est uniformément Lipschitz en (y, z). Depuis, la littérature sur les EDSR ne cesse de s'accroître. Ceci est essentiellement dû aux nombreuses applications de ces équations dans divers domaines de mathématiques tels que les équations aux dérivées partielles, les mathématiques financières, le contrôle optimal, les jeux différentiels et la géométrie différentielle. On commence par l'exemple habituel sur les EDSR.

On se donne un mouvement Brownien d-dimensionnel W défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ et ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$. Nous considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{dY_t}{dt} = -H(t, Y_t), \ \forall t \in [0, T], \\ Y_T = \xi \quad . \end{cases} \tag{1}$$

Supposons, sans perdre de généralité que $H \equiv 0$, par conséquent le problème (1) devient

$$\begin{cases} \frac{dY_t}{dt} = 0, \ \forall t \in [0, T], \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{2}$$

On va chercher donc, pour chaque instant t, une solution Y_t ne dépendant pas du futur après t. Autrement dit, le processus Y est $\mathcal{F}_t$-adapté. Un calcul simple montre que cette solution est donnée par $Y_t = \xi$. Il est clair qu'elle n'est pas adaptée sauf si ξ est déterministe. La meilleure approximation donc pour que la solution soit adaptée est la martingale $Y_t = E(\xi|\mathcal{F}_t)$.

Si on travaille avec la filtration naturelle du mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes nous permet de construire un processus Z adapté et de carré intégrable tel que

$$Y_t = E(\xi|\mathcal{F}_t) = E[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s.$$

On en déduit, en différentiant la relation précédente que $E(\xi|\mathcal{F}_t)$ est la solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} dY_t &= Z_t dW_t, \quad \forall t \in [0,T], \\ Y_T &= \xi. \end{cases} \tag{3}$$

Il est clair, que la structure de l'équation initiale (2) a été modifiée, faisant apparaître un nouveau terme $Z_t dW_t$ qui permet de rendre la solution adaptée. Comme nous introduisons un terme supplémentaire Z dans l'équation, il est naturel d'autoriser la fonction H à dépendre de Z, ce qui nous conduit au problème suivant :

$$\begin{cases} dY_t &= -H(t.Y_t, Z_t)dt + Z_t dW_t, \ \forall t \in [0,T], \\ Y_T &= \xi, \end{cases} \tag{4}$$

ou, de façon équivalente, sous forme intégrale

$$Y_t = \xi + \int_t^T H(r, Y_r, Z_r) ds - \int_t^T Z_r dW_r, \ 0 \le t \le T. \tag{5}$$

L'inconnu de l'équation (5) est le couple de processus $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$.

Les EDSR réfléchies ont été introduites par El Karoui et al. dans [34] dans le cas unidimensionnel avec une barrière continue. Il s'agit de chercher un triplet de processus progressivement mesurables (Y, Z, K) où le processus K est croissant et tel que :

$$\begin{cases} Y_t = \xi + \int\limits_t^T H(s, Y_s, Z_s)\, ds + K_T - K_t - \int\limits_t^T Z_s dW_s, \qquad \forall t \in [0,T], \\ Y_t \geq S_t \;,\;\; 0 \leq t \leq T, \\ (K_t) \text{ est un processus croissant, continu tq } K_0 = 0, \\ \text{et} \qquad \int\limits_0^T (Y_t - S_t)\, dK_t = 0. \end{cases}$$

Ici, S est un processus progressivement mesurable, qui joue le rôle d'une barrière. Le rôle du processus K est de pousser le processus Y vers le haut pour le maintenir au-dessus de la barrière S. La dernière condition est connue sous le nom de condition de Skorohod et garantit que le processus K agit de manière minimale, c'est-à-dire seulement lorsque le processus Y veut traverser la barrière inférieure S.

Cvitanic et Karatzas ont introduit dans [31] les EDSR réfléchies à deux barrières continues :

$$\begin{cases} \textbf{(i)}\ Y_t = \xi + \int_t^T H(s, Y_s, Z_s) ds + \int_t^T dK_s^+ - \int_t^T dK_s^- - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T, \\ \textbf{(ii)}\ \forall t \leq T,\ L_t \leq Y_t \leq U_t, \\ \textbf{(iii)}\ \int_0^T (U_t - Y_t) dK_t^- = \int_0^T (Y_t - L_t) dK_t^+ = 0. \end{cases}$$

Dans [31], les auteurs ont prouvé l'existence d'une solution unique dans le cas où le générateur H est uniformément Lipschitzien et la condition terminale ξ est de carré intégrable. Les barrières sont soit régulières soit elles satisfont la condition dite de Mokobodski qui conduit à l'existence d'une semi-martingale positive entre L et U. Lorsque ξ est bornée, H satisfait $H(s,y,z) \leq C(1+\phi(y)+|z|^2)$ [avec ϕ est une fonction bornée sur des ensembles compacts] et les barrières satisfont la condition de Mokobodski, l'existence d'une solution a été prouvée par Bahlali, Hamadène et Mezerdi [20]. Dans Hamadène et Hassani [43], l'existence de solutions à l'EDSR réfléchie à deux barrières a été prouvée dans le cas où la donnée terminale ξ est de carré intégrable et H a une croissance linéaire uniforme en y et z et les barrières sont de carrées intégrables et satisfaisant $L_t < U_t$, $\forall t \in [0,T]$. Il existe de nombreuses études sur ces équations, voir par exemple [56, 36].

Dans un travail récent Buckdahn et al. [26] (2009) ont introduit une notion d'équation différentielle stochastique rétrogrades de type champ moyen (MF-BSDE) de la forme

$$Y_t = \xi + \int_t^T \mathbb{E}' \left[H\left(s, Y'_s, Z'_s, Y_s, Z_s\right)\right] ds - \int_t^T Z_s dW_s, 0 \leq t \leq T, \tag{6}$$

où, pour $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}' \left[H\left(s, , Y'_s, Z'_s, Y_s, Z_s\right)\right](\omega) &= \mathbb{E}' \left[H\left(s, Y'_s, Z'_s, Y_s(\omega), Z_s(\omega)\right)\right] \\ &= \int_\Omega H\left(\omega', \omega, s, Y_s(\omega'), Z_s(\omega'), Y_s(\omega), Z_s(\omega)\right) \mathbb{P}(d\omega'),\end{aligned}$$

Ils ont établi l'existence et l'unicité de la solution sous la condition de Lipschitz uniforme sur le générateur. Dans [29], Chen a établi un résultat d'existence et unicité pour des équations différentielles stochastiques rétrogrades à horizon infini. Cette thèse contient trois chapitres, que nous décrivons dans ce qui suit.

Dans le premier chapitre, nous établissons l'existence de solutions faibles pour un système découplé d'EDS-EDSR (ou EDSPR) défini comme suit :

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s b(X_r)du + \int_t^s \sigma(X_r)dW_r, \\ \\ Y_s = H(X_T) + \int_s^T f(X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_s^T Z_u dM_r^X, \quad t \leq s \leq T, \end{cases} \tag{7}$$

b est la dérive, σ est le coefficient de diffusion, $(W_t)_t$ est un mouvement brownien et M^X est la partie martingale de X.

Dans [44], les EDSPR multidimensionnelles ont été étudiées lorsque les paramètres sont continus et l'existence de solutions a été établi sous une condition dite de L^2-domination.

Dans ce travail, nous établissons l'existence de solutions pour l'équation (7). Les hypothèses dont nous avons besoin pour les coefficients b, f et σ rendent le cadre classique des EDSPR inadapté. Il est clair que l'existence de solutions fortes pour une EDS avec un coefficient de diffusion discontinu n'est en général pas garantie. Par contre, la notion de solution faible semble particulièrement pertinente dans notre contexte. La notion de solution faible a été introduite par Skorokhod dans [71], voir aussi Stroock et Varadhan [72]. Nous cherchons une solution faible au système d'EDS-EDSR (7). Pour cela, nous exploiterons le fait que l'EDS-EDSR (7) est connecté à l'équation aux dérivées partielles semi-linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial s}(s,\, x_1,\, x_2) = Lv(s, x_1,\, x_2) + f(x_1,\, x_2,\, v(s,\, x_1,\, x_2),\, \nabla_x v(s,\, x_1,\, x_2)), \\ \\ v(0, x_1,\, x_2) = H(x_1,\, x_2),\ 0 \leq s \leq t, \end{cases} \tag{8}$$

où

$$L := \sum_{i,j} a_{ij}(x_1,\, x_2) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x_1,\, x_2) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{9}$$

La stratégie consiste à construire une solution v de cette EDP et qui soit assez régulière au sens de Sobolev de sorte qu'elle permet d'utiliser la formule d'Itô-Krylov pour obtenir l'existence de solutions faibles de l'EDS-EDSR (7). Pour résoudre l'EDP (8), notre stratégie est basée sur une méthode développée par Doyoon & Krylov [33]. Nous en déduisons que le processus $(Y_s,\, Z_s) := (v(s,\, X_s),\, \nabla_x v(s,\, X_s),\ s \in [0,t])$ est une solution faible de l'EDS-EDSR (7).

Dans le deuxième chapitre, on considère un problème de contrôle optimal à horizon infini où la fonction coût est donnée par

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} f(t, X_t, \mathbb{E}(\varphi(X_t)), u_t) ds\right], \tag{10}$$

où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Le processus d'état est régi par une équation différentielle stochastique de type champ moyen (appelée aussi EDS de McKean-Vlasov) de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \mathbb{E}\left(\Psi(X_t)\right), u_t)dt + \sigma(t, X_t, \mathbb{E}\left(\Phi(X_t)\right), u_t)dW_t \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{11}$$

Les équations différentielles stochastiques de type champ moyen ont été introduites dans un article de H. P. McKean dans son étude probabiliste de l'équation aux dérivées partielles de Vlasov, modélisant l'évolution des systèmes de particules en physique statistique. Les propriétés d'existence et d'unicité ont été obtenues dans [28, 46, 63, 73]. Pour une introduction à cette théorie, on peut voir les notes de cours de Sznitman [73]. Les EDS de type champ moyen se sont avérées être un cadre naturel de la théorie des jeux à champ moyen, introduite par P.L. Lions et JM Lasry [52] et aussi par Huang, Malhamé et Caines [45] en 2006. Depuis, une vaste littérature a été développée sur la théorie des jeux à champ moyen motivée par des applications à diverses situations, comme la théorie des jeux les maths financières, les réseaux de communication et l'étude de larges populations. On peut voir [28] qui est une référence récente et assez complète sur le sujet.

En utilisant les résultats obtenus par Z. Chen [29] et R. Buckdahn, J. Li, & S. Peng [26], nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution (Y, Z) de l'équation différentielle stochastique rétrograde de type champ moyen à horizon infini de la forme :

$$Y_t = \xi + \int_t^{+\infty} \mathbb{E}'\left[f(s, Y'_s, Z'_s, Y_s, Z_s)\right] ds - \int_t^{+\infty} Z_s dW_s, \qquad t \geq 0.$$

On établit aussi des conditions nécessaires et suffisante d'optimalité, sous la forme d'un principe du maximum.

Dans le troisième chapitre, nous considérons des équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies avec deux barrières

$$\begin{cases} \textbf{(i)}\ Y \in \mathcal{C}, K^+ \text{ and } K^- \in \mathcal{K},\ Z \in \mathcal{L}^2, \\ \textbf{(ii)}\ Y_t = \xi + \int_t^T H(s, Y_s, Z_s) ds + \int_t^T dK_s^+ - \int_t^T dK_s^- - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T, \\ \textbf{(iii)}\ \forall t \leq T,\ L_t \leq Y_t \leq U_t, \\ \textbf{(iv)}\ \int_0^T (U_t - Y_t) dK_t^- = \int_0^T (Y_t - L_t) dK_t^+ = 0, \end{cases} \tag{12}$$

où le générateur $H(t, \omega, y, z)$ est de croissance quadratique en sa variable z. La donnée terminale ξ est de carré intégrable. Les solutions sont contraintes à rester entre deux processus continus L et U. L'objectif de ce travail est d'étendre une partie des résultats de [13, 14] aux EDSR réfléchies. Nous utilisons d'abord la formule du temps d'occupation pour montrer que pour toute solution (Y, Z, K^+, K^-) de l'EDSRR (12) avec des données $(H(t, y, z), \xi, L, U)$

satisfaisant :

$$|H(t,y,z)| \leq \eta_t + f(y)|z|^2,$$

le temps passé par Y dans un ensemble négligeable de Lebesgue est négligeable pour la mesure $|Z_t|^2dt$. C'est-à-dire que l'estimation de Krylov suivante est valable pour toute fonction mesurable positive Ψ

$$\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_R} \Psi(Y_s)\,|Z_s|^2\,ds \leq C\,\|\Psi\|_{\mathbb{L}^1([R,-R])}\,, \tag{13}$$

où $\tau_R := \tau'_R \wedge \tau^+_R \wedge \tau^-_R$ tq $\tau'_R = \inf\{t > 0 : |Y_t| \geq R\}$, $\tau^+_R := \inf\{t > 0 : K^+_t \geq R\}$, $\tau^-_R := \inf\{t > 0 : K^-_t \geq R\}$ et C est une constante dépendant de $R, \|\eta\|_{\mathbb{L}^1(\Omega)}$ et $\|f\|_{\mathbb{L}^1([R,-R])}$. En utilisant l'inégalité (13) nous prouvons que la formule de changement de variable d'Itô-Krylov suivante est valable pour Φ appartenant à l'espace de Sobolev

$$\Phi(Y_t) = \Phi(Y_0) + \int_0^t \Phi'(Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(Y_s)\,|Z_s|^2\,ds, \tag{14}$$

où (Y,Z,K^+,K^-) est une solution arbitraire de l'équation (12). Ceci nous permet d'établir que l'EDSRR (12) possède au moins une solution.

Chapitre 1

Existence d'une solution faible à une EDSR markovienne à coefficients discontinus

(Travail conjoint avec K. Bahlali et A. Elouaflin)

Résumé. Nous établissons l'existence de solutions faibles pour un système découplé d'une équation différentielle stochastique progressive (EDS) et une équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR). Le générateur $H(x, y, z)$ est supposé continu en (y, z) mais éventuellement discontinu en x. Le coefficient du dérive de la composante progressive est supposé simplement mesurable et le coefficient de diffusion peut être discontinu. Notre approche est basée sur des équations aux dérivées partielles.

Mots clés : EDSR, EDS, Solution faible, EDP.

2020 Classification AMS : 60H20. 60H30, 35J60, 60J35.

Existence of a weak solution to a Markovian BSDE with discontinuous coefficients

(Joint work with K. Bahlali and A. Elouaflin)

ABSTRACT. We establish the existence of weak solutions for a decoupled system of a forward stochastic differential equation (SDE) and a backward stochastic differential equation (BSDE). The generator $H(x, y, z)$ is assumed continuous in (y, z) but possibly discontinuous in x. The drift of the forward component is merely measurable drift and the diffusion coefficient can be discontinuous. Our approach is based on partial differential equations.

Key words : BSDEs, SDE, weak solution, PDE.

2000 Mathematics Subject Classification. 60H20. 60H30, 35J60, 60J35.

1.1 Introduction

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard k-dimensionnel, défini sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ sa filtration augmentée par les $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}$. Soit $f(t, \omega, y, z)$ une fonction définie sur $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, le processus$\{f(t, y, z)\}_{0\leq t\leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère l'EDSR

$$Y_s = \xi + \int_s^T f(X_r, Y_r, Z_r)dr - \int_s^T Z_r dM_r^X, \quad t \leq s \leq T, \tag{1.1}$$

où ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$ mesurable et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une solution de l'équation (1.1) est un processus (Y, Z) qui est adapté à la filtration engendrée par le mouvement brownien W et qui satisfait l'équation (1.1) et une certaine condition d'intégrabilité qui sera précisée plus tard.

La version linéaire de l'EDSR (1.1) apparait comme l'équation adjointe dans le principe du maximum de Pontryagin en contrôle stochastique. Les EDSR linéaires ont été introduites dans [21] par Bismut pour une utilisation en contrôle stochastique. Les EDSR non linéaires ont été introduites par Pardoux & Peng dans [65] dans le cas où le coefficient f est globalement lipschitzien. Depuis, de nombreux travaux ont été développés avec des applications au contrôle stochastique, en mathématiques financières et aux équation aux dérivées partielles. Le document [35] et l'article [66] contiennent une bonne introduction à ce sujet.

Les EDSR à coefficient localement lipschitzien ont été étudiées dans [42] en dimension un et dans [5, 6] en dimensions supérieures à un. Les EDSR unidimensionnelles à coefficient continu et de croissance linéaire ont été considérées dans [54, 55] où le théorème de comparaison a été utilisé pour prouver l'existence de solutions. Les EDSR multidimensionnelles à croissance surlinéaire ont été étudiées dans [16, 15] où l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions ont été obtenues. Des applications à des systèmes d'EDP semi-linéaires éventuellement dégénérés ont également été données dans [16, 15].

Dans ce chapitre, nous considérons le système d'EDS-EDSR découplé suivant, également appelé EDS progressive rétrograde (EDSPR) Markovienne,

$$\begin{cases} X_s = x + \int_t^s b(X_r)du + \int_t^s \sigma(X_r)dW_r, \\ \\ Y_s = H(X_T) + \int_s^T f(X_r,\, Y_r,\, Z_r)dr - \int_s^T Z_r dM_r^X, t \leq s \leq T, \end{cases} \tag{1.2}$$

où M^X est la partie martingale de X.

Les coefficients b, σ, f et H sont des fonctions mesurables définis comme suit :

$$b : \mathbb{R}^{d+1} \longmapsto \mathbb{R}^d$$

$$\sigma : \mathbb{R}^{d+1} \longmapsto \mathbb{R}^{d\times k}$$

$$H : \mathbb{R}^{d+1} \longmapsto \mathbb{R}$$

$$f : \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longmapsto \mathbb{R}$$

Les conditions imposées aux coefficients sont précisées plus bas.

Les EDSPR multidimensionnelles de type (1.2) ont été étudiés dans [44] lorsque les coefficients sont continus. Dans notre situation, les coefficients σ, b, f ne sont pas nécessairement continus par rapport x. Notre approche utilise les EDP.

Dans la littérature sur les EDS d'Itô, il y a deux notions de solutions : faibles et fortes. Une solution forte est adaptée par rapport à la filtration du mouvement brownien, tandis qu'une solution faible ne l'est pas nécessairement . Plus précisément, une solution faible (au sens de Skorokhod voir [71]) est un ensemble constitué d'un espace de probabilité filtré, d'un mouvement brownien W et d'un processus continu X de sorte que le couple (X, W) satisfait la première composante de l'équation (1.2). Une solution (X, W) est appelée forte si le processus X est adapté à la filtration du brownien directeur W.

Les équations de type (1.2) sont plus adaptées à la notion de solution faible au sens de Skorokhod. Comme dans les EDP linéaires, les solutions faibles (en loi) du sytème d'EDS-EDSR (1.2) sont suffisantes pour donner une représentation probabiliste des solutions d'EDP

semi-linéaires. Il s'avère que l'existence d'une solution faible pour des EDSR classique (i.e. non markovienne) avec générateur continu (ou discontinu) est assez difficile à établir. Peu de résultats sont connus dans cette direction. Et à notre connaissance, les résultats connus sont [17, 23]. Dans [17], le "sens faible" provient de la composante rétrograde, mais seulement dans les cas particuliers où le générateur f prend la forme $f(t, x, y, z) := zh(t, x, y, z)$. Cependant, les EDSR considérées dans [17] ont un générateur seulement mesurable. L'article [23] est le premier travail qui construit une solution faible pour les EDSR dans le même esprit que pour des EDS progressive d'Itô. Dans [23], le sens faible provient de la composante rétrograde et dans le cas où le générateur est seulement continu et borné. Bien que le générateur considéré ne dépend que de y, le résultat [23] peut être vue comme l'analogue de Skorohod [71]. Notons que le travail [44] établit l'existence de solution pour un système d'EDS-EDSR multidimensionnel dont le coefficient de l'EDSR est seulement continu mais la solution X de la composante progressive est forte, i.e adaptée à la filtration du brownien. Dans notre situation X n'est pas nécessairement adaptée à la filtration du brownien.
De notre point de vue, la première difficulté pour établir l'existence et l'unicité de solutions faibles pour les EDSR est liée au théorème de représentation d'Itô. La deuxième difficulté réside dans le fait que si on veut essayer d'imiter la méthode développée pour définir des solutions faibles pour les EDS progressives, il est important d'introduire une topologie raisonnable, sur l'espace canonique de (Y, Z), qui permet d'obtenir la compacité des lois et l'identification des limites. Cette topologie semble difficile à exhiber.
Dans ce chapitre, nous traitons de l'existence de solutions de l'équation (1.2). Les hypothèses que nous imposons aux coefficients b, f et σ ne permettent pas d'établir l'existence de solutions fortes pour la partie progressive. C'est à dire des solutions qui ne sont donc pas nécessairement adaptées à la filtration du brownien directeur. Ceci ne amène à chercher des solutions faibles au système (1.2). Pour ce faire, nous allons exploiter le lien entre les EDS-EDSR (1.2) et les

EDP semi-linéaires

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial s}(s,\, x_1,\, x_2) = Lv(s, x_1,\, x_2) + f(x_1,\, x_2,\, v(s,\, x_1,\, x_2),\, \nabla_x v(s,\, x_1,\, x_2)), \\ \\ v(0, x_1,\, x_2) = H(x_1,\, x_2),\ 0 \leq s \leq t, \end{cases} \tag{1.3}$$

où

$$L := \sum_{i,\, j} a_{ij}(x_1,\, x_2) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x_1,\, x_2) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.4}$$

et $a := (\sigma\sigma^*)_{i,j}$.

Avant d'expliquer notre stratégie pour traiter le problème, précisons quelques notations qui seront utilisées tout au long du document. Pour tout $p > 0$, on note,

$\mathbb{L}^p_{loc}(\mathbb{R}) :=$ L'espace des (classes de) fonctions u définiées sur $\mathbb{R}$ qui sont p–intégrables sur les ensembles bornés de $\mathbb{R}$.

$\mathcal{C}([0,\, t] \times \mathbb{R}^{d+1}) :=$ l'espace des fonctions continues sur $[0,\, t] \times \mathbb{R}^{d+1}$.

$\mathcal{W}^2_{p;loc} :=$ L'espace de Sobolev des (classes de) fonctions u défniées sur $\mathbb{R}$ telles que u et ses dérivées généralisées u' et u'' appartiennent à $\mathbb{L}^p_{loc}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{C} :=$ L'espace des processus $\mathcal{F}_t-$adaptés et continus.

$\mathcal{S}^p :=$ L'espace de processus φ, $\mathcal{F}_t-$adaptés et satisfaisant : $\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |\varphi_t|^p\right) < \infty$.

$\mathcal{L}^2 :=$ L'espace de processus Φ, $\mathcal{F}_t-$adaptés et satisfaisant : $\int_0^T |\Phi_t|^2\, dt < \infty, \mathbb{P} - p.s.$

$\mathcal{M}^p :=$ L'espace de processus φ, $\mathcal{F}_t-$adaptés et satisfaisant : $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |\varphi_s|^2 ds\right)^{\frac{p}{2}}\right] < \infty$.

La stratégie consiste à construire une solution v, de l'EDP (1.3), qui soit suffisament régulière au sens de Sobolev puis à utiliser la formule d'Itô-Krylov pour obtenir l'existence d'une solution faible de l'EDSR (1.2). Nous utilisons des arguments de compacité pour construire une fonction continue v qui appartient à l'espace $\mathcal{W}^{1,\,2}_{p,\,loc}([0,\, t] \times \mathbb{R}^{d+1})$ et qui vérifie l'EDP considérée. Notons qu'en raison de l'absence d'une régularité Hölder du coefficient de diffusion, nous ne pouvons pas obtenir des estimations ponctuelles du gradient de la solution v. Notre stratégie est basée sur une méthode alternative. Nous utilisons un résultat de Kim & Krylov [33] pour obtenir des estimations ^{p}-locales des dérivées généralisées prmières et secondes. Nous établissons une estimation $\mathcal{W}^{1,2}_{p,loc}$ de la solution v sur une boule de $[0, t] \times \mathbb{R}^{d+1}$. Ceci nous permet d'appliquer la formule d'Itô-Krylov à v et d'en déduire que le processus $(Y_s, Z_s) := (v(s, X_s), \nabla_x v(s, X_s), \forall s \in [0, t])$ est une solution faible du EDS-EDSR (1.2).

Le chapitre est organisé comme suit : dans le paragraphe 2, nous rappelons quelques définitions et énonçons les hypothèses. Dans le paragraphe 3, nous énonçons le résultat principal et le paragraphe 4 est consacré à la démonstration du résultat principal. Dans le paragraphe 5, on donne quelques résultats supplémentaires.

1.2 Hypothèses et préliminaires

Nous considérons les hypothèses suivantes :

Hypothèse (A)

(i) Il existe une constante positive K telle que, pour tout $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d$

$$|a(x_1, x_2)| \leq K\left(1 + |x_2|^2\right),$$
$$|b(x_1, x_2)| \leq K\left(1 + |x_1| + |x_2|\right).$$

(ii) Il existe une constante positive δ telle que pour tout $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\sum_{i,j=1}^{d+1} a_{ij}(x_1, x_2)\xi_i\xi_j \geq \delta\,|\xi|^2.$$

(iii) a est mesurable en x_1 et, pour tout $N > 0$, il existe une fonction positive continue ρ_N satisfaisant $\lim_{r\to 0} \rho_N(r) = 0$ tel que, pour presque tout (x_1, x_2), (x_1, x_2') dans le disque $D(0, N)$,

$$|a(x_1, x_2) - a(x_1, x_2')| \leq \rho_N(|x_2 - x_2'|).$$

Hypothèse (B)

(j) $f(x_1, x_2, y, z)$ est continue en (x_2, y, z) pour presque tout x_1 et, il existe une constante positive K telle que, pour tout $(x_1, x_2, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d+1}$

$$|f(x_1, x_2, y, z)| \leq K\left(1 + |x_2| + |y| + |z|\right).$$

(jj) H est à croissance polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive K telle que $|H(x)| \leq K(1 + |x|^q)$, pour un $q \in \mathbb{N}^*$.

(jjj) $H \in \mathcal{W}^2_{p_1,loc}(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R})$, pour tout $p_1 > d + 2$.

Définition 1.1 *Une solution (faible) de l'équation (1.2) est un triplet* $((W, X, Y, Z), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t))$, *où* $(\mathcal{F}_t)$ *est une filtration satisfaisant aux conditions usuelles,* W *un* $(\mathcal{F}_t)$*-mouvement brownien et* (X, Y, Z) *est un processus* $(\mathcal{F}_t)$*-adapté et satisfait l'équation* $\mathbb{P} - p.s.$ *pour chaque* $t \in [0, T]$ *et*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T (|b(X_s)| + |(\sigma(X_s)|^2 + |(f(X_s, Y_s, Z_s)| + |Z_s|^2)ds < \infty\right) = 1.$$

Définition 1.2 *Une solution forte de l'équation (1.2), sur l'espace de probabilité donné* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et par rapport au mouvement brownien fixé* W*, est un processus* (X, Y, Z) *qui satisfait l'équation (1.2) et tel que*

(i) (X, Y) est un processus continu.

(ii) (X, Y, Z) est $(\mathcal{F}^W_t)$-adapté.

(iii)

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T (|b(X_s)| + |(\sigma(X_s)|^2 + |(f(X_s, Y_s, Z_s)| + |Z_s|^2)ds < \infty\right) = 1.$$

Si de plus, $\|(X_s, Y_s, Z_s)\|^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^1 |X_s|^2 ds + \int_0^1 |Y_s|^2 ds + \int_0^1 |Z_s|^2 ds\right] < \infty$, alors on dit que (X, Y, Z) est une $\mathcal{M}^2$ solution.

Toute solution forte est une solution faible. c'est à dire que, l'existence forte implique l'existence faible, voir par exemple [17] ou [23].

Définition 1.3 *Une fonction* $u(t, x)$ *est une* $\mathcal{W}^{1,2}_{p_1,loc}$ *solution de l'EDP (1.3) si* u *appartient à* $\mathcal{W}^{1,2}_{p_1,loc}$ *et satisfait l'équation (1.3) pour chaque* (t, x).

1.3 Les principaux résultats

Théorème 1.1 *Supposons que les hypothèses* $(\mathbf{A})$ *et* $(\mathbf{B})$ *sont satisfaites. Alors, l'EDP (1.3) admet au moins une* $\mathcal{W}^{1,2}_{p_1,loc}$ *solution.*

Supposons que les conditions $(\mathbf{A}),(\mathbf{B})$ sont satisfaites. Alors, d'après [49], le problème de martingales est bien posé pour la composante progressive de l'équation (1.2). En outre, on a le corollaire suivant qui est le deuxième résultat principal de ce chapitre.

Corollaire 1.1 *Supposons que les hypothèses* $(\mathbf{A})$ *et* $(\mathbf{B})$ *sont satisfaites. Soit* u *une* $\mathcal{W}^{1,2}_{p_1,loc}$ *solution de l'EDP (1.3), qui existe par le Théorème 1.1. Alors, le processus*

$$\left\{(Y_s, Z_s) := (u(s,X_s), \nabla_x u(s,X_s)), \quad s\in[0,T]\right\},$$

est une solution faible de l'EDSR (1.2) telle que,

($\mathbf{a}$) (Y,Z) est $\mathcal{F}^X-$adapté et $(Y_s, \int_s^t Z_r dM_r^X)_{0\le s\le t}$ est continu.
($\mathbf{b}$) $\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}|Y_s|^2 + \int_0^t |Z_r\sigma(X)|^2\,dr\right] < \infty$.
La preuve de ce corollaire découle d'une application de la formule d'Itô-Krylov à la solution u de l'EDP (1.3).

Remarque 1.1 *Comme* a *est uniformément elliptique, alors l'assertion* (b) *du corollaire 1.1 est équivalente à*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le s\le t}|Y_s|^2 + \int_0^t |\sigma(X)|^2\,dr\right] < \infty.$$

1.4 Preuve du Théorème 1.1

On suppose que les hypothèses (A) et (B) sont satisfaites tout au long des démonstrations. Soit a^n_{ij}, b^n_i, f^n, H^n les régularisées (la régularisation classique par convolution) en tous les arguments des coefficients a_{ij}, b_i, f, H respectivement. Les fonctions a^n_{ij}, b^n_i, f^n, H^n sont bornées et indéfiniment dérivables avec des dérivées bornées de tout ordre, mais les bornes peuvent dépendre de n. La suite H^n converge vers H dans $\mathcal{W}^2_{p,loc}$ pour chaque p, donc uniformément sur des ensembles compacts. Les suites a_{ij}^n, b_i^n, f^n convergent respectivement vers a, b, f dans L_{loc}^p pour tout $p > d+2$.

On pose

$$L^n := \sum_{i,\,j} a_{ij}^n(x_1,\, x_2)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i^n(x_1,\, x_2)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.5}$$

Pour chaque n, l'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial\ v^n}{\partial s}(s,\, x_1,\, x_2) + L^n v^n(s, x_1,\, x_2) + f^n(x_1,\, x_2,\, v^n(s,\, x_1,\, x_2),\, \nabla_x v^n(s,\, x_1,\, x_2)) = 0, \\ \\ v^n(T, x_1,\, x_2) = H^n(x_1,\, x_2),\ \ 0 \leq s \leq T, \end{cases} \tag{1.6}$$

admet une solution unique $v^n \in \mathcal{C}^{1,\,2}\left([0,\, T] \times \mathbb{R}^{d+1}\right)$.

Lemme 1.1 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par (X^n, Y^n, Z^n) la solution de l'EDSR markovienne associée aux coefficients b^n, σ^n, f^n, H^n et et partant de $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$.*

(i) *Supposons que (A)-(i) et (A)-(iii) sont vérifiées. Alors, pour tout $p > 0$, il existe une constante positive $K_1 = K_1(T, K)$ telle que*

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T} |X_s^n|^p\right] \leq K_1\left(1 + |x|^p\right)$$

(ii) *Supposons de plus que $(\mathbf{B}) - (\mathbf{j})$ et $(\mathbf{B}) - (\mathbf{jj})$ sont vérifiées. Alors, il existe une constante positive $K_2 = K_2(T, K)$ telle que*

$$\sup_n |v^n(t, x)| \leq K_2\left(1 + |x|^q\right)$$

où v^n désigne la solution de l'EDP (1.6) et q l'exposant qui apparait dans l'hypothèse B-(jj).

Preuve. L'assertion (i) est classique (voir par ex. [18]). Nous démontrons l'assertion (ii). En utilisant les arguments standard des EDSR, on peut montrer que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |Y_s^n|^2)\ \leq E(|H^n(X_s^n)|^2)\exp(3(K+1)T) + (1 + |x|^2)T\exp((K(1+T^2)).$$

Puisque H est à croissance polynomiale, il en est de même pour H^n. Il existe donc une constante positive $K_1' = K_1'(q)$ telle que

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq s\leq T} |Y_s^n|^2) \;\leq K_1'(1+|x|^{2q})\exp(3(K+1)T) + (1+|x|^2)T\exp((K(1+T^2)).$$

Puisque $v^n(t,x) = Y_t^n$, on déduit que

$$|v^n(t,x)|^2 \;\leq K_2(1+|x|^{2q}),$$

où K_2 est une constante qui dépend de T, K, K_1, K_1'. Le Lemme 1.1 est prouvée. ■

Du Lemme précédent, on en déduit que $|v^n(t,x)|^2$ est localement bornée sur $[0,T]\times\mathbb{R}^{d+1}$ (alors localement intégrable). Donc, pour tout $R>0$, il existe une constante positive $k_1 = K_2(1+R^{2q})$ ne dépendant pas de n telle que,

$$\sup_{(s,\,x)\in[0,\,T]\times B(0,R)} |v^n(s,\,x)| \leq k_1, \tag{1.7}$$

où $B(0,R)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon R.

1.4.1 Estimations L^p_{loc} des dérivées de v^n

La Proposition suivante donne les principales estimations.

Proposition 1.1 *Pour chaque $p\in[1,\infty[$ et $R>0$ assez petit, il existe une constante positive $C(p,R,T,k_1,d)$ ne dépendant pas de n, telle que*

$$\int_0^T\int_{B(0,R/2)}[|\partial_s v^n|^p + |\nabla_x v^n|^p + |\nabla_{xx} v^n|^p]dsdx \leq C(p,R,T,k_1,d).$$

Preuve. Tout au long de la preuve de cette proposition, nous allons utiliser la convention de sommation sur les indices répétés. Nous avons besoin quelques lemmes. Pour la simplicité, nous supposons que $H=0$.

Il découle de l'inégalité d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg (Théorème 7.28, chapitre VII, dans Gilbarg & Trudinger [37]) que, pour chaque $r > 0$ et chaque $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^T \int_{B(0,r)} |\nabla_x v^n(s, x_1, x_2)|^p dxds \leq \varepsilon \int_0^T \int_{B(0,r)} |\nabla_{x,x} v^n(s, x_1, x_2)|^p dxds \\ + c(p,\, r,\, d)(1+\varepsilon^{-1}) \int_0^T \int_{B(0,r)} |v^n(s, x_1, x_2)|^p dxds. \tag{1.8}$$

Puisque v^n est uniformément bornée, alors par l'inégalité précédente et le fait que v^n satisfait l'EDP (1.6), il reste à montrer que pour tout $r > 0$ suffisament petit, $\int_0^T \int_{B(0,r)} |\nabla_{x,x} v^n(t, x_1, x_2)|^p dxdt$ est uniformément bornée en n.

Nous allons commencer par l'estimation L^p_{loc} de $\nabla_{x,x} v^n$. Nous utiliserons la stratégie développée dans la preuve du Théorème 9.11 dans Gilbarg & Trudinger [37] (voir aussi Caffarelli et al. [27]). Nous réécrivons l'EDP (1.6) sous la forme suivante (la convention de sommation sur les indices répétés est utilisée),

$$\begin{cases} \frac{\partial v^n}{\partial s}(s,\, x_1,\, x_2) + a^n_{i,j}(x_1,\, 0)\frac{\partial^2 v^n}{\partial x_i \partial x_j}(s, x_1,\, x_2) + g_n(s,\, x_1,\, x_2) = 0, \;\; s \in (0,\, T), \\ \\ v^n(T, x_1,\, x_2) = 0, \end{cases} \tag{1.9}$$

où

$$g_n(s,\, x_1,\, x_2) := \left[a^n_{i,j}(x_1,\, x_2) - a^n_{i,j}(x_1,\, 0)\right] \frac{\partial^2 v^n}{\partial x_i \partial x_j}(s, x_1,\, x_2) + b^n_i(x_1,\, x_2)\frac{\partial v^n}{\partial x_i}(s, x_1,\, x_2) \\ + f^n(x_1,\, x_2,\, v^n(s,\, x_1,\, x_2),\, \nabla_x v^n(s,\, x_1,\, x_2)). \tag{1.10}$$

Pour chaque $s \leq T$ et chaque boule $Q := B(0,\, R) \in \mathbb{R}^{d+1}$, on pose $Q_{s,\,T,\,R} := [s,\, T] \times B(0,\, R)$. Pour $\sigma \in (0,\, 1)$, onpose $\sigma' := \frac{(1+\sigma)}{2}$. Soit $\eta \in \mathcal{C}^\infty_0(B_R)$ une fonction définie par $\eta : \mathbb{R}^{d+1} \to$

$[0,\,1]$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \eta(x) & = 1,\; x \in B(0,\,\sigma R), \\ \eta(x) & = 0,\; |x| \geq \sigma' R, \\ |\nabla_x \eta(x)| & \leq 4(1-\sigma)^{-1}R^{-1}, \quad \sigma R \leq |x| \leq \sigma' R, \\ |\nabla_{x,\,x} \eta(x)| & \leq 16(1-\sigma)^{-2}R^{-2}, \quad \sigma R \leq |x| \leq \sigma' R, \end{cases}$$

La fonction $u^n := \eta v^n$ résout alors l'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u^n}{\partial s}(s,\,x_1,\,x_2) + a^n_{i,j}(x_1,\,0)\frac{\partial^2 u^n}{\partial x_i \partial x_j}(s, x_1,\,x_2) + G_n(s,\,x_1,\,x_2) = 0, \;\; s \in (0,\,T), \\ \\ u^n(T, x_1,\,x_2) = 0, \end{cases}$$

où

$$G_n(s,\,x_1,\,x_2) := v^n a^n_{i,j}(x_1,\,0)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} + 2a^n_{i,j}(x_1,\,0)\frac{\partial v^n}{\partial x_i}\frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \eta g_n(s,\,x_1,\,x_2), \tag{1.11}$$

Comme a^n et b^n satisfont l'hypothèse (A) et f^n satisfait l'hypothèse (B), nous en déduisons que G_n est bornée dans $[0,T]\times\mathbb{R}^{d+1}$. Soit D un sous-ensemble borné arbitraire de $\mathbb{R}^{d+1}$. Étant donné que $a^n_{i,j}(.,0)$ et G_n sont bornées, et G_n est à support compact, alors selon Doyoon & Krylov [33], il existe une constante positive $C = C(d, C_2, C_3, K)$ telle que pour tout n, nous avons

$$u^n \in \mathcal{W}^{1,\,2}_p([0,T]\times D) \quad \text{and} \quad \|u^n\|_{\mathcal{W}^{1,\,2}_p([0,T]\times D)} \leq C\|G_n\|_{L^p([0,T]\times D)}. \tag{1.12}$$

D'après la définition de la fonction η, il s'ensuit que,

$$\|\nabla_{x,x} v^n\|_{L_p(Q_{0,\,t,\,\sigma R})} \leq \|\nabla_{x,x} u^n\|_{L_p(Q_{0,\,t,\,\sigma' R})}. \tag{1.13}$$

Selon l'inégalité (1.12), il reste à estimer la quantité $\int_0^T \int_{B(0,\,\sigma' R)} |G_n(s,x_1,x_2)|^p dsdx$. Nous avons

$$\int_0^T \int_{B(0,\,\sigma' R)} |G_n(s,x_1,x_2)|^p dsdx \leq A_1 + A_2 + A_3, \tag{1.14}$$

où

$$A_1 := C(p)\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)} |v^n|^p |a^n(x_1,\,0)|^p |\nabla_{x,x}\eta(x_1,\,x_2)|^p ds dx,$$

$$A_2 := C(p)\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)} |a^n(x_1,\,0)|^p\,|\nabla_x v^n|^p\,|\nabla_x\eta(x_1,\,x_2)|^p ds dx,$$

$$A_3 := C(p)\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)} |g_n(s,\,x_1,\,x_2)|^p ds dx.$$

Le lemme suivant donne une estimation de A_1, A_2 et A_3.

Lemme 1.2 *Pour tout $p \in [1,+\infty[$, il existe des constantes positives $C_1 := C_1(p)$, $C_2 := c(p,\,R,\,d)$ telles que pour chaque $\varepsilon > 0$,*

(i)

$$2^{-2p}(1-\sigma)^p R^p.A_1 \;\leq\; C(p)2^{2p}(1-\sigma)^{-p}R^{-p}\sup_Q |a^n(x_1,\,0)|^p \int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)} |v^n|^p ds dx.$$

(ii)

$$\begin{aligned}2^{-2p}(1-\sigma)^p R^p.A_2 \;\leq\; & C(p)\sup_Q |a^n(x_1,\,0)|^p \left[\varepsilon\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)} |\nabla_{x,x} v^n|^p ds dx \,+\right.\\ & \left. +\; C_2(1+\varepsilon^{-1})\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)} |v^n|^p ds dx\right].\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}A_3 \;\leq\; & \left[\sup_Q(|x_2|^p) + \varepsilon\left(\sup_Q |b^n(x_1,x_2)|^p\right)\right]\times C(p)\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)} |\nabla_{x,x} v^n(s,x_1,x_2)|^p\, dx ds\\ & + C_2\left(\sup_Q |b_i{}^n(x_1,x_2)|^p\right)\left[c(p,\,r,\,d)(1+\varepsilon^{-1})\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)} |v^n|^p ds dx\right]\\ & + C(p)C_1\left(mes(Q_{0,T,R}) + \sup_Q(|x_2|^p) + \int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)} |v^n(s,x_1,x_2)|^p dx ds\right.\\ & \left. + \,\varepsilon\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)} |\nabla_{x,x} v^n(s,x_1,x_2)|^p dx ds + C_2(1+\varepsilon^{-1})\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)} |v^n|^p ds dx\right),\end{aligned}$$

où $mes(Q_{0,T,R})$ désigne la mesure Lebesgue de l'ensemble $Q_{0,T,R}$.

Preuve. Tout au long de la preuve, nous désignons par $C(p)$ une constante qui peut varier d'une ligne à une autre.

• *Inégalité (i)*

Nous utilisons successivement le fait que $a^n(.,0)$ est uniformément bornée [qui découle de l'hypothèse (A)-(ii)] et les propriétés de η pour montrer que

$$A_1 \leq C(p)2^{4p}(1-\sigma)^{-2p}R^{-2p}\sup_Q |a^n(x_1,\,0)|^p \int_0^T \int_{B(0,\,\sigma' R)} |v^n|^p dsdx.$$

Ainsi,

$$2^{-2p}(1-\sigma)^p R^p.A_1 \leq C(p)2^{2p}(1-\sigma)^{-p}R^{-p}\sup_Q |a^n(x_1,\,0)|^p \int_0^T \int_{B(0,\,\sigma' R)} |v^n|^p dsdx. \quad (1.15)$$

• *Inégalité (ii)*

Puisque $a^n(.,\,0)$ et $\nabla_x \eta$ sont bornées, nous utilisons les propriétés de la fonction η pour obtenir

$$A_2 \leq C(p)2^{2p}(1-\sigma)^{-p}R^{-p}\sup_Q |a^n(x_1,\,0)|^p \int_0^T \int_{B(0,\,\sigma' R)} |\nabla_x v^n|^p dsdx.$$

Ainsi,

$$2^{-2p}(1-\sigma)^p R^p.A_2 \leq C(p)\sup_Q |a^n(x_1,\,0)|^p \int_0^T \int_{B(0,\,\sigma' R)} |\nabla_x v^n|^p dsdx. \quad (1.16)$$

On utilise l'inégalité (1.8) avec $r=\sigma' R$ et $C_2 = c(r,p,d)$ pour obtenir, pour tout ε, que

$$\begin{aligned} 2^{-2p}(1-\sigma)^p R^p.A_2 \leq C(p)\sup_Q |a^n(x_1,\,0)|^p \Bigg[\varepsilon\, R^{d+1} \int_0^T \int_{B(0,\,\sigma' R)} |\nabla_{x,x} v^n|^p dsdx \\ + C_2(1+\varepsilon^{-1}) \int_0^T \int_{B(0,\,\sigma' R)} |v^n|^p dsdx\Bigg]. \quad (1.17)\end{aligned}$$

• *Inégalité (iii).*

Nous avons

$$\int_0^T \int_{B(0,\,\sigma' R)} |g_n(s,\,x_1,\,x_2)|^p dxds \leq I_1^n + I_2^n + I_3^n,$$

avec

$$I_1^n := \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |a^n(x_1,\, x_2) - a^n(x_1,\, 0)|^p \, |\nabla_{x,\,x} v^n(s, x_1, x_2)|^p \, dx ds,$$

$$I_2^n := \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |b^n(x_1,\, x_2)|^p \, |\nabla_x v^n(s, x_1, x_2)|^p \, dx ds,$$

$$I_3^n := \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |f^n(x_1,\, x_2,\, v^n(s,\, x_1,\, x_2),\, \nabla_x v^n(s,\, x_1,\, x_2))|^p \, dx ds.$$

Nous utilisons l'hypothèse (A)-(iii) pour obtenir

$$I_1^n \leq \sup_{|x_2| \leq R} \rho_R^p(|x_2|) \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |\nabla_{x,\,x} v^n(s, x_1, x_2)|^p \, dx ds. \tag{1.18}$$

D'autre part, nous avons

$$I_2^n \leq \sup_Q |b^n(x_1, x_2)|^p \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |\nabla_x v^n(s, x_1,\, x_2)|^p \, dx ds. \tag{1.19}$$

En utilisant à nouveau l'inégalité d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg, (1.19) devient alors,

$$\begin{aligned} I_2^n \leq \sup_Q |b^n(x_1, x_2)|^p \Bigg[\varepsilon \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |\nabla_{x,x} v^n|^p ds dx \\ + C_2(1 + \varepsilon^{-1}) \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |v^n|^p ds dx \Bigg], \end{aligned} \tag{1.20}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} I_3^n \leq C_1 \Bigg(mes(Q_{0,T,R}) + \sup_Q(|x_2|^p) + \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |v^n(s, x_1, x_2)|^p dx ds \\ + \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |\nabla_x v^n(s, x_1, x_2)|^p dx ds \Bigg), \end{aligned} \tag{1.21}$$

Par conséquent, une fois de plus, l'inégalité d'interpolation de Gagliardo-Nirenberg donne,

$$\begin{aligned}
I_3^n \leq C_1 \Bigg(& mes(Q_{0,T,R}) + \sup_Q(|x_2|^p) + \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |v^n(s,x_1,x_2)|^p dxds \\
& + \varepsilon \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |\nabla_{x,x} v^n(s,x_1,x_2)|^p dxds + C_2(1+\varepsilon^{-1}) \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |v^n|^p dsdx \Bigg).
\end{aligned} \tag{1.22}$$

En combinant (1.18), (1.22) et (1.20), on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
A_3 \leq & \; C(p) \sup_{|x_2|\leq R} \rho_R^p(|x_2|) \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |\nabla_{x,x} v^n(s,x_1,x_2)|^p \, dxds \\
& + C(p) \sup_Q |b^n(x_1,x_2)|^p \Bigg[\varepsilon \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |\nabla_{x,x} v^n|^p dsdx \\
& + C_2(1+\varepsilon^{-1}) \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |v^n|^p dsdx \Bigg] \\
& + C(p) C_1 \Bigg(mes(Q_{0,T,R}) + \sup_Q(|x_2|^p) + \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |v^n(s,x_1,x_2)|^p dxds \\
& + \varepsilon \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |\nabla_{x,x} v^n(s,x_1,x_2)|^p dxds + C_2(1+\varepsilon^{-1}) \int_0^T \int_{B(0,\sigma' R)} |v^n|^p dsdx \Bigg).
\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré. Le Lemme 1.2 est prouvé.

Lemme 1.3 *(Estimation L^p_{loc} de $\nabla_{x,x} v^n$). Pour tout $p \in [1,\ p_1]$ et $R > 0$ assez petit, il existe une constante positive $C' = C'(p,\ R,\ T,\ k_1)$ ne dépendant pas de n, tel que*

$$\int_0^T \int_{B(0,\,R/2)} |\nabla_{x,x} v^n|^p dsdx \leq 2R^{-2p} C'.$$

Preuve. Des inégalités (1.13), (1.14) et le Lemme 1.2, il découle que

$$\begin{aligned}
&(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\sigma R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\\
&\leq 2^{4p}\sup_Q|a^n(x_1,\,0)|^p\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|v^n|^p dsdx\\
&+C(p)2^{2p}(1-\sigma)^pR^p\sup_Q|a^n(x_1,\,0)|^p\left[\varepsilon\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\right.\\
&\left.+\,C_2(1+\varepsilon^{-1})\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|v^n|^p dsdx\right]\\
&+C(p)(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\sup_{|x_2|\leq R}\rho_R^p(|x_2|)\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,\,x}v^n(s,x_1,x_2)|^p\,dxds\\
&+C(p)(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\sup_Q|b^n(x_1,x_2)|^p\left[\varepsilon\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\right.\\
&\left.+\,C_2(1+\varepsilon^{-1})\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|v^n|^p dsdx\right]\\
&+C(p)C_1(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\left(mes(Q_{0,T,R})+\sup_Q(|x_2|^p)+\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|v^n(s,x_1,x_2)|^p dxds\right.\\
&\left.+\,\varepsilon\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,x}v^n(s,x_1,x_2)|^p dxds+C_2(1+\varepsilon^{-1})\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|v^n|^p dsdx\right).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned}
&(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\sigma R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\\
&\leq 2^{4p}\sup_Q|a^n(x_1,\,0)|^p k_1^p mes(Q_{0,\,T,\,R})\\
&+C(p)2^{2p}(1-\sigma)^pR^p\sup_Q|a^n(x_1,\,0)|^p\left[\varepsilon\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx+C_2(1+\varepsilon^{-1})k_1^p mes(Q_{0,\,T,\,R})\right]\\
&+C(p)(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\sup_{|x_2|\leq R}\rho_R^p(|x_2|)\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,\,x}v^n|^p\,dxds\\
&+C(p)(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\sup_Q|b^n(x_1,x_2)|^p\left[\varepsilon\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx+C_2(1+\varepsilon^{-1})k_1^p mes(Q_{0,\,T,\,R})\right]\\
&+C(p)C_1(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\left(mes(Q_{0,\,T,\,R})+\sup_Q(|x_2|^p)+k_1^p mes(Q_{0,\,T,\,R})\right.\\
&\left.+\,\varepsilon\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx+C_2(1+\varepsilon^{-1})k_1^p mes(Q_{0,\,T,\,R})\right).
\end{aligned}$$

En réarrangeant le membre de droite dans l'inégalité précédente, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\,\sigma R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\\
&\leq C\left(R,\,p,\,k_1,\,\varepsilon,\,mes(Q_{0,\,T,\,R})\right)\\
&+C(p)2^{2p}(1-\sigma)^pR^p\sup_Q|a^n(x_1,\,0)|^p\left[\varepsilon\int_0^T\int_{B(0,\,\sigma' R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\right]\\
&+C(p)(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\sup_{|x_2|\leq R}\rho_R^p(|x_2|)\int_0^T\int_{B(0,\,\sigma' R)}|\nabla_{x,\,x}v^n|^p\,dxds\\
&+C(p)(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\sup_Q|b^n(x_1,x_2)|^p\left[\varepsilon\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\right]\\
&+C(p)C_1(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\varepsilon\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
&(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\,\sigma R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\\
&\leq C\left(R,\,p,\,k_1,\,\varepsilon,\,mes(Q_{0,\,T,\,R})\right)\\
&+C(p)2^{2p}(1-\sigma)^{-p}R^{-p}\sup_Q|a^n(x_1,\,0)|^p\left[\varepsilon(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\,\sigma' R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\right]\\
&+C(p)\sup_{|x_2|\leq R}\rho_R^p(|x_2|)\left[(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\,\sigma' R)}|\nabla_{x,\,x}v^n|^p\,dxds\right]\\
&+C(p)\sup_Q|b^n(x_1,x_2)|^p\left[\varepsilon(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\right]\\
&+C(p)C_1\left[\varepsilon(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\right].
\end{aligned}
$$

Posons $\Lambda := \Lambda(p,\,R) = \max\big(\sup_n\sup_Q|a^n(x_1,\,0)|^p,\,\sup_n\sup_Q|b^n(x_1,x_2)|^p\,,\,C_1\big)$.

Puisque $\rho_R^p(|x_2|)$ est continue et tend vers 0 quand x_2 tend vers 0, on choisit R assez petit pour que $\sup_{|x_2|\leq R} \rho_R^p(|x_2|) \leq \frac{1}{2^{2(p+2)}C(p)}$. Nous obtenons alors,

$$
\begin{aligned}
&(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\sigma R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx \\
&\leq C\left(R,\, p,\, k_1,\, \varepsilon,\, mes(Q_{0,T,R})\right) \\
&+\varepsilon\Lambda C(p)\left[2^{4p}(1-\sigma)^{-p}R^{-p}+2^{2p+1}\right]\left[(\frac{1-\sigma}{2})^{2p}R^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\right] \\
&+\frac{1}{4}\left[(\frac{1-\sigma}{2})^{2p}R^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,\,x}v^n|^p\, dxds\right].
\end{aligned}
$$

En choisissant $\varepsilon := \left\{4\Lambda C(p)\left[2^{4p}(1-\sigma)^{-p}R^{-p}+2^{2p+1}\right]\right\}^{-1}$, on obtient (puisque $\sigma' := \frac{(1+\sigma)}{2}$)

$$
\begin{aligned}
&(1-\sigma)^{2p}R^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\sigma R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx \\
&\leq \frac{1}{2}\left[(1-\sigma'^{2p}R^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\right] \\
&+C\left(R,\, p,\, k_1,\, mes(Q_{0,T,R})\right).
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
&R^{2p}\left[\sup_{0<\sigma<1}(1-\sigma)^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\sigma R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\right] \\
&\leq \frac{1}{2}R^{2p}\sup_{0<\sigma'<1}\left[(1-\sigma'^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\sigma' R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\right] \\
&+C'\left(R,\, p,\, k_1,\, mes(Q_{0,T,R})\right).
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que

$$
R^{2p}\left[\sup_{0<\sigma<1}(1-\sigma)^{2p}\int_0^T\int_{B(0,\sigma R)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx\right] \leq 2C'\left(R,\, p,\, k_1,\, mes(Q_{0,T,R})\right).
$$

En prenant $\sigma := 1/2$, nous obtenons

$$
\int_0^T\int_{B(0,R/2)}|\nabla_{x,x}v^n|^p dsdx \leq 2R^{-2p}C'\left(R,\, p,\, k_1,\, mes(Q_{0,T,R})\right).
$$

Le Lemme 1.3 est prouvé.

Revenons à la preuve de la Proposition 1.1.

Grâce à l'inégalité (1.7), l'inégalité (1.8) et l'estimation au Lemma 1.3, nous en déduisons que $\sup_n \|\nabla_x v^n\|_{L_p([0,T]\times B(0,R/2))}$ est borné. Puisque v^n satisfait l'EDP (1.6), nous en déduisons que $\sup_n \|\partial_s v^n\|_{L_p([0,T]\times B(0,R/2))}$ est bornée. Par conséquent, il existe une constante positive $C = C(R, p,\ k_1,\ T)$ telle que

$$\sup_n \int_0^T \int_{B(0,\,R/2)} [|v^n|^p + |\partial_s v^n|^p + |\nabla_x v^n|^p + |\nabla_{x,x} v^n|^p]\, dxds \leq C.$$

la proposition 1.1 est prouvée.

Revenons à la preuve du Théorème 1.1. De la Proposition 1.1 et de l'inégalité (1.7), nous déduisons que $\sup_n \|v^n\|_{\mathcal{W}_p^{1,2}([0,T]\times B(0,R/2))} \leq C(R,\ k_1,\ T,\ p))$. Puisque toute boule $B(0,\ R')$ peut-être recouverte par un nombre fini de boules de rayon $R/2$, nous en déduisons que $\sup_n \|v^n\|_{\mathcal{W}_p^{1,2}(Q_{0,\,T,\,R})}$ est bornée. Par conséquent, v^n converge faiblement vers v dans l'espace $\mathcal{W}_p^{1,2}([0,\ T]\times Q)$, et v résout l'EDP (1.3) $p.s.$ Le théorème 1.1 est prouvé.

1.5 Quelques remarques

On suppose que les hypothèses (A), (B) sont satisfaites. Si de plus, la composante progressive admet une solution unique trajectorielle, alors la solution de l'EDSR markovienne (1.2) est forte. Par exemple, les corollaires suivants donnent des conditions pour lesquelles l'EDSR (1.2) admet au moins une solution forte.

Corollaire 1.2 *Supposons en outre que,*

(i) *σ est uniformément elliptique.*

(ii) $\sigma \in \mathcal{W}^2_{p_1,loc}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\times d})$.

(iii) *σ et b sont bornés.*

Alors, l'EDSR markovienne (1.2) admet une solution forte.

Corollaire 1.3 *Supposons de plus que $d = 1$ et*

(i) *σ est uniformément elliptique.*

(ii) *σ est localement à variation bornée.*

(iii) *σ et b sont bornés.*

Alors, l'EDSR markovienne (1.2) admet une solution forte.

Chapitre 2

Conditions nécessaires et suffisantes pour un contrôle optimal des équations différentielles stochastiques de type champ moyen à horizon infini

(Travail conjoint avec M. A. Mezerdi)

Résumé. Nous considérons un contrôle optimal d'horizon infini pour un système où la dynamique évolue selon une équation différentielle stochastique de type champ moyen et la fonctionnelle coût est également de type champ moyen. Il s'agit de systèmes où les coefficients dépendent non seulement de l'état, mais aussi de sa distribution marginale via une certaine fonctionnelle linéaire. Sous certaines hypothèses de concavité sur les coefficients ainsi que sur le Hamiltonian, nous sommes en mesure de prouver un théorème de vérification, qui donne une condition suffisante pour l'optimalité d'un contrôle admissible donné. En l'absence de concavité, nous prouvons une condition nécessaire pour l'optimalité sous la forme d'un principe de maximum faible de Pontriagin, donné en termes de la stationnarité de l'Hamiltonian.

Mots clés : Équation différentielle stochastique, Champ moyen, Horizon infini, Principe de maximum stochastique, Équation différentielle stochastique rétrograde, Processus adjoint, Hamiltonien.

2010 Classification AMS : 60H10, 60H07, 49N90.

Necessary and sufficient conditions in optimal control of mean-field stochastic differential equations with infinite horizon

(Joint work with M. A. Mezerdi)

ABSTRACT. We consider an infinite horizon optimal control of a system where the dynamics evolved according to a mean-field stochastic differential equation and the cost functional is also of mean-field type. These are systems where the coefficients depend not only on the state but also on its marginal distribution via some linear functional. Under some concavity assumptions on the coefficients as well as on the Hamiltonian, we are able to prove a verification theorem, which gives sufficient condition for optimality for a given admissible control. In the absence of concavity, we prove a necessary condition for optimality in the form of a weak Pontriagin maximum principle, given in terms of stationarity of the Hamiltonian.

Key words : Mean-field stochastic differential equation, Infinite horizon, Stochastic maximum principle, Backward stochastic differential equation, Adjoint process, Hamiltonian.

2010 Mathematics Subject Classification. 60H10, 60H07, 49N90.

2.1 Introduction

On considère un problème de contrôle optimal à horizon infini où la fonctionnelle coût est donnée par

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} f(t, X_t, \mathbb{E}(\varphi(X_t)), u_t)ds\right] \tag{2.1}$$

où le processus d'état X est régi par une équation différentielle stochastique (EDS) de type champ moyen (appelée aussi EDS de McKean-Vlasov) de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \mathbb{E}\left(\Psi(X_t)\right), u_t)dt + \sigma(t, X_t, \mathbb{E}\left(\Phi(X_t)\right), u_t)dW_t, \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Les équations différentielles stochastiques de type champ moyen ont été introduites dans l'article pionnier de H. P. McKean pour donner interprétation probabiliste de l'équation aux dérivées partielles de Vlasov. Ces equations modélisent l'évolution des systèmes de particules en physique statistique. Pour une introduction à cette théorie, on peut se référer aux notes de cours de Snitzman [73]. Les propriétés d'existence et d'unicité ont été obtenues dans [28, 46, 63, 73]. Les EDS de type champ moyen se sont avérées être le cadre naturel de la théorie des jeux de type champ moyen, introduite indépendamment par P.L. Lions et JM Lasry [52] et par M. Huang, R. P. Malhamé et P. E. Caines [45] en 2006. Depuis, une vaste littérature a été développée sur la théorie des jeux à champ moyen. Plusieurs articles ont été motivés par diverses applications telles que la finance mathématique, les réseaux de communication et l'étude de grandes populations. Voir [28] pour une référence récente sur le sujet.

Certains problèmes de contrôle des EDS de type champ moyen dont les coefficients dépendent de la loi marginale de la solution fournissent des modèles intéressants en finance mathématique et en économie. Le problème de sélection de portefeuille de mean variance de Markowitz en temps continu est un exemple typique de problème de contrôle de type champ moyen. L'existence de contrôles optimaux ainsi que leurs approximations ont été étudiées dans [10, 11, 12, 62] en utilisant des méthodes de compactification basées sur des contrôles relaxés. Les conditions nécessaires de Pontryagin ont été traitées sous diverses hypothèses, voir par exemple [11, 22]. Le cas des EDS de type champ moyen et avec saut ont été traité dans [30]. Le livre [28] est une référence assez complète sur la théorie des jeux de type champ moyen et aussi sur le contrôle de type champ moyen. il contient également une large liste de références. Les travaux mentionnés ci-dessous ont été réalisés pour les problèmes de contrôle de type champ moyen définis sur un horizon fini. Dans ce cas (en horizon fini), le principe maximum est donné au moyen d'un processus adjoint, qui est la solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde, avec une condition terminale donnée par le gradient de la fonctionnelle coût en temps terminal du processus d'état optimal. Dans le cas à horizon infini, une telle condition n'est pas possible. Dans [38], les auteurs ont suggéré un principe de maximum à horizon infini pour les EDS d'Itô, basé sur un EDSR à horizon infini et une inégalité limite sur la condition terminale. Cela semble correspondre à la théorie du contrôle déterministe. Dans [59], les auteurs abordent le problème de contrôle à horizon infini actualisé. Dans [1], le travail de [38] a été étendu aux EDS avec retard.

Dans le présent chapitre, nous établissons des conditions suffisantes et nécessaires d'optimalité pour un problème de contrôle optimal stochastique de type champ moyen à horizon infini. La dynamique est régie par une équation différentielle stochastique de type champ moyen. Notre travail étend en particulier ceux de [38] aux équations différentielles stochastiques de type champ moyen. Inspiré par l'article [26, 29], nous commençons par prouver l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde de type champ moyen à horizon infini. La preuve est basée sur un argument de point fixe sur un espace de Banach approprié. Ce résultat est intéressant en soi. Nous l'appliquons ensuite pour définir le processus adjoint comme l'unique solution d'une équation différentielle stochastique linéaire à horizon infini de type champ moyen. Ceci est une étape importante dans la preuve du principe du maximum. La condition de transversalité est donnée par une condition au limite, qui est similaire à celle suggérée dans [38]. Notre deuxième résultat principal est un théorème de vérification d'optimalité. Sous des conditions de concavité de l'hamiltonien, nous donnons des conditions suffisantes d'optimalité. Ces conditions suffisantes nous permettent de donner

un critère pratique pour qu'un contrôle soit optimal. Notre troisième résultat est un principe du maximum stochastique avec une information partielle qui donne des conditions nécessaires d'optimalité. La preuve est basée sur un argument de perturbation du contrôle optimal.
Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans le paragraphe 2, nous donnons la formulation du problème. Dans le paragraphe 3, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution pour des équations différentielles stochastiques rétrogrades de type champ moyen, à horizon infini. Dans le paragraphe 4, nous donnons des conditions suffisantes d'optimalité. Dans le paragraphe 5, nous établissons des conditions nécessaires d'optimalité sous forme d'un principe de maximum stochastique avec information partielle.

2.2 Formulation du problème

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard d-dimensionnel défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de W_t, où $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-nuls de $\mathcal{F}$, et $\mathcal{F}_\infty = \underset{t\geq 0}{\vee} \mathcal{F}_t$. Les notations suivantes seront utilisées dans ce chapitre :

- $\mathcal{S}^2 :=$ l'espace des processus continus et $\mathcal{F}_t$-adaptés φ tels que $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{t\geq 0} |\varphi_t|^2\right] < +\infty$.
- $\mathcal{H}^2 :=$ l'espace des processus $\mathcal{F}_t$-adaptés φ satisfaisant $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty |\varphi_t|^2 \, dt\right] < +\infty$.
- $L^2 :=$ l'espace des variables aléatoires $\mathcal{F}_\infty-$mesurables ξ satisfaisant $\mathbb{E}\left[|\xi|^2\right] < +\infty$.
- Pour $p > 0$, on désigne : $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+) :=$ l'espace (des classes) des fonctions u défini sur $\mathbb{R}_+$ tel que $\int_0^{+\infty} u^p(s)ds < +\infty$.
- Soit $\mathcal{B}^2$ l'espace des processus (Y, Z) à valeurs dans $\mathbb{R}^{1+d}$ tel que $Y \in \mathcal{S}^2, Z \in \mathcal{H}^2$ et $\|(Y,Z)\|_{\mathcal{B}^2} := \left(\|Y\|_{\mathcal{S}^2}^2 + \|Z\|_{\mathcal{H}^2}^2\right)^{1/2}$.

  $\mathcal{B}^2$ est un espace Banach.

Nous considérons les équations différentielles stochastiques (EDS) de type champ moyen qui sont de la forme

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \mathbb{E}(\Psi(X_t)), u_t)dt + \sigma(t, X_t, \mathbb{E}(\Phi(X_t)), u_t)dW_t, \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

où $b : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$, $\sigma : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$, $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Soit U un sous-ensemble (non vide) de $\mathbb{R}$. Soit $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$une sous-filtration donnée de $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $(\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$, représentant les informations dont dispose le contrôleur au temps t. Pour tout contrôle admissible définissons la fonctionnelle coût

$$J(u) = \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} l(t, X_t, \mathbb{E}(\varphi(X_t)), u_t)dt\right], \tag{2.4}$$

où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $l : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$.
Un contrôle admissible est un $U-$processus $\mathcal{G}_t$-prévisible tel que 2.3 admet une solution unique telle que $J(u)$ est bien défini. Notons $\mathcal{A}_\mathcal{G}$ la famille des processus de contrôle admissibles.
Nous considérons les hypothèses suivantes :

$(\mathbf{A}.\mathbf{1})$ φ, Φ et Ψ sont continûment différentiables en x, et, b, σ, l sont continûment différentiables par rapport à (x, y, u).

$(\mathbf{A}.\mathbf{2})$ Toutes les dérivées dans $(\mathbf{A}.\mathbf{1})$ sont bornées et appartiennent à $\mathcal{H}^2$.

L'objet du problème de contrôle est de maximiser la fonctionnelle coût J. Cela consiste à trouver $\widehat{u} \in \mathcal{A}_\mathcal{G}$ tel que

$$J(\widehat{u}) = \sup_{u\in\mathcal{A}_\mathcal{G}} J(u). \tag{2.5}$$

Un contrôle $\widehat{u} \in \mathcal{A}_\mathcal{G}$ est dit optimal s'il satisfait (2.5).

2.3 EDSR de type champ moyen à horizon infini

Il est bien connu, que le principe du maximum stochastique est basé sur le processus dit adjoint qui est donné par la solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde. Dans ce paragraphe, nous utilisons les idées développées dans [26, 29] pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution (Y, Z) d'une équation différentielle stochastique rétrograde de type champ moyen à horizon infini.
Soit $\left(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}}\right) = (\Omega \times \Omega, \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, \mathbb{P}\otimes\mathbb{P})$ le produit de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec lui-même. Nous munissons cet espace produit de la filtration $\overline{\mathbb{F}} = \left\{\overline{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_t,\ t \geq 0\right\}$. Une variable aléatoire $\xi \in$

$L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{R})$ est canoniquement étendue à $\overline{\Omega}$ en posant $\xi'(\omega', \omega) = \xi(\omega')$ où $(\omega', \omega) \in \overline{\Omega} = \Omega \times \Omega$. Pour tout $\theta \in L^1\left(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbb{P}}\right)$, la variable $\theta(., \omega) : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\mathbb{P}(d\omega) - p.p.$. On désigne son espérance par

$$\mathbb{E}'[\theta(., \omega)] = \int_\Omega \theta(\omega', \omega)\mathbb{P}(d\omega').$$

Remarquerons que $\mathbb{E}'[\theta] = \mathbb{E}'[\theta(., \omega)] \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et

$$\overline{\mathbb{E}}[\theta] = \int_{\overline{\Omega}} \theta d\overline{\mathbb{P}} = \int_\Omega \mathbb{E}'[\theta(., \omega)]\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}[\mathbb{E}'[\theta]].$$

L'équation différentielle stochastique rétrograde unidimensionnelle de type champ moyen et à horizon infini qu'on considère est de la forme

$$Y_t = \xi + \int_t^{+\infty} \mathbb{E}'[f(s, Y_s', Z_s', Y_s, Z_s)]\, ds - \int_t^{+\infty} Z_s dW_s, \quad t \geq 0, \tag{2.6}$$

où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}'[f(s, Y_s', Z_s', Y_s, Z_s)](\omega) &= \mathbb{E}'[f(s, Y_s', Z_s', Y_s(\omega), Z_s(\omega))] \\ &= \int_\Omega f(\omega', \omega, s, Y_s(\omega'), Z_s(\omega'), Y_s(\omega), Z_s(\omega))\mathbb{P}(d\omega').\end{aligned}$$

On considère les hypothèses suivantes :

(**H1**) $f = f(\omega', \omega, y', z', y, z) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\overline{\mathbb{F}}$-progressivement mesurable, et il existe deux fonctions déterministes positives $u_1(t)$ et $u_2(t)$ tel que pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ et chaque $(y_i', z_i', y_i, z_i) \in \mathbb{R}^4, i = 1, 2$,

$$\begin{aligned}|f(t, y_1', z_1', y_1, z_1) - f(t, y_2', z_2', y_2, z_2)| \leq\ & u_1(t)\left(|y_1' - y_2'| + |y_1 - y_2|\right) \\ & + u_2(t)\left(|z_1' - z_2'| + |z_1 - z_2|\right),\end{aligned}$$

(**H2**) $\mathbb{E}(\int_0^{+\infty} |f(s, 0, 0, 0, 0)|\, ds)^2 < +\infty$,

(H3) $\int_0^{+\infty} u_1(t)dt < +\infty$, $\int_0^{+\infty} u_2^2(t)dt < +\infty$,

Définition 2.1 *Une solution de l'équation (2.6) est un processus* (Y, Z) *qui appartient à* $\mathcal{S}^2 \times \mathcal{H}^2$ *qui et satisfait l'équation (2.6) et tel que*

$$\int_0^{+\infty} |f(s, \omega', \omega, Y_s(\omega'), Z_s(\omega'), Y_s(\omega), Z_s(\omega))| \, ds < +\infty,$$

.

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant :

Théorème 2.1 *Supposons que* $(\mathbf{H1}), (\mathbf{H2})$ *et* $(\mathbf{H3})$ *sont satisfaites et* $\xi \in \mathrm{L}^2$*. Alors, l'EDSR de type champ moyen à horizon infini (2.6) admet une solution adaptée unique dans* $\mathcal{S}^2 \times \mathcal{H}^2$*.*

Preuve. La preuve est divisée en trois étapes.

Étape 1. Existence de (Y, Z) pour une donnée (U, V).

Pour $(U, V) \in \mathcal{B}^2$ donné, nous considérons l'EDSR de type champ moyen à horizon infini suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^{+\infty} \mathbb{E}' \left[f(s, U_s', V_s', Y_s, Z_s) \right] ds - \int_t^{+\infty} Z_s dW_s, \quad t \geq 0. \tag{2.7}$$

On peut définir $dt\mathbb{P}(d\omega) - p.p.$ une fonction h en posant

$$\begin{aligned} h^{U,V}(\omega, t, Y, Z) &:= \mathbb{E}' \left[f(., \omega, t, U', V', Y, Z) \right] \\ &= \int_\Omega f(\omega', \omega, t, U(\omega'), V(\omega'), Y(\omega), Z(\omega)) \mathbb{P}(d\omega'). \end{aligned}$$

Nous remarquons qu'en raison de nos hypothèses $h^{U,V}(., ., Y, Z)$ appartient à $\mathcal{H}^2$. De plus, puisque f est Lipschitz, alors pour tous $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $dt\mathbb{P}(d\omega) - p.p.$

$$\left| h^{U,V}(\omega, t, y_1, z_1) - h^{U,V}(\omega, t, y_2, z_2) \right| \leq u_1(t) \left| y_1 - y_2 \right| + u_2(t) \left| z_1 - z_2 \right|.$$

Par conséquent, d'après le théorème 1 de [29], il existe une solution unique $(Y, Z) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{H}^2$ à l'EDSR de type champ moyen à horizon infini (2.7).

Étape 2. Contraction de l'application $\Phi(U,V)=(Y,Z)$.

Nous définissons $\Phi(U,V):=(Y,Z)$. Φ applique $\mathcal{B}^2$ à $\mathcal{B}^2$. Supposons que

$$\left(\int_0^{+\infty} u_1(t)dt\right)^2+\int_0^{+\infty} u_2^2(t)dt<\frac{1}{40}. \tag{2.8}$$

Soit $(U,V)\in\mathcal{B}^2$. En utilisant $(\mathbf{H1}),(\mathbf{H2})$ et $(\mathbf{H3})$ et le Théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\xi+\int_0^{+\infty} h^{U,V}(s,Y_s,Z_s)ds\right]^2 &\leq \mathbb{E}\left[|\xi|+\int_0^{+\infty}\mathbb{E}'\left[|f(s,U'_s,V'_s,Y_s,Z_s)|\right]ds\right]^2\\
&\leq 6\mathbb{E}\left(|\xi|^2\right)+6\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty}|f(s,0,0,0,0)|\,ds\right)^2\\
&+6\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty}u_1(s)\,|U_s|\,ds\right)^2+6\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty}u_2(s)\,|V_s|\,ds\right)^2\\
&+6\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty}u_1(s)\,|Y_s|\,ds\right)^2+6\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty}u_2(s)\,|Z_s|\,ds\right)^2,
\end{aligned}$$

puisque,

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty}u_1(s)\,|Y_s|\,ds\right)^2\leq\left(\int_0^{+\infty}u_1(s)ds\right)^2\|Y\|^2_{\mathcal{S}^2}<+\infty,$$

et

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty}u_2(s)\,|Z_s|\,ds\right)^2\leq\left(\int_0^{+\infty}u_2^2(s)ds\right)\|Z\|^2_{\mathcal{H}^2}<+\infty.$$

Il s'ensuit que

$$\mathbb{E}\left[\xi+\int_0^{+\infty}f^{U,V}(s,Y_s,Z_s)ds\right]^2<+\infty.$$

Cela implique que $\left\{\mathbb{E}\left[\xi+\int_0^{+\infty}h^{U,V}(s,Y_s,Z_s)ds\mid\mathcal{F}_t\right]\right\}$ est une martingale de carré intégrable. Donc, d'après le théorème de représentation des martingales, il existe un unique $Z\in\mathcal{H}^2$ tel que,

$$\mathbb{E}\left[\xi+\int_0^{+\infty}h^{U,V}(s,Y_s,Z_s)ds\mid\mathcal{F}_t\right]=\mathbb{E}\left[\xi+h^{U,V}(s,Y_s,Z_s)ds\right]+\int_0^t Z_s ds.$$

Pour $t\geq 0$, on définit

$$Y_t:=\mathbb{E}\left[\xi+\int_t^{+\infty}h^{U,V}(s,Y_s,Z_s)ds\mid\mathcal{F}_t\right]. \tag{2.9}$$

D'après l'étape 1, Φ applique de $\mathcal{B}^2$ dans $\mathcal{B}^2$. Montrons maintenant que Φ est une application contractante pour la norme $\|.\|_{\mathcal{B}^2}$. Soient (U^i, V^i), $(\ i = 1, 2)$ deux éléments de $\mathcal{B}^2$. Soit $\Phi(U^i, V^i) = (Y^i, Z^i)$. On note $\widehat{Y} = Y^1 - Y^2$, $\quad \widehat{Z} = Z^1 - Z^2$, $\widehat{U} = U^1 - U^2$, $\quad \widehat{V} = V^1 - V^2$, $\widehat{h_s} = h^{U^1,V^1}(s, Y_s^1, Z_s^1) - h^{U^2,V^2}(s, Y_s^2, Z_s^2)$. D'après l'inégalité de Doob et (2.9), on en déduit que

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{Y}\right\|_{\mathcal{S}^2}^2 + \left\|\widehat{Z}\right\|_{\mathcal{H}^2}^2 &= \mathbb{E}\sup_{t\geq 0}\left(\mathbb{E}\left[\int_t^{+\infty}\widehat{h}_s ds \mid \mathcal{F}_t\right]\right)^2 \\
&\quad + \mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty}\left|\widehat{h}_s\right| ds\right)^2 - \left(\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty}\left|\widehat{h}_s\right| ds\right)\right)^2 \\
&\leq 5\mathbb{E}\left(\int_0^{+\infty}\left|\widehat{h}_s\right| ds\right)^2.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

En utilisant le théorème de Fubini et l'inégalité (2.10), on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\Phi(U^1, V^1) - \Phi(U^2, V^2)\right\|_{\mathcal{B}^2}^2 = \left\|\left(\widehat{Y}, \widehat{Z}\right)\right\|_{\mathcal{B}^2}^2 &= \left\|\widehat{Y}\right\|_{\mathcal{S}^2}^2 + \left\|\widehat{Z}\right\|_{\mathcal{H}^2}^2 \\
&\leq \mu_{u_1,u_2}^2 \left\|(\widehat{y}, \widehat{z})\right\|_{\mathcal{B}^2}^2,
\end{aligned}$$

où

$$\mu_{u_1,u_2}^2 = \frac{20\left\{\left(\int_0^{+\infty} u_1(s)ds\right)^2 + \int_0^{+\infty} u_2^2(s)ds\right\}}{1 - 20\left\{\left(\int_0^{+\infty} u_1(s)ds\right)^2 + \int_0^{+\infty} u_2^2(s)ds\right\}}.$$

En utilisant l'inégalité (2.8), il s'ensuit que Φ est une contraction stricte, elle admet donc un unique point fixe, dans $\mathcal{B}^2$, qu'on note (Y, Z). On a donc $(Y, Z) = \Phi(Y, Z)$.

Étape 3. Le cas général.

L'hypothèse (**H3**) permet de montrer qu'il existe une constante $T_0 > 0$ suffisamment grande telle que,

$$\left(\int_{T_0}^{+\infty} u_1(s)ds\right)^2 + \int_{T_0}^{+\infty} u_2^2(s)ds < \frac{1}{40}.$$

Maintenant, nous considérons les deux EDSR de type champ moyen à horizon infini et à horizon fini, définies respectivement par :

$$\overline{Y}_t = \xi + \int_t^{+\infty} 1_{\{s \geq T_0\}} \mathbb{E}' \left[f(s, \overline{Y}'_s, \overline{Z}'_s, \overline{Y}_s, \overline{Z}_s) \right] ds - \int_t^{+\infty} \overline{Z}_s dW_s, \; t \in [0, \infty), \tag{2.11}$$

et

$$\widetilde{Y}_t = \overline{Y}_{T_0} + \int_t^{T_0} \mathbb{E}' \left[f(s, \widetilde{Y}'_s, \widetilde{Z}'_s, \widetilde{Y}_s, \widetilde{Z}_s) \right] ds - \int_t^{T_0} \widetilde{Z}_s dW_s, \; t \in [0, T_0]. \tag{2.12}$$

Par les étapes 1 et 2 précédentes, l'EDSR (2.11) admet une solution unique $(\overline{Y}_t, \overline{Z}_t)$. Par le travail de Buckdahn et al. [26] Théorème 3.1, il existe une unique solution $(\widehat{Y}_t, \widehat{Z}_t)$ vérifiant l'EDSR (2.12). On en déduit que l'EDSR (2.6) admet une solution unique [notée (Y, Z)] dans $\mathcal{B}^2$. De l'unicité il s'ensuit que

$$\begin{cases} Y_t = \widetilde{Y}_t, & t \in [0, T_0] \\ Y_t = \overline{Y}_t, & t \in [T_0, \infty) \end{cases}, \quad \begin{cases} Z_t = \widetilde{Z}_t, & t \in [0, T_0] \\ Z_t = \overline{Z}_t, & t \in [T_0, \infty) \end{cases}.$$

Le Théorème 2.1 est démontré. ■

2.4 Conditions suffisantes d'optimalité

Dans ce paragraphe, nous établissons un principe de maximum suffisant à horizon infini pour le problème (2.4). Nous définissons la fonction hamiltonienne habituelle $H : [0, T] \times \mathbb{R} \times U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par

$$H(t, x, y, u, p, q) := f(t, x, y, u) + b(t, x, y, u)p + \sigma(t, x, y, u)q. \tag{2.13}$$

L'équation adjointe pour les processus inconnus $\mathcal{F}_t$-prévisibles $(\widehat{p}(t), \widehat{q}(t))$ (associés au $(\widehat{X}_t, \widehat{u}_t)$) est l'équation différentielle stochastique rétrogarde de type champ moyen à horizon infini suivante : :

$$d\widehat{p}(t) = \left\{ \widehat{H}_x(t) - \widehat{\chi}(t) \right\} dt + \widehat{q}(t) dW(t), \tag{2.14}$$

où

$$\widehat{H}_x(t) = \frac{\partial b}{\partial x}(t, \widehat{X}_t, \mathbb{E}(\Psi(\widehat{X}_t)), \widehat{u}_t)\widehat{p}_t + \frac{\partial \sigma}{\partial x}(t, \widehat{X}_t, \mathbb{E}(\Phi(\widehat{X}_t)), \widehat{u}_t)\widehat{q}_t + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \widehat{X}_t, \mathbb{E}(\varphi(\widehat{X}_t)), \widehat{u}_t),$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}(t) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial b}{\partial y}(t, \widehat{X}_t, \mathbb{E}(\Psi(\widehat{X}_t)), \widehat{u}_t)\widehat{p}_t\right)\frac{\partial \Psi}{\partial x}(\widehat{X}_t) \\ + \mathbb{E}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}(t, \widehat{X}_t, \mathbb{E}(\Phi(\widehat{X}_t)), \widehat{u}_t)\widehat{q}_t\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\widehat{X}_t) \\ + \mathbb{E}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, \widehat{X}_t, \mathbb{E}(\varphi(\widehat{X}_t)), \widehat{u}_t)\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\widehat{X}_t). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Remarque 2.1 *D'après le théorème 2.1, sous les hypothèses* (A.1) *et* (A.2)*, l'EDSR de type champ moyen à horizon infini (2.14) admet une solution adaptée unique telle que,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0}|\widehat{p}_t|^2 + \int_0^{+\infty}|\widehat{q}_t|^2\,dt\right] < +\infty.$$

Considérons les hypothèses suivantes :

(A.3) Pour chaque $u \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,\widehat{p}_t(X_t - \widehat{X}_t)\right] < +\infty. \tag{2.16}$$

(A.4) Les fonctions Ψ, φ, Φ sont concaves.

(A.5) Les fonctions b_y, σ_y et f_y sont positives.

(A.6) L'hamiltonien est concave en (x, y, u) et pour chaque $t \in [0, \infty)$.

(A.7) Pour tout $u \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$, il existe $\widehat{u}_t \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ tel que,

$$\mathbb{E}\left[H(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t) \mid \mathcal{G}_t\right] = \max_{u\in\mathcal{A}_{\mathcal{G}}}\mathbb{E}\left[H(t, \widehat{X}_t, u_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t) \mid \mathcal{G}_t\right] \;\; a.s. \tag{2.17}$$

(A.8) Pour chaque $t \in [0, \infty)$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} (\widehat{X}_t - X_t)^2 \widehat{q}_t^2 dt\right] < +\infty, \tag{2.18}$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \widehat{p}_t^2 \sigma^2(t, X_t, \mathbb{E}(\Phi(X_t)), u_t) dt\right] < +\infty, \tag{2.19}$$

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{\partial H}{\partial u}(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t)\right|^2\right] < +\infty, \tag{2.20}$$

et

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} |H(t, X_t, u_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t)| \, dt\right] < +\infty. \tag{2.21}$$

Théorème 2.2 *(Conditions suffisantes d'optimalité). Supposons que (A.1) - (A.8) sont satisfaites. Soit $\widehat{u} \in A_{\mathcal{G}}$ un contrôle admissible et $\widehat{X}$ la solution de l'équation (2.3) associée à $\widehat{u}$. Soit $(\widehat{p}_t, \widehat{q}_t)$ la solution de l'équation (2.14) associée à $(\widehat{u}, \widehat{X})$. Alors, $\widehat{u}$ est un contrôle optimal pour le problème (2.4).*

Preuve. Pour des raisons de simplicité, nous utiliserons les notations suivantes dans la preuve.

$$\begin{aligned}
\widehat{b}(t) &:= b(t, \widehat{X}_t, \mathbb{E}(\varphi(\widehat{X}_t)), \widehat{u}_t), \\
\widehat{\varphi}(t) &:= \varphi(\widehat{X}_t), \\
\frac{\partial \widehat{b}}{\partial x}(t) &:= \frac{\partial b}{\partial x}(t, \widehat{X}_t, \mathbb{E}(\Psi(\widehat{X}_t)), \widehat{u}_t),
\end{aligned}$$

et de même pour les autres fonctions $\sigma(t), \widehat{\Phi}(t)$ etc...

Nous désignons par $H(t) := H(t, X_t, u_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t)$ et par $\widehat{H}(t) := H(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t)$. Choisissons un $u \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ arbitraire et considérons la quantité

$$J(u) - J(\widehat{u}) := \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \left(f(t) - \widehat{f}(t)\right) dt\right].$$

Nous allons montrer que $J(u) \leq J(\widehat{u})$. En utilisant l'inégalité (2.16) et la formule d'Itô (appliquée à $\widehat{p}_t(X_t - \widehat{X}_t)$), on montre que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\left[\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left[\widehat{p}_t(X_t - \widehat{X}_t)\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left[\int_0^t \widehat{p}_s(b(s) - \widehat{b}(s))ds + \int_0^t \widehat{p}_s(\sigma(s) - \widehat{\sigma}(s))dW_s \right.\right.\\
&\quad - \int_0^t (X_s - \widehat{X}_s)\widehat{H}_x(s)ds + \int_0^t (X_s - \widehat{X}_s)\widehat{q}_s dW_s \\
&\quad \left.\left. - \int_0^t (X_s - \widehat{X}_s)\widehat{\chi}(s)ds + \int_0^t (\sigma(s) - \widehat{\sigma}(s))\widehat{q}_s ds\right]\right].
\end{aligned}$$

En utilisant les identités (2.13), (2.15) et l'inégalité (2.18), (2.19), on obtient

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\left[\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left[\int_0^t \widehat{p}_s\left(b(s) - \widehat{b}(s)\right)ds - \int_0^t \left(X_s - \widehat{X}_s\right)\widehat{H}_x(s)ds \right.\right.\\
&\quad \left.\left. - \int_0^t \left(X_s - \widehat{X}_s\right)\widehat{\chi}(s)ds + \int_0^t (\sigma(s) - \widehat{\sigma}(s))\,\widehat{q}_s ds\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \widehat{p}_s\left(b(s) - \widehat{b}(s)\right)ds + \int_0^{+\infty} (\sigma(s) - \widehat{\sigma}(s))\,\widehat{q}_s ds \right.\\
&\quad \left. - \int_0^{+\infty} \left(X_s - \widehat{X}_s\right)\widehat{\chi}(s)ds - \int_0^{+\infty} \left(X_s - \widehat{X}_s\right)\widehat{H}_x(s)ds\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \left(H(s) - \widehat{H}(s)\right)ds - \int_0^{+\infty} \left(X_s - \widehat{X}_s\right)\widehat{H}_x(s)ds \right.\\
&\quad - \int_0^{+\infty} \left(X_s - \widehat{X}_s\right)\left\{\mathbb{E}\left(\frac{\partial \widehat{b}}{\partial y}(s)\widehat{p}_s\right)\frac{\partial \widehat{\Psi}}{\partial x}(s)\right.\\
&\quad \left.\left. + \mathbb{E}\left(\frac{\partial \widehat{\sigma}}{\partial y}(s)\widehat{q}_s\right)\frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x}(s) + \mathbb{E}\left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial y}(s)\right)\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial x}(s)\right\}ds\right] - (J(u) - J(\widehat{u})).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Notons que pour $u \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$, l'application $u \to \mathbb{E}\left[H(t, \widehat{X}_t, u_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t) \mid \mathcal{G}_t\right]$ admet un maximum au point $u = \widehat{u}_t$ et que $u_t, \widehat{u}_t$ sont adaptés à $\mathcal{G}_t$. En utilisant (2.17) et (2.20) on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{\partial H}{\partial u}(t, \widehat{X}_t, u_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t)(u_t - \widehat{u}_t) \mid \mathcal{G}_t\right]_{u=\widehat{u}(t)} \\
&= \frac{\partial H}{\partial u}\mathbb{E}\left[H(t, \widehat{X}_t, u_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t) \mid \mathcal{G}_t\right]_{u=\widehat{u}(t)}(u_t - \widehat{u}_t) \leq 0.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

D'autre part, en utilisant la concavité de l'Hamiltonien H, les hypothèses (A.4)-(A.5) et l'égalité (2.23) on obtient pour tout $t \in [0, \infty)$, $\mathbb{P} - p.s.$

$$\begin{aligned} H(t) - \widehat{H}(t) \leq\ & \widehat{H}_x(t)(X_t - \widehat{X}_t) + \frac{\partial \widehat{f}}{\partial y}(t)\mathbb{E}\left[\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial x}(t)(X_t - \widehat{X}_t)\right] \\ & + \frac{\partial \widehat{b}}{\partial y}(t)\mathbb{E}\left[\frac{\partial \widehat{\Psi}}{\partial x}(t)(X_t - \widehat{X}_t)\right]\widehat{p}_t \\ & + \frac{\partial \widehat{\sigma}}{\partial y}(t)\mathbb{E}\left[\frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x}(t)(X_t - \widehat{X}_t)\right]\widehat{q}_t \\ & + \frac{\partial \widehat{H}}{\partial u}(t)(u_t - \widehat{u}_t) \\ \leq\ & \widehat{H}_x(t)(X_t - \widehat{X}_t) + \frac{\partial \widehat{f}}{\partial y}(t)\mathbb{E}\left[\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial x}(t)(X_t - \widehat{X}_t)\right] \\ & + \frac{\partial \widehat{b}}{\partial y}(t)\mathbb{E}\left[\frac{\partial \widehat{\Psi}}{\partial x}(t)(X_t - \widehat{X}_t)\right]\widehat{p}_t \\ & + \frac{\partial \widehat{\sigma}}{\partial y}(t)\mathbb{E}\left[\frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x}(t)(X_t - \widehat{X}_t)\right]\widehat{q}_t. \end{aligned} \tag{2.24}$$

En combinant les inégalités (2.22) et (2.24), on obtient

$$\begin{aligned} J(u) - J(\widehat{u}) \leq \mathbb{E}\Bigg[& \int_0^{+\infty} \left(H(s) - \widehat{H}(s)\right) ds - \int_0^{+\infty} \left(X_s - \widehat{X}_s\right) \widehat{H}_x(s) ds \\ & - \int_0^{+\infty} \left(X_s - \widehat{X}_s\right) \Bigg\{ \mathbb{E}\left(\frac{\partial \widehat{b}}{\partial y}(s)\widehat{p}_s\right) \frac{\partial \widehat{\Psi}}{\partial x}(s) \\ & + \mathbb{E}\left(\frac{\partial \widehat{\sigma}}{\partial y}(s)\widehat{q}_s\right) \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x}(s) + \mathbb{E}\left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial y}(s)\right) \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial x}(s) \Bigg\} ds \Bigg] \leq 0. \end{aligned}$$

Le Théorème 2.2 est prouvé. ■

2.5 Conditions nécessaires d'optimalité

Dans ce paragraphe, nous etablissons une condition nécessaire d'optimalité satisfaite par un contrôle optimal $\widehat{u}_t$. Même si la condition suffisante est un outil puissant pour vérifier si un contrôle est optimal, il doit être clair que la condition de concavité n'est pas toujours remplie dans les applications concrètes. C'est un inconvénient du principe du maximum suffisant. La question est la suivante : Supposons que $\widehat{u}_t$ est un contrôle optimal, est-ce que l'inégalité sur les hamiltoniens

$$\mathbb{E}\left[H(t,\widehat{X}_t,\widehat{u}_t,\widehat{p}_t,\widehat{q}_t)\mid\mathcal{G}_t\right]=\max_{u\in\mathcal{A}_{\mathcal{G}}}\mathbb{E}\left[H(t,\widehat{X}_t,u_t,\widehat{p}_t,\widehat{q}_t)\mid\mathcal{G}_t\right]\ p.s.,$$

est vérifiée ?

Sous quelques hypothèses supplémentaires, nous donnerons une réponse à cette question, sous la forme d'un principe de maximum stochastique faible, donné par une condition sur la dérivée de Gateaux de l'hamiltonien.

Tout au long de ce paragraphe, nous supposerons ce qui suit :

A.9 Pour tout t,h tel que $0\leq t<t+h$ et toutes variables aléatoires bornées $\mathcal{G}_t$-mesurables α, le processus de contrôle β_t défini par

$$\beta_s:=\alpha 1_{[t,t+h]}(s), \tag{2.25}$$

appartient à $\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$.

A.10 Pour tout $u\in\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ et tout $\beta\in\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ et borné, il existe $\delta>0$ tel que,

$$u+\varepsilon\beta\in\mathcal{A}_{\mathcal{G}}\quad \text{pour tout } \varepsilon\in(-\delta,\delta)\,. \tag{2.26}$$

A.11 Pour tout $\beta\in\mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ et borné, on définit le processus $Y_t=Y_t^{(u,\beta)}$ par

$$Y_t=\frac{d}{d\varepsilon}X_t^{u+\varepsilon\beta}\mid_{\varepsilon=0}, \tag{2.27}$$

Y_t existe et nous avons $Y(0)=0$ et

$$\begin{aligned} dY_t=&\left\{\frac{\partial b}{\partial x}(t)Y_t+\frac{\partial b}{\partial y}(t)\mathbb{E}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial x}(t)Y_t\right]+\frac{\partial b}{\partial u}(t)\beta_t\right\}dt\\ &+\left\{\frac{\partial\sigma}{\partial x}(t)Y_t+\frac{\partial\sigma}{\partial y}(t)\mathbb{E}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t)Y_t\right]+\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t)\beta_t\right\}dW_t,\end{aligned} \tag{2.28}$$

où

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon}\mathbb{E}\left[\Psi\left(X_t^{u+\varepsilon\beta}\right)\right]|_{\varepsilon=0}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{d\varepsilon}\left(\Psi\left(X_t^{u+\varepsilon\beta}\right)\right)|_{\varepsilon=0}\right] \tag{2.29}$$
$$= \mathbb{E}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial x}(t)\left(\frac{d}{d\varepsilon}X_t^{u+\varepsilon\beta}|_{\varepsilon=0}\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial x}(t)Y_t\right].$$

Théorème 2.3 *(Conditions nécessaires d'optimalité) Soit $\widehat{u} \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ un maximum local pour $J(u)$, c'est-à-dire pour tout borné $\beta \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ il existe $\delta > 0$ tel que $\widehat{u} + \varepsilon\beta \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ pour tout $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$, et $J(\widehat{u} + \varepsilon\beta)$ est maximal pour $\varepsilon = 0$.*
Soient $\widehat{X}_t$ et $(\widehat{p}_t, \widehat{q}_t)$ respectivement les solutions des équations (2.3)-(2.4) et (2.14) associées à $\widehat{u}$. Soit $\widehat{Y}_t = Y_t^{(\widehat{u},\beta)}$ donné par (2.27). Supposons que

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty}\left[\widehat{p}_t^2\left\{\left(\tfrac{\partial\widehat{\sigma}}{\partial x}(t)\right)^2\widehat{Y}_t^2 + \left(\tfrac{\partial\widehat{\sigma}}{\partial u}(t)\right)^2\right.\right.\right.\\ &\left.\left.\left.+\left(\tfrac{\partial\widehat{\sigma}}{\partial y}(t)\right)^2\mathbb{E}\left[\left(\tfrac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x}(t)\right)^2\widehat{Y}_t^2\right]\right\} + \widehat{Y}_t^2\widehat{q}_t^2\right]ds\right] < +\infty.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Supposons en outre que $(\mathbf{A.3})$ est vérifiée. Alors $\widehat{u}$ est un point stationnaire pour $\mathbb{E}\left[H/\mathcal{G}_t\right]$ c'est-à-dire que

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial H}{\partial u}(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t) \mid \mathcal{G}_t\right] = 0.$$

Preuve. Pour $\beta \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ on pose,

$$h(\varepsilon) := \mathbb{E}\left[\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left(\widehat{p}_t X_t^{\widehat{u}+\varepsilon\beta}\right)\right].$$

Soit $\delta > 0$ le nombre donné dans l'hypothèse (A.10). En utilisant l'hypothèse (A.3), nous pouvons montrer que pour tout $\beta \in \mathcal{A}_{\mathcal{G}}$ et pour tout $\varepsilon \in (-\delta, \delta)$,

$$h(\varepsilon) - h(0) \geq 0,$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
0 &= h'(\varepsilon) \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\left(\mathbb{E}\left[\overline{\lim_{t\to+\infty}}\widehat{p}_t X_t^{\widehat{u}+\varepsilon\beta}\right]\right)|_{\varepsilon=0} \\
&= \mathbb{E}\left[\overline{\lim_{t\to+\infty}}\widehat{p}_t \frac{d}{d\varepsilon} X_t^{\widehat{u}+\varepsilon\beta}|_{\varepsilon=0}\right].
\end{aligned}$$

Dans la dernière formule on a utilisé [1] pour permuter la dérivation et l'intégration.

En utilisant (2.14), (2.28) et (2.30) et la formule Itô (appliquée à $\widehat{p}_t \frac{d}{d\varepsilon} X_t^{\widehat{u}+\varepsilon\beta}$), nous obtenons

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}\left[\overline{\lim_{t\to+\infty}}\widehat{p}_t \frac{d}{d\varepsilon} X_t^{\widehat{u}+\varepsilon\beta}|_{\varepsilon=0}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty}\widehat{p}_s\left\{\frac{\partial\widehat{b}}{\partial x}(s)\widehat{Y}_s+\frac{\partial\widehat{b}}{\partial y}(s)\mathbb{E}\left[\frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial x}(s)Y_s\right]+\frac{\partial\widehat{b}}{\partial u}(s)\beta_s\right\}ds\right. \\
&\quad -\int_0^{+\infty}\widehat{Y}_s\left\{\mathbb{E}\left(\frac{\partial\widehat{b}}{\partial y}(s)\widehat{p}_s\right)\frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial x}(s)+\mathbb{E}\left(\frac{\partial\widehat{\sigma}}{\partial y}(s)\widehat{q}_s\right)\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x}(s)\right. \\
&\quad \left.+\mathbb{E}\left(\frac{\partial\widehat{f}}{\partial y}(s)\right)\frac{\partial\widehat{\varphi}}{\partial x}(s)\right\}ds-\int_0^{+\infty}\widehat{Y}_s\widehat{H}_x(s)ds \\
&\quad \left.+\int_0^{+\infty}\widehat{q}_s\left\{\frac{\partial\widehat{\sigma}}{\partial x}(s)\widehat{Y}_s+\frac{\partial\widehat{\sigma}}{\partial y}(s)\mathbb{E}\left[\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x}(s)\widehat{Y}_s\right]+\frac{\partial\widehat{\sigma}}{\partial u}(s)\beta_s\right\}ds\right].
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\varepsilon} J(\widehat{u} + \varepsilon\beta) \mid_{\varepsilon=0} \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \left\{\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x}(s)\widehat{Y}_s + \frac{\partial \widehat{f}}{\partial u}(s)\beta_s + \frac{\partial \widehat{b}}{\partial y}(s)\mathbb{E}\left[\frac{\partial \widehat{\Psi}}{\partial x}(s)\widehat{Y}_s\right]\right\} ds\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\overline{\lim_{t\to+\infty}} \widehat{p}_t \frac{d}{d\varepsilon} X_t^{\widehat{u}+\varepsilon\beta} \mid_{\varepsilon=0}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \left\{\frac{\partial \widehat{f}}{dx}(s)\widehat{Y}_s + \frac{\partial \widehat{f}}{dy}(s)\mathbb{E}\left(\frac{d\widehat{\varphi}}{dx}(s)\widehat{Y}_s\right) + \frac{\partial \widehat{f}}{du}(s)\beta_s\right\} ds\right. \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \widehat{p}_s \left\{\frac{\partial \widehat{b}}{\partial x}(s)\widehat{Y}_s + \frac{\partial \widehat{b}}{\partial y}(s)\mathbb{E}\left[\frac{\partial \widehat{\Psi}}{\partial x}(s)\widehat{Y}_s\right] + \frac{\partial \widehat{b}}{\partial u}(s)\beta_s\right\} ds \\
&\quad - \int_0^{+\infty} \widehat{Y}_s \left\{\mathbb{E}\left(\frac{\partial \widehat{b}}{\partial y}(s)\widehat{p}_s\right)\frac{\partial \widehat{\Psi}}{\partial x}(s) + \mathbb{E}\left(\frac{\partial \widehat{\sigma}}{\partial y}(s)\widehat{q}_s\right)\frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x}(s)\right. \\
&\quad \left. + \mathbb{E}\left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial y}(s)\right)\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial x}(s)\right\} ds - \int_0^{+\infty} \widehat{Y}_s \widehat{H}_x(s) ds \\
&\quad \left. + \int_0^{+\infty} \widehat{q}_s \left\{\frac{\partial \widehat{\sigma}}{\partial x}(s)\widehat{Y}_s + \frac{\partial \widehat{\sigma}}{\partial y}(s)\mathbb{E}\left[\frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x}(s)\widehat{Y}_s\right] + \frac{\partial \widehat{\sigma}}{\partial u}(s)\beta_s\right\} ds\right].
\end{aligned}$$

De (2.13), nous avons

$$\frac{\partial H}{\partial u}(s,x,u,p,q) = \frac{\partial f}{\partial u}(s,x,u) + \frac{\partial b}{\partial u}(s,x,u)p + \frac{\partial \sigma}{\partial u}(s,x,u)q.$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\partial \widehat{H}}{\partial u}(s)\beta_s ds\right] = 0.$$

En choisissant $\beta_s := \alpha 1_{[t,t+h]}(s)$, nous obtenons

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} \frac{\partial \widehat{H}}{\partial u}(s)\alpha dt\right] = 0.$$

En dérivant par rapport à h en $h = 0$, nous en déduisons que

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial H}{\partial u}(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t)\alpha\right] = 0.$$

Puisque cette égalité est vérifié pour tout α $\mathcal{G}_t$-mesurable , nous avons alors

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial H}{\partial u}(t, \widehat{X}_t, \widehat{u}_t, \widehat{p}_t, \widehat{q}_t) \mid \mathcal{G}_t\right] = 0. \tag{2.31}$$

Le théorème est démontré. ■

2.6 Exemple : Un problème de contrôle linéaire quadratique

Nous considérons le problème de contrôle stochastique linéaire quadratique bien connu dans le cadre de l'horizon infini (voir [57]). Pour une étude récente et détaillée des problèmes de LQ pour les systèmes à champ moyen, nous nous référons à [60].

Pour la simplicité des notations et des calculs, nous supposons que toutes les équations et tous les coefficients sont unidimensionnels. Soit W un mouvement brownien unidimensionnel, Soient $A, \widetilde{A}, B, C, \widetilde{C}$ et D des constantes. Nous supposons que la dynamique est donnée par l'équation différentielle stochastique à champ moyen

$$\begin{cases} dX_t = \left(\widetilde{A}E\left[X_t\right] + AX_t + Bv_t\right)dt + \left(\widetilde{C}E\left[X_t\right] + CX_t + Dv_t\right)dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{2.32}$$

La fonctionnelle coût est donnée par

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(RE\left[X_t^2\right] + NE\left[v_t^2\right]\right)dt, \tag{2.33}$$

où R et N sont des constantes positives.

L'espace des contrôles admissibles est défini par

$$\mathcal{U}_{ad} = \Big\{ \text{processus mesurables} v \text{vérifiant} E\left(\int_0^{+\infty} |v_t|^2\,dt\right) < +\infty \text{ et l'équation (2.32)}$$

$$\text{admet une solution unique avec } \lim_{t\to+\infty}\left[|X_t^v|^2\right] \text{ existe}\Big\}$$

Pour chaque $v \in \mathcal{U}_{ad}$ la fonctionnelle coût est bien définie.

Supposons que la condition de transversalité ($\mathbf{A.3}$) est vérifiée. Soit u un contrôle optimal maximisant la fonctionnelle coût $J(v)$. L'équation adjointe associé à u est

$$-dp_t = \left(Ap_t + Cq_t + RX_t^u + \widetilde{A}E\left[p_t\right] + \widetilde{C}E\left[\left[q_t\right]\right]\right)dt - q_t dB_t.$$

Alors, par la condition nécessaire d'optimalité (2.17), on vérifie que

$$Nu_t = -Bp_t - Dq_t.$$

Du Théorème 2.2, sur les conditions suffisantes, $u_t = -\dfrac{1}{N}\left(-Bp_t - Dq_t\right)$ est optimal.
En utilisant les mêmes notations que dans [57] et en remplacant u_t par sa valeur dans les équations de X_t^u et (p_t, q_t), il s'avère que le contrôle optimal est donné sous une forme explicite par

$$u_t = -\left(N + D^2\phi_t\right)^{-1}\left\{(B + CD)\,\phi_t X_t^u + \left(B\psi_t + \widetilde{C}D\phi_t\right)E\left[X_t^u\right]\right\},$$

où ϕ_t vérifiée de l'équation de Riccati dont on suppose qu'elle admet une unique solution.

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi_t}{dt} + \left(2A + C^2\right)\phi_t - (CD + B)^2\left(N + D^2\phi_t\right)^{-1}\phi_t^2 + R = 0, \\ \lim_{t\to+\infty}\phi_t = 0, \end{cases}$$

et ψ_t est la solution de l'équation suivante, qu'on suppose égallement qu'elle admet une unique solution,

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_t}{dt} + \left(2A + 2\widetilde{A}\right)\psi_t + \left(2C\widetilde{C} + \widetilde{C}^2 + 2\widetilde{A}\right)\phi_t \\ -\left(N + D^2\phi_t\right)^{-1}\left\{D\left(C + \widetilde{C}\right)\phi_t + B\left(\phi_t + \psi_t\right) + (B + CD)\,\phi_t\right\}\left(B\psi_t + \widetilde{C}D\phi_t\right) = 0, \\ \lim_{t\to+\infty}\psi_t = 0. \end{cases}$$

Chapitre 3

EDSR réfléchies quadratiques avec deux barrières et condition terminale de carré intégrable

(Travail conjoint avec B. Labed et K. Bahlali)

Résumé. Nous considérons des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) réfléchies avec deux barrières dont le générateur $H(t, \omega, y, z)$ a une croissance quadratique de sa variable z et une condition terminale ξ de carré intégrable. Les solutions sont contraintes de rester entre deux processus continus L et U (appelés des barrières). On établit l'existence de solutions lorsque $H(t, \omega, y, z) = f(y)|z|^2$ et aussi lorsque $H(t, \omega, y, z) = a+b|y|+c|z|+f(y)|z|^2$. Les principaux outils sont l'estimation de Krylov et la formule d'Itô-Krylov, démontrées ici, pour les solutions d'équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies avec deux barrières.

Mots-clés : EDSR quadratique réfléchie, formule de temps d'occupation, Inégalité de Krylov, formule d'Itô-Krylov, formule de Tanaka.

2020 Classification AMS : 60H10, 60H20.

Quadratic BSDEs with two reflecting barriers and a square integrable terminal value

(Joint work with B. Labed and K. Bahlali)

ABSTRACT. We consider backward stochastic differential equations (BSDEs) with two reflecting barriers which generator $H(t, \omega, y, z)$ has a quadratic growth in its z-variable and a square integrable terminal value ξ. The solutions is constrained to stay between two time continuous processes L and U (called the barriers). We establish the existence of solutions when $H(t, \omega, y, z) = f(y)|z|^2$ and also when $H(t, \omega, y, z) = a + b|y| + c|z| + f(y)|z|^2$. The main tools are Krylov's estimate and Itô-Krylov's formula, which are proved here, for the solutions of backward stochastic differential equations with two reflecting barriers.

Key words : Reflected quadratic BSDE ; Local time ; Occupation time formula ; Krylov's inequality ; Itô–Krylov's formula ; Tanaka's formula.

2010 Mathematics Subject Classification. 60H10, 60H20.

3.1 Introduction

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ le mouvement brownien standard d-dimensionnel, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de W_t, où $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-nuls de $\mathcal{F}$. Pour $p > 0$, on note

$\mathbb{L}^p_{loc}(\mathbb{R})$ L'espace des (classes de) fonctions u définies sur $\mathbb{R}$ qui sont p–intégrables sur les ensembles bornés de $\mathbb{R}$.

$\mathcal{W}^2_{p,loc}$:= L'espace de Sobolev des (classes) fonctions u défnie sur $\mathbb{R}$ tel que u et ses dérivés généralisées u' et u'' appartiennent à $\mathbb{L}^p_{loc}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{C}$:= L'espace des processus $\mathcal{F}_t-$adaptés et continus.

S^2 := L'espace des processus continus et $\mathcal{F}_t-$adaptés et continus φ satisfaisant $\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}|\varphi_t|^2 < +\infty$.

$\mathbb{L}^2$:= l'espace de variables aléatoires $\mathcal{F}_T-$mesurables ξ $p.s.$ satisfaisant $\mathbb{E}|\xi|^2 < +\infty$.

$\mathcal{M}^2$:= l'espace de processus $\mathcal{F}_t$-adaptés φ satisfaisant $\mathbb{E}\int_0^T |\varphi_t|^2\, dt < +\infty$

$\mathcal{L}^2$:= l'espace de processus $\mathcal{F}_t$-adaptés φ satisfaisant $\int_0^T |\varphi_t|^2\, dt < +\infty$.

$\mathcal{K}$:= l'espace des processus $\mathcal{P}$-mesurables continus et croissants $(K_t)_{t\leq T}$ tels que $K_0 = 0$ et $K_T < +\infty$, $\mathbb{P}-p.s.$

$\mathcal{K}^2$:= l'espace des processus $\mathcal{P}$-mesurables continus croissants $(K_t)_{t\leq T}$ tels que $K_0 = 0$ et $\mathbb{E}\,(K_T^2) < +\infty$.

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, nous désignons par $a \vee b := \max(a, b)$, $a \wedge b := \min(a, b)$, $a^- := \max(0, -a)$ et $a^+ := \max(0, a)$.

Nous considérons les hypothèses suivantes

(A.1) $H(t, \omega, y, z)$ est un processus $\mathcal{F}_t$ -progressivement mesurable à valeurs réelles défini sur $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

(A.2) ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable de carré intégrable définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(A.3) $U = (U_t)_{0\leq t\leq T}$ et $L = (L_t)_{0\leq t\leq T}$ sont deux processus qui appartiennent à $\mathcal{S}^2$ tels que $\forall t \leq T$, $L_t < U_t$ et $L_T \leq \xi \leq U_T$, $\mathbb{P}-p.s.$

Définition 3.1 *Une solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde réfléchie avec* *deux barrières et avec les données (ξ, H, L, U) est un quadruplet de processus $(\mathcal{F}_t)-$adaptés $(Y, Z, K^+, K^-) := \left(Y_t, Z_t, K_t^+, K_t^-\right)_{0\le t\le T}$ qui satisfait l'équation suivante*

$$\begin{cases} (\mathbf{i})\ Y \in \mathcal{C}, K^+ \text{ and } K^- \in \mathcal{K},\ Z \in \mathcal{L}^2, \\ (\mathbf{ii})\ Y_t = \xi + \int_t^T H(s, Y_s, Z_s)ds + \int_t^T dK_s^+ - \int_t^T dK_s^- - \int_t^T Z_s dB_s, \qquad 0 \le t \le T, \\ (\mathbf{iii})\ \forall t \le T,\ L_t \le Y_t \le U_t, \\ (\mathbf{iv})\ \int_0^T (U_t - Y_t)dK_t^- = \int_0^T (Y_t - L_t)dK_t^+ = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

ξ est la donnée terminale et H le générateur ou coefficient, L la barrière inférieure et U la barrière supérieure.

Dans la suite, l'équation précédente sera labellisée $eq(H, \xi, L, U)$ ou bsde(H, ξ, L, U).

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies avec deux barrières (EDSRR) ont été introduites par Civitanic et Karatzas [31]. L'EDSRR (3.1) est dite quadratique si son générateur a une croissance au plus quadratique en sa variable z. Dans [31], les auteurs ont établi l'existence et l'unicité des solutions lorsque le générateur H est uniformément Lipschitzien en (y, z) uniformément en (t, ω), la donnée terminale ξ est de carré intégrable et les barrières sont régulières ou elles satisfont la condition de Mokobodski. Lorsque ξ est bornée, H satisfait $H(s, y, z) \le C(1 + \phi(y) + |z|^2)$ [où ϕ est une fonction bornée sur les compacts] et les barrières satisfont la condition de Mokobodski, l'existence d'une solution a été prouvée par Bahlali, Hamadène et Mezerdi [20]. Dans Hamadène et Hassani [43], l'existence de solutions a été établie pour l'EDSR réfléchies avec deux barrières (3.1) dans le cas où la valeur terminale ξ est de carré intégrable, H est de croissance linéaire en y et z et les barrières sont de carrés intégrables et satisfont $L_t < U_t$ pour tout $t \in [0, T]$. Dans Lepeltier et San Martin [56], l'existence de solutions a été établie pour des EDSR réfléchies avec deux barrières (3.1) lorsque le générateur H est à croissance linéaire et la donnée terminale ξ est de carré intégrable. Essaky et Hassani [36] ont considéré l'EDSRR (3.1) dans une situation très générale. Ils ont établi l'existence d'une solution minimale et d'une solution maximale lorsque ξ n'est que $\mathcal{F}_T-$mesurable et que H a une croissance quelconque par rapport à la variable y et une croissance quadratique stochastique par rapport à la variable z. Plus précisément, Essaky et Hassani supposent qu'il existe un $\mathcal{F}_t$-processus adaptés et positif η vérifiant $\mathbb{E}\left(\int_0^T \eta_s ds\right) < +\infty$ et un processus continu C de telle sorte que $|H(t,y,z)| \leq \eta_t(\omega) + C_t(\omega)\,|z|^2$, et il existe une semi-martingale continue qui passe entre L et U. La dernière condition est satisfaite, par exemple, lorsque $L < U$.

L'objectif principal de ce chapitre est de généraliser le résultat de [13, 14] aux EDSR quadratiques et réfléchies. Nous utilisons d'abord la formule du temps d'occupation pour montrer que pour toute solution (Y, Z, K^+, K^-) de l'EDSRR (3.1) avec des données $(H(t,y,z), \xi, L, U)$, il existe une fonction positive f localement intégrable et un processus stochastique positif $\mathcal{F}_t$ -adapté η satisfaisant $\mathbb{E}\int_0^T \eta_s ds < +\infty$ tel que pour $p.s.$ (t,ω) et pour tout (y,z),

$$|H(t,y,z)| \leq \eta_t + f(y)|z|^2,$$

alors le temps passé par Y dans un ensemble négligeable de Lebesgue est négligeable par rapport à la mesure $|Z_t|^2 dt$. C'est-à-dire que l'estimation de Krylov suivante est valable pour toute fonction mesurable positive Ψ

$$\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_R} \Psi(Y_s)\,|Z_s|^2\,ds \leq C\,\|\Psi\|_{\mathbb{L}^1([R,-R])}\,, \tag{3.2}$$

où $\tau_R := \tau'_R \wedge \tau^+_R \wedge \tau^-_R$ tq $\tau'_R = \inf\{t > 0 : |Y_t| \geq R\}$, $\tau^+_R := \inf\{t > 0 : K^+_t \geq R\}$, $\tau^-_R := \inf\{t > 0 : K^-_t \geq R\}$ et C est une constante dépendant de R, $\|\eta\|_{\mathbb{L}^1(\Omega)}$ et $\|f\|_{\mathbb{L}^1([R,-R])}$.

En utilisant l'inégalité (3.2) nous prouvons que la formule de changement de variable d'Itô-Krylov suivante est valable pour Φ appartenant à l'espace de Sobolev $\mathcal{W}^2_{p,loc}$

$$\Phi(Y_t) = \Phi(Y_0) + \int_0^t \Phi'(Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(Y_s)\,|Z_s|^2\,ds, \tag{3.3}$$

où (Y, Z, K^+, K^-) est une solution arbitraire de l'EDSRR (3.1). Cela nous permet d'établir l'existence d'une solution de l'EDSRR (3.1).

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans le paragraphe 2, nous présentons les résultats de Hamadène & Hassani [43] qui seront utilisés dans les autres paragraphes. Dans le paragraphe

3, nous établissons l'existence de solutions pour les deux EDSRR $bsde(f(y)\,|z|^2, \xi, L, U)$ et $bsde(\phi_f(y,z), \xi, L, U)$, où a, b, c sont des nombres réels et

$$\phi_f(y,z) := a + b\,|y| + c\,|z| + f(y)\,|z|^2\,. \tag{3.4}$$

En supposant que f est continu et globalement intégrable sur $\mathbb{R}$ et ξ est de carré intégrable, nous établissons l'existence de solutions pour les deux équations. Dans le paragraphe 4, nous démontrons l'inégalité de Krylov et la formule de changement de variables d'Itô-Krylov pour les solutions d'EDSR avec deux barrières réfléchies puis nous les utilisons pour étendre les résultats du paragraphe 3 au cas où f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

3.2 Résultats auxiliaires

Considérons les hypothèses suivantes :

(A.4) Pour tout t, y, y', z, z', il existe une constante $C \geq 0$ telle que $\mathbb{P} - p.s.$

$$|H(s,y,z) - H(s,y',z')| \leq C\left(|y-y'| + |z-z'|\right).$$

(A.5) H est continue et à une croissance linéaire uniforme en y et z, c'est-à-dire qu'il existe une constante C telle que

$$|H(s,y,z)| \leq C\left(1 + |y| + |z|\right).$$

Les résultats suivants sont établis dans [43]. Les auteurs ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution aux EDSR réfléchies (3.1) lorsque $L_t < U_t$ pour tout $t \leq T$.

Théorème 3.1 *([43], Théorème 3.7) Sous les hypothèses* $(\mathbf{A.1}) - (\mathbf{A.4})$*, il existe une solution unique* (Y, Z, K) *à l'équation (3.1).*

Théorème 3.2 *([43], Théorème 5.1) Supposons que* $(\mathbf{A.1}) - (\mathbf{A.3})$ *et* $(\mathbf{A.5})$ *sont satisfaites. Alors, l'équation (3.1) admet au moins une solution* (Y, Z, K)*.*

3.3 EDSR réfléchies avec générateurs continus

Dans ce paragraphe, nous étudierons les deux types d'EDSR réfléchies (3.1) avec des données $(f(y)\,|z|^2, \xi, L, U)$ et $(\phi_f(y,z), \xi, L, U)$. En supposant que f est continue et globalement intégrable sur $\mathbb{R}$ et ξ est de carré intégrable. Le lemme suivant est utile pour étudier les deux types de EDSR quadratiques réfléchis. Ici, il nous permet d'éliminer le terme quadratique additif.

Lemme 3.1 *([14], Lemme **A.1**). Soit f une fonction continue et appartenant à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Alors, la fonction*

$$u(x) := \int_0^x exp\left(2\int_0^y f(t)dt\right) dy.$$

possède les propriétés suivantes :

(**i**) $u \in C^2(\mathbb{R})$ *et satisfait l'équation différentielle* $\frac{1}{2}u''(x) - f(x)u'(x) = 0$ *sur* $\mathbb{R}$.

(**ii**) u *est une fonction bijective de* $\mathbb{R}$ *à* $\mathbb{R}$.

(**iii**) *la fonction inverse* u^{-1} *appartient à* $C^2(\mathbb{R})$.

(**iv**) u *est une quasi-isométrie, c'est-à-dire il existe deux constantes positives* m *et* M *telles que, pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$m\,|x-y| \leq |u(x)-u(y)| \leq M\,|x-y|\,. \tag{3.5}$$

Nous expliquons comment nous allons établir l'existence d'une solution pour les deux équations $bsde(f(y)\,|z|^2, \xi, L, U)$ et $bsde(\phi_f(y,z), \xi, L, U)$. Soit u la fonction définie dans le Lemme 3.1, on définit les processus $\overline{\xi}$, $\overline{L}$, $\overline{S}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, $\overline{K}^{\pm}$ et $\overline{H}$ comme suit :

$$\begin{cases} \overline{\xi} = u(\xi), \qquad \overline{L}_s = u(L_s), \qquad \overline{S_s} = u(S_s), \\ \overline{Y}_. = u(Y_.), \quad \overline{Z}_. = u'(Y_.)Z_., \quad d\overline{K}^{\pm}_. = u'(Y_.)dK^{\pm}_., \\ \overline{H}(s,\overline{y},\overline{z}) = u'\left(u^{-1}\left(\overline{y}\right)\right) H\left(s, u^{-1}\left(\overline{y}\right), \left[u^{-1}\left(\overline{y}\right)\right]'\overline{z}\right) - f\left(u^{-1}\left(\overline{y}\right)\right)\left[u^{-1}\left(\overline{y}\right)\right]'\left|\overline{z}\right|^2. \end{cases} \tag{3.6}$$

Supposons que (Y, Z, K^+, K^-) soit une solution (resp. solution maximale) de l'EDSRR (3.1). Alors, l'EDSRR suivante admet une solution (resp. solution maximale)

$$\begin{cases} \textbf{(i)}\ \overline{Y} \in \mathcal{C}, \overline{K}^+ \text{ and } \overline{K}^- \in \mathcal{K},\ \overline{Z} \in \mathcal{L}^2, \\ \textbf{(ii)}\ \overline{Y}_t = \overline{\xi} + \int_t^T \overline{H}(s, \overline{Y}_s, \overline{Z}_s)ds + \int_t^T d\overline{K}_s^+ - \int_t^T d\overline{K}_s^- - \int_t^T \overline{Z}_s dW_s, \qquad 0 \le t \le T, \\ \textbf{(iii)}\ \forall t \le T,\ \overline{L}_t \le \overline{Y}_t \le \overline{U}_t, \\ \textbf{(iv)}\ \int_0^T (\overline{U}_t - \overline{Y}_t) d\overline{K}_t^- = \int_0^T (\overline{Y}_t - \overline{L}_t) d\overline{K}_t^+ = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Remarque 3.1 *La propriété de maximalité des solutions est préservée par le fait que la fonction u et son inverse sont strictement croissantes.*

Proposition 3.1 *Supposons que f est continue et globalement intégrable sur $\mathbb{R}$ et ξ est de carré intégrable. Alors, l'équation (3.1) admet une solution (resp. une solution maximale) si et seulement si l'équation (3.7) admet une solution (resp. une solution maximale). De plus, les solutions appartiennent à $\mathcal{S}^2 \times \mathcal{M}^2 \times \mathcal{K}^2$.*

Preuve. Supposons que (Y, Z, K^+, K^-) est une solution (resp. solution maximale) de l'EDSRR (3.1). Soit $u(x) := \int_0^x \exp\left(2 \int_0^y f(t)\, dt\right) dy$ la fonction définie dans le Lemme 3.1. Nous utilisons la formule d'Itô pour montrer que

$$\begin{aligned} u(Y_t) = u(\xi) &+ \int_t^T u'(Y_s) \left\{ H(s, Y_s, Z_s) - f(Y_s) |Z_s|^2 \right\} ds \\ &+ \int_t^T u'(Y_s)\, dK_s^+ - \int_t^T u'(Y_s)\, dK_s^- - \int_t^T u'(Y_s)\, Z_s dB_s. \end{aligned}$$

Puisque u et son inverse sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, globalement Lipschitz et bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors toute solution $\left(\overline{Y}, \overline{Z}, \overline{K}^+, \overline{K}^-\right)$ de l'équation (3.6) est une solution (resp. solution maximale) de l'équation (3.7) avec des données $(\overline{H}(s, \overline{y}, \overline{z}), \overline{\xi}, \overline{L}, \overline{U})$. Réciproquement, supposons qu'il existe une solution (resp. solution maximale) $\left(\overline{Y}, \overline{Z}, \overline{K}^+, \overline{K}^-\right)$ pour l'équation (3.7), le Lemme 3.1, permet de voir que $\left(Y_t, Z_t, K_t^+, K_t^-\right)$ est une solution (resp. solution maximale) pour l'équation (3.1), où

$$\begin{cases} Y_t = u^{-1}\left(\overline{Y}_t\right), \qquad Z_{\cdot} = \left[u^{-1}\left(\overline{Y}_t\right)\right]' \overline{Z}_t, \\ dK_t^{\pm} = \left[u^{-1}\left(\overline{Y}_t\right)\right]' d\overline{K}_t^{\pm}, \quad \text{for all } t \leq T. \end{cases}$$

Ceci montre que les équations (3.1) et (3.7) sont équivalentes. ■

3.3.1 EDSR réfléchies quadratiques avec $H(t,y,z) := f(y)\left|z\right|^2$

Proposition 3.2 *Soit f une fonction continue et globalement intégrable sur $\mathbb{R}$ et que les hypothèses $(A.2)-(A.3)$ sont satisfaites. Alors, l'équation bsde$(f(y)\left|z\right|^2, \xi, L, U)$ possède une unique solution.*

Preuve. Nous utilisons les mêmes notations que dans la proposition 3.1. Selon la proposition 3.1, l'EDSR quadratique réfléchie (EDSRQR) avec les données $(f(y)\left|z\right|^2, \xi, L, U)$ possède une solution unique si et seulement si l'équation suivante possède une solution unique

$$\begin{cases} \textbf{(i)}\ \overline{Y} \in \mathcal{S}^2, \overline{K}^+ \text{ and } \overline{K}^- \in \mathcal{K}^2,\ \overline{Z} \in \mathcal{M}^2, \\ \textbf{(ii)}\ \overline{Y}_t = \overline{\xi} + \int_t^T d\overline{K}_s^+ - \int_t^T d\overline{K}_s^- - \int_t^T \overline{Z}_s dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T, \\ \textbf{(iii)}\ \forall t \leq T,\ \overline{L}_t \leq \overline{Y}_t \leq \overline{U}_t, \\ \textbf{(iv)}\ \int_0^T (\overline{U}_t - \overline{Y}_t) d\overline{K}_t^- = \int_0^T (\overline{Y}_t - \overline{L}_t) d\overline{K}_t^+ = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Par l'hypothèse $(A.2)$ et le Lemme 3.1, nous avons $\overline{\xi} = u(\xi)$ est de carré intégrable. D'après le résultat du Théorème 3.1, l'équation (3.8) possède une solution unique. ■

3.3.2 EDSR quadratiques réfléchies avec $H(t,y,z) = a + b\,|y| + c\,|z| + f(y)\,|z|^2 := \phi_f(y,z)$

Soit $\phi_f(y,z) := a + b\,|y| + c\,|z| + f(y)\,|z|^2$, $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. L'objectif est de démontrer que l'EDSR réfléchie quadratique suivante admet au moins une solution.

$$\begin{cases} \textbf{(i)}\ Y \in \mathcal{S}^2, K^+ \text{ and } K^- \in \mathcal{K}^2,\ Z \in \mathcal{M}^2, \\ \textbf{(ii)}\ Y_t = \xi + \int_t^T \phi_f(y,z)ds + \int_t^T dK_s^+ - \int_t^T dK_s^- - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad 0 \le t \le T, \\ \textbf{(iii)}\ \forall t \le T,\ L_t \le Y_t \le U_t, \\ \textbf{(iv)}\ \int_0^T (U_t - Y_t)dK_t^- = \int_0^T (Y_t - L_t)dK_t^+ = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Proposition 3.3 *Sous les hypothèses* (A.2) *et* (A.3). *Supposons que f est continue et appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. Alors l'EDSR réfléchie quadratique (3.9) admet au moins une solution.*

Preuve. Soit u est la fonction définie dans le Lemme 3.1. Soient $\overline{Y}$, $\overline{K}^{\mp}$, $\overline{Z}$, $\overline{\xi}$, $\overline{L}$ et $\overline{U}$ défini par (3.6). Considérons l'EDSR :

$$\begin{cases} \textbf{(i)}\ \overline{Y} \in \mathcal{S}^2, \overline{K}^+ \text{ and } \overline{K}^- \in \mathcal{K}^2,\ \overline{Z} \in \mathcal{M}^2 \\ \textbf{(ii)}\ \overline{Y}_t = \overline{\xi} + \int_t^T G(\overline{Y}_s, \overline{Z}_s)ds + \int_t^T d\overline{K}_s^+ - \int_t^T d\overline{K}_s^- - \int_t^T \overline{Z}_s dW_s, \qquad 0 \le t \le T \\ \textbf{(iii)}\ \forall t \le T,\ \overline{L}_t \le \overline{Y}_t \le \overline{U}_t, \\ \textbf{(iv)}\ \int_0^T (\overline{U}_t - \overline{Y}_t)d\overline{K}_t^- = \int_0^T (\overline{Y}_t - \overline{L}_t)d\overline{K}_t^+ = 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

où $G(\overline{y},\overline{z}) = (a + b\,|u^{-1}(\overline{y})|)u'(u^{-1}(\overline{y})) + c\,|\overline{z}|$. En utilisant le Lemme 3.1, nous montrons que $\overline{\xi}$ est de carré intégrable et que G est continu et de croissance linéaire. Par suite, par le Théorème 3.2, l'EDSR (3.10) admet au moins une solution. Nous utilisons la Proposition 3.1 pour obtenir le résultat souhaité. ∎

3.4 EDSR quadratiques réfléchies avec coefficients mesurables

3.4.1 Estimations de Krylov et formule d'Itô-Krylov

Nous considérons les hypothèses suivantes :

(**H1**) Il existe une fonction positive f localement intégrable et un processus stochastique positif $\mathcal{F}_t-$adapté η satisfaisant $\mathbb{E}\int_0^T \eta_s ds < +\infty$ tels que pour $p.s.$ (t,ω) et pour tout (y,z),

$$|H(t,y,z)| \leq \eta_t + f(y)|z|^2.$$

(**H2**) $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.

Proposition 3.4 *(Estimation locale) On suppose que* (**H1**) *est vérifiée. Soit* (Y,Z,K^+,K^-) *une solution de l'EDSRR (3.1) avec les données* $(H(t,y,z),\xi,L,U)$. *Alors, il existe une constante positive* C *dépendant de* T, R *et* $\|f\|_{\mathbb{L}^1([R,-R])}$ *telle que pour toute fonction mesurable positive* Ψ,

$$\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_R} \Psi(Y_s)\,|Z_s|^2\,ds \leq C\,\|\Psi\|_{\mathbb{L}^1([R,-R])}\,,$$

où $\tau_R := \tau'_R \wedge \tau^+_R \wedge \tau^-_R$ *tq* $\tau'_R = \inf\{t>0 : |Y_t| \geq R\}$, $\tau^+_R := \inf\{t>0 : K^+_t \geq R\}$ *et* $\tau^-_R := \inf\{t>0 : K^-_t \geq R\}$.

Preuve. Soit $\tau := \tau_R \wedge \tau'_N \wedge \tau''_M \wedge \tau^+_R \wedge \tau^-_R$, où

$$\tau'_N := \inf\{t>0 : \int_0^t |Z_s|^2\,ds \geq N\},$$
$$\tau''_M := \inf\{t>0 : \int_0^t |H(s,Y_s,Z_s)|\,ds \geq M\},$$

Clairement, τ'_N tend vers l'infini quand N tend vers l'infini. On a la même chose pour τ_R, τ''_M, τ^+_R et τ^-_R. Pour $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq R$, soit $\mathbf{L}^a_\cdot(Y)$ le temps local de Y en a. En utilisant la formule du temps d'occupation, nous montrons que pour toute fonction positive Ψ, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_R}\Psi(Y_s)\left|Z_s\right|^2 ds\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_R}\Psi(Y_s)d\left\langle Y\right\rangle_s\right] \qquad (3.11)$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\int_{-R}^{R}\Psi(a)\mathbf{L}^a_{t\wedge\tau_R}(Y)da\right].$$

D'autre part, en utilisant la formule de Tanaka et le fait que l'application $y\rightarrow(y-a)^+$ est Lipschitz, on obtient

$$(Y_{t\wedge\tau}-a)^+=(Y_{t\wedge\tau}-a)^+ +\int_0^{t\wedge\tau}1_{\{Y_s\geq a\}}dY_s+\frac{1}{2}\mathbf{L}^a_{t\wedge\tau}(Y).$$

Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2}\mathbf{L}^a_{t\wedge\tau}(Y)+\int_0^{t\wedge\tau}1_{\{Y_s\geq a\}}dK^-_s\leq\left|Y_{t\wedge\tau}-Y_0\right|+\int_0^{t\wedge\tau}1_{\{Y_s\geq a\}}H(s,Y_s,Z_s)ds \qquad (3.12)$$
$$+\int_0^{t\wedge\tau}1_{\{Y_s\geq a\}}dK^+_s-\int_0^{t\wedge\tau}1_{\{Y_s\geq a\}}Z_sdW_s.$$

En passant à l'espérance dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\sup_a\mathbb{E}\left[\mathbf{L}^a_{t\wedge\tau}(Y)\right]\leq 2M+4R. \qquad (3.13)$$

Notons que $Support(\mathbf{L}^a_{.\wedge\tau}(Y))\subset[-R,R]$. Par conséquent, en utilisant la formule du temps d'occupation, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbf{L}^a_{t\wedge\tau}(Y)&\leq\left|Y_{t\wedge\tau}-Y_0\right|+\int_0^T\eta_sds+\int_0^{t\wedge\tau}1_{\{Y_s\geq a\}}f(Y_s)d\left\langle Y\right\rangle_s\\&+2R-\int_0^{t\wedge\tau}1_{\{Y_s\geq a\}}Z_sdW_s\\&=\left|Y_{t\wedge\tau}-Y_0\right|+\int_0^T\eta_sds+\int_{-R}^{a}f(x)\mathbf{L}^x_{t\wedge\tau}(Y)dx\\&+2R-\int_0^{t\wedge\tau}1_{\{Y_s\geq a\}}Z_sdW_s.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{L}^a_{t\wedge\tau}(Y)\right] \leq 2\mathbb{E}\left[|Y_{t\wedge\tau} - Y_0| + 2R + \int_0^T \eta_s ds\right] + \int_{-R}^{a} 2\,|f(x)|\,\mathbb{E}\left[\mathbf{L}^x_{T\wedge\tau}(Y)\right] dx. \tag{3.14}$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{L}^a_{t\wedge\tau}(Y)\right] \leq C' \exp\left(2\,\|f\|_{\mathbb{L}^1_{([-R.R])}}\right),$$

où $C' = 6R + 2\,\|\eta\|_{\mathbb{L}^1([0,T]\times\Omega)}$. En passant successivement à la limite sur N et M puis en utilisant le théorème de Beppo–Levi, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{L}^a_{t\wedge\tau_R}(Y)\right] \leq C' \exp\left(2\,\|f\|_{\mathbb{L}^1_{([-R.R])}}\right). \tag{3.15}$$

Enfin, à partir de (3.15) et (3.11), on obtient

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_R} \Psi(Y_s)\,|Z_s|^2\,ds\right] \leq C' \exp\left(2\,\|f\|_{\mathbb{L}^1_{([-R.R])}}\right) \|\Psi\|_{\mathbb{L}^1_{([-R.R])}}.$$

La Proposition 3.4 est prouvée. ■

Corollaire 3.1 *(Estimation globale) Supposons que* $(H.1)$ *et* $(H.2)$ *sont vérifiées et* ξ *est de carré intégrable. Soit* (Y, Z, K^+, K^-) *une solution de l'équation (3.1). Alors il existe une constante positive* C *dépendant de* T, $\|\eta\|_{\mathbb{L}^1([0,T]\times\Omega)}$, $\|f\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R})}$ *et* $\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y_t|\right)$ *telle que, pour toute fonction mesurable positive* Ψ,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \Psi(Y_s)\,|Z_s|^2\,ds\right] \leq C\,\|\Psi\|_{\mathbb{L}^1(\mathbb{R})}$$

En particulier,

$$\mathbb{E}\int_0^{T\wedge\tau_R} \Psi(Y_s)\,|Z_s|^2\,ds \leq C\,\|\Psi\|_{\mathbb{L}^1([R,-R])},$$

où $\tau_R := \tau'_R \wedge \tau^+_R \wedge \tau^-_R$ *tq* $\tau'_R = \inf\{t > 0 : |Y_t| \geq R\}$, $\tau^+_R := \inf\{t > 0 : K^+_t \geq R\}$ *et*

$\tau_R^- := \inf\{t > 0 : K_t^- \geq R\}$.

3.4.2 Formule d'Itô-Krylov pour les EDSRR.

Dans ce paragraphe, nous établissons la formule de changement de variables d'Itô-Krylov pour les solutions d'EDSR réfléchies à une dimension avec deux barrières. Cela généralise les résultats obtenus dans [13, 14].

Théorème 3.3 *Soit (Y, Z, K^+, K^-) une solution de l'EDSR réfléchie (3.1). Supposons que $(H.1)$ est satisfaite et que ξ est de carré intégrable. Alors, pour toute fonction $u \in \mathcal{W}^2_{1,loc}$, on a*

$$u(Y_t) = u(Y_0) + \int_0^t u'(Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t u''(Y_s)\,|Z_s|^2\,ds. \tag{3.16}$$

Remarque 3.2 *Notons que toute fonction de $\mathcal{W}^2_{1,loc}(\mathbb{R})$ a un représentant qui appartient à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Dans toute la suite, nous utiliserons ce représentant.*

Preuve. (**Preuve du Théorème 3.3**) Par la Proposition 3.4, le terme $\int_0^t u''(Y_s)\,|Z_s|^2\,ds$ est bien défini. En utilisant la régularisation classique par convolution, nous considérons la suite $(u_n)_n$, telle que pour tout n, u_n est de classe $\mathcal{C}^2$, satisfaisant :

(i) u_n converge uniformément vers u dans l'intervalle $[-R, R]$.

(ii) u_n' converge uniformément vers u' dans l'intervalle $[-R, R]$.

(iii) u_n'' converge dans $\mathbb{L}^1([-R, R])$ vers u''.

Soit $R > |Y_0|$. On définit τ_R comme à la proposition 3.4. Puisque τ_R tend à l'infini quand R tend à l'infini, il suffit d'établir une formule (3.16) pour $Y_{t\wedge\tau_R}$. La formule d'Itô appliquée à $u_n(Y_{t\wedge\tau_R})$ montre que

$$u_n(Y_{t\wedge\tau_R}) = u_n(Y_0) + \int_0^{t\wedge\tau_R} u_n'(Y_s)dYs + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_R} u_n''(Y_s)\,|Z_s|^2\,ds. \tag{3.17}$$

En passant à la limite sur n dans l'équation (3.17) et en utilisant les propriétés (**i**), (**ii**), (**iii**) et la Proposition 3.4, on obtient

$$u(Y_{t\wedge\tau_R}) = u(Y_0) + \int_0^{t\wedge\tau_R} u'(Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_R} u''(Y_s)\,|Z_s|^2\,ds.$$

■

3.5 EDSR quadratiques réfléchies avec générateurs mesurables

Dans ce paragraphe, nous utiliserons la formule d'Itô-Krylov (3.16) pour étudier l'existence de solutions pour les deux classes d'EDSR quadratiques réfléchies (3.1) avec les données $(f(y)\,|z|^2, \xi, L, U)$ et $(\phi_f(y,z), \xi, L, U)$.

Lemme 3.2 *([14], Lemme **A.1**). Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$. la fonction*

$$u(x) := \int_0^x \exp\left(2\int_0^y f(t)\,dt\right)dy,$$

possède les propriétés suivantes :

(**i**) *$u \in \mathcal{W}^2_{1,loc}(\mathbb{R})$ et satisfait l'équation différentielle $\frac{1}{2}u''(x) - f(x)u'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.*

(**ii**) *u est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.*

(**iii**) *la fonction inverse u^{-1} appartient à $\mathcal{W}^2_{1,loc}(\mathbb{R})$.*

(**iv**) *u est quasi-isomé, c'est-à-dire il existe deux constantes positives m et M telles que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$m\,|x-y| \leq |u(x)-u(y)| \leq M\,|x-y|\,. \tag{3.18}$$

Remarque 3.3 *Puisque f n'est pas continue, alors la fonction $u(x) := \int_0^x \exp\left(2\int_0^y f(t)\,dt\right)dy$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$. Par conséquent, la formule classique d'Itô ne peut pas être appliquée. Mais comme u appartient à l'espace de Sobolev $\mathcal{W}^2_{1,loc}$, nous pouvons donc utiliser la formule d'Itô-Krylov.*

3.5.1 EDSR réfléchies avec $H(t,y,z) := f(y)\,|z|^2$

Le résultat suivant donne l'existence et l'unicité de la solution à $bsde(f(y)\,|z|^2, \xi, L, U)$.

Proposition 3.5 *Supposons que $(A.2)$ et $(H.2)$ sont satisfaites. Alors, l'equation $bsde(f(y)\,|z|^2, \xi, L, U)$ possède une unique solution.*

Preuve. Soit la fonction u définie dans le Lemme 3.2. Grâce au théorème 3.1 l'EDSRR (3.7) avec les données $(0, \overline{\xi}, \overline{L}, \overline{U})$ possède une solution unique. Puisque u^{-1} appartient à $\mathcal{W}^2_{1,loc}(\mathbb{R})$, alors la formule d'Itô–Krylov (3.16), appliquée à u^{-1} et la solution de l'équation (3.7) avec les données $(0, \overline{\xi}, \overline{L}, \overline{U})$, nous permet d'obtenir le résultat souhaité. ■

3.5.2 EDSR réfléchies quadratiques avec $H(t, y, z) = a + b\,|y| + c\,|z| + f(y)\,|z|^2 := \phi_f(y, z)$

Dans ce sous-paragraphe, nous établissons l'existence de solutions pour le EDSR (3.1) lorsque $H(t, y, z) := \phi_f(y, z)$, avec

$$\phi_f(y, z) := a + b\,|y| + c\,|z| + f(y)\,|z|^2\,,$$

où a, b et c sont des constantes positives.

Proposition 3.6 *Supposons que la fonction f est globalement intégrable sur $\mathbb{R}$ et que ξ est de carré intégrable. Alors, l'EDSR (3.1) avec les données $(\phi_f(y, z), \xi, L, U)$ admet au moins une solution.*

Preuve. Soit $u(x) := \int_0^x \exp\left(2\int_0^y f(t)\,dt\right) dy$. En utilisant la propriété de quasi-isométrie de u dans le Lemme 3.2, on voit que ξ est de carré intégrable si et seulement si $\overline{\xi} := u(\xi)$ est de carré intégrable. Comme u est une quasi-isométrie et que u' est bornée, on en déduit que $G(\overline{y}, \overline{z}) = (a + b\,|u^{-1}(\overline{y})|)u'(u^{-1}(\overline{y})) + c\,|\overline{z}|$ est continue et à croissance linéaire. Par conséquent, selon le Théorème 3.2, l'EDSR (3.1) avec les données $(G(\overline{y}, \overline{z}), \overline{\xi}, \overline{L}, \overline{U})$ admet au moins une solution. En appliquant la formule d'Itô-Krylov (3.16) à la fonction $u^{-1}(\overline{Y}_t)$, nous obtenons que l'EDSR (3.1) avec les données $(\phi_f(y, z), \xi, L, U)$ admet au moins une solution. ■

3.6 EDSR quadratiques réfléchies avec générateur H

Proposition 3.7 *Supposons que le générateur $H(t, \omega, y, z)$ est continu en (y, z) pour tout (t, ω) et que les hypothèses $(A.1)$, $(A.2)$, $(A.3)$, $(H.1)$ et $(H.2)$ sont satisfaites. Alors, l'EDSR* *réfléchie quadratique (3.1) admet une solution minimale et une solution maximale. De plus, pour toute solution (Y, Z, K^+, K^-), la composante Y appartient à $\mathcal{S}^2$.*

Preuve. Puisque f est localement bornée, alors elle peut être majorée par une fonction constante par morceaux que nous désignerons par h, voir [13]. En utilisant une interpolation appropriée, on peut construire une fonction continue g telle que $g \geq h \geq f$. Notons en outre que $(A.3)$ implique qu'il existe une semi-martingale continue et $(\mathcal{F}_t)$-adaptée qui passe entre L et U. Par conséquent, selon le théorème 3.2 de [36] avec

$$\eta_t = a + b(|L_t| + |U_t|) + c^2,$$

et

$$C_t = 1 + \sup_{s \leq t} \sup_{\alpha \in [0,1]} |g(\alpha L_s + (1 - \alpha)U_s)|,$$

l'EDSR (3.1) admet une solution (Y, Z, K^+, K^-) telle que (Y, Z) appartient à $\mathcal{C} \times \mathcal{L}^2$ et K^+, K appartient à $\mathcal{K}$. Puisque L et U appartiennent à $\mathcal{S}^2$, il en va de même pour Y car $L \leq Y \leq U$. ■

Remarque 3.4 *On présume que sous les hypothèses de la proposition* **??**, *on peut montrer que Z appartient à $\mathcal{M}^2$ et $(K^+ - K^-)$ appartient à $\mathcal{K}^2$.*

Bibliographie

[1] Agram, N., Haadem, S., Øksendal, B., & Proske, F. (2013). A maximum principle for infinite horizon delay equations. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 45(4), 2499-2522.

[2] Agram, N., & Øksendal, B. (2019). Mean-field stochastic control with elephant memory in finite and infinite time horizon. Stochastics, 91(7), 1041-1066.

[3] Andersson, D., & Djehiche, B. (2011). A maximum principle for SDEs of mean-field type. Applied Mathematics & Optimization, 63(3), 341-356.

[4] Bahlali, K. A domination method for solving unbounded quadratic BSDEs. *Grad. J. Math, Special issue, Vol 5, 20–36, (2020). Also available in hal-01972711.*

[5] Bahlali, K. (2001). Backward stochastic differential equations with locally Lipschitz coefficient. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics, 333(5), 481-486.

[6] Bahlali, K. (2002). Existence and uniqueness of solutions for BSDEs with locally Lipschitz coefficient. Electronic Communications in probability, 7, 169-179.

[7] Bahlali, K. (1999). Flows of homeomorphisms of stochastic differential equations with measurable drift. Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 67(1-2), 53-82.

[8] Bahlali, K., Mezerdi, M. A., & Mezerdi, B. (2020). Stability of McKean–Vlasov stochastic differential equations and applications. Stochastics and Dynamics, 20(01), 2050007.

[9] Bahlali, K., & Mezerdi, B. (2001). Some properties of solutions of stochastic differential equations driven by semi-martingales. *Random Operators and Stochastic Equations 9.4 : 307-318.*

[10] Bahlali, K., Mezerdi, M., & Mezerdi, B. (2018). On the relaxed mean-field stochastic control problem. Stochastics and Dynamics, 18(03), 1850024.

[11] Bahlali, K., Mezerdi, M., & Mezerdi, B. (2017). Existence and optimality conditions for relaxed mean-field stochastic control problems. Systems & Control Letters, 102, 1-8.

[12] Bahlali, K., Mezerdi, M., & Mezerdi, B. (2014). Existence of optimal controls for systems governed by mean-field stochastic differential equations. Afrika Statistika, 9(1), 627-645.

[13] Bahlali, K., Eddahbi, M., & Ouknine, Y. (2013). Solvability of some quadratic BSDEs without exponential moments. Comptes Rendus Mathématique, 351(5-6), 229-233.

[14] Bahlali, K., Eddahbi, M. H., & Ouknine, Y. (2017). Quadratic BSDEs with L^2-terminal data. Krylov's inequality, Itô-Krylov's formula and some existence results. The Annals of Probability , Vol. 45, No. 4, 2377-2397.

[15] Bahlali, K., Essaky, E., & Hassani, M. (2015). Existence and uniqueness of multidimensional BSDEs and of systems of degenerate PDEs with superlinear growth generator. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 47(6), 4251-4288.

[16] Bahlali, K., Essaky, E. H., Hassani, M., & Pardoux, E. (2002). Existence, uniqueness and stability of backward stochastic differential equations with locally monotone coefficient. Comptes Rendus Mathématique, 335(9), 757-762.

[17] Bahlali, K., Mezerdi, B., N'zi, M., & Ouknine, Y. (2007). Weak solutions and a Yamada–Watanabe theorem for FBSDEs.. *Random Oper. Stoch. Equ.*, **15** , no. 3, 271–285.

[18] Bahlali, K., Elouaflin, A., & Pardoux, E. (2009). Homogenization of semilinear PDEs with discontinuous averaged coefficients. Electronic Journal of Probability, 14, 477-499.

[19] Bahlali, K., Essaky, E. H., & Labed, B. (2004). Reflected Backward Stochastic Differential Equation with Super-Linear Growth. In Proceedings of the International Conference on Stochastic Analysis and Applications (pp. 199-216). Springer, Dordrecht.

[20] Bahlali, K., Hamadene S., & Mezerdi, B. (2005). Backward stochastic differential equations with two reflecting barriers and continuous with quadratic growth coefficient. Stochastic Processes and their Applications, 115(7), 1107-1129..

[21] Bismut, J. M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 44(2), 384-404.

[22] Buckdahn, R., Djehiche, B., & Li, J. (2011). A general stochastic maximum principle for SDEs of mean-field type. Applied Mathematics & Optimization, 64(2), 197-216.

[23] Buckdahn, R., Engelbert H. J., Rascanu A. (2005). On weak solutions of backward stochastic differential equations. *Theory Proba. Appl.*, 49, 16.

[24] Buckdahn, R., Li, J., & Ma, J. (2017). A mean-field stochastic control problem with partial observations. Annals of Applied Probability, 27(5), 3201-3245.

[25] Buckdahn, R., Li, J., & Ma, J. (2016). A stochastic maximum principle for general mean-field systems. Applied Mathematics & Optimization, 74(3), 507-534.

[26] Buckdahn, R., Li, J., & Peng, S. (2009). Mean-field backward stochastic differential equations and related partial differential equations. Stochastic processes and their Applications, 119(10), 3133-3154.

[27] Caffarelli, L., Crandall, M. G., Kocan, M., & Święch, A. (1996). On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients. Communications on Pure and Applied Mathematics, 49(4), 365-398.

[28] Carmona, R., & Delarue, F. (2018). Probabilistic Theory of Mean Field Games with Applications I-II. Springer Nature.

[29] Chen, Z. (1998). Existence and uniqueness for BSDE with stopping time. Chinese science bulletin, 43(2), 96-99.

[30] Chighoub, F., & Mezerdi, B. (2013). A stochastic maximum principle in mean-field optimal control problems for jump diffusions. Arab Journal of Mathematical Sciences, 19(2), 223-241.

[31] Cvitanic, J., & Karatzas, I. (1996). Backward stochastic differential equations with reflection and Dynkin games. Annals of Probability, 24(4), 2024-2056.

[32] Delarue, F., & Guatteri, G. (2006). Weak Solvability Theorem for Forward-Backward SDEs. Stochastic Processes and their Applications, 116(12), 1712-1742.

[33] Kim, D., & Krylov, N. V. (2007). Parabolic equations with measurable coefficients. Potential analysis, 26(4), 345-361.

[34] El Karoui, N., Kapoudjian, C., Pardoux, E., Peng, S., & Quenez, M. C. (1997). Reflected solutions of backward SDE's, and related obstacle problems for PDE's. the Annals of Probability, 25(2), 702-737.

[35] El Karoui, N. & Mazliak, L. (1997). Backward stochastic differential equations a general introduction. PITMAN RESEARCH NOTES IN MATHEMATICS SERIES, 7-26.

[36] Essaky, E. H., & Hassani, M. (2013). Generalized BSDE with 2-reflecting barriers and stochastic quadratic growth. Journal of Differential Equations, 254(3), 1500-1528.

[37] Gilbarg, D., Trudinger, N.S. (1983). Elliptic partial differential equations of second order, *Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 224, Springer-Verlag, Berlin.

[38] Haadem, S., Øksendal, B., & Proske, F. (2013). *Maximum principles for jump diffusion processes with infinite horizon.* Automatica, 49(7), 2267-2275.

[39] Hafayed, M., & Meherrem, S. (2020). On optimal control of mean-field stochastic systems driven by Teugels martingales via derivative with respect to measures. International Journal of Control, 93(5), 1053-1062.

[40] Hafayed, M., Abba, A., & Abbas, S. (2016). On partial-information optimal singular control problem for mean-field stochastic differential equations driven by Teugels martingales measures. International Journal of Control, 89(2), 397-410.

[41] Halkin, H. (1974). Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons. Econometrica : Journal of the Econometric Society, 267-272.

[42] Hamadène, S. (1996). Equations différentielles stochastiques rétrogrades : Le cas localement lipschitzien. In Annales de l'IHP Probabilités et statistiques (Vol. 32, No. 5, pp. 645-659).

[43] Hamadène, S., & Hassani, M. (2005). BSDEs with two reflecting barriers : the general result. Probability theory and related fields, 132(2), 237-264.

[44] Hamadene, S., Lepeltier, J. P., & Peng, S. (1997). Bsde with continuous coefficients and applications to markovian non zero sum stochastic differential games. Backward stochastic differential equations (Paris, 1995–1996), 364, 161-175.

[45] Huang, M., Malhamé, R. P., & Caines, P. E. (2006). Large population stochastic dynamic games : closed-loop McKean-Vlasov systems and the Nash certainty equivalence principle. Communications in Information & Systems, 6(3), 221-252.

[46] Jourdain, B., Méléard, S., & Woyczynski, W. A. (2008). Nonlinear SDEs driven by Lévy processes and related PDEs. Alea, 4, 1-29.

[47] Krylov, N. V. (2008). Controlled diffusion processes (Vol. 14). Springer Science & Business Media.

[48] Krylov, N. V. (1987). On estimates of the maximum of a solution of a parabolic equation and estimates of the distribution of a semimartingale. Mathematics of the USSR-Sbornik, 58(1), 207.

[49] Krylov, N. V. (2004). On weak uniqueness for some diffusions with discontinuous coefficients. Stochastic Processes and their applications, 113(1), 37-64.

[50] Krylov, N. V. (2008). Lectures on elliptic and parabolic equations in Sobolev spaces (Vol. 96). American Mathematical Soc..

[51] Khasminskii, R., & Krylov, N. (2001). On averaging principle for diffusion processes with null-recurrent fast component. Stochastic Processes and their applications, 93(2), 229-240.

[52] Lasry, J. M., & Lions, P. L. (2007). Mean field games. Japanese journal of mathematics, 2(1), 229-260.

[53] Ladyzhenskaia, O. A., Solonnikov, V. A., & Ural'tseva, N. N. (1988). Linear and quasi-linear equations of parabolic type (Vol. 23). American Mathematical Soc..

[54] Lepeltier, J. P., & San Martin, J. (1997). Backward stochastic differential equations with continuous coefficient. Statistics & Probability Letters, 32(4), 425-430.

[55] Lepeltier, J. P., & Martín, J. S. (1998). Existence for BSDE with superlinear–quadratic coefficient. Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 63(3-4), 227-240.

[56] Lepeltier, J. P., & San Martín, J. (2004). Backward SDEs with two barriers and continuous coefficient : an existence result. Journal of applied probability, 162-175.

[57] Li, J. (2012). *Stochastic maximum principle in the mean-field controls*. Automatica, 48(2), 366-373.

[58] Nakao, S. (1972). On the pathwise uniqueness of solutions of one-dimensional stochastic differential equations. Osaka Journal of Mathematics, 9(3), 513-518.

[59] Maslowski, B., & Veverka, P. (2014). *Sufficient stochastic maximum principle for discounted control problem*. Appl. Math. Optim., 70(2), 225-252.

[60] Basei, M., & Pham, H. (2019). A weak martingale approach to linear-quadratic McKean–Vlasov stochastic control problems. Journal of Optimization Theory and Applications, 181(2), 347-382.

[61] Mel'nikov, A. V. (1983). Stochastic equations and Krylov's estimates for semimartingales. Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 10(2), 81-102.

[62] Mezerdi, M. A. (2021). Compactification in optimal control of McKean-Vlasov stochastic differential equations. Optimal Control Applications and Methods.

[63] Mezerdi, M. A. (2020). On the convergence of carathéodory numerical scheme for Mckean-Vlasov equations. Stochastic Analysis and Applications, 1-15.

[64] Meyer-Brandis, T., Øksendal, B., & Zhou, X. Y. (2012). A mean-field stochastic maximum principle via Malliavin calculus. Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 84(5-6), 643-666.

[65] Pardoux, E., & Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems & Control Letters, 14(1), 55-61.

[66] Pardoux, É. (1999). Homogenization of linear and semilinear second order parabolic PDEs with periodic coefficients : a probabilistic approach. Journal of Functional Analysis, 167(2), 498-520.

[67] Pham, H., & Wei, X. (2017). Dynamic programming for optimal control of stochastic McKean–Vlasov dynamics. SIAM Journal on Control and Optimization, 55(2), 1069-1101.

[68] Roubi, A., Labed, L., & Bahlali, K. (2022). Quadratic BSDEs with two reflecting barriers and a square integrable terminal value. Palestine Journal of Mathematics, 11 ; 82-91.

[69] Roubi, A., & Mezerdi M. A. (2022). Necessary and sufficient conditions in optimal control of mean-field stochastic differential equations with infinite horizon. Random Operators and Stochastic Equations. Accepted. Doi : 10.1515/rose-2022-2081.

[70] Simon, J. (1986). Compact sets in the space L p (O, T ; B). Annali di Matematica pura ed applicata, 146(1), 65-96.

[71] Skorokhod, A. V. (1982). Studies in the theory of random processes (Vol. 7021). Courier Dover Publications.

[72] Stroock, D. W., & Varadhan, S. S. (1997). Multidimensional diffusion processes (Vol. 233). Springer Science & Business Media.

[73] Sznitman, A. S. (1991). Topics in propagation of chaos. In Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XIX—1989 (pp. 165-251). Springer, Berlin, Heidelberg.