

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohammed KHIDER Biskra  
Faculté des Sciences Exactes  
Et des Sciences de la vie  
Département de Mathématiques



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة  
قسم الرياضيات

## THESE DE DOCTORAT

Préparé au sein de

Laboratoire de Mathématiques Appliquées

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Soutenue publiquement à Biskra le : **12 Novembre 2020**, par :

**Mahmoud BRAHIMI**

**Ondelettes Non Stationnaires et Compression d'images**

*Devant le jury composé de :*

<b>Mr. Zohir MOKHTARI,</b>	Professeur,	Université de Biskra,	Président
<b>Mr. Khaled MELKEMI,</b>	Professeur,	Université de Batna2,	Rapporteur
<b>Mr. Yahia DJEBRANE,</b>	Professeur,	Université de Biskra,	Examineur
<b>Mr. El-Amir DJEFFAL,</b>	M.C.A,	Université de Batna2,	Examineur

À la mémoire de mon père

À la mémoire de ma mère

À la mémoire de mon oncle

À ma femme

À mes enfants

À tous les amis

## Remerciement

Monsieur le professeur Khaled MELKEMI, mon directeur de thèse, m'a ouvert tous les horizons, en me faisant profiter de ses connaissances. Je le remercie et je tiens à lui exprimer mes plus vives reconnaissances pour sa gentillesse sa totale disponibilité tout au long de ce travail.

Je tiens également à exprimer ma vive reconnaissance au professeur Zohir MOKHTARI, Professeur à l'université de Biskra, d'avoir bien voulu être président de ce travail.

Je remercie aussi bien le professeur Yahia DJEBRANE, Professeur à l'université de Biskra, et le docteur El - Amir DJEFFAL, Maitre de conférence à l'université de Batna, qui mon honoré en acceptant d'examiner mon travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à tout ceux qui furent de proche ou de loin, partie prenante ce travail, en particulier mon collègue Abdelmalik BOUSSAAD, enseignant à l'université de Ouargla.

*Table des matières*

	Page
Introduction . . . . .	iv
I. Analyse Multirésolution et Ondelettes Standards . . . . .	1
1.1 Analyse Multirésolution stationnaire . . . . .	1
1.2 Les fonctions $\varphi_{j,k}(t)$ . . . . .	2
1.3 L'équation de dilatation et résultats liés . . . . .	7
1.4 Projection dans l'espace $V_j$ . . . . .	11
1.5 La fonction ondelette . . . . .	12
1.6 Le complément orthogonal $W_j$ à $V_j$ dans $V_{j+1}$ . . . . .	21
1.7 Projection de $V_{j+1}$ sur $W_j$ . . . . .	27
1.8 Reconstruction . . . . .	27
1.9 Vue du domaine de transformation . . . . .	29
1.9.1 Le symbole de $\varphi(t)$ . . . . .	29
1.9.2 La fonction de stabilité . . . . .	33
1.9.3 L'orthogonalité et le symbole $\varphi(t)$ . . . . .	40
1.9.4 Le symbole $G(\omega)$ de la fonction ondelette . . . . .	43
1.10 Les $B$ -splines . . . . .	50
1.10.1 Les propriétés des $B$ -splines . . . . .	52
1.11 Biorthogonale des fonctions d'échelles et ondelettes . . . . .	58
1.11.1 Conditions de biorthogonalité pour les symboles et espaces des ondelettes . . . . .	63

	Page
II. Analyse Multirésolution et ondelettes non stationnaires . . . . .	74
2.1 Transformé en $z$ . . . . .	76
2.2 Complément orthogonale . . . . .	77
2.3 Construction d'analyse multirésolution non-stationnaire à tra- vers les B-splines exponentielles . . . . .	78
III. Construction d'une ondelette non stationnaire à partir de la solution positive de l'équation de Bézout . . . . .	96
3.1 Définitions de base et propriétés de l'analyse multirésolution non stationnaire . . . . .	96
3.2 L'ensemble du $z$ -domaine et banc de filtres . . . . .	97
3.3 $B$ -Splines Exponentielles et Multiresolution . . . . .	98
3.4 Problème de conception des ondelettes non stationnaires en uti- lisant l'équation de Bezout . . . . .	100
3.5 Méthode d'obtention d'une solution positive de l'équation de Bézout . . . . .	104
3.6 Exemple illustratif . . . . .	109
3.7 Application à la compression d'images . . . . .	118
3.7.1 Résultats obtenus . . . . .	118
3.7.2 Figures de la décomposition . . . . .	119
Conclusion . . . . .	121
IV. <b>Annexe</b> . . . . .	122
4.1 Théorème de Weierstrass . . . . .	122
4.2 Les polynômes de Bernstein . . . . .	122
4.2.1 Famille des polynômes de Bernstein . . . . .	122
4.2.2 Polynômes de Bernstein associés à une fonction . . . . .	123

	Page
Bibliographie . . . . .	124

## *Introduction*

Les ondelettes sont considérées comme un domaine très vaste en mathématiques. Il a beaucoup d'applications réussies, surtout dans le traitement du signal et images numériques. Il y a deux différentes méthodes d'introduire la transformée en ondelettes, une façon qui considère les ondelettes comme fonctions de base pour l'espace  $L^2(\mathbb{R})$ , cela veut dire que chaque fonction dans l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  peut être décomposée d'une façon unique en termes de la base des ondelettes, les coefficients de cette décomposition sont classifiés en deux catégories : la partie des basses fréquences qui décrit la moyenne des propriétés locales de la fonction, et la partie des hautes fréquences représente les différences locales. Il est bien connu que l'approximation par les ondelettes (i.e tronquer les coefficients de haute fréquence) peut approximer les fonctions régulières d'une manière efficace, à travers la sélection d'une base d'ondelettes et à travers la concentration d'énergie dans les basses fréquences.

Par exemple, dans différentes études de R. R. Coifman et Y. Meyer, P. G. Lemarié (9, 24), les ondelettes sont adoptées comme une alternative à l'analyse de Fourier, conduisant au développement de nouveaux types d'ondelettes qui génèrent une base orthonormale pour l'espace des fonctions intégrables carrées. Dans la littérature, plusieurs bases d'ondelettes ont été proposées. R. R. Coifman et Y. Meyer, S. Mallat (9, 26) ont développés un nouveau concept pour concevoir la fonction d'échelle des ondelettes appelée analyse multirésolution en établissant des liens avec différentes méthodes utilisées dans d'autres domaines. Dans une autre étude, une nouvelle famille de bases d'ondelettes orthogonales à support compact de  $L^2(\mathbb{R})$  a été proposée par I. Daubechies (11), cette base explorée plus tard dans le traitement du signal numérique à travers des bancs de filtres.

Dans la théorie d'approximation, grâce à leurs caractéristiques de moment de fuite, les ondelettes ont révélé de bons résultats en reproduisant des polynômes avec des fonctions d'échelle. C. Vonesh, T. Blu et M. Unser (38), proposèrent une généralisation des ondelettes de Daubechies orthonormées en maintenant les conditions suivantes : (i) support compact, (ii) orthonormalité et (iii) symétrie. La principale différence avec la construction standard réside dans le fait que les fonctions d'échelle de l'ondelette reproduisent un ensemble de polynômes exponentiels sous la forme  $P(t)e^{\alpha t}$ , où  $P(t)$  est un polynôme et  $\alpha$  est un para-

mètre complexe. Plus de détails sur les polynômes exponentiels peuvent être trouvés dans les travaux de M. L. Mazure et K. Melkemi (29, 30).

Dans ce contexte, l’objectif de cette thèse est la construction d’une large famille d’ondelettes non-stationnaires avec des propriétés spécifiques, et la sélection de la meilleure base d’ondelettes qui s’adapte avec différentes applications.

Notre travail est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre on va donner les notions et les propriétés des ondelettes stationnaires, dans lesquelles sont introduites à travers l’analyse multirésolution standard dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Et par la suite nous présentons les notions du symbole de la fonction d’ondelette, le symbole de la fonction d’échelle et le lien entre eux. Une étude sur les  $B$ -splines et les bases d’ondelettes biorthogonales stationnaires sera donnée à la fin de ce chapitre.

Le deuxième chapitre traite la notion de l’analyse multirésolution non stationnaire dans  $L^2(\mathbb{R})$  ainsi des concepts sur les ondelettes non stationnaires, ensuite nous exposons quelques définitions et quelques propriétés sur  $B$ -splines exponentielles. D’autre part, nous présentons une méthode de construire une base d’ondelette orthogonale non stationnaire basée sur les  $B$ -splines exponentielles.

Notre contribution apparaît dans le troisième chapitre, où nous allons construire une ondelette non stationnaire à travers de l’ensemble des solutions positives de l’équation de Bézout sur l’intervalle  $[-1, 1]$ , ensuite on va approximer cette solution par les polynômes de Bernstein avec la conservation de sa positivité c’est dans le but d’appliquer la factorisation spectrale. Nous terminons ce chapitre par une application à la compression d’images.



## I. Analyse Multirésolution et Ondelettes Standards

Dans ce chapitre, nous allons présenter une définition d'une base d'ondelettes standards dans le cas orthogonale et le cas biorthogonales dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Ensuite on va donner les définitions du symbole de la fonction d'échelle et la fonction d'ondelette dans les deux cas et le liens entre eux, on termine ce chapitre par des notions sur les  $B$ -splines.

### 1.1 Analyse Multirésolution stationnaire

Ce concept est dû à Stéphane Mallat(26) et Yves Meyer(31).

**Définition 1** Soit  $V_j, j \in \mathbb{Z}$  une suite des sous-espaces de  $L^2(\mathbb{R})$ . On dit que  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  (**AMR**) si :

- $V_j \subset V_{j+1}$ ,
- $\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ ,
- $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ ,
- $f(t) \in V_0 \iff f(2^j t) \in V_j$ ,
- il existe une fonction  $\varphi(t) \in V_0$ , avec  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \neq 0$ ,  $\varphi(t)$  s'appelle la fonction d'échelle telle que l'ensemble  $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormale de  $V_0$ .

**Convention 1 : 1)** D'après la définition 1 on suppose que la fonction d'échelle  $\varphi(t)$  est une fonction réelle avec :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = \sqrt{2\pi} \widehat{\varphi}(0) = 1. \quad (1.1)$$

Où,  $\widehat{\varphi}$  c'est la transformée de Fourier de  $\varphi$ , c'est-à-dire :  $\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-i\omega t} dt$ .

2) L'espace  $V_0$  de Haar engendré par les fonctions  $\varphi(t)$  est définie par

$$\begin{aligned} V_0 &= \text{span} \{ \dots, \varphi(t+1), \varphi(t), \varphi(t-1), \dots \} \cap L^2(\mathbb{R}) \\ &= \text{span} \{ \varphi(t-k) \}_{k \in \mathbb{Z}} \cap L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

- $V_0$  est un sous-espace de  $L^2(\mathbb{R})$ .
- $\varphi(t-k)$  sont linéairement indépendante.

3) L'espace de Haar  $V_j$  est définie par

$$\begin{aligned} V_j &= \text{span} \{ \dots, \varphi(2^j t + 1), \varphi(2^j t), \varphi(2^j t - 1), \dots \} \cap L^2(\mathbb{R}) \\ &= \text{span} \{ \varphi(2^j t - k) \}_{k \in \mathbb{Z}} \cap L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

### 1.2 Les fonctions $\varphi_{j,k}(t)$

Dans la suite nous développons les propriétés de l'analyse multirésolution, il est utile de maintenir l'analyse multirésolution de Haar alors que nous apprenons à propos de ces propriétés. Nous commençons de définir les fonctions  $\varphi_{j,k}(t)$ .

**Définition 2** *Supposons que  $\varphi(t)$  est une fonction d'échelle de l'analyse multirésolution  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$ , on définit les fonctions  $\varphi_{j,k}(t)$  par :*

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) \tag{1.2}$$

A partir de cette définition on introduire la proposition suivante

**Proposition 3** *Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\varphi_{j,k}(t) \in V_j$  et  $\|\varphi_{j,k}(t)\| = 1$ .*

**Preuve.** Soit  $k \in \mathbb{Z}$ , comme  $f(t) = \varphi(t-k)$  est une base de  $V_0$  il résulte d'après la définition 1 que  $f(2^j t) \in V_j$ , mais  $f(2^j t) = \varphi(2^j t - k)$  donc  $\varphi_{j,k}(t) \in V_j$ . Reste à démontrer que  $\|\varphi_{j,k}(t)\| = 1$ , comme  $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormale pour  $V_0$

donc on sait que  $\|\varphi(t)\| = 1$  c'est à dire

$$\|\varphi(t)\|^2 = 1 \iff \int_{\mathbb{R}} (\varphi(t))^2 dt = 1$$

On pose  $t = 2^j y - k \implies dt = 2^j y$  on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (\varphi(2^j y - k))^2 2^j dt &= 1 \iff \int_{\mathbb{R}} \left[ 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j y - k) \right]^2 dt = 1 \\ &\iff \int_{\mathbb{R}} (\varphi_{j,k}(t))^2 dt = 1 \end{aligned}$$

finalement  $\|\varphi_{j,k}(t)\| = 1$ . ■

**Exemple 4** Déterminer le support des fonctions  $\varphi_{j,k}(t)$  dans les cas suivants et tracer la courbe de la fonction  $\varphi_{-2,1}(t)$  :

(a)  $j = 3, k = 4$

(b)  $j = -2, k = 1$

(c)  $j = -1, k = -2$

(d)  $j = 5, k = 18$ .

**Solution 5** • Pour  $j = 3, k = 4$  on a :  $\varphi_{3,7}(t) = 2\sqrt{2}\varphi(8t - 4)$ , on sait que  $\overline{\text{supp}(\varphi(t))} = [0, 1]$  donc  $\overline{\text{supp}(\varphi_{3,7}(t))} = \left[ \frac{1}{2}, \frac{5}{8} \right]$ .

• Pour  $j = -2, k = 1$  on a :  $\varphi_{-2,1}(t) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{4}t - 1\right)$  on trouve que  $\overline{\text{supp}(\varphi_{-2,1}(t))} = [4, 8]$ .

• Pour  $j = -1, k = -2$  on a :  $\varphi_{-1,-2}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\left(\frac{1}{2}t + 2\right)$  on trouve que  $\overline{\text{supp}(\varphi_{-1,-2}(t))} = [-4, -2]$ .

• Pour  $j = 5, k = 18$  on a :  $\varphi_{5,18}(t) = 4\sqrt{2}\varphi(32t - 18)$  on trouve que  $\overline{\text{supp}(\varphi_{5,18}(t))} = \left[ \frac{9}{16}, \frac{19}{32} \right]$ .

Le graphe de la fonction  $\varphi_{-2,1}(t)$  sur Fig 1.

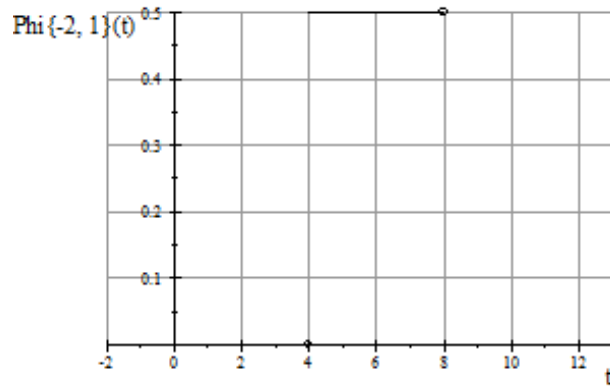


Fig 1 : La fonction  $\varphi_{-2,1}(t)$ .

Dans le cas général on a la proposition suivante :

**Proposition 6** Soit  $\varphi_{j,k}(t)$  la fonction définie dans (1.2) alors

$$\overline{\text{supp}(\varphi_{j,k}(t))} = \left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right].$$

**Preuve.** Comme  $\overline{\text{supp}(\varphi(t))} = [0, 1]$  on a :  $0 \leq 2^j t - k \leq 1$  donc  $\frac{k}{2^j} \leq t \leq \frac{k+1}{2^j}$   
d'où  $\overline{\text{supp}(\varphi_{j,k}(t))} = \left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right]$ . ■

Par exemple :  $\overline{\text{supp}(\varphi_{5,18}(t))} = \left[ \frac{18}{32}, \frac{19}{32} \right] = \left[ \frac{9}{16}, \frac{19}{32} \right]$ .

**Proposition 7** Supposons que  $f(t)$  et  $g(t)$  sont des fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  et  $k, l, m \in \mathbb{Z}$ .  
alors

$$\langle f(t-k), g(t-l) \rangle = \langle f(t), g(t-(l-k)) \rangle$$

et

$$\langle f(2^m t - k), g(2^m t - l) \rangle = 2^{-m} \langle f(t), g(t-(l-k)) \rangle \tag{1.3}$$

**Preuve.** On a :

$$\langle f(t-k), g(t-l) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t-k) g(t-l) dt$$

posons  $y = t - k \implies dt = dy$  donc :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(t-k) g(t-l) dt &= \int_{\mathbb{R}} f(y) g(y+k-l) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) g(y-(l-k)) dt \\ &= \langle f(y), g(y-(l-k)) \rangle \end{aligned}$$

Reste de démontrer (1.3), on a :

$$\langle f(2^m t - k), g(2^m t - l) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(2^m t - k) g(2^m t - l) dt$$

effectuons le changement suivant :  $y = 2^m t - k \implies dy = 2^m dt$  trouvons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(y) g(y+k-l) 2^{-m} dy &= 2^{-m} \int_{\mathbb{R}} f(y) g(y-(l-k)) dy \\ &= 2^{-m} \langle f(y), g(y-(l-k)) \rangle. \end{aligned}$$

■

Dans la proposition suivante on va montrer que l'ensemble  $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base orthonormale pour  $V_j$ .

**Proposition 8** ( Base orthonormale de  $V_j$  ) *Supposons que  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  avec les fonctions d'échelle  $\varphi(t)$ . supposons que  $j \in \mathbb{Z}$  avec  $j \neq 0$  alors l'ensemble  $S = \{\varphi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormale de  $V_j$ .*

**Preuve.** d'après la proposition 3 on a  $\varphi_{j,k}(t) \in V_j$  et  $\|\varphi_{j,k}(t)\| = 1$ . supposons maintenant que  $k, l \in \mathbb{Z}$  avec  $k \neq l$  et considérons le produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j,k}(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) \overline{2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - l)} dt \\ &= 2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^j t - k) \varphi(2^j t - l) dt \end{aligned} \tag{1.4}$$

on utilise (1.3) dans la proposition 7 on peut écrire (1.4) comme suite

$\langle \varphi_{j,k}(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \varphi(u - (l - k)) du = \langle \varphi(u), \varphi(u - (l - k)) \rangle$  mais on sait que  $l - k \neq 0$  et comme  $\varphi(u)$  et  $\varphi(u - (l - k))$  sont des éléments distincts de la base orthonormal de  $V_0$  alors :  $\langle \varphi(u), \varphi(u - (l - k)) \rangle = 0$  donc  $\langle \varphi_{j,k}(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle = 0$  ce qui prouve que  $S = \{\varphi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormale de  $V_j$ . Reste à démontrer que  $S$  est une base de  $V_j$  c'est à dire  $S$  engendre  $V_j$  et  $S$  linéairement indépendante. Soit  $f(t) \in V_j$  donc  $f(2^j t) \in V_0$ , comme  $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormal de  $V_0$  alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  il existe  $a_k \in \mathbb{R}$  tel que  $f(2^j t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(t - k)$ , remplaçant  $t$  par  $2^j t$ , divisons et multiplions chaque terme par  $2^{\frac{j}{2}}$  on trouve  $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_k}{2^{\frac{j}{2}}} \varphi(2^j t - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_k}{2^{\frac{j}{2}}} \varphi_{j,k}(t)$  donc  $f(t) \in V_j$  est une combinaison linéaire des éléments de  $S$  d'où  $S$  engendre  $V_j$ . Montrons maintenant que  $S$  est linéairement indépendante, soit

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k \varphi_{j,k}(t) &= 0 \implies \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k \varphi_{j,k}(t) \varphi_{j,m}(t) = 0 \\ &\implies \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k \int_{\mathbb{R}} \varphi_{j,k}(t) \varphi_{j,m}(t) dt = 0 \\ &\implies \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k \langle \varphi_{j,k}(t), \varphi_{j,m}(t) \rangle = 0 \end{aligned}$$

pour  $m = k$  on obtient :  $\lambda_k = 0$ , donc  $S$  est libre. ■

Dans le corollaire suivant on donne une représentation explicite de  $f(t) \in V_j$  dans la base  $\{\varphi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

**Corollaire 9** *Supposons que  $f(t) \in V_j$  et*

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{j,k}(t), \tag{1.5}$$

alors  $c_k = \langle f(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle$ .

**Preuve.** On a

$$\langle f(t), \varphi_{j,m}(t) \rangle = \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{j,k}(t), \varphi_{j,m}(t) \right\rangle,$$

mais

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \varphi_{j,m}(t) \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } k = m \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

il r ulte alors que  $\langle f(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle = c_k$ . ■

### 1.3 L'équation de dilatation et résultats li es

Dans la proposition suivante on va montrer que la fonction d'échelle  $\varphi(t)$  satisfait l'équation de dilatation.

**Proposition 10** *Supposons que  $\varphi(t)$  la fonction d'échelle de l'analyse multirésolution  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ . Alors  $\varphi(t)$  satisfait l'équation de dilatation suivante :*

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k), \quad (1.6)$$

où :

$$h_k = \langle \varphi(t), \varphi_{1,k}(t) \rangle, \quad (1.7)$$

on outre, pour  $\varphi_{j,k}(t)$  définie dans (1.2) on a :

$$\varphi_{j,l}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} \varphi_{j+1,k}(t). \quad (1.8)$$

Les coefficients  $h_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  sont appel es les filtres d'échelle, généralement on note ce filtre par  $h = (\dots, h_{-1}, h_0, h_1, \dots)$ .

**Preuve.** Comme  $V_j$  sont emboit es, on particulier  $V_0 \subset V_1$  donc si  $\varphi(t) \in V_0$  alors  $\varphi(t) \in V_1$ , d'après le corollaire 9 on peut écrire  $\varphi(t)$  comme une combinaison linéaire des

éléments de la base  $\{\varphi_{1,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  dans ce cas il existe des réels  $h_k, k \in \mathbb{Z}$  tels que :

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{1,k}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k),$$

on sait que

$$h_k = \langle \varphi(t), \varphi_{1,k}(t) \rangle = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \varphi(2t - k) dt,$$

en remplaçant dans (1.6)  $t$  par  $2^j t - l$  on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(2^j t - l) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2(2^j t - l) - k) \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2^{j+1} t - (k + 2l)), \end{aligned} \quad (1.9)$$

posons  $m = k + 2l$  et multiplions (1.9) par  $2^{\frac{j}{2}}$  on obtient :

$$2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - l) = \varphi_{j,l}(t) = 2^{\frac{j+1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{m-2l} \varphi(2^{j+1} t - m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{m-2l} \varphi_{j+1,m}(t).$$

■

Inversement, nous pouvons montrer dans la proposition suivante que si la fonction d'échelle  $\varphi(t)$  satisfait (1.6) alors les propriétés de l'analyse multirésolution sont satisfaites.

**Proposition 11** *Supposons que  $V_j = \text{span} \{\varphi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$  et  $\varphi(t) \in V_0$  vérifiée l'équation de dilatation (1.6) alors  $V_j \subset V_{j+1}$  et  $f(t) \in V_0$  si, et seulement si,  $f(2^j t) \in V_j$ .*

**Preuve.** Montrons que  $V_j \subset V_{j+1}$ , soit  $f(t) \in V_j$ , comme  $V_j = \text{span} \{\varphi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  on a

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(2^j t - k). \quad (1.10)$$



On utilise l'équation de dilaltation (1.6) on trouve

$$\begin{aligned}\varphi(2^j t - k) &= \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \varphi(2(2^j t - l) - k) \\ &= \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \varphi(2^{j+1} t - 2k - l),\end{aligned}\tag{1.11}$$

on substituer (1.11) dans (1.10) on obtient

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \left( \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \varphi(2^{j+1} t - 2k - l) \right) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \varphi(2^{j+1} t - (l + 2k)) \right),$$

maintenant en effectuant le changement  $m = l + 2k$  alors

$$\begin{aligned}f(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \varphi(2^{j+1} t - m) \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{m-2k} \right) \varphi(2^{j+1} t - m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho_m \varphi(2^{j+1} t - m) \text{ où } \rho_m = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{m-2k}.\end{aligned}$$

Donc  $f(t) \in V_{j+1}$ . ■

Quelques propriétés sur le filtre  $h$  sont données dans la proposition suivante.

**Proposition 12** *Supposons que  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  avec la fonction d'échelle  $\varphi(t)$ . Si les composantes du filtre  $h$  appartiennent à  $\mathbb{R}$  alors*

- (i)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}$
- (ii)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k-2l} = \delta_{0,l}$ , pour tout  $l \in \mathbb{Z}$
- (iii)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^2 = 1$ .

**Preuve.** (i) On a

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k),$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k) dt.$$

On pose dans cette égalité  $y = 2t - k \implies dy = 2dt$ , et on sait que  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(y) \frac{1}{2} dt &= 1 \implies \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dt = 1 \\ &\implies \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = 1, \end{aligned}$$

finalement

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}.$$

(ii) De la relation (1.6) on a :  $\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k)$  on multiplier les deux cotés par  $\varphi_{0,l}(t)$  on trouve

$$\begin{aligned} \varphi(t) \varphi_{0,l}(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k) \varphi_{0,l}(t) \\ \implies \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \varphi_{0,l}(t) dt &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k) \varphi_{0,l}(t) dt \\ \implies \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \varphi_{0,l}(t) dt &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2} \varphi(2t - k) \varphi_{0,l}(t) dt \\ \implies \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \varphi_{0,l}(t) dt &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{\mathbb{R}} \varphi_{1,k}(t) \varphi_{0,l}(t) dt \\ \implies \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \varphi_{0,l}(t) dt &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \langle \varphi_{1,k}(t), \varphi_{0,l}(t) \rangle, \end{aligned}$$

d'après la proposition 10 on a

$$\langle \varphi_{j+1,k}(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle = h_{k-2l},$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \varphi_{0,l}(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k-2l},$$

on distingue deux cas :

• Si :  $l = 0$  alors  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \varphi_{0,l}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \varphi_{0,0}(t) dt = \|\varphi(t)\|^2 = 1$  donc la relation au dessus devienne comme suite

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k-2l} = 1.$$

• Si :  $l \neq 0$  alors la relation  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \varphi_{0,l}(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k-2l}$  nous donne  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k-2l} = \langle \varphi_{0,0}(t), \varphi_{0,l}(t) \rangle = 0$ .

(iii) Il suffit de prendre  $l = 0$  dans (ii) on obtient  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^2 = 1$ . ■

#### 1.4 Projection dans l'espace $V_j$

**Définition 13** Soit  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , la projection de la fonction  $f(t)$  dans  $V_j$  est définie comme suite

$$P_{f,j} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle f(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle \varphi_{j,k}(t). \quad (1.12)$$

Comme les espaces  $V_j$  sont emboîtés, nous pouvons passer dans la proposition suivante d'un espace d'approximation plus fin  $V_{j+1}$  à un espace plus grossier  $V_j$ .

**Proposition 14** Supposons que  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  avec la fonction d'échelle  $\varphi(t)$  et  $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$  tels que

$$f_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi_{j+1,k}(t). \quad (1.13)$$

si  $f_j(t)$  est la projection de  $f_{j+1}(t)$  dans  $V_j$  alors

$$f_j(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \varphi_{j,l}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{k-2l} \right) \varphi_{j,l}(t), \quad (1.14)$$

où  $h_k, k \in \mathbb{Z}$  sont les filtres d'échelle définies dans la proposition 10.

**Preuve.** Commançant par l'écriture de la projection de  $f_{j+1}(t)$  dans  $V_j$ , on a

$$f_j(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle f_{j+1}(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle \varphi_{j,l}(t),$$

substituons (1.13) dans cette identification trouvons

$$\begin{aligned} f_j(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi_{j+1,k}(t), \varphi_{j,l}(t) \right\rangle \varphi_{j,l}(t) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \langle \varphi_{j+1,k}(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle \varphi_{j,l}(t), \end{aligned}$$

d'autre part d'après (1.8) on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j+1,k}(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle &= \left\langle \varphi_{j+1,k}(t), \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2l} \varphi_{j+1,m}(t) \right\rangle \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2l} \langle \varphi_{j+1,k}(t), \varphi_{j+1,m}(t) \rangle, \end{aligned} \quad (1.15)$$

mais  $\varphi_{j+1,k}(t)$  et  $\varphi_{j+1,m}(t)$  font partie d'une base orthonormale pour  $V_{j+1}$  donc

$$\langle \varphi_{j+1,k}(t), \varphi_{j+1,m}(t) \rangle = \begin{cases} 0; & k \neq m \\ 1; & k = m, \end{cases}$$

alors il y'a un seul terme non nul dans le cas où  $k = m$  d'où la relation (1.15) devienne comme suite

$$\langle \varphi_{j+1,k}(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle = h_{k-2l} \cdot 1 = h_{k-2l}.$$

■

### 1.5 La fonction ondelette

Dans la suit on va donner quelques définitions et quelques propriétés sur les les fonctions ondelettes et les espaces d'ondelettes générales.

**Définition 15** *Supposons que  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multirésolution pour  $L^2(\mathbb{R})$  avec la fonction d'échelle  $\varphi(t)$ , on définit la fonction ondelette  $\psi(t) \in V_1$  par :*

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2t - k), \quad (1.16)$$

et la fonction  $\psi_{j,k}(t) \in V_{j+1}$  par

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), \quad (1.17)$$

pour  $j, k \in \mathbb{Z}$  les filtres d'ondelette sont donnés par  $g = \{\dots, g_{-1}, g_0, g_1, \dots\}$  où

$$g_k = (-1)^k h_{1-k}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.18)$$

La relation (1.18) sera démontrée dans la proposition 51.

**Exemple 16** (*La fonction ondelette de Haar*)

Considérons la multirésolution de Haar (Fig 2).

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1; & 0 \leq t < 1 \\ 0; & \text{si non.} \end{cases}$$

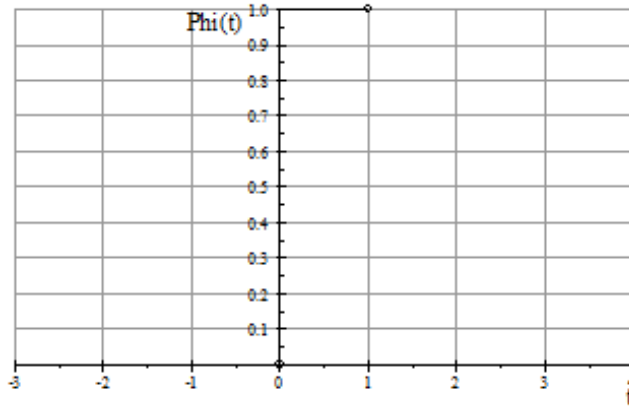


Fig 2 : La fonction  $\varphi(t)$ .

et le filtre  $h = (h_0, h_1)$  tel que  $h_0 = h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $h_k = 0$ , ailleurs. D'après (1.16) l'ondelette de Haar  $\psi(t)$ , (Fig3), peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2t - k) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} \varphi(2t - k) \\ &= \sqrt{2} \left[ (-1)^0 h_{1-0} \varphi(2t - 0) + (-1)^1 h_{1-1} \varphi(2t - 1) \right] \\ &= \sqrt{2} (h_1 \varphi(2t) - h_0 \varphi(2t - 1)) \\ &= \sqrt{2} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \varphi(2t) - \frac{\sqrt{2}}{2} \varphi(2t - 1) \right], \end{aligned}$$

donc

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1), \quad (1.19)$$

c'est à dire

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (1.20)$$

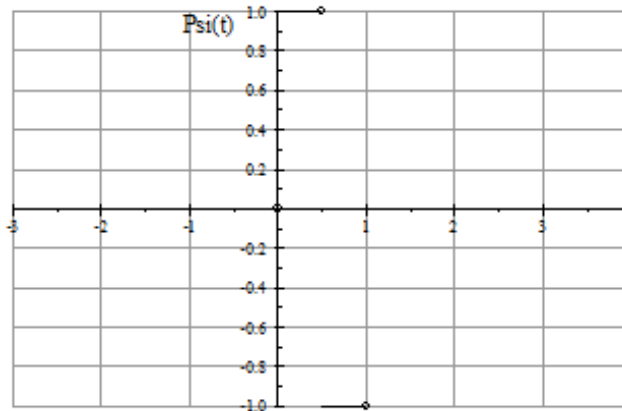


Fig 3 : La fonction  $\psi(t)$ .

On particulier on a la définition suivante.

**Définition 17** Soit  $\psi(t)$  la fonction ondelette de Haar définie dans (1.20), alors pour tout  $j, k \in \mathbb{Z}$  on a :  $\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j t - k)$ .

**Exemple 18** Déterminer le support des fonctions  $\psi_{j,k}(t)$  dans les cas suivants et tracer la courbe de la fonction  $\psi_{-2,4}(t)$  :

(a)  $j = 1, k = -2$

(b)  $j = -2, k = 4$

(c)  $j = 4, k = -5$

**Solution 19** • Pour  $j = 1, k = -2$  on a :  $\psi_{1,-2}(t) = \sqrt{2}\psi(2t + 2)$  et comme le support de  $\psi(t)$  c'est  $[0, 1]$  donc  $\overline{\text{supp}(\psi_{1,-2}(t))} = \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ .

• Pour  $j = -2, k = 4$  on a :  $\psi_{-2,4}(t) = \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{4}t - 4\right)$  donc  $\overline{\text{supp}(\psi_{-2,4}(t))} = [16, 20]$ .

• Pour  $j = 4, k = -5$  on a :  $\psi_{4,-5}(t) = 4\psi(16t + 5)$  donc  $\overline{\text{supp}(\psi_{4,-5}(t))} = \left[-\frac{5}{16}, -\frac{1}{4}\right]$ .

Pour tracer le graphe de la fonctions  $\psi_{-2,4}(t)$  (Fig4) on a :

$$\psi_{-2,4}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } 16 \leq t < 18 \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } 18 \leq t < 20 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

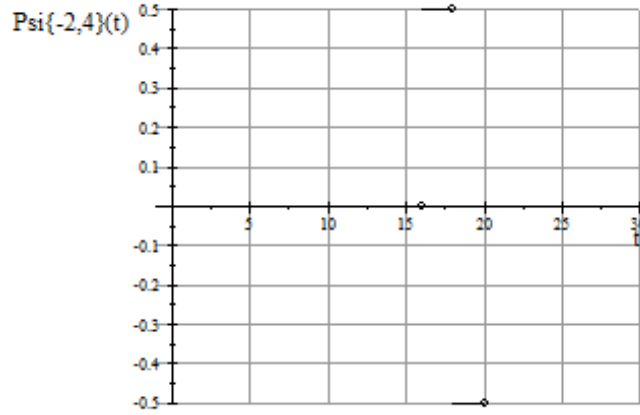


Fig 4 : La fonction  $\psi_{-2,4}(t)$ .

Dans le cas général on a :

$$\psi_{j,k}(t) = \begin{cases} \frac{j}{2^j}, & \text{si } 0 \leq 2^j t - k < \frac{1}{2} \\ -\frac{j}{2^j}, & \text{si } 0 \leq 2^j t - k < 1 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

**Proposition 20** (Support de  $\psi_{j,k}(t)$ ) Soit  $\psi_{j,k}(t)$  la fonction ondelette définie dans

(1.17), donc  $\overline{\text{supp}(\psi_{j,k}(t))} = \left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right]$ .

**Preuve.** Comme le support de  $\psi(t)$  c'est  $[0, 1]$  il est facile de vérifier que le support de  $\psi_{j,k}(t)$  est  $\left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right]$ . ■

**Définition 21** (l'espace  $W_j$ ) L'espace des ondelette de Haar est l'espace  $W_j$  définie par

$$\begin{aligned} W_j &= \text{span} \{ \dots, \psi(2^j t + 1), \psi(2^j t), \psi(2^j t - 1), \dots \} \cap L^2(\mathbb{R}) \\ &= \text{span} \{ \psi(2^j t - k) \}_{k \in \mathbb{Z}} \cap L^2(\mathbb{R}), \end{aligned}$$



où,  $\psi(t)$  est la fonction définie dans (1.20).

**Exemple 22** Tracer les courbes des fonctions suivantes :

$$(a) f_1(t) = 2\psi_{-2, -1}(t) - 6\psi_{-2, 1}(t) + 4\psi_{-2, -2}(t) \in W_{-2}.$$

$$(b) f_2(t) = \sum_{k=-4}^{k=-1} (-1)^k k^2 \psi(8t - k) \in W_3.$$

On peut simplifier les fonction  $f_1$  comme suit

$$f_1(t) = \psi\left(\frac{1}{4}t + 1\right) - 3\psi\left(\frac{1}{4}t - 1\right) + 2\psi\left(\frac{1}{4}t - 2\right),$$

C'est-à-dire :

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } -4 \leq t < -2 \\ -1, & \text{si } -2 \leq t < 0 \\ -3, & \text{si } 4 \leq t < 6 \\ 3, & \text{si } 6 \leq t < 8 \\ 2, & \text{si } 8 \leq t < 10 \\ -2, & \text{si } 10 \leq t < 12 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

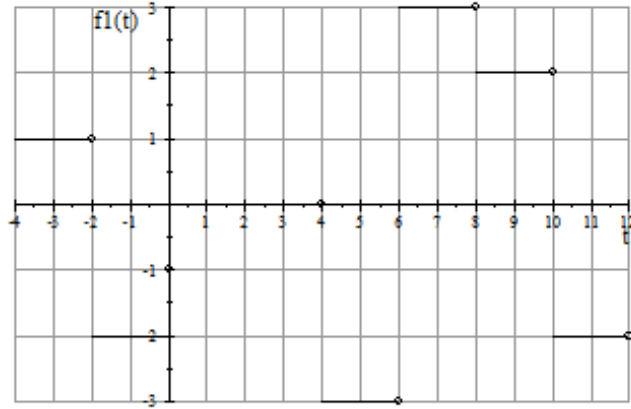


Fig 5 : La fonction  $f_1(t)$ .

De même manière on trouve :

$$f_2(t) = 16\psi(8t + 4) - 9\psi(8t + 3) + 4\psi(8t + 2) - \psi(8t + 1).$$

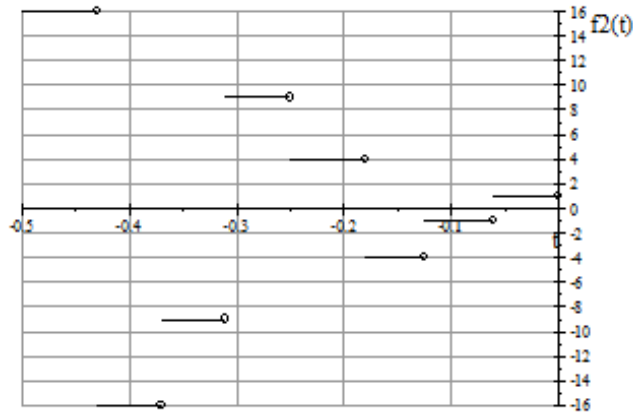


Fig 6 : La fonction  $f_2(t)$ .

**Proposition 23** (33)(Base orthonormée de  $W_j$ ) Soit  $\psi_{j,k}(t)$  la fonction définie dans (1.17) alors  $\{\psi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_j$ .

**Proposition 24** (33) (Orthogonalité de  $\varphi_{j,k}$  et  $\psi_{l,m}$ ) Pour tout  $j, k, l, m \in \mathbb{Z}$  avec  $l \geq j$ , on a :

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \psi_{l,m}(t) \rangle = 0.$$

**Proposition 25** (Orthogonalité de  $V_j$  et  $W_l$ ) Supposons que  $j, l \in \mathbb{Z}$  avec  $l \geq j$ . Alors  $V_j \perp W_l$ .

**Preuve.** Soient  $f(t) \in V_j$  et  $g(t) \in W_l$  comme  $\{\varphi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{\psi_{l,m}(t)\}_{m \in \mathbb{Z}}$  forment des bases de  $V_j$  et  $W_l$  alors

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{j,k}(t) \text{ et } g(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} d_m \psi_{l,m}(t),$$

le produit entre  $f(t)$  et  $g(t)$  donne

$$\begin{aligned} \langle f(t), g(t) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{j,k}(t) \sum_{m \in \mathbb{Z}} d_m \psi_{l,m}(t) dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \sum_{m \in \mathbb{Z}} d_m \int_{\mathbb{R}} \varphi_{j,k}(t) \psi_{l,m}(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Donc  $V_j \perp W_l$ . ■

**Proposition 26** (33) (L'orthogonalité de  $\psi_{l,m}(t)$  à travers les niveaux) Soient  $j, k, l, m$  des entiers, alors

$$\langle \psi_{j,k}(t), \psi_{l,m}(t) \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } j = l \text{ et } k = m \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

**Proposition 27** Soient  $j, l \in \mathbb{Z}$  avec  $j \neq l$ , alors  $W_j \perp W_l$ .

**Preuve.** Similaire à la preuve de la proposition 25. ■

Dans la proposition suivante on va voir comment s'écrit  $\varphi_{j,0}(t)$  et  $\varphi_{j,k}(t)$  en  $V_{j+1}$ .

**Proposition 28** Pour tout entiers  $j, k$  ( $k \neq 0$ ),  $\varphi_{j,k}(t)$  s'écrit en  $V_{j+1}$  comme suit

$$\varphi_{j,k}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \varphi_{j+1,2k}(t) + \frac{\sqrt{2}}{2} \varphi_{j+1,2k+1}(t), \quad (1.21)$$

en particulier :

$$\varphi_{j,0}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_{j+1,0}(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_{j+1,1}(t). \quad (1.22)$$

**Proposition 29** (33) (Equation de dilatation de  $\psi_{j,0}(t)$  et  $\psi_{j,k}(t)$ ) Pour tout entiers  $j$  et  $k$  on a :

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_{j+1,2k}(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_{j+1,2k+1}(t), \quad (1.23)$$

en particulier

$$\psi_{j,0}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_{j+1,0}(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_{j+1,1}(t). \quad (1.24)$$

**Proposition 30** (33) (Projection des fonctions dans  $V_{j+1}$  en  $V_j$ ) Soit  $f_{j+1} \in V_{j+1}$  telle que  $f_{j+1}(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \varphi_{j,m}(t)$ , alors la projection de  $f_{j+1}(t)$  en  $V_j$  est la fonction  $f_j(t) = Pf_{j+1,j}(t)$  où

$$f_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \varphi_{j,k}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f_{j+1}(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle \varphi_{j,k}(t),$$

$$\text{avec } b_k = \frac{\sqrt{2}}{2}(a_{2k} + a_{2k+1}) = h \cdot a^k / a^k = [a_{2k}, a_{2k+1}]^T, \quad h = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^T.$$

**Proposition 31** (33) (La fonction résiduelle  $g_j(t)$  dans  $W_j$ ) Soit  $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$  telle que  $f_{j+1}(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \varphi_{j+1,m}(t)$ , supposons que  $f_j(t)$  la projection de  $f_{j+1}(t)$  en  $V_j$ , si  $g_j(t) = f_{j+1}(t) - f_j(t)$  la fonction résiduelle en  $V_{j+1}$ , alors  $g_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi_{j,k}(t)$  avec

$$c_k = \frac{\sqrt{2}}{2}(a_{2k} - a_{2k+1}) = g \cdot a^k / a^k = [a_{2k}, a_{2k+1}]^T, \quad g = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]^T.$$

Comme les fonctions d'échelle  $\varphi_{j,k}$ , la proposition suivante prouve que les fonctions d'ondelettes  $\psi_{j,k}$  satisfont également l'équation de dilatation.

**Proposition 32** On considère la fonction ondelette  $\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k)$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$ . Pour tout entier  $l \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$\psi_{j,l}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} \varphi_{j+1,k}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1+2l-k} \varphi_{j+1,k}(t). \quad (1.25)$$

**Preuve.** C'est la même idée dans la preuve de la proposition 10. ■

### 1.6 Le complément orthogonal $W_j$ à $V_j$ dans $V_{j+1}$

Le résultat suivant, dû à Stéphane Mallat (27) et Yves Meyer (31), identifie le complément orthogonal  $W_j$  à  $V_j$  dans  $V_{j+1}$  et établit une base orthonormale pour  $W_j$ .

**Théorème 33** Soient  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution pour  $L^2(\mathbb{R})$  avec la fonction d'échelle  $\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k)$ , on suppose que le filtre  $h = \{\dots, h_{-1}, h_0, h_1, \dots\}$  compris des réels. Si :

$$W_j = \text{span} \{ \psi_{j,k}(t) \}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad (1.26)$$

alors  $W_j$  est le complément orthonormale de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$  c'est à dire

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (1.27)$$

De plus l'ensemble  $\{ \psi_{j,k}(t) \}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base de  $W_j$ .

**Preuve.** La preuve de ce théorème est assez technique, S. G. Mallat (27) et Y. Meyer (31) utilisent la transformée de Fourier. Une très belle preuve de ce théorème n'utilise pas la transformée de Fourier apparaît dans le livre de Boggess (4). Ici, les auteurs établissent le résultat pour  $j = 0$ , puis utilisent la condition d'échelle de la définition 1 pour compléter la preuve d'un arbitraire  $j$ . Comme noté dans les travaux de I. Boggess (4), prouver le résultat pour  $j = 0$ , il faut d'abord montrer que

$$\langle \psi_{0,m}(t), \psi_{0,n}(t) \rangle = \langle \psi(t-m), \psi(t-n) \rangle = \delta_{m,n}, \quad (1.28)$$

on suite on démontre que  $V_0 \perp W_0$  c'est à dire : les deux fonctions  $\varphi_{0,m}(t) = \varphi(t-m)$  et  $\psi_{0,n}(t) = \psi(t-n)$  satisfont

$$\langle \varphi(t-m), \psi(t-n) \rangle = 0, \quad (1.29)$$

rappelons que  $W_0 \subset V_1$  donc d'après la relation (1.17) les fonctions  $\psi_{0,l}(t) = \psi(t-l)$ ,  $l \in \mathbb{Z}$  sont des éléments de  $V_1$  d'autre part et de (1.27) on sait que  $W_0$  est contenue dans le complément orthonormal de  $V_0$  dans  $V_1$ , reste à démontrer que le complément de  $V_0$  dans  $V_1$  est contenue dans  $W_0$  et on obtient que  $V_1 = V_0 \oplus W_0$ . ■

Supposons que  $m, M \in \mathbb{Z}$  avec  $m < M$  et  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multirésolution pour  $L^2(\mathbb{R})$ . On utilise le théorème 33 on peut écrire  $V_M = V_{M-1} \oplus W_{M-1}$ , on applique le théorème 33 récursivement sur les espaces  $V_{M-1}, \dots, V_m$  on obtient :

$$\begin{aligned}
V_M &= V_{M-1} \oplus W_{M-1} \\
&= V_{M-2} \oplus W_{M-2} \oplus W_{M-1} \\
&= V_{M-3} \oplus W_{M-3} \oplus W_{M-2} \oplus W_{M-1} \\
&= V_m \oplus W_m \oplus W_{m+1} \oplus \dots \oplus W_{M-1}.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Maintenant, les espaces  $V_j$  sont imbriqués de sorte que  $V_M$  contient  $V_j$  pour tout  $j < M$ . Ainsi comme  $M \rightarrow \infty$ , la propriété de la densité de la définition 1 indique que  $V_M$  devient une meilleure approximation de  $L^2(\mathbb{R})$ . D'un autre côté, la propriété de séparation de la définition 1 et la nature imbriquée des espaces  $V_j$  indique que comme  $m \rightarrow \infty$  les espaces  $V_m$  ressemblent à l'espace constitué uniquement de la fonction  $f(t) = 0$ . Cet argument heuristique conduit au théorème important suivant dans la théorie des ondelettes.

Ce théorème concerne l'orthogonale infinie et somme des espaces d'ondelettes.

**Théorème 34** (39) Soit  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution pour  $L^2(\mathbb{R})$  et soit  $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  l'espace des ondelettes définit dans (1.26) alors

$$L^2(\mathbb{R}) = \dots \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} \oplus W_1 \oplus W_2 \dots$$

et l'ensemble  $\{W_{j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormale de  $L^2(\mathbb{R})$ .

D'après ce théorème en déduire que toute fonction  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  s'écrire sous la forme  $f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} w_j(t)$  où  $w_j(t) \in W_j$  et  $w_j(t) \perp w_l(t)$  si  $j \neq l$ , de plus :

$$L^2(\mathbb{R}) = V_J \oplus W_J \oplus W_{J-1} \oplus W_{J-2} \oplus \dots$$

**Exemple 35** (Décomposition de la fonction  $f_3(t) \in V_3$ ) On définit la fonction  $f_3(t) \in V_3$  par

$$\begin{aligned}
 f_3(t) &= \sum_{k=0}^{k=7} a_k \varphi_{3,k}(t) \\
 &= a_0 \varphi_{3,0}(t) + a_1 \varphi_{3,1}(t) + a_2 \varphi_{3,2}(t) + a_3 \varphi_{3,3}(t) + a_4 \varphi_{3,4}(t) \\
 &\quad + a_5 \varphi_{3,5}(t) + a_6 \varphi_{3,6}(t) + a_7 \varphi_{3,7}(t) \\
 &= 3\varphi_{3,0}(t) + \varphi_{3,1}(t) - 2\varphi_{3,2}(t) + 4\varphi_{3,3}(t) + 5\varphi_{3,4}(t) + \varphi_{3,5}(t) - 2\varphi_{3,6}(t) - 4\varphi_{3,7}(t) \\
 &= 6\sqrt{2}\varphi(8t) + 2\sqrt{2}\varphi(8t-1) - 4\sqrt{2}\varphi(8t-2) + 8\sqrt{2}\varphi(8t-3) + 10\sqrt{2}\varphi(8t-4) \\
 &\quad + 2\sqrt{2}\varphi(8t-5) - 4\sqrt{2}\varphi(8t-6) - 8\sqrt{2}\varphi(8t-7).
 \end{aligned}$$

On obtient le graphe de  $f_3(t)$  dans la (Fig 7)

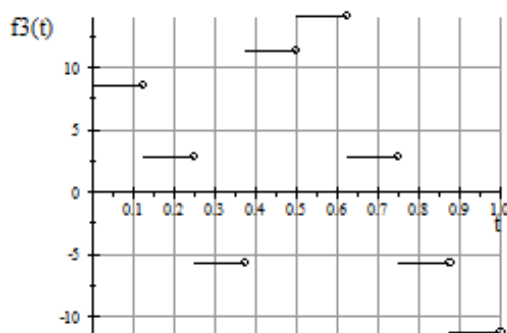


Fig 7 : la fonction  $f_3(t)$ .

Maintenant on va déterminer les fonctions  $f_0(t)$  de  $V_0$  et  $g_0(t)$ ,  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  de  $W_0$ ,  $W_1$ ,  $W_2$  telle que

$$f_3(t) = f_0(t) + g_0(t) + g_1(t) + g_2(t),$$

on sait que  $V_3 = V_2 \oplus W_2$  donc  $f_3(t) = f_2(t) + g_2(t)$  où  $f_2(t) \in V_2$  et  $g_2(t) \in W_2$ , de plus  $f_2(t)$  et  $g_2(t)$  sont les projections de  $f_3(t)$  dans  $V_2$  et  $W_2$  on utilise alors les résultats précédentes pour construire  $f_2(t)$  et  $g_2(t)$ .

On a :

$$f_2(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \varphi_{2,k}(t) \text{ et } g_2(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi_{2,k}(t),$$

avec

$$b_k = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_{2k} + a_{2k+1}) \text{ et } c_k = \frac{\sqrt{2}}{2} (a_{2k} - a_{2k+1}),$$

d'après un calcul simple on trouve

$$\begin{aligned} b_0 &= 2\sqrt{2}, & b_1 &= \sqrt{2}, & b_2 &= 3\sqrt{2}, & b_3 &= -3\sqrt{2} \\ c_0 &= \sqrt{2}, & c_1 &= -3\sqrt{2}, & c_2 &= 2\sqrt{2}, & c_3 &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f_2(t) &= 4\sqrt{2}\varphi(4t) + 2\sqrt{2}\varphi(4t-1) + 6\sqrt{2}\varphi(4t-2) - 6\sqrt{2}\varphi(4t-3), \\ g_2(t) &= 2\sqrt{2}\psi(4t) - 6\sqrt{2}\psi(4t-1) + 4\sqrt{2}\psi(4t-2) + 2\sqrt{2}\psi(4t-3). \end{aligned}$$

Les graphes des fonctions  $f_2(t)$  et  $g_2(t)$  sont obtenus sur (Fig 8) et (Fig 9)

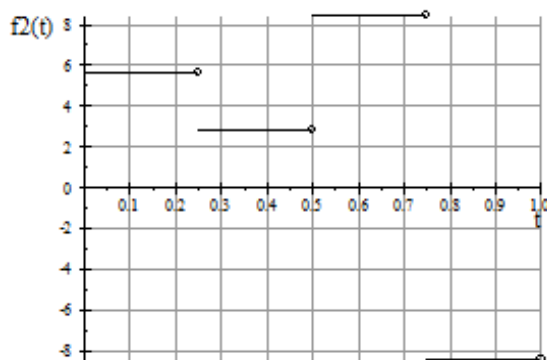


Fig 8 : La fonction  $f_2(t)$ .



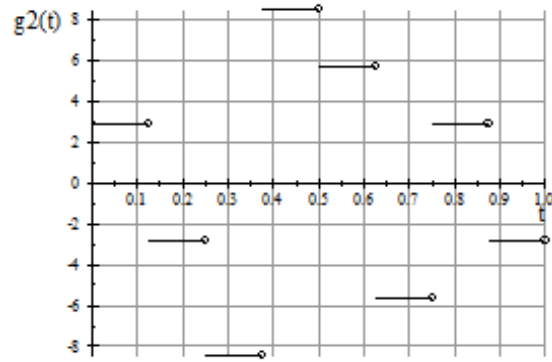


Fig 9 : La fonction  $g_2(t)$ .

On utilise  $f_2(t) \in V_2$  pour construire  $f_1(t)$  et  $g_1(t)$  (Fig10)-(Fig11), on a :

$$f_1(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \varphi_{1,k}(t) \text{ et } g_1(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi_{1,k}(t),$$

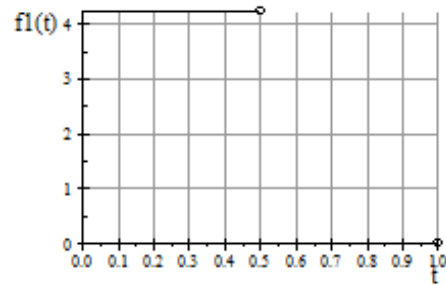
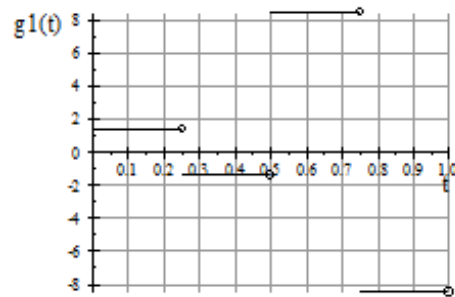


Fig 10 : la fonction  $f_1(t)$ .



Fog 11 : la fonction  $g_1(t)$ .

de même manière précédente on trouve

$$f_1(t) = 3\sqrt{2}\varphi(2t) \text{ et } g_1(t) = \sqrt{2}\psi(2t) + 6\sqrt{2}\psi(2t-1).$$

Finalement reste à déterminer les fonctions  $f_0(t)$  et  $g_0(t)$ , on a :

$$f_0(t) = b_0\varphi_{0,0}(t) \text{ et } g_0(t) = c_0\psi_{0,0}(t),$$

avec  $b_0 = c_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ , donc

$$f_0(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\varphi(t) \text{ et } g_0(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\psi(t).$$

On obtient les graphes des fonctions  $f_0(t)$  et  $g_0(t)$  dans les (Fig12)-(Fig13).

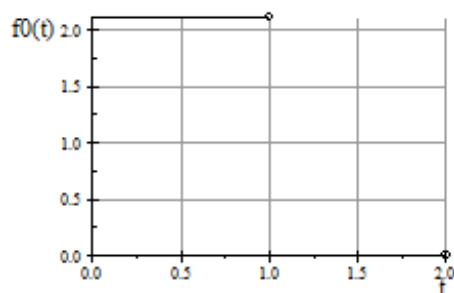


Fig 12 : La fonction  $f_0(t)$ .

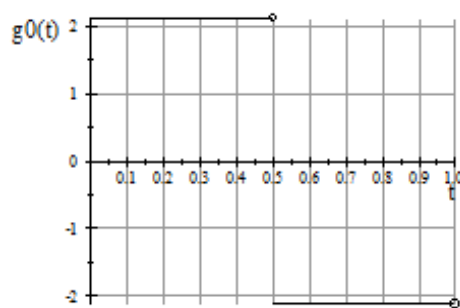


Fig 13 : La fonction  $g_0(t)$ .

Donc on utilise la relation (1.19) et après un calcul simple on peut vérifier que :

$$f_3(t) = f_0(t) + g_0(t) + g_1(t) + g_2(t).$$

### 1.7 Projection de $V_{j+1}$ sur $W_j$

Pour décomposer une fonction  $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$  on utilise le fait que  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$  et on écrit  $f_{j+1}(t) = f_j(t) + w_j(t)$ ,  $w_j(t)$  sont orthogonaux,  $f_j(t) \in V_j$  est la projection orthogonale de  $f_{j+1}(t)$  dans  $V_j$  et  $w_j(t) \in W_j$  la projection orthogonale de  $f_{j+1}$  sur  $W_j$ . Nous avons déjà la formule de  $f_j(t)$  (1.14). Maintenant, nous cherchons une formule pour  $w_j(t)$ , pour cela on a la proposition suivante :

**Proposition 36** *Supposons que  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  avec la fonction d'échelle associée  $\varphi(t)$ . Supposons que  $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$  telle que  $f_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi_{j+1,k}(t)$  où  $a_k = \langle f_{j+1}(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle$ , si  $w_j$  la projection de  $f_{j+1}(t)$  sur  $W_j$ , alors*

$$\begin{aligned} w_j(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l \psi_{j,l}(t) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g_{k-2l} \right) \psi_{j,l}(t) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (-1)^k h_{1+2l-k} \right) \psi_{j,l}(t). \end{aligned} \tag{1.31}$$

**Preuve.** La preuve est presque identique à celle de Proposition 14. ■

### 1.8 Reconstruction

Il est simple de récupérer  $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$  avec la projection de  $f_{j+1}$  sur  $V_j$  et  $W_j$ . Supposons que  $f_j$  et  $w_j$  sont les projections de  $f_{j+1}(t)$  sur  $V_j$  et  $W_j$  respectivement, alors

$$f_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi_{j+1,k}(t), \tag{1.32}$$

$$f_j(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \varphi_{j,l}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{k-2l} \right) \varphi_{j,l}(t), \quad (1.33)$$

$$w_j(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l \psi_{j,l}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (-1)^k h_{1+2l-k} \right) \psi_{j,l}(t), \quad (1.34)$$

avec  $f_{j+1}(t) = f_j(t) + w_j(t)$ . Alors, à partir de la relation

$$a_k = \langle f_{j+1}(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle, \quad (1.35)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} b_l &= \langle f_j(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{k-2l}, \\ c_l &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (-1)^k h_{1+2l-k} = \langle w_j(t), \psi_{j,l}(t) \rangle, \end{aligned}$$

pour la reconstruction, on suppose que  $b_l, c_l$  sont connus et on utilise ces valeurs pour récupérer  $a_k, k, l \in \mathbb{Z}$ .

Comme  $f_{j+1}(t) = f_j(t) + w_j(t)$  il résulte de (1.33) et (1.34) que

$$f_{j+1}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (b_l \varphi_{j,l}(t) + c_l \psi_{j,l}(t)),$$

d'autre part nous pouvons identifier la formule ci-dessus avec  $\varphi_{j+1,k}(t)$  pour obtenir

$$\begin{aligned} a_k &= \langle f_{j+1}(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{l \in \mathbb{Z}} (b_l \varphi_{j,l}(t) + c_l \psi_{j,l}(t)), \varphi_{j+1,k}(t) \right\rangle \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} (b_l \langle \varphi_{j,l}(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle + c_l \langle \psi_{j,l}(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle), \end{aligned}$$

de la proposition 14 on a  $\langle \varphi_{j,l}(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle = g_{k-2l} = (-1)^k h_{1+2l-k}$  et donc

$$a_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (b_l h_{k-2l} + c_l g_{k-2l}) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (b_l h_{k-2l} + c_l (-1)^k h_{1+2l-k}). \quad (1.36)$$

### 1.9 Vue du domaine de transformation

Certains problèmes sont plus faciles à résoudre dans le domaine de la transformation. Souvent, nous pouvons convertir des problèmes difficiles aux problèmes plus faciles d'une nature algébrique. Le travail dans le domaine de transformation donne un aperçu de l'analyse de fréquence pour certaines applications. Nous avons d'abord transformer l'équation de dilatation (1.6) et on définit un symbole connexe  $H(\omega)$  pour la fonction d'échelle  $\varphi(t)$  ce qui aidera dans nos études. Après dérivant quelques propriétés de  $\widehat{\varphi}(\omega)$  et  $H(\omega)$ , nous développons une paire de résultats pour l'échelle d'analyse multirésolution et propriétés d'orthonormalité dans le domaine de la transformation. Nous considérons également les ramifications pour la transformation de Fourier  $\widehat{\psi}(t)$  de la fonction d'ondelette. Ces résultats abstraits sont examinés pour l'analyse multirésolution de Haar dans toute la section.

*1.9.1 Le symbole de  $\varphi(t)$ .* Dans le théorème suivant on va présenter l'équation de dilatation (1.6) dans le domaine de la transformée.

**Théorème 37** *Une fonction  $\varphi(t)$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  satisfait l'équation de dilatation  $\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k)$  si et seulement si sa transformée de Fourier  $\widehat{\varphi}(\omega)$  satisfait l'équation*

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{\frac{-ik\omega}{2}} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (1.37)$$

**Preuve.** Posons  $f(t) = \varphi(2t - k)$  donc :

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2t - k) e^{-i\omega t} dt.$$

On pose  $2t - k = u$  on trouve :

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) e^{-i\omega\left(\frac{k}{2} + \frac{u}{2}\right)} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} e^{-\frac{i\omega k}{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) e^{-\frac{i\omega u}{2}} du \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{ik\omega}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).\end{aligned}$$

On utilise l'invertibilité et la linéarité de la transformation de Fourier on trouve,  $\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k)$  si et seulement si

$$\hat{\varphi}(\omega) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \frac{1}{2} e^{-\frac{ik\omega}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-\frac{ik\omega}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

donc nous avons prouvé que  $\varphi(t)$  satisfait l'équation de dilatation de domaine temps si et seulement si  $\hat{\varphi}(\omega)$  vérifie (1.37). ■

Notons que la version du domaine de transformation de l'équation de dilatation (1.37) implique que  $\hat{\varphi}(\omega)$  est égal à lui-même (dilaté) fois un polynôme trigonométrique :

$$\hat{\varphi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (1.38)$$

où

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}. \quad (1.39)$$

La fonction  $H(\omega)$  a un rôle important dans la théorie des ondelettes, et pour cela on a la définition suivante :

**Définition 38** Soit  $\varphi(t)$  une fonction d'échelle, la fonction  $H(\omega)$  est appelée le symbole de  $\varphi(t)$ .

• Il est souvent de considérer  $H$  comme un polynôme, si on pose  $z = e^{-i\omega}$  alors on obtient

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k z^k. \quad (1.40)$$

- Nous utilisons fréquemment les notations  $H(z)$  et  $H(\omega)$  de façon interchangeable, car chacun est un moyen utile de regarder le symbole  $H$  en fonction du contexte. Le contexte devrait préciser si nous utilisons  $\omega$  ou  $z = e^{-i\omega}$  notation.

- Il se trouve que des nombreuses propriétés intéressantes de  $\varphi$  sont codées dans  $H(\omega)$ . Par exemple, le degré de polynôme  $H(z)$  est fini alors le support de  $\varphi(t)$  est aussi fini comme on va voir dans le théorème suivant.

**Théorème 39** *Supposons que la fonction  $\varphi(t)$  a un support compact et engendre une analyse multirésolution. Alors le support de  $\varphi(t)$  est  $[0, N]$  pour certains entiers  $N \geq 1$ , si est seulement si,  $H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^N h_k z^k$ .*

**Preuve.** Rappelons d'abord que la forme de  $H(z)$  montre que l'équation de dilatation pour  $\varphi(t)$  est

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^N h_k \varphi(2t - k).$$

(?  $\Leftarrow$ ) Soit  $H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k z^k$ , et soit  $[A, B]$  le support compact de  $\varphi(t)$ . Supposons pour la contradiction que  $B > N$ , et considérons  $\varphi(y)$  pour  $\frac{N+B}{2} < y < B$ . Pour  $k \leq N$  on a  $2y - k > \frac{2(N+B)}{2} - k > (N+B) - N = B$ , alors  $\varphi(2y - k) = 0$  donc  $2y - k \notin [A, B]$  ainsi

$$\varphi(y) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^N h_k \varphi(2y - k) = 0, \tag{1.41}$$

pour tout  $\frac{N+B}{2} < y < B$ , cela implique que le bon point final du compact le soutien de  $\varphi$  est au plus  $\frac{N+B}{2}$ , Cela contredit notre hypothèse  $\overline{\text{supp}(\varphi)} = [A, B]$  avec  $B > N$  donc  $B \leq N$ . de même manière on démontre que  $B \geq N$  et  $A = 0$  d'où  $[A, B] = [0, N]$ .

( $\Rightarrow$ ?) Maintenant on suppose que  $\overline{\text{supp}(\varphi)} = [0, N]$ , on sait que le support de chaque fonction  $\varphi(2t - k)$  est  $\left[\frac{k}{2}, \frac{k+N}{2}\right]$ , d'autre part le support compact de la fonction  $\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=L}^{k=M} h_k \varphi(2t - k)$  c'est  $\left[\frac{L}{2}, \frac{M+N}{2}\right]$ , si on pose  $[0, N] = \left[\frac{L}{2}, \frac{M+N}{2}\right]$  c'est à dire  $0 = \frac{L}{2}$  et  $N = \frac{M+N}{2}$  donc  $L = 0$  et  $M = N$ , d'où le symbole de  $\varphi(t)$  doit être  $H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^N h_k z^k$ . ■

**Exemple 40** (*Support de Haar*)

Rappelons que l'équation de dilatation pour la multirésolution de Haar est définie par :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_{1,0}(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\varphi_{1,1}(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1) \\ &= \sqrt{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2t-1) \right],\end{aligned}$$

donc  $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^1 h_k e^{-ik\omega}$  c'est-à-dire :

$$H(\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega}) \quad \text{ou} \quad H(z) = \frac{1+z}{2}, \quad (1.42)$$

d'après le théorème 40 on déduit que le support de la fonction d'échelle de Haar c'est  $[0, 1]$ .

Dans la proposition suivante on va donner les propriétés de la fonction  $\widehat{\varphi}$  et le symbole  $H(\omega)$ .

**Proposition 41** *Supposons que  $\varphi(t)$  est une fonction d'échelle génère une analyse multirésolution  $\{V_j\}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , alors les propriétés suivantes sont vraies :*

(a)  $\|\widehat{\varphi}\| = 1$

(b)  $\widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

(c)  $H(0) = 1$

(d)  $H(\omega)$  est périodique et de période  $2\pi$  c'est à dire  $H(\omega + 2\pi n) = H(\omega)$  pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Preuve.** (a) On a  $\|\widehat{\varphi}\| = \|\varphi\|$  d'autre part, de la proposition 3 on a  $\|\varphi\| = 1$  donc  $\|\widehat{\varphi}\| = 1$ .



(b) D'après la définition de la transformée de Fourier on a :

$$\widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-i \cdot 0 \cdot t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

car de la convention 1 on a :  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = 1$ .

Pour démontrer (c) On pose  $\omega = 0$  dans (1.38) on trouve  $\widehat{\varphi}(0) = H(0) \widehat{\varphi}(0)$  c'est à dire  $H(0) = 1$ .

Finalement reste à démontrer (d) : On a  $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$  donc

$$\begin{aligned} H(\omega + 2\pi n) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-i(\omega + 2\pi n)k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-i\omega k - 2\pi n k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-i\omega k} e^{-2\pi n k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-i\omega k} \\ &= H(\omega). \end{aligned}$$

■

### 1.9.2 La fonction de stabilité.

**Définition 42** On dit que  $\mathcal{A}(\omega)$  est une fonction de stabilité si elle vérifiée l'inégalité de stabilité suivante  $0 < A \leq \mathcal{A}(\omega) \leq B < \infty$ , où  $A$  et  $B$  sont des nombres réels strictement positifs.

Nous dérivons maintenant une condition remarquable qui nous permet de réaffirmer l'orthogonalité de  $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  en termes de  $\widehat{\varphi}(\omega)$ . Pour ce faire, nous considérons la fonction de stabilité

$$\mathcal{A}(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + 2\pi l)|^2, \quad (1.43)$$

nous pouvons montrer que  $\mathcal{A}(\omega)$  est une fonction périodique de période  $2\pi$ . Cette fonction apparaît fréquemment dans le développement de la théorie des ondelettes.

Dans l'exemple suivant on va étudier la fonction  $\mathcal{A}(\omega)$  dans le cas où  $\varphi(t) = \Pi(t)$  fonction d'échelle de Haar.

**Exemple 43** On considère  $\mathcal{A}(\omega)$  pour la fonction d'échelle de Haar  $\varphi(t) = \Pi(t)$ . on a  $\widehat{\Pi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i\omega}{2}} \left( \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}} \right)$  (cf. proposition 62), d'autre part on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\omega) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + 2\pi l)|^2 \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\Pi}(\omega + 2\pi l)|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| e^{-\frac{i(\omega+2\pi l)}{2}} \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega+2\pi l}{2}\right)}{\frac{\omega+2\pi l}{2}} \right| \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega+2\pi l}{2}\right)}{\frac{\omega+2\pi l}{2}} \right|^2. \end{aligned}$$

Pour voir le comportement des sommes partielles  $\sum_{l=-M}^M |\widehat{\varphi}(\omega + 2\pi l)|^2$  on va représenter quelques cas, par exemple pour  $M = 2, 3, 4$ . (Fig14).

Cette figure montre que les sommes partielles convergent à une constante, c'est-à-dire ;  $\mathcal{A}(\omega) \approx 0.16$  pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ . Nous verrons dans le théorème suivant que cela est vrai pour toute fonction d'échelle et que le valeur constante exacte  $c \approx 0.16$ .

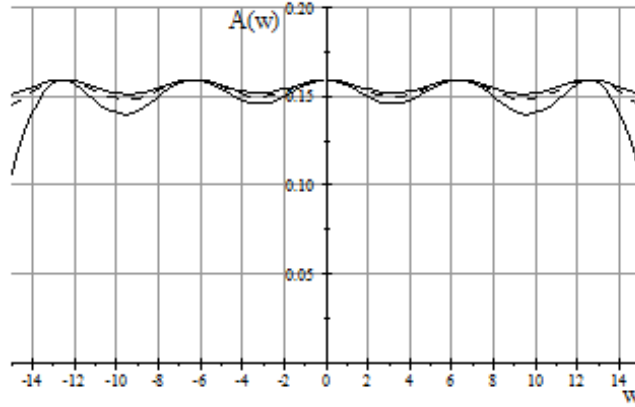


Fig 14 :  $M = 2$  fine,  $M = 3$  discontinue,  $M = 4$  gras.

**Théorème 44** *Supposons que  $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , alors l'ensemble  $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormal si et seulement si  $\mathcal{A}(\omega)$  est une fonction constante*

$$\mathcal{A}(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}, \quad (1.44)$$

pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ .

**Preuve.** Supposons que  $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormal et démontrons que  $\mathcal{A}(\omega) = \frac{1}{2\pi}$ . Rappelons que  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \overline{\varphi(t - k)} dt = \delta_{0,k}$  car  $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est un ensemble orthonormal donc

$$\begin{aligned} \delta_{0,k} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \overline{\varphi(t - k)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\omega) e^{i\omega k} \overline{\widehat{\varphi}(\omega)} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 e^{i\omega k} d\omega. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Maintenant nous divisons  $\mathbb{R}$  en une union d'intervalles de longueur  $2\pi$  c'est à dire

$$\mathbb{R} = \dots \cup [-4\pi, -2\pi] \cup [-2\pi, 0] \cup [0, 2\pi] \cup [2\pi, 4\pi] \cup \dots$$

Donc (1.45) devienne comme suite

$$\begin{aligned} \delta_{0,k} &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 e^{i\omega k} d\omega \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 e^{i\omega k} d\omega, \end{aligned} \quad (1.46)$$

on pose  $u = \omega - 2\pi l$  dans chaque intégral on obtient

$$\begin{aligned} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 e^{i\omega k} d\omega &= \int_0^{2\pi} |\widehat{\varphi}(u + 2\pi l)|^2 e^{iuk} (e^{2\pi l})^k du \\ &= \int_0^{2\pi} |\widehat{\varphi}(u + 2\pi l)|^2 e^{iuk} du, \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\omega)|^2 e^{i\omega k} d\omega = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} |\widehat{\varphi}(t + 2\pi l)|^2 e^{itk} dt.$$

Nous inversons l'ordre de la somme infinie et de l'intégration ici (Y. Meyer (31)) et utilisons (1.45) pour obtenir

$$\int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(t + 2\pi l)|^2 e^{itk} dt = \delta_{0,k}, \quad (1.47)$$

si on pose  $k = 0$  dans (1.47) on trouve

$$\int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(t + 2\pi l)|^2 dt = 1. \quad (1.48)$$

Ceci est cohérent avec ce que nous souhaitons prouver, mais notre argument ne montre pas encore que  $\mathcal{A}(\omega)$  est une fonction constante. Pour compléter l'argument nous notons que (1.47) implique que  $\mathcal{A}(t)$  peut être vu comme une fonction  $2\pi$ -périodique orthogonale à

tous fonctions exponentielles complexes  $e^{ith}$  pour tous les entiers  $k \neq 0$ , nous pouvons donc voir que  $\mathcal{A}(t) = c$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Pour définir  $c$  on reporte  $\mathcal{A}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(t + 2\pi l)|^2 = c$  dans (1.48) on trouve

$$\int_0^{2\pi} c dt = 1 \implies c = \frac{1}{2\pi}.$$

■

D'après la proposition 41 (b), nous savons que  $\widehat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , dans le corollaire suivant on va déterminer les valeurs de  $\widehat{\varphi}(2\pi l)$  pour tout entier  $l \neq 0$ .

**Corollaire 45** *Soit  $\varphi(t)$  une fonction d'échelle engendre une analyse multirésolution  $\{V_j\}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , alors  $\widehat{\varphi}(2\pi l) = 0$  pour tout  $l \neq 0$ .*

**Preuve.** d'après le théorème 44 on a :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi},$$

on peut écrire cette relation sous la forme

$$|\widehat{\varphi}(\omega)|^2 + \sum_{l \neq 0} |\widehat{\varphi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}.$$

Pour  $\omega = 0$ , on trouve

$$|\widehat{\varphi}(0)|^2 + \sum_{l \neq 0} |\widehat{\varphi}(2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi},$$

mais on sait de la proposition 41 (b) que  $|\widehat{\varphi}(0)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} + \sum_{l \neq 0} |\widehat{\varphi}(2\pi l)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \implies \sum_{l \neq 0} |\widehat{\varphi}(2\pi l)|^2 = 0 \\ &\implies |\widehat{\varphi}(2\pi l)| = 0 \text{ pour tout } l \neq 0, \end{aligned}$$

c'est à dire :  $\widehat{\varphi}(2\pi l) = 0$  pour tout  $l \neq 0$ . ■

Une autre conséquence du théorème 44 est que nous pouvons écrire n'importe quelle constante comme une somme de  $\varphi(t-k)$  termes, pour toute fonction d'échelle  $\varphi(t)$ . Ceci est une propriété d'approximation utile pour les fonctions d'échelle.

**Proposition 46** *Supposons que  $\varphi(t)$  une fonction d'échelle engendre une analyse multi-résolution  $\{V_j\}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , alors  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(t-k) = 1$ .*

**Preuve.** On pose

$$F(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(t-k),$$

on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ;

$$\begin{aligned} F(t+1) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(t+1-k) \\ &= \sum_{(k-1) \in \mathbb{Z}} \varphi(t-(k-1)) \\ &= \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \varphi(t-k'), \quad k' = k-1 \\ &= F(t), \end{aligned}$$

donc  $F$  est une fonction périodique de période 1, on pourra la représentée comme une série de Fourier dans l'espace  $L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$ , on effet :

On a :

$$F(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{2\pi i m t},$$

où

$$c_m = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(t) e^{-2\pi i m t} dt,$$

on effectuons le changement de variable suivant  $u = t + \frac{1}{2}$  on obtient

$$c_m = \int_0^1 F\left(u - \frac{1}{2}\right) e^{-2\pi i m u} e^{\pi i m} du = (-1)^m \int_0^1 F\left(u - \frac{1}{2}\right) e^{-2\pi i m u} du,$$

mais

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(2\pi m) e^{i2\pi mu} du,$$

donc

$$\begin{aligned} F\left(u - \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(2\pi m) e^{i2\pi mu} e^{-i\pi m} du \\ &= (-1)^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{F}(2\pi m) e^{i2\pi mu} du \\ &= (-1)^m F(u), \end{aligned}$$

d'où la formule de  $c_m$  devienne comme suite

$$c_m = \int_0^1 F(u) e^{-2\pi imu} du.$$

On utilise la formule de la fonction  $F$  on trouve que

$$\begin{aligned} c_m &= \int_0^1 F(u) e^{-2\pi imu} du = \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(u - k) e^{-2\pi imu} du \\ \implies c_m &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \varphi(u - k) e^{-2\pi imu} du, \end{aligned}$$

on pose  $v = u - k$  on obtient

$$c_m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-k}^{1-k} \varphi(v) e^{-2\pi imv} dv = \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) e^{-2\pi imv} dv,$$

maintenant on utilise la transformé de Fourier de la fonction  $\varphi$  on trouve

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(2\pi m) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(v) e^{-2\pi imv} dv \\ \implies \widehat{\varphi}(2\pi m) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c_m \\ \implies c_m &= \sqrt{2\pi} \widehat{\varphi}(2\pi m), \end{aligned}$$

mais d'après la proposition 41 et le corollaire 45 on sait que

$$\widehat{\varphi}(2\pi m) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & \text{si } m = 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc

$$c_m = \delta_{0,m},$$

on reporte maintenant  $c_m$  dans la série de Fourier pour  $F(t)$  on trouve :

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{2\pi i m t} = c_0 + \sum_{m \neq 0} c_m e^{2\pi i m t} \\ \implies F(t) &= 1. \end{aligned}$$

Finalement :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(t - k) = 1.$$

■

*1.9.3 L'orthogonalité et le symbole  $\varphi(t)$ .* Selon le théorème 44, la propriété clé de  $\varphi(t)$  pour ce résultat était l'orthogonalité des fonctions  $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ . Nous n'avons pas besoin le faite que  $\varphi(t)$  satisfait l'équation de dilatation (1.6). Si nous voulons une condition impliquant le symbole  $H(\omega)$  caractérise l'orthogonalité de  $\varphi(t)$  et  $\varphi(t - k)$ , et le fait que  $\varphi(t)$  satisfait une équation de dilatation, alors nous avons sûrement besoin d'utiliser la version de fréquence-domaine de l'équation de dilatation (1.38) avec le théorème que nous venons de démontrer. Voici la condition souhaitée, ce qui sera très utile pour la construction d'autres fonctions d'échelle orthogonales et ondelettes.

**Théorème 47** *Supposons que  $\varphi(t)$  une fonction d'échelle engendre une analyse multirésolution  $\{V_j\}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , alors  $H(\omega)$  le symbole de  $\varphi(t)$  vérifié*

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1. \tag{1.49}$$



pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ .

**Preuve.** On utilise les relation (1.38) et la définition 42 de  $\mathcal{A}(\omega)$  et en remplace chaque  $\widehat{\varphi}(\omega + 2\pi l)$  par  $|H(\frac{\omega+2\pi l}{2})| |\widehat{\varphi}(\frac{\omega+2\pi l}{2})|$  on obtient :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right) \right|^2 \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega + 2\pi l}{2}\right) \right|^2 = \frac{1}{2\pi},$$

pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ . Maintenant on sépare cette somme a une somme des indices pairs et une somme des indices impairs on trouve :

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi(2k)\right) \right|^2 \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi(2k)\right) \right|^2 + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi(2j+1)\right) \right|^2 \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi(2j+1)\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}, \end{aligned} \tag{1.50}$$

dans la proposition 41 on a démontré que  $H(\omega)$  est périodique de période  $2\pi$ , donc  $H(\frac{\omega}{2} + \pi(2k)) = H(\frac{\omega}{2})$  et  $H(\frac{\omega}{2} + \pi(2j+1)) = H(\frac{\omega}{2} + \pi)$ , alors (1.50) devienne comme suite

$$\left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \right|^2 + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega + 2\pi}{2} + 2\pi j\right) \right|^2 = \frac{1}{2\pi},$$

on applique le théorème 44 on obtient :

$$\left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \cdot \frac{1}{2\pi} + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi},$$

remplaçant  $\frac{\omega}{2}$  par  $\omega$  et multipliant par  $2\pi$  on trouve :

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1.$$

■

• Le symbole  $H(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega}}{2}$  de la fonction d'échelle de Haar  $\varphi(t) = \square(t)$  vérifie (1.49).

• Nous avons vu que la fonction d'échelle de Haar avait un symbole  $H(z) = \frac{1+z}{2}$ . Il s'avère que chaque fonction d'échelle aura  $1+z$  comme facteur de son symbole  $H(z)$  comme on le voit dans le corollaire ci-dessous.

**Corollaire 48** *Supposons que  $\varphi(t)$  une fonction d'échelle engendre une analyse multirésolution  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , pour  $z = e^{-i\omega}$  le symbole  $H(z)$  de  $\varphi(t)$  satisfait*

$$|H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = 1, \quad (1.51)$$

et  $H(z)$  a le facteur  $1+z$ .

**Preuve.** On a :

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1,$$

d'autre part on a

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^N h_k z^k \text{ et } H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega},$$

donc

$$\begin{aligned} H(\omega + \pi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik(\omega + \pi)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega - ik\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega} e^{-ik\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega} (-1)^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k (-e^{-i\omega})^k = H(-z); \quad z = e^{-i\omega}, \end{aligned}$$

on reporte  $H(\omega)$  et  $H(\omega + \pi)$  dans la relation  $|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1$  on trouve que

$$|H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = 1.$$

Reste à démontrer que  $-1$  est une racine de  $H(z)$ . On a

$$\begin{aligned} H(-1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^N h_k (-1)^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=2l} h_k - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=2l+1} h_k = 0, \end{aligned}$$

donc  $-1$  est une racine de  $H(z)$  d'où  $H(z)$  a le facteur  $1+z$ . ■

- Par exemple : on considère le symbole de Haar  $H(z) = \frac{1+z}{2}$ ,  $z = e^{-i\omega}$ . Il est facile de vérifier que  $|H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = 1$ , et de plus il est clair que  $H(z)$  a le facteur  $1+z$ .

- Le théorème 47 donne une condition nécessaire pour les fonctions d'échelle, on peut trouver aussi une condition suffisante. La suffisance est souhaitable, car cela signifierait que trouver des fonctions d'échelle nouvelles et intéressantes peut être fait en construisant des symboles  $H(\omega)$  satisfaisant (1.49), Il s'avère que prouver l'inverse du théorème 47 est assez difficile et nécessite une autre condition sur  $H(\omega)$ , pour cela on a le théorème suivant.

**Théorème 49** (13) Soit  $H(\omega)$  un symbole de degré fini satisfait (1.49),  $H(0) = 1$  et  $H(z)$  a la forme  $H(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^N S(z)$ , où  $S(z)$  satisfait :

$$\max_{|z|=1} |S(z)| \leq 2^{N-1}, \quad (1.52)$$

alors, il existe une fonction d'échelle  $\varphi(t)$  génère une analyse multirésolution  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  qui a  $H(\omega)$  comme symbole.

1.9.4 Le symbole  $G(\omega)$  de la fonction ondelette. Selon la définition 38, nous définissons le symbole de la fonction d'ondelette  $\psi(t)$  comme suit.

**Définition 50** Soit  $\psi(t)$  une fonction d'ondelette satisfaisant la condition de dilatation, on définit le symbole  $G(\omega)$  à  $\psi(t)$  par :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-ik\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} e^{-ik\omega}, \quad (1.53)$$

si on pose  $z = e^{-i\omega}$ , le symbole devien

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} z^k. \quad (1.54)$$

Dans la proposition suivante on donne quelques propriétés du symbole  $G(\omega)$ .

**Proposition 51** *Supposons que  $\varphi(t)$  une fonction d'échelle engendre une analyse multi-résolution  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , et soit  $\psi(t)$  la fonction d'ondelette définie dans (1.16), alors les propriétés suivantes sont vraies*

- (a)  $\widehat{\psi}(t) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$  pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$
- (b)  $G(\omega) = -e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)}$
- (c)  $G(0) = 0$
- (d) Pour  $z = e^{-i\omega}$ , le polynôme  $G(z)$  doit avoir le facteur  $1 - z$ .

**Preuve.** (a) On a :  $\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2t - k)$ , on effectue la transformée de Fourier aux deux cotés on trouve :

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{\frac{-ik\omega}{2}} \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{\frac{-ik\omega}{2}} \right] \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= G\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega} \implies H(\omega + \pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik(\omega + \pi)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega} \cdot e^{-ik\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_k e^{-ik\omega} \\ \implies \overline{H(\omega + \pi)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_k e^{ik\omega}, \end{aligned}$$

on pose  $k = 1 - l$  on obtient :

$$\begin{aligned}
\overline{H(\omega + \pi)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^{1-l} h_{1-l} e^{i(1-l)\omega} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l h_{1-l} e^{i\omega} e^{-il\omega} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l h_{1-l} e^{-il\omega} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l e^{-il\omega} \\
&= -e^{i\omega} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_l e^{-il\omega} \right] = -e^{i\omega} G(\omega) \\
\Rightarrow G(\omega) &= -e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)}.
\end{aligned}$$

(c) On pose  $\omega = 0$  dans de la partie (b) on trouve  $G(0) = H(\pi)$ , nous avons  $H(\pi) = 0$  donc  $G(0) = 0$ .

(d) On sait que  $G(0) = 0$  de la partie (c), mais  $\omega = 0$  implique que  $z = 1$ , donc en termes de  $z$  nous avons  $G(1) = 0$ , ce qui signifie que  $(1 - z)$  doit être un facteur de  $G(z)$ .

■

Dans la proposition 51 (c), nous avons appris que  $G(0) = 0$ , Cette identité a des conséquences non seulement sur le filtre d'ondelettes  $g$ , mais aussi sur le filtre d'échelle  $h$ .

**Proposition 52** Soit  $\varphi(t)$  une fonction d'échelle engendre une analyse multirésolution  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , et soit  $\psi(t)$  la fonction d'ondelette définie dans (1.16), pour le filtre d'échelle  $h$  et le filtre d'ondelette  $g$ , on a :

$$(i) \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} = 0$$

$$(ii) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Preuve.** (i) D'après la proposition 51 on a  $G(0) = 0$  c'est à dire  $\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-i \cdot 0 \cdot k} = 0$  implique

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k = 0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k}.$$

(ii) Montrons d'abord  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , on a :

$$\sqrt{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \text{ et } 0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k}, \quad (1.55)$$

donc

$$\sqrt{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k + \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k},$$

on pose  $l = 1 - k$  on obtient

$$\sqrt{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k + \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^{1-l} h_l = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k - \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l h_l.$$

Revenons à l'index  $k$  dans la deuxième somme c'est à dire

$$\sqrt{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k - \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k (1 - (-1)^k),$$

maintenant, les termes pairs de la série ci-dessus sont nuls et les termes à indice impair sont  $2h_k$ , donc  $\sqrt{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2h_{2k+1}$  où  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Reste à démontrer que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , on a :

$$\begin{aligned} \left( \sqrt{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \text{ et } 0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} \right) &\implies \sqrt{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k - \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} \\ &\implies \sqrt{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k - \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^{1-l} h_l \quad (l = 1 - k) \\ &\implies \sqrt{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k + \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^l h_l \\ &\implies \sqrt{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k + \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_k \\ &\implies \sqrt{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k (1 + (-1)^k), \end{aligned}$$

on observe que, les termes impairs de la série ci-dessus sont nuls et les termes à indice pair sont  $2h_k$ , donc  $\sqrt{2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2h_{2k}$  où  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . ■

Nous avons vu du théorème 47 que le symbole  $H(\omega)$  satisfait la relation

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1. \quad (1.56)$$

L'identité est vraie car les fonctions  $\{\phi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont orthonormales et  $\phi(t)$  satisfait l'équation de dilatation (1.2), comme  $\psi(t)$  satisfait également une équation de dilatation et l'ensemble  $\{\psi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormé, il est naturel de voir si le symbole  $G(\omega)$  satisfait également une relation comme (1.56), pour cela on a d'abord l'exemple suivant :

**Exemple 53** Trouver  $G(\omega)$ , pour l'analyse multirésolution de Haar, et vérifier que :

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1.$$

**Solution 54** Cherchons  $G(\omega)$ , de la proposition 51 on a :

$$\begin{aligned} G(\omega) &= -e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} \\ &= -e^{-i\omega} \left( \frac{1}{2} (1 + e^{-(\omega + \pi)}) \right) \\ &= -e^{-i\omega} \frac{1}{2} (1 - e^{i\omega}) \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-i\omega}), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 &= G(\omega) \overline{G(\omega)} + G(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} \\ &= \frac{1}{4} (1 - e^{-i\omega}) (1 - e^{i\omega}) + \frac{1}{4} (1 - e^{-i(\omega + \pi)}) (1 - e^{i(\omega + \pi)}) \\ &= \frac{1}{4} (2 - e^{-i\omega} - e^{i\omega}) + \frac{1}{4} (2 + e^{-i\omega} + e^{i\omega}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Nous savons également que  $\varphi(t)$  et  $\psi(t)$  sont orthogonales, donc une équation reliant les polynômes  $H(\omega)$  et  $G(\omega)$  vaut la peine d'être recherchée, nous utilisons (1.42) et après

quelques calculs, nous trouvons que

$$\begin{aligned} & H(\omega) \overline{G(\omega)} + H(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} \\ &= \frac{1}{4} (1 + e^{-i\omega}) (1 - e^{i\omega}) + \frac{1}{4} (1 + e^{-i(\omega+\pi)}) (1 - e^{i(\omega+\pi)}) = 0. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Il s'avère que les équations que nous avons étudiées dans l'exemple 53 sont valables en général pour toute analyse multirésolution, comme indiqué dans le théorème suivant.

**Théorème 55** *Supposons que  $\varphi(t)$  est une fonction d'échelle générant une analyse multirésolution  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  et la fonction d'ondelette  $\psi(t)$  défini par (1.16), alors :*

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1, \tag{1.58}$$

$$H(\omega) \overline{G(\omega)} + H(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} = 0. \tag{1.59}$$

Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ .

**Preuve.** Prouvons que :

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1,$$

de la partie (b) de la proposition 51 on a :

$$G(\omega) = -e^{i\omega} \overline{H(\omega + \pi)},$$

donc

$$\begin{aligned} |G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 &= \left| -e^{i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} \right|^2 + \left| -e^{i(\omega+\pi)} \overline{H(\omega + 2\pi)} \right|^2 \\ &= \left| -e^{i\omega} \right| \left| \overline{H(\omega + \pi)} \right|^2 + \left| -e^{i(\omega+\pi)} \right| \left| \overline{H(\omega)} \right|^2 \\ &= \left| \overline{H(\omega + \pi)} \right|^2 + \left| \overline{H(\omega)} \right|^2 \\ &= |H(\omega + \pi)|^2 + |H(\omega)|^2 = 1. \text{ (Théorème 47)} \end{aligned}$$



Reste à démontrer (1.49), on a :

$$\begin{aligned} H(\omega) \overline{G(\omega)} + H(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} &= -H(\omega) e^{i\omega} \overline{\overline{H(\omega + \pi)}} - H(\omega + \pi) e^{i(\omega + \pi)} \overline{\overline{H(\omega + 2\pi)}} \\ &= -e^{i\omega} H(\omega) H(\omega + \pi) + e^{i\omega} H(\omega + \pi) H(\omega + 2\pi), \end{aligned}$$

mais  $H(\omega + 2\pi) = H(\omega)$  car  $H(\omega)$  est périodique de période  $2\pi$ , donc

$$-e^{i\omega} H(\omega) H(\omega + \pi) + e^{i\omega} H(\omega + \pi) H(\omega + 2\pi) = 0,$$

d'où,  $H(\omega) \overline{G(\omega)} + H(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} = 0$ . ■

Une propriété importante sur les fonctions ondelettes apparaît dans la proposition suivante.

**Proposition 56** *Soit  $\psi(t)$  une fonction d'ondelette, alors*

$$\widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0. \quad (1.60)$$

**Preuve.** De la proposition 51 (a) et (c) nous savons que  $\widehat{\psi}(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$  et  $G(0) = 0$ , donc :

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(0) &= G(0) \widehat{\varphi}(0) \implies \widehat{\psi}(0) = 0 \\ \implies &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi(t) e^{-i.t.0} dt = 0 \\ \implies &\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0. \end{aligned}$$

■

La proposition 56 indique que le graphe de  $\psi(t)$  doit varier également au-dessus et au-dessous l'axe  $t$ , grosso modo, le graphique de l'ondelette  $\psi(t)$  aura un aspect ondulé. Puisque la plupart des fonctions d'ondelettes ont un support court où le terme «wavelet» a été adopté.

### 1.10 Les B-splines

Nous présentons dans cette section une introduction aux B-splines. Ces fonctions sont polynômes par morceaux qui jouent un rôle important dans le domaine de la théorie d'approximation.

**Définition 57** (*B-spline*) La B-spline d'ordre 1 est la fonction  $\beta_0(t)$  définie comme suit  $\beta_0(t) = \Pi(t)$ , c'est-à-dire :

$$\beta_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La B-spline d'ordre  $n + 1$  est définie récursivement par :

$$\beta_n(t) = (\beta_{n-1} * \Pi)(t). \quad (1.61)$$

Où  $*$  le produit de convolution entre deux fonctions réelles ou complexes  $f$  et  $g$  noté  $f * g$  et défini par :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

**Exemple 58** 1) La B-spline d'ordre 2 est la fonction

$$\beta_1(t) = (\beta_0 * \Pi)(t) = (\Pi * \Pi)(t),$$

après un calcul simple on trouve que :

$$\beta_1(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{ailleurs,} \end{cases} = \wedge(t) \text{ la fonction triangle.}$$

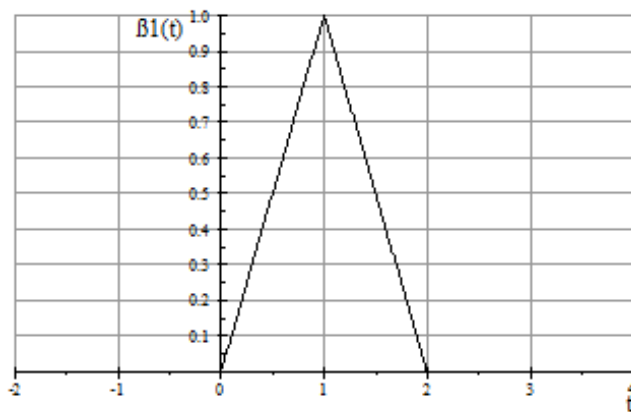


Fig 15 : La  $B$ -spline  $\beta_1(t)$ .

2) Il est facile de vérifier que la  $B$ -spline  $\beta_2(t)$  est définie par :

$$\beta_2(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{-2t^2 + 6t - 3}{2}, & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ \frac{t^2 - 6t + 9}{2}, & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

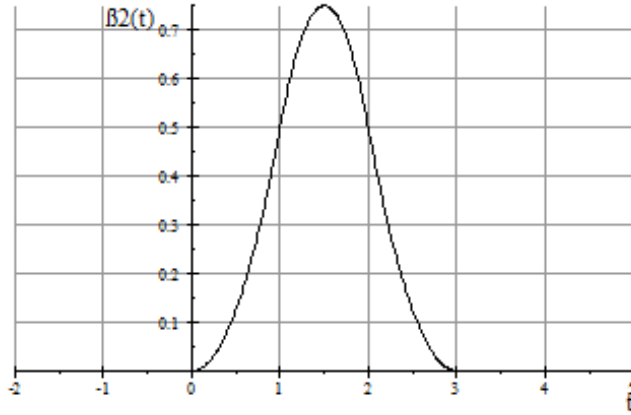


Fig 16 : La  $B$ -spline  $\beta_2(t)$ .

1.10.1 *Les propriétés des  $B$ -splines.* Les  $B$ -splines satisfont plusieurs propriétés et nous les énonçons dans la suite. La première propriété note que  $\beta_n(t)$  est une fonction polynomiale par morceaux de degré  $n$ .

**Proposition 59** *La  $B$ -spline  $\beta_n(t)$  est une fonction polynomiale par morceaux de degré  $n$ .*

**Preuve.** La démonstration sera fait par récurrence, pour  $n = 0$  on a :  $\beta_0(t) = \Pi(t)$  est une fonction polynomiale par morceaux.

Supposons que  $\beta_n(t)$  est polynomiale par morceaux de degré  $n$  et démontrons que  $\beta_{n+1}(t)$  est polynomiale par morceaux de degré  $n + 1$ , d'après (1.61) on a :

$$\beta_{n+1}(t) = \int_{t-1}^t \beta_n(u) du, \quad (1.62)$$

donc pour obtenir  $\beta_{n+1}(t)$ , nous intégrons un polynôme par morceaux de degré  $n$ . La primitive résultante est un polynôme par morceaux de degré  $n + 1$ . ■

**Proposition 60** (*Support de  $B$ -spline*) *Pour tout  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  on a  $\beta_n(t) \geq 0$  et  $\overline{\text{supp}(\beta_n)} = [0, n + 1]$ . De plus  $\beta_n(t) > 0$  pour tout  $t \in ]0, n + 1[$ .*

**Preuve.** Par récurrence, pour  $n = 0$ ,  $\beta_0(t) = \square(t)$  cette fonction est positive et  $\overline{\text{supp}(\beta_0)} = [0, 1]$ . Notons aussi que  $\beta_0(t) = 1 > 0$  pour  $0 < t < 1$ .

Supposons que  $\beta_n(t) \geq 0$ ,  $\beta_n(t) > 0$  pour  $0 < t < n + 1$  et  $\overline{\text{supp}(\beta_n)} = [0, n + 1]$  et démontrons que  $\beta_{n+1}(t) \geq 0$ ,  $\beta_{n+1}(t) > 0$  pour  $0 < t < n + 2$  et  $\overline{\text{supp}(\beta_{n+1})} = [0, n + 2]$ . Comme  $\beta_n(t) \geq 0$  et d'après (1.62) il résulte que  $\beta_{n+1}(t) \geq 0$  d'autre part on a :

$$\begin{aligned}\beta_{n+1}(t) &= (\beta_n * \square)(t) = \int_0^1 \beta_n(t-u) \square(u) du \\ &= \int_0^1 \beta_n(t-u) du.\end{aligned}\tag{1.63}$$

Donc  $\beta_n(t-u) \geq 0$  pour  $0 \leq t-u \leq n+1$  c'est-à-dire  $u \leq t \leq u+n+1$  pour tout  $0 \leq u \leq 1$ . L'intervalle où l'intégrande (1.63) sera positive c'est  $0 \leq t \leq n+2$ , hors cette intervalle  $\beta_{n+1}(t) = 0$ , donc  $\overline{\text{supp}(\beta_{n+1})} = [0, n+2]$  et de plus  $\beta_{n+1}(t)$  strictement positive sur l'intérieur de l'intervalle  $[0, n+2]$ . ■

Les  $B$ -splines sont des fonctions symétriques comme on se voit dans la proposition suivante.

**Proposition 61** *Soit  $n$  un entier positif, alors la  $B$ -spline  $\beta_n(t)$  est symétrique par rapport à la droite  $t = \frac{n+1}{2}$ , c'est-à-dire  $\beta_n(t) = \beta_n(n+1-t)$ .*

**Preuve.** Par récurrence, pour  $n = 0$  on a  $\beta_0(t) = \square(t)$  mais  $\beta_0(t) = \beta_0(1-t)$  donc  $\beta_0(t)$  symétrique par rapport à  $t = \frac{1}{2}$ .

Supposons que  $\beta_n(t)$  est symétrique par rapport à la droite  $t = \frac{n+1}{2}$  et démontrons que  $\beta_{n+1}(t)$  est symétrique par rapport à la droite  $t = \frac{n+2}{2}$ , c'est-à-dire :

$$\beta_{n+1}(t) = \beta_{n+1}(n+2-t).$$

On a :

$$\beta_{n+1}(n+2-t) = \int_{n+1-t}^{n+2-t} \beta_n(u) du,\tag{1.64}$$

on pose dans (1.64)  $v = n + 1 - u$  on trouve

$$\beta_{n+1}(n+2-t) = - \int_t^{t-1} \beta_n(n+1-v) dv = \int_{t-1}^t \beta_n(n+1-v) dv,$$

mais  $\beta_n(n+1-v) = \beta_n(v)$  donc

$$\beta_{n+1}(n+2-t) = \int_{t-1}^t \beta_n(v) dv = \beta_{n+1}(t).$$

■

La transformée de Fourier de la  $B$ -spline est donnée dans la proposition suivante.

**Proposition 62** *La transformée de Fourier de la  $B$ -spline  $\beta_n(t)$  est la fonction  $\widehat{\beta}_n(\omega)$  où :*

$$\widehat{\beta}_n(\omega) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\omega(n+1)}{2}} \operatorname{sinc}^{n+1}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (1.65)$$

Où  $\operatorname{sinc}(x)$  est la fonction sinus cardinal définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}; \\ \text{ou} \\ \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}. \end{array} \right.$$

**Preuve.** On va trouver d'abord  $\widehat{\beta}_0(\omega)$ ,  $\widehat{\beta}_1(\omega)$  ensuite en déduire la valeur de  $\widehat{\beta}_n(\omega)$ .

On a

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_0(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \beta_0(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{-i}{\omega\sqrt{2\pi}} (1 - e^{-i\omega}) \\
&= \frac{-i}{\omega\sqrt{2\pi}} (1 - \cos \omega + i \sin \omega) \\
&= \frac{-i}{\omega\sqrt{2\pi}} \left( 2 \sin^2 \left( \frac{\omega}{2} \right) + 2i \cos^2 \left( \frac{\omega}{2} \right) \right) \\
&= \frac{-i}{\omega\sqrt{2\pi}} 2 \sin \left( \frac{\omega}{2} \right) \left( \sin \left( \frac{\omega}{2} \right) + i \cos \left( \frac{\omega}{2} \right) \right) \\
&= \frac{-i}{\omega\sqrt{2\pi}} 2 \sin \left( \frac{\omega}{2} \right) \left( \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} \right) \right) \\
&= \frac{-i}{\omega\sqrt{2\pi}} 2 \sin \left( \frac{\omega}{2} \right) e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right)},
\end{aligned}$$

mais  $e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}\right)} = ie^{-i\frac{\omega}{2}}$  donc

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_0(\omega) &= \frac{-i}{\omega\sqrt{2\pi}} 2 \sin \left( \frac{\omega}{2} \right) ie^{-i\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\frac{\omega}{2}} \frac{\sin \left( \frac{\omega}{2} \right)}{\frac{\omega}{2}} \\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\omega}{2}} \operatorname{sinc} \left( \frac{\omega}{2} \right).
\end{aligned}$$

De même manière on trouve que :

$$\widehat{\beta}_1(\omega) = \frac{-1}{\omega^2\sqrt{2\pi}} (1 - e^{-i\omega})^2,$$

d'après un calcul simple on trouve :

$$\widehat{\beta}_1(\omega) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega} \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{\omega}{2} \right).$$

De ce qui précède, on déduit la relation récurrente ci-dessous

$$\widehat{\beta}_n(\omega) = \frac{(-i)^{n+1}}{\omega^{n+1}\sqrt{2\pi}} (1 - e^{-i\omega})^{n+1},$$

on applique les mêmes étapes précédents on trouve que :

$$\widehat{\beta}_n(\omega) = \frac{(-i)^{n+1}}{\omega^{n+1}\sqrt{2\pi}} 2^{n+1} \operatorname{sinc}^{n+1}\left(\frac{\omega}{2}\right) \left(e^{-i\frac{\omega}{2}}\right)^{n+1} i^{n+1},$$

Après simplification on trouve le résultat demandé suivant :

$$\widehat{\beta}_n(\omega) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\omega(n+1)}{2}} \operatorname{sinc}^{n+1}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

■

Pour mieux comprendre les avantages et les problèmes liés à l'utilisation des  $B$ -splines pour l'approximation on considère l'exemple suivant :

**Exemple 63** (*Approximation par les  $B$ -splines*) Dans cet exemple on s'intéresse par l'approximation de la fonction affine par morceaux  $f(t) \in V_0$  suivante par les  $B$ -splines.

$$f(t) = \begin{cases} 3t + 3, & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ 3, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ -2t + 5, & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ t - 1, & \text{si } 2 \leq t \leq 3 \\ -2t + 8, & \text{si } 3 \leq t \leq 4 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Donc on peut écrire  $f$  sous la forme :

$$f(t) = a_{-1}\beta_1(t+1) + a_0\beta_1(t) + a_1\beta_1(t-1) + a_2\beta_1(t-2).$$



Pour les constantes  $a_k$ ,  $k = -1, 0, 1, 2$ . On peut facilement calculer  $a_k$  en utilisant le corollaire 9 et en calculant  $\langle \beta_1(t-k), f(t) \rangle$ , en effet, on multiplie la relation au dessus par  $\beta_1(t-k)$  et en intégrant,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(t) \beta_1(t-k) dt &= a_{-1} \int_{\mathbb{R}} \beta_1(t+1) \beta_1(t-k) dt + a_0 \int_{\mathbb{R}} \beta_1(t) \beta_1(t-k) dt \\ &\quad + a_1 \int_{\mathbb{R}} \beta_1(t-1) \beta_1(t-k) dt + a_2 \int_{\mathbb{R}} \beta_1(t-2) \beta_1(t-k) dt. \end{aligned}$$

Pour  $k = -1, 0, 1, 2$ .

Cette étape donne les quatre équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3}a_{-1} + \frac{1}{6}a_0 = \frac{5}{2} \\ \frac{1}{6}a_{-1} + \frac{2}{3}a_0 + \frac{1}{6}a_1 = \frac{8}{3} \\ \frac{1}{6}a_0 + \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{6}a_2 = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{6}a_1 + \frac{2}{3}a_2 = \frac{3}{2}, \end{array} \right.$$

donc

$$a_{-1} = 3, \quad a_0 = 3, \quad a_1 = 1 \text{ et } a_2 = 2,$$

d'où :

$$f(t) = 3\beta_1(t+1) + 3\beta_1(t) + \beta_1(t-1) + 2\beta_1(t-2).$$

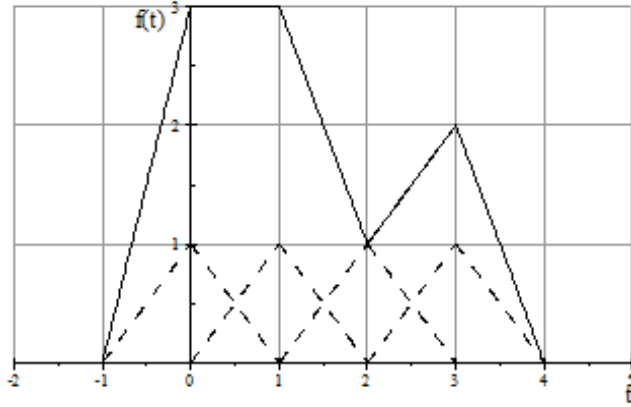


Fig 17 :  $f(t) \in V_0$  et  $\beta_1(t-k)$ ,  $k = -1, 0, 1, 2$ .

### 1.11 Biorthogonale des fonctions d'échelles et ondelettes

Dans cette section, nous construisons une structure biorthogonale appelée analyse multirésolution double qui permet la construction de filtres des fonctions d'échelles symétriques et qui peut incorporer des fonctions splines. Un travail supplémentaire est impliqué dans cette construction. Par exemple, au lieu d'une simple paire de filtres de mise à l'échelle et d'ondelettes  $h$  et  $g$ , la nouvelle construction donne deux paires : une paire de la fonction d'échelle et la fonction ondelettes  $\tilde{h}$ ,  $\tilde{g}$  pour la décomposition et une paire  $h, g$  pour la reconstruction. Au lieu d'une seule fonction d'échelle  $\varphi(t)$  et de la fonction d'ondelettes  $\psi(t)$ , l'analyse multirésolution double nécessite une paire de fonctions d'échelles  $\varphi(t)$  et  $\tilde{\varphi}(t)$  liées par une condition de dualité, et une paire de fonction des ondelettes associées  $\psi(t)$  et  $\tilde{\psi}(t)$ .

Pour illustrations, considérons la  $B$ -spline linéaire  $\beta_1(t)$  (Cf. Exemple 58) et définissons  $\tilde{\varphi}(t)$  par  $\tilde{\varphi}(t) = \beta_1(1+t)$ . Où :

$$\beta_1(1+t) = \begin{cases} 1+t, & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ 1-t, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

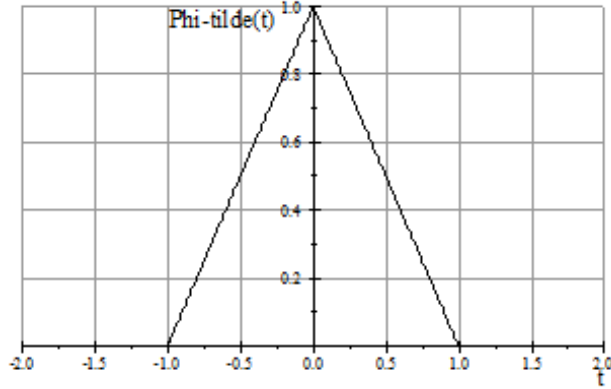


Fig 18 : La fonction  $\tilde{\varphi}(t) = \beta_1(1+t)$ .

**Définition 64** (*Ensemble biorthogonale et espace double*) Soient  $\varphi(t)$  et  $\tilde{\varphi}(t)$  deux fonctions de l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  et définies les espaces

$$V_0 = \text{span} \{ \varphi(t-k) \}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad \tilde{V}_0 = \text{span} \{ \tilde{\varphi}(t-k) \}_{k \in \mathbb{Z}},$$

l'ensemble  $\{ \tilde{\varphi}(t-k) \}_{k \in \mathbb{Z}}$  est biorthogonale à l'ensemble  $\{ \varphi(t-k) \}_{k \in \mathbb{Z}}$  si, pour tout  $m, k \in \mathbb{Z}$  on a :

$$\langle \tilde{\varphi}(t-m), \varphi(t-k) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(t-m) \varphi(t-k) dt = \delta_{m,k}. \quad (1.66)$$

On dit que  $\varphi(t)$  et  $\tilde{\varphi}(t)$  sont *générateurs doubles* et  $V_0$  et  $\tilde{V}_0$  sont des *espaces doubles*.

• L'une des conséquences du double générateur que les ensemble biorthogonaux  $\tilde{\varphi}(t-m)$  et  $\varphi(t-k)$  sont automatiquement linéairement indépendantes.

**Proposition 65** Soient  $\varphi(t)$  et  $\tilde{\varphi}(t)$  double générateurs dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Alors les ensembles biorthogonales  $\{\tilde{\varphi}(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont linéairement indépendantes.

**Preuve.** Soient

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_m \tilde{\varphi}(t-m) = 0 \text{ et } \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(t-k) = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_m \tilde{\varphi}(t-m), \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(t-k) \right\rangle &= 0 \implies \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_m \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \langle \tilde{\varphi}(t-m), \varphi(t-k) \rangle = 0 \\ &\implies \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_m \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{m,k} = 0, \end{aligned}$$

pour  $m = k$  on trouve  $\tilde{c}_m c_k = 0$  donc  $\tilde{c}_m = 0$  et  $c_k = 0$ . ■

Dans la suite on va donner les formules des fonctions  $\tilde{\varphi}_{j,k}(t)$  et  $\varphi_{j,k}(t)$ .

**Définition 66** Supposons que  $\tilde{\varphi}(t)$  et  $\varphi(t)$  sont double générateurs du  $\tilde{V}_0$  et  $V_0$ . Pour tout entiers  $j$  et  $k$ , on définit les fonctions  $\tilde{\varphi}_{j,k}(t)$  et  $\varphi_{j,k}(t)$  comme suit :

$$\tilde{\varphi}_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \tilde{\varphi}(2^j t - k) \text{ et } \varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k). \quad (1.67)$$

**Proposition 67** Supposons que  $j$ ,  $k$  et  $m$  sont des entiers. Alors les fonctions  $\tilde{\varphi}_{j,k}(t)$  et  $\varphi_{j,k}(t)$  sont biorthogonales, c'est-à-dire :

$$\langle \tilde{\varphi}_{j,k}(t), \varphi_{j,m}(t) \rangle = \delta_{m,k}. \quad (1.68)$$



**Théorème 70** (33) Supposons que  $\tilde{\varphi}(t)$  et  $\varphi(t)$  satisfassent les équations de dilatation suivantes :

$$\tilde{\varphi}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_k \tilde{\varphi}(2t - k) \quad \text{et} \quad \varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k). \quad (1.69)$$

Alors, ces fonctions sont des générateurs doubles si, et seulement si, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_l h_{l-2k} = \delta_{k,0}. \quad (1.70)$$

La formule des filtres  $\tilde{h}_k$  sera donnée dans la définition suivante.

**Définition 71** Soit  $n$  un entier positif, on définit le filtre  $\tilde{h}$  de longueur  $n+1$  de la spline par

$$\tilde{h}_k = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}} C_{n+1}^{\frac{n+1}{2}-k}, & k = -\frac{n+1}{2}, \dots, \frac{n+1}{2}, \text{ si } n \text{ impair} \\ \frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}} C_{n+1}^{\frac{n}{2}+k}, & k = -\frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2} + 1, \text{ si } n \text{ pair} \\ 0, & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

où  $C_m^l = \frac{m!}{l!(m-l)!}$ .

**Exemple 72** Trouvez les filtres de spline associés à  $\beta_1(t+1)$ ,  $\beta_2(t+1)$  et  $\beta_3(t+1)$ .

**Solution 73** • Pour  $\beta_1(t+1)$  on a  $n = 1$  impair donc,

$$\tilde{h}_k = \frac{\sqrt{2}}{4} C_2^{1-k}, \quad k = -1, 0, 1.$$

C'est-à-dire

$$\tilde{h} = (\tilde{h}_{-1}, \tilde{h}_0, \tilde{h}_1) = \left( \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

- Pour  $\beta_2(t+1)$ ,  $n = 2$  pair, on a :

$$\tilde{h}_k = \frac{\sqrt{2}}{8} C_3^{1+k}, \quad k = -1, 0, 1, 2.$$

Donc

$$\tilde{h} = (\tilde{h}_{-1}, \tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2) = \left( \frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{3\sqrt{2}}{8}, \frac{3\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{8} \right).$$

- Pour  $\beta_3(t+1)$ ,  $n = 3$  impair,

$$\tilde{h}_k = \frac{\sqrt{2}}{16} C_4^{2-k}, \quad k = -2, -1, 0, 1, 2.$$

Cela veut dire que

$$\tilde{h} = (\tilde{h}_{-2}, \tilde{h}_{-1}, \tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2) = \left( \frac{\sqrt{2}}{16}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{16} \right).$$

**Proposition 74** *Le filtre  $\tilde{h}$  est symétrique c'est-à-dire :*

$$\begin{cases} \tilde{h}_k = \tilde{h}_{-k}, & \text{si } n \text{ impair} \\ \tilde{h}_k = \tilde{h}_{1-k}, & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

**Preuve.** La preuve est facile, il suffit d'utiliser la définition de  $C_m^l$ . ■

Dans la suite, nous présentons la relation entre la condition (1.70) de coefficient du filtre et les symboles de fonction d'échelle  $\tilde{H}(\omega)$  et  $H(\omega)$ .

### 1.11.1 Conditions de biorthogonalité pour les symboles et espaces des ondelettes.

Dans le théorème suivant on va donner la condition du symbole de dualité.

**Théorème 75** (33) *On considère les symboles*

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega} \quad \text{et} \quad \tilde{H}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_k e^{-ik\omega},$$

les symboles satisfaisent :

$$\tilde{H}(\omega) \overline{H(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \overline{H(\omega + \pi)} = 1, \quad (1.71)$$

pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , si est seulement si, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_l h_{l-2k} = \delta_{k,0}. \quad (1.72)$$

**Proposition 76** (Construction  $\tilde{G}(\omega)$  et  $G(\omega)$ ) Supposons  $\tilde{H}(\omega)$  et  $H(\omega)$  satisfaisons(1.71). Si  $\tilde{G}(\omega)$  et  $G(\omega)$  sont donnés par :

$$\tilde{G}(\omega) = -e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} \text{ et } G(\omega) = -e^{-i\omega} \overline{\tilde{H}(\omega + \pi)}. \quad (1.73)$$

Alors :

$$\tilde{G}(\omega) \overline{G(\omega)} + \tilde{G}(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} = 1 \quad (1.74)$$

$$\tilde{H}(\omega) \overline{G(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} = 0 \quad (1.75)$$

$$H(\omega) \overline{\tilde{G}(\omega)} + H(\omega + \pi) \overline{\tilde{G}(\omega + \pi)} = 0 \quad (1.76)$$

**Preuve.** On utilise (1.71) et (1.73) pour prouver (1.74), on a donc :

$$\begin{aligned} & \tilde{G}(\omega) \overline{G(\omega)} + \tilde{G}(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} \\ = & -e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} \left( -e^{-i\omega} \overline{\tilde{H}(\omega + \pi)} \right) + \left( -e^{-i(\omega + \pi)} \overline{H(\omega + 2\pi)} \right) \left( -e^{-i(\omega + \pi)} \overline{\tilde{H}(\omega + 2\pi)} \right) \\ = & \overline{H(\omega + \pi)} \tilde{H}(\omega + \pi) + e^{-i\omega} \overline{H(\omega)} e^{i\omega} \tilde{H}(\omega) \\ = & \overline{H(\omega + \pi)} \tilde{H}(\omega + \pi) + \overline{H(\omega)} \tilde{H}(\omega) = 1. \end{aligned}$$

Démontrons (1.75), on a :

$$\begin{aligned} & \tilde{H}(\omega) \overline{G(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} \\ = & -e^{i\omega} \tilde{H}(\omega) \tilde{H}(\omega + \pi) + e^{i\omega} \tilde{H}(\omega + \pi) \tilde{H}(\omega) = 0. \end{aligned}$$



De même on trouve :

$$\begin{aligned} & H(\omega) \overline{\tilde{G}(\omega)} + H(\omega + \pi) \overline{\tilde{G}(\omega + \pi)} \\ &= -e^{i\omega} H(\omega) H(\omega + \pi) + e^{i\omega} H(\omega + \pi) H(\omega) = 0. \end{aligned}$$

■

Une fois que nous avons les symboles  $\tilde{G}(\omega)$  et  $G(\omega)$ , nous pouvons déterminer les coefficients de filtre associés, comme on va voir dans la proposition suivante.

**Proposition 77** *Les coefficients des filtres  $\tilde{G}(\omega)$  et  $G(\omega)$  sont données par :*

$$\tilde{g}_k = (-1)^k h_{1-k} \text{ et } g_k = (-1)^k \tilde{h}_{1-k}. \quad (1.77)$$

**Preuve.** On a :  $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$  donc :

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\omega) &= -e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} \\ &= -e^{-i\omega} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{ik(\omega + \pi)} \\ &= -e^{-i\omega} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_k e^{ik\omega} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k+1} h_k e^{-i(1-k)\omega}, \end{aligned}$$

on pose  $1 - k = m$  on trouve :

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m h_{1-m} e^{-im\omega}.$$

D'où :  $\tilde{g}_m = (-1)^m h_{1-m}$  c'est-à-dire  $\tilde{g}_k = (-1)^k h_{1-k}$ .

De même méthode on trouve que  $g_k = (-1)^k \tilde{h}_{1-k}$ . ■

• Dans le théorème 75 nous avons appris l'interaction entre les symboles  $\tilde{H}(\omega)$ ,  $H(\omega)$  et les filtres d'échelle  $\tilde{h}$  et  $h$ . Des relations existent également pour les symboles  $\tilde{G}(\omega)$  et  $G(\omega)$  dans la proposition suivante.

**Proposition 78** Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  on a :

$$\tilde{H}(\omega) \overline{G(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} = 0 \iff \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{j-2k} g_j = 0, \quad (1.78)$$

et

$$\tilde{G}(\omega) \overline{H(\omega)} + \tilde{G}(\omega + \pi) \overline{H(\omega + \pi)} = 0 \iff \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{j-2k} h_j = 0. \quad (1.79)$$

En outre, si  $\tilde{H}(\omega)$  et  $H(\omega)$  satisfaisant le théorème 75, alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  on a :

$$\tilde{G}(\omega) \overline{G(\omega)} + \tilde{G}(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} = 1 \iff \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_j g_{j-2k} = \delta_{k,0}. \quad (1.80)$$

**Preuve.** Après un calcul simple on trouve que :

$$\begin{aligned} & \tilde{H}(\omega) \overline{G(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_k g_j e^{-i(k-j)\omega} + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_k g_j (-1)^{k-j} e^{-i(k-j)\omega} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_k g_j \left(1 + (-1)^{k-j}\right) e^{-i(k-j)\omega}, \end{aligned}$$

on pose  $m = j - k$  on trouve :

$$\begin{aligned} & \tilde{H}(\omega) \overline{G(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{j-m} g_j \left(1 + (-1)^m\right) e^{im\omega}. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Si  $m$  pair, alors  $1 + (-1)^m = 2$ , sinon  $1 + (-1)^m = 0$ . Le remplacement de  $m$  par  $2m$  dans (1.81) et interchange de l'ordre des sommations donne :

$$\begin{aligned} & \tilde{H}(\omega) \overline{G(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{j-2m} g_j \right) e^{i2m\omega}, \end{aligned}$$

supposons que  $\tilde{H}(\omega)\overline{G(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi)\overline{G(\omega + \pi)} = 0$  donc il résulte

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{j-2m} g_j \right) e^{i2m\omega} = 0. \quad (1.82)$$

Nous considérons (1.82) comme une série de Fourier avec des coefficients de Fourier  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{j-2m} g_j$ . Puisque la série de Fourier est nulle, il faut être que les coefficients sont nuls, cela veut dire  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{j-2m} g_j = 0$ . ■

De même manière (1.79) et (1.80) seront démontrées.

De ce qui précède, nous pouvons maintenant définir les fonctions  $\tilde{\psi}(t)$  et  $\psi(t)$ .

**Définition 79** Soient  $\varphi(t)$  et  $\tilde{\varphi}(t)$  les fonctions définies dans (1.69), les fonctions  $\tilde{\psi}(t)$  et  $\psi(t)$  sont définies comme suit :

$$\tilde{\psi}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_k \tilde{\varphi}(2t - k) \quad \text{et} \quad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2t - k). \quad (1.83)$$

Où les coefficients  $\tilde{g}_k$  et  $g_k$  sont donnés dans la proposition 77.

**Exemple 80** On prendre (voir exemple 89)

$$\left\{ \begin{array}{l} (h_{-2}, h_{-1}, h_0, h_1, h_2) = \left( -\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{8} \right) \\ \text{et} \\ (\tilde{h}_{-1}, \tilde{h}_0, \tilde{h}_1) = \left( \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right), \end{array} \right.$$

on utilise les formules  $\tilde{g}_k = (-1)^k h_{1-k}$  et  $g_k = (-1)^k \tilde{h}_{1-k}$  on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{g}_{-1}, \tilde{g}_0, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3) = \left( \frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{8} \right) \\ \text{et} \\ (g_0, g_1, g_2) = \left( \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right). \end{array} \right.$$

Donc le symbole  $\tilde{G}(\omega)$  est donné par :

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-1}^{k=3} \tilde{g}_k e^{-i\omega k} \\ &= \frac{1}{8} e^{-3i\omega} + \frac{1}{4} e^{-2i\omega} - \frac{3}{4} e^{-i\omega} + \frac{1}{8} e^{-\omega} + \frac{1}{4},\end{aligned}$$

le module du  $\tilde{G}(\omega)$  est  $|\tilde{G}(\omega)|$  tel que :

$$|\tilde{G}(\omega)| = \frac{\sqrt{2}}{8} \sqrt{4 \cos 3x - 8 \cos 2x - 20 \cos x + \cos 4x + 23}.$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(t) &= \sqrt{2} \sum_{k=-1}^3 \tilde{g}_k \tilde{\varphi}(2t - k) \\ &= \frac{1}{4} \tilde{\varphi}(2t + 1) + \frac{1}{2} \tilde{\varphi}(2t) - \frac{3}{2} \tilde{\varphi}(2t - 1) + \frac{1}{2} \tilde{\varphi}(2t - 2) + \frac{1}{4} \tilde{\varphi}(2t - 3).\end{aligned}$$

De même on trouve que :

$$\left\{ \begin{array}{l} G(\omega) = \frac{1}{4} e^{-2i\omega} - \frac{1}{2} e^{-i\omega} + \frac{1}{4} \\ \text{et} \\ |G(\omega)| = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\cos 2x - 4 \cos x + 3}, \end{array} \right.$$

et :

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^{k=2} g_k \varphi(2t - k) \\ &= \frac{1}{2} \varphi(2t) - \varphi(2t - 1) + \frac{1}{2} \varphi(2t - 2).\end{aligned}$$

Finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(\omega) = -\frac{1}{4} \cos 2\omega + \frac{1}{2} \cos \omega + \frac{3}{4} \\ \text{et} \\ \tilde{H}(\omega) = \frac{1}{2} \cos \omega + \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$|\tilde{G}(\omega)|$  et  $|\tilde{H}(\omega)|$  sont tracés sur (Fig 19),  $|G(\omega)|$  et  $|H(\omega)|$  sont tracés sur (Fig 20) et  $\tilde{\psi}(t)$  sur (Fig 21).

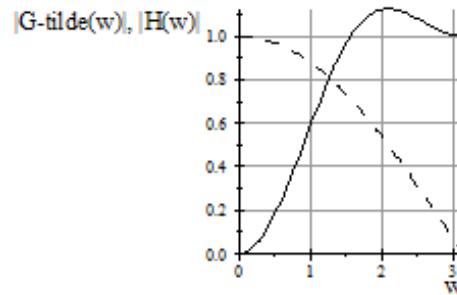


Fig 19 :  $|\tilde{G}(\omega)|$  ligne continue,  
 $|\tilde{H}(\omega)|$  ligne discontinue.

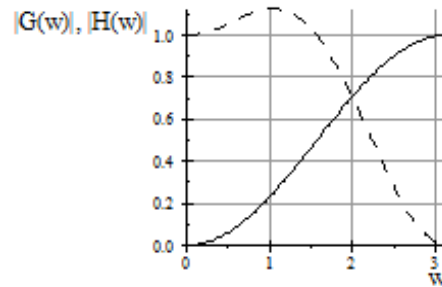


Fig 20 :  $|G(\omega)|$  ligne continue,  
 $|H(\omega)|$  ligne discontinue.

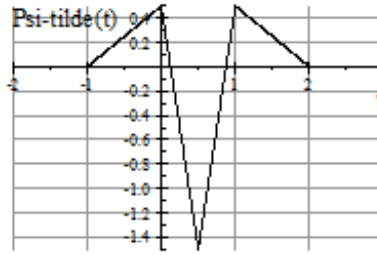


Fig 21 : La fonction  $\tilde{\psi}(t)$ .

**Définition 81** (Les fonctions  $\tilde{\psi}_{j,k}(t)$  et  $\psi_{j,k}(t)$ ) Soient  $\tilde{\psi}(t)$  et  $\psi(t)$  les fonctions définies dans (1.83), pour tout entiers  $j, k$  on définit les fonctions  $\tilde{\psi}_{j,k}(t)$  et  $\psi_{j,k}(t)$  par :

$$\tilde{\psi}_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \tilde{\psi}(2^j t - k) \quad \text{et} \quad \psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k). \quad (1.84)$$

On peut maintenant définir les espaces  $\tilde{W}_j$  et  $W_j$ .

**Définition 82** Soient  $j, k$  des entiers, alors les espaces  $\tilde{W}_j$  et  $W_j$  sont définies comme suit :

$$\tilde{W}_j = \text{span} \left\{ \tilde{\psi}_{j,k}(t) \right\}_{j,k} \quad \text{et} \quad W_j = \text{span} \left\{ \psi_{j,k}(t) \right\}_{j,k}. \quad (1.85)$$

La relations d'orthogonalité pour les fonctions d'échelle et d'ondelettes est donnée dans le théorème suivant :

**Théorème 83** (39) Pour tous entiers  $j, k, l$  et  $m$  on a :

$$\left\langle \varphi_{j,k}(t), \tilde{\psi}_{j,l}(t) \right\rangle = 0 \quad (1.86)$$

$$\left\langle \tilde{\varphi}_{j,k}(t), \psi_{j,l}(t) \right\rangle = 0 \quad (1.87)$$

$$\left\langle \tilde{\psi}_{j,k}(t), \psi_{m,l}(t) \right\rangle = \delta_{j,m} \delta_{k,l} \quad (1.88)$$

**Corollaire 84** (33) (Orthogonalité des espaces) On a :

$$V_j \perp \widetilde{W}_j \text{ et } \widetilde{V}_j \perp W_j \quad (1.89)$$

Dans le résultat suivant nous devons prouver la décomposition des espaces  $V_{j+1}$  et  $\widetilde{V}_{j+1}$ .

**Théorème 85** (33) On a :

$$V_{j+1} = V_j + W_j \text{ et } \widetilde{V}_{j+1} = \widetilde{V}_j + \widetilde{W}_j \quad (1.90)$$

**Définition 86** Si les deux fonctions  $\widetilde{\varphi}(t)$  et  $\varphi(t)$  vérifiant la condition de biorthogonalité (1.68), peuvent être construites via les équations de dilatation (1.69), et satisfont le théorème 75, alors on dit que  $\widetilde{\varphi}(t)$  et  $\varphi(t)$  sont les fonctions d'échelle biorthogonales.

**Définition 87** (Analyse multirésolution biorthogonale) Supposons que  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $\{\widetilde{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  deux multirésolutions de  $L^2(\mathbb{R})$ , on dit que  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  et  $\{\widetilde{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  forment une analyse multirésolution double ou une analyse multirésolution biorthogonale de  $L^2(\mathbb{R})$ , si  $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{\widetilde{\varphi}(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont des bases de Riesz de  $V_0$  et  $\widetilde{V}_0$  respectivement.

**Définition 88** On dit que  $\widetilde{h}$  et  $h$  sont une paire de filtres biorthogonaux si

$$\widetilde{H}(\omega) \overline{H(\omega)} + \widetilde{H}(\omega + \pi) \overline{H(\omega + \pi)} = 1,$$

avec

$$H(\pi) = \widetilde{H}(\pi) = 0 \text{ et } H(0) = \widetilde{H}(0) = 1.$$

**Exemple 89** Choisissez  $\tilde{h}$  comme filtre de la fonction linéaire B-spline  $\tilde{\varphi}(t) = \beta_1(t+1)$  et trouvez une filtre symétrique  $h$  de longueur 5 tel que  $h = (h_2, h_1, h_0, h_1, h_2)$  de sorte que  $\tilde{h}$  et  $h$  soient biorthogonaux.

**Solution 90** On sait de l'exemple 72 que  $\tilde{h}_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,  $\tilde{h}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\tilde{h}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ , d'après le théorème 70 on a :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_l h_{l-2k} = \delta_{k,0},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \delta_{k,0} &= \tilde{h}_{-1}h_{-1-2k} + \tilde{h}_0h_{-2k} + \tilde{h}_1h_{1-2k} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}h_{1+2k} + \frac{\sqrt{2}}{2}h_{2k} + \frac{\sqrt{2}}{4}h_{1-2k}, \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{4}h_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}h_0 + \frac{\sqrt{2}}{4}h_1 = 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}h_0 + \frac{\sqrt{2}}{4}h_1 = 0, \end{array} \right.$$

de la condition  $H(0) = 1$  on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-2}^{k=2} h_k e^{-ik0} &= 1 \implies h_{-2} + h_{-1} + h_0 + h_1 + h_2 = \sqrt{2} \\ &\implies 2h_2 + 2h_1 + h_0 = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

La solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2}h_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}h_0 = 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}h_0 + \frac{\sqrt{2}}{4}h_1 = 0 \\ 2h_2 + 2h_1 + h_0 = \sqrt{2}, \end{array} \right.$$



donne :

$$h_2 = -\frac{\sqrt{2}}{8}, h_0 = \frac{3\sqrt{2}}{4}, h_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Donc, nous avons un paire de filtres biorthogonaux symétriques

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \left( -\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{8} \right) \\ \text{et} \\ \tilde{h} = \left( \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right). \end{array} \right.$$

Qui est souvent appelé pair de filtres spline (5, 3) biorthogonaux.

## II. Analyse Multirésolution et ondelettes non stationnaires

L'analyse multirésolution non stationnaire est un ensemble des sous espaces d'approximations emboîtés et invariants par translation, où chaque fonction d'échelle différente génère un sous espace, ce concept est encarté par C. de Boor, R.A. DeVore and A. Ron (5). Dans ce chapitre on va présenter une étude sur l'analyse multirésolution non stationnaire, les  $B$ -splines exponentielles et le lien entre eux. On termine ce chapitre par quelques exemples sur les  $B$ -splines exponentielles  $\beta_n^\gamma$ .

**Définition 91** Soit  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  une suite des sous-espace fermés et emboîtés de  $L^2(\mathbb{R})$ , on dit que  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multirésolution non-stationnaire (**AMNS**) de  $L^2(\mathbb{R})$  si, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  tel que  $j \leq j_0$ ,  $j_0 \in \mathbb{Z}$  on a :

- (1)  $V_j \subset V_{j+1}$ ,
- (2)  $\overline{\cup_{j \leq j_0} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ ,
- (3)  $\cap_{j \leq j_0} V_j = \{0\}$ ,
- (4)  $f(x) \in V_j \implies f(x - 2^{-j}k) \in V_j$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,
- (5) la famille  $\{\varphi_j(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base de Riesz pour  $V_j$ , c'est à dire : pour chaque  $j \leq j_0$ , il existe  $0 < A_j < B_j < \infty$ , tels que pour tout  $c \in l^2(\mathbb{Z})$  :

$$A_j \|c\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c[k] \varphi_j(\cdot - k) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq B_j \|c\|_{l^2(\mathbb{Z})},$$

où  $A_j$ , la borne inférieure de Riesz et  $B_j$  la borne supérieure de Riesz.

Les fonctions  $(\varphi_j)_{j \leq j_0}$  sont appelés les fonctions d'échelle, dans le cas stationnaire  $\varphi_j = \varphi$ .

### Propriétés

- Comme  $V_j \subset V_{j+1}$  alors il existe une suite  $(h_k^{[j]})_{k \in \mathbb{Z}}$  de  $l^2(\mathbb{Z})$ ,  $j \leq j_0$ , vérifiée l'équation d'échelle suivante :

$$\varphi_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{[j]} \varphi_{j+1}(2t - k). \quad (2.1)$$

- Dans le cas fréquentiel l'équation (2.1) s'écrit comme suit :

$$\widehat{\varphi}_j(\omega) = \frac{1}{2} H^{[j]} \left( \frac{\omega}{2} \right) \widehat{\varphi}_{j+1} \left( \frac{\omega}{2} \right), \quad (2.2)$$

où ;  $\widehat{f}$  est la transformée de Fourier d'une fonction  $f$  et

$$H^{[j]}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{[j]} e^{-i\omega t}. \quad (2.3)$$

**Convention** Pour toute fonction  $\varphi_j$  on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_j(t) dt = \widehat{\varphi}_j(0) = 1, \quad (2.4)$$

si on applique successivement (2.2), avec  $\widehat{\varphi}_j(0) \neq 0$  (2.4), on obtient

$$\widehat{\varphi}_j(\omega) = \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2} H^{(j+k)} \left( \frac{\omega}{2^{1+k}} \right), \quad (2.5)$$

avec  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $j \leq j_0$ .

- D'après M. Unser (37), Le produit (2.5) converge pour chaque valeur de  $\omega$ .
- Quand  $\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ , les fonctions  $(\widehat{\varphi}_j)_{j \leq j_0} \in L^2(\mathbb{R})$  et

$$\|\varphi_j - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \text{ lorsque } j \rightarrow +\infty.$$

- La convergence de l'analyse multirésolution est sûre grâce à la condition de la densité (2) dans la définition 91.

- Les fonctions  $\varphi_j$ ,  $j \leq j_0$ , génèrent l'espace  $V_j$ , c'est à dire :

$$V_j = \overline{\text{span}} \{ \varphi_{j,k}(t) \}_{j,k \in \mathbb{Z}}, \quad (2.6)$$

où,

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi_j(2^j t - k). \quad (2.7)$$

• A chaque niveau  $j \leq j_0$ , et pour tout  $(h^{[j]})_{k \in \mathbb{Z}} \subset l^2(\mathbb{Z})$ , il existe un pair  $(A_j, B_j) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(0 < A_j \leq B_j < +\infty)$  tels que :

$$A_j \left\| h^{[j]} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq B_j \left\| h^{[j]} \right\|_{l^2(\mathbb{Z})}, \quad (2.8)$$

avec  $\Phi \in V_j$  et  $h^{[j]}(e^{-i\omega}) = H^{[j]}(\omega)$ .

•  $A_j, B_j$  sont les bornes de Riesz, dans le cas orthogonale on a  $A_j = B_j$  et dans le cas orthonormé  $A_j = B_j = 1$ .

• On dit que  $\varphi_j(\cdot)$  et  $\varphi_j(\cdot - k)$  sont orthogonales si, pour chaque  $j \leq j_0, j \in \mathbb{Z}$ ;

$$\langle \varphi_j(\cdot), \varphi_j(\cdot - k) \rangle = \delta_{0,k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (2.9)$$

où

$$\delta_{0,k} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

## 2.1 Transformé en $z$

Les transformés en  $z$  des filtres d'échelle vérifiant l'équation

$$h^{[j]}(z) \overline{h^{[j]}(z)} + h^{[j]}(-z) \overline{h^{[j]}(-z)} = 4, \quad (2.10)$$

où ;

$$z = e^{-i\omega} \text{ et } h^{[j]}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{[j]} z^k. \quad (2.11)$$

## 2.2 Complément orthogonale

Le complément orthogonale  $W_j$  dans  $V_{j+1}$  de chaque  $V_j$  à chaque niveau  $j \leq j_0$  est défini comme suit

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (2.12)$$

avec

$$\overline{\oplus_{j \leq j_0} W_j} = L^2(\mathbb{R}). \quad (2.13)$$

- Quand  $W_j$  est orthogonale à  $V_j$  alors

$$W_j \perp W_k; \quad \forall j \neq k. \quad (2.14)$$

- Les sous-espaces  $W_j$  n'a pas les même propriétés d'emboîtés à celle  $V_j$ , par contre la conservation des propriétés d'échelle et l'invariance par translation est garantie.

**Définition 92** (*Ondelette non-stationnaire*) *A partir des fonctions d'échelle non-stationnaires  $\varphi_j$ , pour chaque niveau  $j \leq j_0$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  on définit la fonction ondelette non-stationnaire  $\psi_j$  de  $L^2(\mathbb{R})$  comme suit*

$$\psi_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k^{[j]} \varphi_{j+1}(2t - k), \quad (2.15)$$

où

$$g_k^{[j]} = (-1)^k h_{1-k}^{[j]}, \quad (2.16)$$

et

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi_j(2^j t - k), \quad (2.17)$$

telles que  $\psi_{j,k}$  sont les fonctions dilatées et translatées et de plus elles engendrent  $W_j$ .

- La stabilité des bases d'ondelettes non-stationnaire  $\{\psi_{j,k}, j \leq j_0, k \in \mathbb{Z}\}$ , n'est pas impliquée par la fonction d'échelle, M. L. Mazure et K. Melkemi (29).

- $\{\psi_{j,k}, j \leq j_0, k \in \mathbb{Z}\}$  Forme une base de Riesz pour l'espace  $\oplus_{j \leq j_0} W_j$ .

- La famille

$$\Gamma = \{\varphi_{j_0,k}\} \cup \{\psi_{j,k}(\cdot)\}_{j \leq j_0, k \in \mathbb{Z}}, \quad (2.18)$$

est une base de Riesz pour  $L^2(\mathbb{R})$ , R.Q. Jia, Y. J. lee (19, 23)

• Pour chaque fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , sa décomposition on ondelette à niveau  $j_0$ , est définie comme suit

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^{[j_0]} \varphi_{j_0, k} + \sum_{j \leq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k^{[j]} \psi_{j, k}, \quad (2.19)$$

avec

$$x_k^{[j_0]} = \langle f, \varphi_{j_0, k} \rangle \text{ et } y_k^{[j]} = \langle f, \psi_{j, k} \rangle. \quad (2.20)$$

### 2.3 Construction d'analyse multirésolution non-stationnaire à travers les B-splines exponentielles

A travers les  $B$ -splines exponentielles, il est possible de construire une analyse multirésolution non-stationnaire  $(V_j)_{j \geq j_0}$ , les  $B$ -splines exponentielles sont utiles aux plusieurs applications comme ; la forme géométrique, l'interpolation d'un signal, N. Dyn, M. Unser (14, 37), la préservation d'ajustement d'une courbe,..., sans oublier leurs importance dans la construction des ondelettes.

**Définition 93** (*Espace de Chebyshev généralisé*) On considère l'opérateur différentiel linéaire d'ordre  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ; à coefficients constants, défini sur  $C^\infty(\mathbb{R})$  par :

$$T_\gamma^n = \prod_{i=1}^n (D - \gamma_i I). \quad (2.21)$$

$D$ ; l'opérateur de dérivation et  $I$  est l'identité.

Le noyau de cet opérateur différentiel

$$\mathcal{B}_\gamma^n = \ker T_\gamma^n, \quad (2.22)$$

est un  $EC$  (espace de Chebyshev généralisé), Y. J. Lee (22), sur  $\mathbb{R}$ .

• Pour tout entier on utilise la notation  $\eta^{[\theta]}$  au lieu de  $\eta, \dots, \eta$  ( $\theta$ -fois).

- Il est possible de trouver une permutation  $\sigma$ , de  $\{1, \dots, n\}$  telle que

$$\left(\gamma_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)}\right) = \left(\eta_1^{[n_1]}, \dots, \eta_r^{[n_r]}\right),$$

où  $\eta_1, \dots, \eta_r$  sont des réels distincts et  $n_1, \dots, n_r$  des entiers positives, tels que :  $n_1 + \dots + n_r = n$ .

- On peut construire une famille des fonctions

$$e^{\eta_i x}, x e^{\eta_i x}, \dots, x^{n_i-1} e^{\eta_i x}, \quad i = 1, \dots, r,$$

cette famille forme une base pour l'espace  $\mathcal{B}_{\eta_i}^{n_i}$  telle que  $\mathcal{B}_\gamma^n = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{B}_{\eta_i}^{n_i}$ .

- Si on suppose que  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = (0, 0, a, -a)$ , on peut écrire  $\gamma = (\eta_1^{[2]}, \eta_2^{[1]}, \eta_3^{[1]})$  avec  $\eta_1 = 0, \eta_2 = a, \eta_3 = -a$ . Cela signifie que la base est :  $e^{0x}, x e^{0x}, e^{ax}, e^{-ax}$  c'est à dire  $1, x, e^{ax}, e^{-ax}$ .

- Il est logique d'adopter de nouveau choix de bases dans cette espace. Pour cela, nous désignons par  $f_i$  l'élément de l'espace  $\mathcal{B}_{(\gamma_1, \dots, \gamma_i)}^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; qui satisfait les conditions initiales ;

$$f_i^{(j)}(0) = 0, \text{ si } j = 0, \dots, i-2 \text{ et } f_i^{(i-1)}(0) = 1, \quad (2.23)$$

les fonctions  $f_1, \dots, f_n$  ainsi définies, forment une base de  $\mathcal{B}_\gamma^n$ .

En particulier, si  $\gamma_i = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , la base précédente est la base  $(f_1, \dots, f_n)$  de polynôme  $P_{n-1}$ , définie par :

$$f_i(x) = \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}, \quad (2.24)$$

les fonctions ;  $f_n, f_n(\cdot + 1), \dots, f_n(\cdot + n - 1)$  forment aussi une base de l'espace  $\mathcal{B}_\gamma^n$ .

**Définition 94** (espace des splines cardinales de Chebyshev) L'espace des splines cardinales de Chebyshev associé à l'opérateur  $T_\gamma^n$  est l'espace  $S_\gamma^n$  défini comme suit

$$S_\gamma^n = \left\{ S \in C^{n-2}(\mathbb{R}); S_{|[k, k+1[} \in \mathcal{B}_{\gamma_{|[k, k+1[}}^n, k \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (2.25)$$

• Pour  $n = 1$  : dans ce cas, nous pouvons exprimer les éléments de  $S_\gamma^1$  à partir des translatées entières de la fonction  $\beta_\gamma^1$  qui définie par

$$\beta_\gamma^1(x) = e^{\gamma x} \cdot \mathcal{X}_{[0, 1[}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.26)$$

avec  $\gamma = \gamma_1 \in \mathbb{R}$ . En effet, si  $S$  est un élément de  $S_\gamma^1$ , nous connaissons une suite  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  telle que :

$$S(x) = a_k e^{\gamma x}, \quad x \in [k, k+1[, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.27)$$

donc,  $S$  peut s'écrire sous la forme ;

$$S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \beta_\gamma^1(x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.28)$$

où

$$c_k = a_k e^{\gamma k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (2.29)$$

Dans la suite, on va donner la définition de la fonction Green associée à l'opérateur  $T_\gamma^n$ .

**Définition 95** La fonction Green  $G_\gamma^1$  associée à l'opérateur  $T_\gamma^1$ , est définie par :

$$G_\gamma^1(x) = e^{\gamma x} \cdot \mathcal{X}_{[0, +\infty[}(x). \quad (2.30)$$

• Dans ce cas on peut écrire la fonction  $\beta_\gamma^1$  par la formule suivante

$$\beta_\gamma^1(x) = G_\gamma^1(x) - e^\gamma G_\gamma^1(x - 1), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.31)$$

**Définition 96** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction de Green  $G_\gamma^n$  associée à l'opérateur  $T_\gamma^n$ , est définie comme suit

$$G_\gamma^n(x) = \begin{cases} f_n(x), & x \geq 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (2.32)$$



où,  $f_n \in B_\gamma^n$ , avec les conditions :

$$f_i^{(j)}(0) = 0, \text{ si } j = 0, \dots, i-2 \text{ et } f_i^{(i-1)}(0) = 1.$$

- Si  $\gamma_i = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , alors  $G_\gamma^n(x)$  est définie par

$$G_\gamma^n(x) = \frac{x_+^{n-1}}{(n-1)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.33)$$

avec,  $x_+ = \max(x, 0)$ .

Dans la définition suivante, on utilise l'opérateur aux différences  $\Delta_\gamma^n$ , Y. Meyer (31), pour généraliser la notion de  $B$ -spline.

**Définition 97** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ , l'opérateur aux différences  $\Delta_n^\gamma$  est défini par :

$$\Delta_\gamma^n = \Delta_{\gamma_n}^1 \circ \Delta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})}^{n-1},$$

où, pour tout réel  $\mu$  et pour tout fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\Delta_\mu^1 f(x) := f(x) - e^\mu f(x-1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Proposition 98** La fonction  $\beta_\gamma^n$  définie par :

$$\beta_\gamma^n = \Delta_\gamma^n \cdot G_\gamma^n, \quad (2.34)$$

est un élément de l'espace  $S_\gamma^n$  des splines associées à l'espace  $\mathcal{B}_\gamma^n$  pour tout  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$  et pour tout naturel  $n$  non nul.

**Preuve.** Par la définition même de l'opérateur aux différences  $\Delta_\gamma^n$ ,  $\beta_\gamma^n$  est une combinaison linéaire des  $n+1$  fonctions  $G_\gamma^n(\cdot - k)$ ,  $k = 0, \dots, n$ . L'invariance par translation de l'espace  $\mathcal{B}_\gamma^n$  et le fait que la fonction  $G_\gamma^n \in C^{n-2}(\mathbb{R})$ ,  $G_\gamma^n(x) = 0$  pour tout  $x < 0$  et  $T_\gamma^n G_\gamma^n(x) = 0$  pour  $x \geq 0$  donc  $T_\gamma^n \beta_\gamma^n(x) = 0$ , d'où  $\beta_\gamma^n \in \mathcal{B}_\gamma^n$ . ■

**Remarque 99** (30, 38)

Sous la convention  $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} e^{\gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_k}} = 1$  pour  $k = 0$ , et pour tout fonction  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on se donne la relation :

$$\Delta_\gamma^n h(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} e^{\gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_k}} \right) h(x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.35)$$

de (2.34) et (2.35),  $\beta_\gamma^n$  peut s'écrire comme suit

$$\beta_\gamma^n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} e^{\gamma_{i_1} + \dots + \gamma_{i_k}} \right) G_\gamma^n(x - k), \quad (2.36)$$

donc (2.36) montre que :

- Si  $x < k$ , alors  $\beta_\gamma^n(x) = 0$ ,
- si  $x \geq k$ , c'est à dire  $x - k \geq 0$  pour chaque  $k = 0, \dots, n$ . On applique l'opérateur  $\Delta_\gamma^n$  à une fonction de l'espace  $\mathcal{B}_\gamma^n$  pour calculer  $\beta_\gamma^n$ .

Dans la suite on va donner quelques définitions et quelques propriétés concernant les  $B$ -splines.

**Définition 100** La fonction  $\beta_\gamma^n$  est appelée la  $B$ -spline de Chebyshev d'ordre  $n$  associée à l'opérateur  $T_\gamma^n$ .

**Proposition 101** (36) Pour tout  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$  on a :

$$\beta_\gamma^n = \beta_{\gamma_1}^1 * \dots * \beta_{\gamma_n}^1, \quad (2.37)$$

et

$$\beta_\gamma^n(x) = \int_0^1 e^{\gamma_n y} \cdot \beta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})}^{n-1}(x - y) dy, \quad \text{pour tout } n \geq 2. \quad (2.38)$$

**Preuve.** On pose  $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$  et on suppose que  $n \geq 2$ . De la définition de la  $B$ -spline d'ordre  $n$  on a :

$$\beta_\gamma^n = \Delta_{\bar{\gamma}}^{n-1} \left( \Delta_{\gamma_n}^1 G_\gamma^n \right), \quad (2.39)$$

telle que

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma_n}^1 G_\gamma^n(x) &= G_\gamma^n(x) - e^{\gamma_n} G_\gamma^n(x-1) \\ &= \int_0^x e^{\gamma_n y} G_{\bar{\gamma}}^{n-1}(x-y) dy - \int_0^{x-1} e^{\gamma_n(y+1)} G_{\bar{\gamma}}^{n-1}(x-1-y) dy. \end{aligned}$$

Si on pose  $t = y + 1$  la deuxième intégrale devienne comme suit

$$\int_1^x e^{\gamma_n t} G_{\bar{\gamma}}^{n-1}(x-t) dt,$$

donc

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma_n}^1 G_\gamma^n(x) &= \int_0^x e^{\gamma_n t} G_{\bar{\gamma}}^{n-1}(x-t) dt + \int_x^1 e^{\gamma_n t} G_{\bar{\gamma}}^{n-1}(x-t) dt \\ &= \int_0^1 e^{\gamma_n t} G_{\bar{\gamma}}^{n-1}(x-t) dt, \end{aligned}$$

cela veut dire que

$$\Delta_{\gamma_n}^1 G_\gamma^n(x) = \beta_{\gamma_n}^1 * G_{\bar{\gamma}}^{n-1}. \quad (2.40)$$

De la définition du produit de convolution et de la définition 97, il est facile de vérifier que pour tout réel  $\gamma$ , et toutes fonctions  $f, g$  telles que :

$$\Delta_\gamma^1(f * g) = f * (\Delta_\gamma^1 g).$$

D'après cette remarque et d'après (2.39) et (2.40) il résulte que :

$$\beta_\gamma^n = \beta_{\gamma_n}^1 * \Delta_{\bar{\gamma}}^{n-1} \left( G_{\bar{\gamma}}^{n-1} \right).$$

Si on suppose montré que

$$\Delta_{\bar{\gamma}}^{m-1} \left( G_{\bar{\gamma}}^{m-1} \right) = \beta_{\gamma_1}^1 * \beta_{\gamma_2}^1 * \dots * \beta_{\gamma_{n-1}}^1,$$

on trouve que :

$$\beta_{\gamma}^n = \beta_{\gamma_1}^1 * \dots * \beta_{\gamma_n}^1.$$

■

•  $\beta_{\gamma_i}^1(x) > 0$  pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  et pour tout  $x \in ]0; 1[$ , dans le cas des  $B$ -splines d'ordre  $n$  on a le résultat suivant :

**Corollaire 102** (28) *Le support de la  $B$ -spline  $\beta_{\gamma}^n$  est  $[0; n]$ . De plus  $\beta_{\gamma}^n(x) > 0$  pour tout  $x$  appartient à l'intérieur de  $[0; n]$ .*

**Corollaire 103** *On considère le vecteur  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ , alors pour tout entier  $k \in [1, n-2]$ , on a :*

$$T_{(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}^k \beta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}^{n-1} = \Delta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}^k \beta_{(\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n)}^{n-k}. \quad (2.41)$$

**Preuve.** Soit une fonction définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$\left( \beta_{\gamma_1}^1 * f \right) (x) = \int_0^1 e^{\gamma_1 t} f(x-t) dt,$$

on pose  $x-t=y$  on trouve

$$\begin{aligned} \left( \beta_{\gamma_1}^1 * f \right) (x) &= - \int_x^{x-1} e^{\gamma_1(x-y)} f(y) dy \\ \implies \left( \beta_{\gamma_1}^1 * f \right) (x) &= e^{\gamma_1 x} \int_{x-1}^x e^{-\gamma_1 y} f(y) dy. \end{aligned}$$

Par dérivation on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\beta_{\gamma_1}^1 * f\right)'(x) &= \left(\gamma_1 e^{\gamma_1 x} \int_{x-1}^x e^{-\gamma_1 y} f(y) dy\right) + \left[e^{-\gamma_1 x} f(x) - e^{-\gamma_1(x-1)} f(x-1)\right] e^{\gamma_1 x} \\
&= \gamma_1 \int_{x-1}^x e^{\gamma_1(x-y)} f(y) dy + f(x) - e^{\gamma_1} f(x-1) \\
&= \gamma_1 \left(\beta_{\gamma_1}^1 * f\right)(x) + f(x) - e^{\gamma_1} f(x-1), \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\left(\beta_{\gamma_1}^1 * f\right)'(x) - \gamma_1 \left(\beta_{\gamma_1}^1 * f\right)(x) = f(x) - e^{\gamma_1} f(x-1),$$

cela équivaut à

$$T_{\gamma_1}^1 \left(\beta_{\gamma_1}^1 * f\right) = \Delta_{\gamma_1}^1 f(x). \quad (2.42)$$

On peut appliquer la formule (2.42) avec la fonction  $f = \beta_{(\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n)}^{n-1}$  telle que la  $B$ -spline d'ordre  $n-1$  soit continue, autrement dit si  $n \geq 3$ . On obtient la formule (2.46) avec  $i = 1$ .

On utilisant le fait que  $T_{\gamma}^1$  et  $\Delta_{\gamma}^1$  commutent et par récurrence on obtient l'égalité (2.41) dans le cas général. ■

**Proposition 104** (30) *Pour tout spline  $S \in S_{\gamma}^n$ , il existe une unique suite  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de nombre réels telle que:*

$$S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot \beta_{\gamma}^n(x-k), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.43)$$

**Définition 105** (La  $B$ -spline adjointe) *Soit  $T_{\gamma}^n$  l'opérateur défini dans (2.21), la  $B$ -spline adjointe de  $\beta_{\gamma}^n$ , notée  $\beta_{\gamma}^{n*}$ , est la  $B$ -spline associée à l'opérateur  $T_{\gamma}^{n*}$ . Où :*

$$T_{\gamma}^{n*} = (-1)^n \prod_{i=1}^n (D + \gamma_i \cdot I). \quad (2.44)$$

- L'espace adjoint des splines de Chebyshev  $S_\gamma^{n*}$  associé à l'opérateur  $T_\gamma^{n*}$ , est défini comme l'espace des splines cardinales associées à  $T_\gamma^n$ .

- Si  $\beta_\gamma^{n*} = \ker T_\gamma^{n*}$ , l'espace  $S_\gamma^{n*}$  définit par :

$$S_\gamma^{n*} = \{ f \in C^{n-2}(\mathbb{R}); f_{|[k, k+1[} \in \mathcal{B}_\gamma^{n*}, k \in \mathbb{Z} \},$$

- On obtient de l'égalité (2.44) que

$$\beta_\gamma^{n*} = \beta_{-\gamma}^n.$$

- Soit

$$\beta_{\gamma_1}^{1*}(x) = e^{-\gamma_1 x} \mathcal{X}_{[0,1[}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

on utilisant (2.38) :

$$\beta_\gamma^{n*}(x) = \int_0^1 e^{-\gamma_n t} \beta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})}^{(n-1)*}(x-t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dans la proposition suivante on va voir le lien exact entre  $\beta_\gamma^n$  et  $\beta_\gamma^{n*}$ .

**Proposition 106** *Pour tout entier  $n \geq 2$  et pour tout vecteur  $\gamma$  appartient à  $\mathbb{R}^n$ , on a :*

$$\beta_\gamma^{n*}(x) = e^{-\sum_{k=1}^n \gamma_k} \beta_\gamma^n(n-x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.45)$$

*Pour  $n = 1$ , la relation (2.45) valable uniquement sur  $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ .*

**Preuve.** La preuve sera fait par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $n = 1$ , on a, pour tout réel  $x$ ,

$$\begin{aligned} \beta_{\gamma_1}^{1*}(x) &= e^{-\gamma_1 x} \mathcal{X}_{[0,1[}(x) \\ &= e^{-\gamma_1} e^{\gamma_1(1-x)} \mathcal{X}_{[0,1[}(x), \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\beta_{\gamma_1}^{1*}(x) = e^{-\gamma_1} e^{\gamma_1(1-x)} = e^{-\gamma_1} \beta_{\gamma_1}^1(1-x), \text{ pour tout } x \neq 0, 1.$$

Supposons que l'égalité (2.45) vraie pour  $n-1$  et démontrons qu'elle est vraie pour  $n$ , on a :

$$\beta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})}^{n-1*}(x) \stackrel{pp}{=} e^{-\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k} \beta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})}^{n-1}(n-1-x).$$

En utilisant (2.41) et la relation précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \beta_{\gamma}^{n*}(x) &= \int_0^1 e^{-\gamma_n t} \beta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})}^{n-1*}(x-t) dt \\ &= e^{-\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k} \int_0^1 e^{-\gamma_n t} \beta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})}^{n-1}(n-1-x+t) dt, \end{aligned}$$

a l'aide du changement de variable  $s = 1 - t$ ,  $\beta_{\gamma}^{n*}(x)$  s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \beta_{\gamma}^{n*}(x) &= e^{-\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k} \int_0^1 e^{-\gamma_n s} \beta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})}^{n-1}(n-x-s) ds \\ &= e^{-\sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k} e^{-\gamma_n} \int_0^1 e^{\gamma_n s} \beta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})}^{n-1}(n-x-s) ds \\ &= e^{-\sum_{k=1}^n \gamma_k} \int_0^1 e^{\gamma_n s} \beta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})}^{n-1}(n-x-s) ds \end{aligned}$$

d'où

$$\beta_{\gamma}^{n*}(x) = e^{-\sum_{k=1}^n \gamma_k} \beta_{\gamma}^{n-1}(n-x).$$

■

En déduire de l'égalité (2.45) que :

- Si  $\sum_{k=1}^n \gamma_k = 0$ ,  $s(\beta_{\gamma}^n) = \beta_{\gamma}^{n*}$  où  $s$  est la symétrie par rapport à l'axe  $x = \frac{n}{2}$ .

- Si  $\gamma_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$  (cas polynomial), on trouve que  $\beta_\gamma^{n*} = \beta_\gamma^n$ , ce qui prouve que la  $B$ -spline est symétrie par rapport à l'axe  $x = \frac{n}{2}$ .

- De plus, elle nous donne une condition nécessaire et suffisante sur l'opérateur  $T_\gamma^n$  pour que la  $B$ -spline associée soit symétrique.

**Corollaire 107** (30) *La forme des opérateurs différentiels d'ordre  $n$  à coefficients réels constants dont la  $B$ -spline associée est symétrique, (par rapport à l'axe  $x = \frac{n}{2}$ ), est la suivante :*

$$D^{\theta_0} \prod_{i=1}^r (D^2 - \eta_i^2 I)^{\theta_i},$$

où  $\eta_1, \dots, \eta_r \in \mathbb{R}^*$  avec  $\eta_i^2 \neq \eta_j^2$  pour  $i \neq j$ , de plus,  $\theta_0 \in \mathbb{N}$  et  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r \in \mathbb{N}^*$  vérifiant :

$$\theta_0 + 2 \sum_{i=1}^r \theta_i = n.$$

La  $B$ -spline exponentielle, est une généralisation d'une  $B$ -spline polynomiale.

La transformée de Fourier d'une  $B$ -spline est donnée dans la proposition suivante.

**Proposition 108** *Soit  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^n$ , alors, la transformée de Fourier de la  $B$ -spline  $\beta_\gamma^n$  est donnée par*

$$\widehat{\beta_\gamma^n}(\omega) = \prod_{k=1}^n F(\gamma_k - i\omega), \quad (2.46)$$

où,  $F$  est une fonction définie sur  $\mathbb{C}$ , par

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

**Preuve.** En utilisant la proposition 101, puis on applique l'une des propriétés classiques de la transformation de Fourier,  $\widehat{u * v} = \widehat{u} \widehat{v}$  (récursivement). Alors pour prouver



(2.46) ;il suffit de vérifier que, pour  $k = 1, \dots, n$ ;

$$\widehat{\beta_{\gamma_k}^1}(\omega) = F(\gamma_k - i\omega).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \widehat{\beta_{\gamma_k}^1}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_{\gamma_k}^1(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_0^1 e^{(\gamma_k - i\omega)x} dx = \left[ \frac{e^{(\gamma_k - i\omega)x}}{\gamma_k - i\omega} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^{\gamma_k - i\omega} - 1}{\gamma_k - i\omega} = F(\gamma_k - i\omega). \end{aligned}$$

■

- Le cas  $\gamma = 0$ , correspond à la  $B$ -spline polynomiale.
- Dans le domaine temporel, on obtient la fonction  $\beta_\gamma^n \in L^2(\mathbb{R})$  dont son support compact est  $[0, n]$ , I. Boggess (4), De plus, cette fonction est  $(n - 2)$ -fois continûment différentiable, I. daubechies (12). D'autre part, sur chaque intervalle  $[k, k + 1]$ ;  $\beta_\gamma^n$  coïncide avec une fonction dans  $G_\gamma^n$ .

- Les translatées de  $\beta_\gamma^n$  sont linéairement indépendants si et seulement si

$$\gamma_k - \gamma_j \notin 2\pi i\mathbb{Z} - \{0\}, \quad \forall k, j \in \mathbb{Z}. \quad (2.48)$$

En outre, lorsque nous conservons la condition (2.46), chaque  $f \in G_\gamma^n$ , peut être exprimée comme une combinaison linéaire des translatées de  $\beta_\gamma^n$ .

D'autre part, de la définition de la transformée de Fourier de  $\beta_\gamma^n$  nous avons :

$$\begin{aligned} \widehat{\beta_\gamma^n}(\omega) &= \prod_{k=1}^n \frac{e^{\gamma_k - i\omega} - 1}{\gamma_k - i\omega} \\ &= \left[ \prod_{k=1}^n \frac{e^{\frac{\gamma_k}{2} - i\frac{\omega}{2}} + 1}{2} \right] \left[ \prod_{k=1}^n \frac{e^{\frac{\gamma_k}{2} - i\frac{\omega}{2}} - 1}{\frac{\gamma_k}{2} - i\frac{\omega}{2}} \right], \end{aligned} \quad (2.49)$$

le second facteur sur le côté droit de (2.49) est reconnu en tant que  $\widehat{\beta_{\frac{\gamma}{2}}^n}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ , et donc

$$\widehat{\beta_{\frac{\gamma}{2}}^n}(\omega) = A_{\frac{\gamma}{2}}(\omega) \widehat{\beta_{\frac{\gamma}{2}}^n}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (2.50)$$

avec  $A_{\frac{\gamma}{2}}$ ; est un polynôme trigonométrique de période  $4\pi$  défini par

$$A_{\frac{\gamma}{2}}(\omega) = \prod_{k=1}^n \frac{e^{\frac{\gamma_k}{2} - i\frac{\omega}{2}} + 1}{2}. \quad (2.51)$$

Notons que  $\widehat{\beta_{\frac{\gamma}{2}}^n}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ; représente la transformée de Fourier de la fonction  $2\beta_{\frac{\gamma}{2}}^n(2x)$  du support  $\left[0, \frac{n}{2}\right]$ , de plus, elle est par morceaux dans  $G_{\frac{\gamma}{2}}^n$ , (avec des points de discontinuités à des demi-entiers).

Nous fixons le vecteur  $\gamma$ , et définissons les espaces  $V_j$ , dans lesquels engendrés par  $\phi_j$ , avec

$$\phi_j = \beta_{\gamma 2^{-j}}^n(2^j \cdot), \quad (2.52)$$

les générateurs  $\phi_j$ , alors satisfaire aux équations de raffinement non-stationnaire

$$\widehat{\phi}_j(\omega) = 2A_{\gamma 2^{-j-1}}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \widehat{\phi}_{j+1}(\omega). \quad (2.53)$$

Nous observons que  $2A_{\gamma 2^{-j-1}}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \widehat{\phi}_{j+1}(\omega)$ , peut être écrite comme

$$2^{-n} \sum_{k=0}^n \delta_k \left( e^{\gamma_1 \cdot 2^{-j}}, \dots, e^{\gamma_n \cdot 2^{-j}} \right) e^{-ik\omega 2^{-j-1}},$$

où,  $\delta_k(x_1, \dots, x_n)$  : est le polynôme homogène symétrique de degré  $k$ .

Alors, nous pouvons, considérer les espaces invariants par translation  $V_j$ , définis par :

$$V_j = \left\{ f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{[j]} \beta_{\gamma 2^{-j}}^n(2^j - x); h_k^{[j]} \in l^2(\mathbb{Z}) \right\}. \quad (2.54)$$

Si nous voulons normalisée la base  $\phi_j$ , c'est à dire  $\|\phi_j\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$ , et d'après les définitions précédent en peut réécrire :

$$\phi_j = \rho_j \left( e^{2^{-j}\gamma_1}\beta_1 * e^{2^{-j}\gamma_2}\beta_1 * \dots * e^{2^{-j}\gamma_n}\beta_1 \right), \quad (2.55)$$

telle que  $\beta_1$  indique la  $B$ -spline de premier ordre, c'est à dire :

$$\beta_1(x) = \mathcal{X}_{[0, 1[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{ailleurs,} \end{cases} \quad (2.56)$$

et  $\rho_j$  : est le facteur de normalisation, M. Unser (37).

Une façon pratique de représenter une  $B$ -spline exponentielle d'ordre  $n$ , est avec le polynôme de Laurent comme suit :

$$H^{[j]}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{[j]} \cdot z^k = 2\mu_j \prod_{k=1}^n \frac{1}{2} \left( 1 + e^{\gamma_k \cdot 2^{-j-1}} z \right), \quad j \geq j_0, \quad (2.57)$$

où,  $\mu_j$  est le facteur de normalisation définie par :

$$\mu_j = \prod_{k=1}^n \left( \frac{2}{1 + e^{\gamma_k \cdot 2^{-j-1}}} \right). \quad (2.58)$$

La relation entre la reproduction des polynômes exponentiels par  $\phi_j$ , et les zéros du polynôme de Laurent  $H^{[j]}(z)$  correspondants, est bien détaillée par M. Unser (37).

Par convention on a

$$W_{-\infty} = \bigcap_j V_j, \quad (2.59)$$

et obtenir de cette façon, la décomposition :

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{-\infty \leq j \leq +\infty} W_j, \quad (2.60)$$

est valable pour la décomposition en ondelette, sur la base de toute  $B$ -spline exponentielle.

Un problème intéressant et important dans le cadre des bases d'ondelette non stationnaire, est le problème de la stabilité. En effet ;

Soit,  $\psi_j$  la fonction d'ondelette à support compact, associée à  $\phi_j = \beta_{\gamma, 2^{-j}}^n(2^j \cdot)$ .

Alors, l'espace des ondelettes  $W_j$ , définit par :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (2.61)$$

est un espace invariant par translation, relative à la dilatation  $2^{-j}$ , générée par  $\psi_j$ . D'après (2.55); et (2.57) et C. de Boor (5) nous pouvons en déduire que, pour chaque  $j \geq j_0$ , les translatées entières de  $\phi_j$  sont linéairement indépendants si et seulement si :

$$(\gamma_k - \gamma_l) \notin 2^{j+1}\pi i\mathbb{Z}, \text{ pour } \gamma_k \neq \gamma_l, \quad k, l = 1, \dots, n, \quad (2.62)$$

d'autre part, d'après T. Lyche (25) un concept lié l'indépendance linéaire, avec la notion de la stabilité de  $\phi_j$ , c'est-à-dire ;

Si les translatées entières de  $\phi_j$ , sont linéairement indépendants, la stabilité de  $\phi_j$ , est immédiate. Autrement dit que  $\left\{ \beta_{\gamma, 2^{-j}}^n(2^j \cdot - k), \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$ , est une base de Riesz pour  $V_j$ .

La densité des  $B$ -splines exponentielles, dans les espaces  $L^2(\mathbb{R})$ , est prouvé par O. Christensen (7).

Dans la suite on donne des exemples sur la construction des graphes de quelques  $B$ -splines exponentielles  $\beta_\gamma^n$ .

**Exemple 109** *La B-spline*

$$\beta_\gamma^1(x) = \begin{cases} e^{\gamma x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

pour  $n = 1$  et  $\gamma \in \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1\}$  (Fig22).

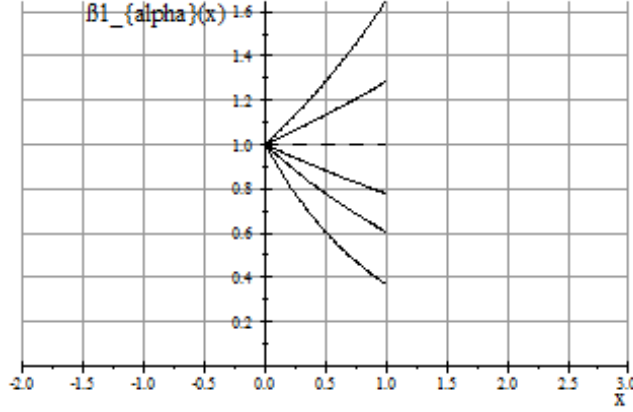


Fig 22 :  $\beta_\gamma^1(x)$ ,  $\gamma = -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$  (De bas en haut)

**Exemple 110** Pour  $n = 2$  et  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_1) \in \mathbb{R}^2$ , avec  $\gamma_1 \in \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1\}$ .

On a  $\beta_\gamma^2(x) = \beta_{\gamma_1}^1(x) * \beta_{\gamma_1}^1(x)$  d'après un calcul simple on trouve que :

$$\beta_\gamma^2(x) = \begin{cases} x e^{\gamma_1 x}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ (2-x) e^{\gamma_1 x}, & \text{si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Pour  $\gamma_1 \in \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1\}$  (Fig 23).

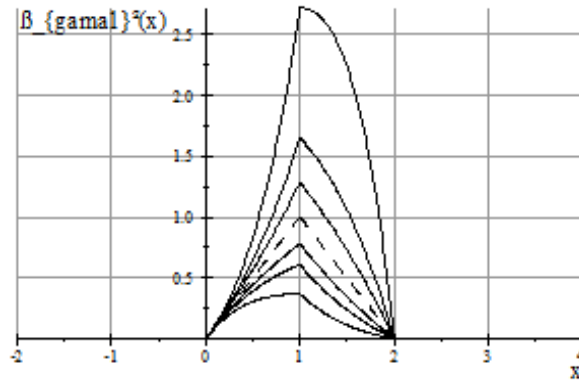


Fig 23 :  $\beta_{\gamma_1}^2(x)$ ,  $\gamma_1 = -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$   
(De bas en haut)

En particulier si  $\gamma_1 = 0$ , on obtient la  $B$ -spline de second ordre, fonction triangle

$$\wedge(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

telle que :

$$\beta_{\gamma}^2(x) = x \cdot \mathcal{X}_{[0, 1[}(x) + (2 - x) \cdot \mathcal{X}_{[1, 2[}(x).$$

**Exemple 111** Pour  $n = 3$ ,  $\gamma = (0, ia, -ia)$  on a

$$\begin{aligned} \beta_{\gamma}^3(x) &= \beta_{\gamma_1}^1(x) * \beta_{\gamma_2}^1(x) * \beta_{\gamma_3}^1(x) \\ &= \beta_0^1(x) * \beta_{ia}^1(x) * \beta_{-ia}^1(x) \\ &= (\beta_0^1(x) * \beta_{ia}^1(x)) * \beta_{-ia}^1(x), \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\beta_{\gamma}^3(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(ax)}{a^2}, & \text{si } x \in [0, 1] \\ \frac{\cos(ax - 2a) + \cos(ax - a) - 2 \cos a}{a^2}, & \text{si } x \in [1, 2] \\ \frac{1 - \cos(ax - 3a)}{a^2}, & \text{si } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

On va tracer maintenant la fonction  $\beta_{\gamma}^3(x)$  pour les valeurs suivantes de  $\gamma$  : 4.3, 3.8,  $\pi$  et 2.5 (Fig 24).

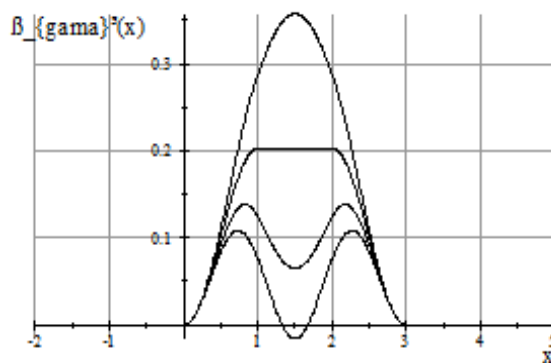


Fig 24 : La  $B$ -spline

$\beta_{\gamma}^3(x)$ ,  $\gamma = 4.3, 3.8, \pi, 2.5$  (De bas en haut)

La droite d'équation  $x = \frac{3}{2}$  est un axe de symétrie.

Le cas :  $a = \pi$ ,  $\gamma = (0, i\pi, -i\pi)$  la  $B$ -spline  $\beta_{\gamma}^3$  définie par :

$$\beta_{\gamma}^3(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(\pi x)}{\pi^2}, & \text{si } x \in [0, 1] \\ \frac{2}{\pi^2}, & \text{si } x \in [1, 2] \\ \frac{1 + \cos(\pi x)}{\pi^2}, & \text{si } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

*III. Construction d'une ondelette non stationnaire à partir de la solution positive de l'équation de Bézout*

Dans ce chapitre, on propose une nouvelle technique de conception d'ondelettes non stationnaires selon les travaux réalisés par M. Unser (38). A partir de l'ensemble des solutions de l'équation de Bézout et en considérant la solution la plus courte, nous construisons une solution positive sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , en utilisant les polynômes de Bernstein, nous approchons cette solution dans le but d'effectuer la factorisation spectrale. Pour illustrer notre idée on va donner un exemple à la fin de ce chapitre.

*3.1 Définitions de base et propriétés de l'analyse multirésolution non stationnaire*

Dans ce contexte, nous nous intéressons à la structure fondamentale proposée par C. de Boor (5).

**Définition 112** (*Analyse multirésolution non stationnaire*) : Soit  $j$  un entier et soit  $(\varphi_j(t))_{j \leq j_0}$  une suite de fonctions dans  $L^2(\mathbb{R})$ , on considère le sous-espace  $V_j$  comme suit

$$V_j = \overline{\text{span}} \left\{ \varphi_{j,k} := \sqrt{2^{-j}} \varphi_j(2^{-j} \cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$$

on dit que  $V_j$  définit une analyse multirésolution non-stationnaire si, et seulement si :

- pour tout  $j \leq j_0$ ,  $\varphi_j(t)$  engendre une base de Riesz ;
- pour tout  $j \leq j_0$ ,  $V_{j+1} \subset V_j$ ;
- $\overline{\bigcup_{j \leq j_0} V_j} = L^2(\mathbb{R})$  et  $\bigcap_{j \leq j_0} V_j = \{0\}$ .
- La suite des fonctions  $(\varphi_j(t))_{j \leq j_0}$  est appelée la fonction d'échelle.

Notons que, dans le cas classique multirésolution stationnaire, S. Mallat (26), les fonctions  $(\varphi_j(t))_{j \leq j_0}$  sont indépendants de l'entier  $j$ .



La condition  $V_{j+1} \subset V_j$  implique l'existence d'une suite  $h_j \in l^2(\mathbb{Z})$  telle que

$$\varphi_{j+1}(2^{-(j+1)}t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_j[k] \varphi_j(2^{-j}t - k), \quad (3.1)$$

le coefficient  $h_j$  est appelé le filtre d'échelle. dans le domaine fréquentiel, la relation (3.1) équivalente à :

$$2\widehat{\varphi}_{j+1}(2\omega) = H_j(e^{i\omega}) \widehat{\varphi}_j(\omega), \quad (3.2)$$

où  $\widehat{\varphi}(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $\varphi$ .

Pour simplifier, nous notons dans la suite :

$$\varphi_{j,k}(t) = \sqrt{2^{-j}} \varphi_j(2^{-j}t - k).$$

### 3.2 L'ensemble du $z$ -domaine et banc de filtres

Dans cette section, nous nous concentrons sur la conception des fonctions d'échelle  $\varphi_j(t)$  qui génèrent une multiresolution non stationnaire ( $V_j$ ). D'après S.Mallat (26), la propriété suivante donne une condition de l'orthogonalité pour les filtres d'échelle.

#### Propriétés

- Supposons que la fonction d'échelle  $(\varphi_j)_{j \leq j_0}$  engendre une analyse multiresolution, de valeurs réelles et de support compact. Alors, pour tout  $j \leq j_0 - 1$ , le filtre d'échelle  $h_j[k]$  a une longueur finie et leurs transformées en  $z$  satisfont l'égalité suivante :

$$H_j(z) H_j(-z^{-1}) + H_j(-z) H_j(-z^{-1}) = 4. \quad (3.3)$$

Par conséquent, nous pouvons construire le filtre d'ondelettes à partir des filtres d'échelle comme suit

$$G_j(z) = z^{2m_j+1} H_j(-z^{-1}),$$

où  $m_j \in \mathbb{Z}$ . Par suite, l'ondelette correspondante est donnée par

$$\psi_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_j[k] \varphi_j(2t - k).$$

• Les fonctions de base  $\psi_{j,k}(t)$  sont obtenus par dilatation et translation de l'ondelette  $\psi_j$  comme suit :

$$\psi_{j,k}(t) = \sqrt{2^{-j}} \psi_j(2^{-j}t - k),$$

et :

$$W_j = \overline{\text{span}} \left\{ \psi_{j,k} := \sqrt{2^{-j}} \psi_j(2^{-j} \cdot - k) / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

• La contrainte d'orthogonalité implique que :

$$\begin{cases} V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}; \\ W_{j+1} \perp V_{j+1}. \end{cases}$$

### 3.3 *B-Splines Exponentielles et Multiresolution*

Comme proposé par M. Unser (38), nous pouvons construire une multirésolution non stationnaire à travers la  $B$ -spline exponentielle. Dans cette section, nous allons montrer quelques définitions et propriétés liées à la  $B$ -Spline.

Soit  $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_M) \in \mathbb{C}^M$  un paramètre-vecteur complexe, la  $B$ -spline exponentielle correspondante est définie par la transformée de Fourier comme suit :

$$\widehat{\beta}_{\vec{\gamma}}(\omega) = \prod_{m=1}^M \frac{1 - e^{\gamma_m - i\omega}}{i\omega - \gamma_m}. \quad (3.4)$$

#### **Propriétés**

•  $\beta_{\vec{\gamma}} \subset L^2(\mathbb{R})$ ;

- $\text{Supp}(\beta_{\vec{\gamma}}) = [0, M]$  ;
- Si  $\vec{\gamma} = \vec{0}$  dans  $\mathbb{C}^M$ , alors la  $B$ -splines exponentielle tend vers la  $B$ -splines classique.

**Corollaire 113** Soit  $\widehat{\beta}_{\vec{\gamma}}$  la fonction définie dans (3.4), alors :

$$2\widehat{\beta}_{2^{j+1}\vec{\gamma}}(2\omega) = 2^{1-M} R_{2^j\vec{\gamma}}(e^{i\omega}) \widehat{\beta}_{2^j\vec{\gamma}}(\omega), \quad (3.5)$$

où

$$R_{\vec{\gamma}}(z) = \prod_{m=1}^M (1 + e^{\gamma_m} z^{-1}).$$

**Preuve.** on a :

$$\begin{aligned} 2\widehat{\beta}_{2^{j+1}\vec{\gamma}}(2\omega) &= 2 \prod_{m=1}^M \frac{1 - e^{2^{j+1}\gamma_m - 2i\omega}}{2i\omega - 2^{j+1}\gamma_m} \\ &= 2^{1-M} \prod_{m=1}^M \left( \frac{1 - e^{2^j\gamma_m 2i\omega}}{i\omega - 2^j\gamma_m} \right) \left( 1 + e^{2^j\gamma_m} e^{-i\omega} \right) \\ &= 2^{1-M} \prod_{m=1}^M \left( 1 + e^{2^j\gamma_m} e^{-i\omega} \right) \prod_{m=1}^M \frac{1 - e^{2^j\gamma_m 2i\omega}}{i\omega - 2^j\gamma_m} \\ &= 2^{1-M} R_{2^j\vec{\gamma}}(e^{i\omega}) \widehat{\beta}_{2^j\vec{\gamma}}(\omega). \end{aligned}$$

■

Si on suppose que  $\varphi_j(t) = \beta_{2^j\vec{\gamma}}(t)$  et  $H_j(z) = 2^{1-M} R_{2^j\vec{\gamma}}(z)$ , on peut définir la suite des sous espaces  $\{V_j\}$  qui représente la structure de multiresolution non stationnaire telle que :

$$V_j = \overline{\text{span}} \{ \beta_{2^j\vec{\gamma}}(2^{-j} \cdot - k) / k \in \mathbb{Z} \},$$

$V_j$  est appelé l'espace emboité de décalage invariant.

La fonction  $\beta_{2^j\vec{\gamma}}(t)$  engendre une base de Riesz, si et seulement si,  $\vec{\gamma}$  n'a pas de composants purement imaginaires distincts  $\gamma$  et  $\gamma'$  tels que

$$2^j (\gamma - \gamma') = i2\pi k,$$

pour certains  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Proposition 114** (21) *Les B-spline exponentielles sont dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ .*

### 3.4 Problème de conception des ondelettes non stationnaires en utilisant l'équation de Bezout

Dans cette section, nous serons intéressés par la construction des filtres d'échelle non stationnaires  $H_j(z)$  en utilisant l'équation de Bézout. Comme montré par M. Unser (38), à partir de la condition d'orthogonalité (3.3), le problème de conception se présente sous la forme suivante :

À un niveau fixe  $j$ , trouvez les plus courts filtres  $Q_j(z)$  tels que :

$$\begin{cases} H_j(z) H_j(z^{-1}) + H_j(-z) H_j(-z^{-1}) = 4; \\ H_j(z) = R_{2^j \vec{\alpha}}(z) Q_j(z). \end{cases} \quad (3.6)$$

Dans la proposition suivante on va donner une équation équivalente au (3.6)

**Proposition 115** *L'équation (3.6) équivalente à l'équation de Bézout suivante :*

$$D_j(Z) C_j(Z) + D_j(-Z) C_j(-Z) = 2. \quad (3.7)$$

De plus il existe un réel positif  $c_j$  tel que :

$$z^{\frac{M}{2}} R_{2^j \vec{\gamma}}(z) = c_j R_{2^j \vec{\alpha}}(z) R_{2^j \vec{\alpha}}(z^{-1}), \quad (3.8)$$

où

$$\begin{cases} C_j(Z) = z^{\frac{M}{2}} R_{2^j \vec{\gamma}}(z) = c_j R_{2^j \vec{\alpha}}(z) R_{2^j \vec{\alpha}}(z^{-1}), \\ Z = \frac{z+z^{-1}}{2}, \\ M = 2N, \quad \vec{\gamma} = (\vec{\alpha}; -\vec{\alpha}), \quad \alpha \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Avec  $C_j \left( \frac{z+z^{-1}}{2} \right)$  est un polynôme de Laurent symétrique et

$$2c_j D_j \left( \frac{z+z^{-1}}{2} \right) = Q_j(z) Q_j(z^{-1}).$$

**Preuve.** Démontrons (3.7), on a

$$H_j(z) = R_{2^j \bar{\alpha}}(z) Q_j(z),$$

on reporte  $H_j(z)$ ,  $H_j(z^{-1})$ ,  $H_j(-z)$  et  $H_j(-z^{-1})$  dans (3.6) on obtient

$$\begin{aligned} R_{2^j \bar{\alpha}}(z) Q_j(z) R_{2^j \bar{\alpha}}(z^{-1}) Q_j(z^{-1}) + R_{2^j \bar{\alpha}}(-z) Q_j(-z) R_{2^j \bar{\alpha}}(-z^{-1}) Q_j(-z^{-1}) &= 4 \\ R_{2^j \bar{\alpha}}(z) R_{2^j \bar{\alpha}}(z^{-1}) Q_j(z) Q_j(z^{-1}) + R_{2^j \bar{\alpha}}(-z) R_{2^j \bar{\alpha}}(-z^{-1}) Q_j(-z) Q_j(-z^{-1}) &= 4, \end{aligned}$$

mais

$$R_{2^j \bar{\alpha}}(z) R_{2^j \bar{\alpha}}(z^{-1}) = \frac{1}{c_j} C_j(Z) \text{ et } Q_j(z) Q_j(z^{-1}) = 2c_j D_j(Z)$$

donc la relation au dessus devienne comme suit :

$$\frac{1}{c_j} C_j(Z) 2c_j D_j(Z) + \frac{1}{c_j} C_j(-Z) 2c_j D_j(-Z) = 4,$$

d'où

$$C_j(Z) D_j(Z) + C_j(-Z) D_j(-Z) = 2.$$

Reste à démontrer (3.8), on a :

$$\begin{aligned}
z^{\frac{M}{2}} R_{2^j \vec{\gamma}}(z) &= z^N \prod_{m=1}^N \left(1 + e^{2^j \alpha_k} z^{-1}\right) \prod_{m=1}^N \left(1 + e^{-2^j \alpha_k} z^{-1}\right) \\
&= z^N \prod_{m=1}^N \left(1 + e^{2^j \alpha_k} z^{-1}\right) \prod_{m=1}^N \left(e^{-2^j \alpha_k} z^{-1}\right) \prod_{m=1}^N \left(1 + e^{2^j \alpha_k} z\right) \\
&= z^N z^{-N} \prod_{m=1}^N e^{-2^j \alpha_k} \prod_{m=1}^N \left(1 + e^{2^j \alpha_k} z^{-1}\right) \prod_{m=1}^N \left(1 + e^{2^j \alpha_k} z\right) \\
&= \prod_{m=1}^N e^{-2^j \alpha_k} \prod_{m=1}^N \left(1 + e^{2^j \alpha_k} z^{-1}\right) \prod_{m=1}^N \left(1 + e^{2^j \alpha_k} z\right) \\
&= c_j R_{2^j \vec{\alpha}}(z) R_{2^j \vec{\alpha}}(z^{-1}).
\end{aligned}$$

■

### Remarque 116

- La résolution de l'équation (3.6) a conduit aux deux étapes suivants :

**Etape 1 :** Résoudre pour  $D_j(Z)$  l'équation (3.7).

**Etape 2 :** Effectuer la factorisation

$$2c_j D_j \left( \frac{z + z^{-1}}{2} \right) = Q_j(z) Q_j(z^{-1}).$$

- Concernant la première étape, le théorème de Bézout affirme que l'équation (3.7) a une solution si et seulement si  $C_j(Z)$  et  $C_j(-Z)$  n'ont pas de racines communes, ce qui équivaut à dire que  $\vec{\gamma}$  ne contient des éléments  $\gamma$  et  $\gamma'$  tels que :

$$2^j (\gamma - \gamma') = i(2k + 1)\pi, \forall j \leq j_0 - 1, \forall k \in \mathbb{Z},$$

l'ensemble des solutions pour l'équation (3.7) est caractérisé par :

$$\{D_0(Z) + Z\Phi(Z^2)C(-Z), \quad \Phi(Z^2) \in \mathbb{R}[Z]\}. \quad (3.10)$$

- $D_0(Z)$  est appelée la solution de Bézout la plus courte obtenue par la résolution d'un système linéaire. En effet, soient  $Z_k = -ch(2^j \alpha_k)$ ,  $k = 1, \dots, M$  sont les racines de  $C(Z)$  c'est à dire  $C(Z_k) = 0$ , de plus,  $D_0(-Z_k)C(-Z_k) = 2$  implique que  $D_0(-Z_k) = \frac{2}{C(-Z_k)}$ , tel que  $C(-Z_k) \neq 0$ , ce qui prouve que  $D_0(Z)$  est polynôme d'interpolation de la fonction  $f(Z) = \frac{2}{C(Z)}$  dans les points  $-Z_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ .

La deuxième étape est possible si la solution de l'équation (3.7)  $D_j(Z)$  vérifie le lemme (Fejér-Riesz) suivant :

**Lemme 117** (12) *Étant donné un polynôme  $S[Z] \in \mathbb{R}[Z]$ , il existe un polynôme Laurent  $Q(z)$  avec des coefficients réels tels que :*

$$S\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) = Q(z)Q(z^{-1}), \quad (3.11)$$

si et seulement si  $S(Z) \geq 0$  pour  $Z \in [-1, 1]$ .

Dans notre cas,  $S(Z) = 2c_j D_j(Z)$  où  $c_j > 0$ .

- Si la solution Bézout la plus courte  $D_{0j}(Z)$  est non positive sur  $[-1, 1]$ , nous essayons de construire une solution de degré supérieur selon (3.10) sur la base du résultat suivant :

**Proposition 118** *Soit  $P(Z)$  une fonction polynomiale, si  $P(Z)$  a des racines hors l'intervalle  $[-1, 1]$  et  $P(0) > 0$  alors  $P(Z)$  est positive sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .*

Ce qui considéré comme l'idée clé de notre approche proposée.

**Preuve.** Il est facile de démontrer graphiquement cette proposition (Fig25).

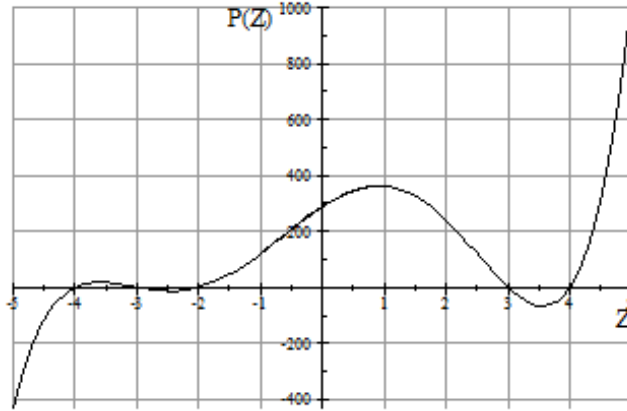


Fig 25 : Polynme  $P(Z)$ .

■

### 3.5 Méthode d'obtention d'une solution positive de l'équation de Bézout

Dans cette section, nous avons l'intention d'expliquer notre idée concernant la méthodologie pour déterminer la solution positive de l'équation (3.7), qui est facile à mettre en oeuvre dans différentes applications comme : Le traitement du signal, traitement d'image,... etc.

Si  $C_j(Z) \in \mathbb{R}[Z]$  satisfait les conditions de Bézout, alors il existe un polynôme  $D_j(Z) \in \mathbb{R}[Z]$  sous la forme :

$$D_j(Z) = D_{0j}(Z) + Z\Phi(Z^2)C_j(-Z), \quad \Phi(Z^2) \in \mathbb{R}[Z].$$

Qui vérifie la condition suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} D_j(Z)C_j(Z) + D_j(-Z)C_j(-Z) = 2; \\ \text{et} \\ D_j(Z) \geq 0 \text{ pour } Z \in [-1, 1]. \end{array} \right.$$



La condition suffisante pour la positivité de  $D_j(Z)$  sur  $[-1, 1]$  est donné dans le lemme suivant :

**Lemme 119** (2) Soit  $D_j(Z)$  une solution de l'équation (3.7) telle que :

$$D_j(Z) = D_{0j}(Z) + Z\Phi(Z^2)C_j(-Z), \quad \Phi(Z^2) \in \mathbb{R}[Z],$$

si  $D_j(0) > 0$  et  $\Phi$  vérifié la condition suivante :

$$|\Phi(Z^2)| \leq \frac{|D_{0j}(Z)|}{|C_j(-Z)|}, \quad (3.12)$$

alors  $D_j(Z)$  est positive sur  $[-1, 1]$ .

**Preuve.** Soit  $Z_0$  une racine de  $D_j(Z)$  alors :

$$\begin{aligned} D_{0j}(Z_0) + Z_0\Phi(Z_0^2)C_j(-Z_0) &= 0 \Leftrightarrow D_{0j}(Z_0) = -Z_0\Phi(Z_0^2)C_j(-Z_0) \\ &\Rightarrow |D_{0j}(Z_0)| = |Z_0\Phi(Z_0^2)C_j(-Z_0)| \\ &\Rightarrow |D_{0j}(Z_0)| \leq |Z_0| \frac{|D_{0j}(Z_0)|}{|C_j(-Z_0)|} |C_j(-Z_0)| \\ &\Rightarrow |Z_0| \geq 1, \end{aligned}$$

donc, les racines de  $D_j(Z)$  sont hors l'intervalle  $[-1, 1]$  et  $D_j(0) > 0$  (voir annexe), ce qui prouve la positivité de  $D_j(Z)$  sur  $[-1, 1]$ . ■

Afin de construire une solution positive de l'équation (3.7) sur  $[-1, 1]$ , notre idée est basée sur la proposition suivante :

**Proposition 120** (2) Soit

$$\Psi(Z^2) = F(Z)F(-Z),$$

où

$$F(Z) = \frac{D_{0j}(Z)C_j(-Z)}{(D_{0j}(Z))^2 + (C_j(-Z))^2}.$$

Alors

$$K_j(Z) = D_{0j}(Z) + Z\Psi(Z^2)C_j(-Z),$$

est une solution positive de l'équation (3.7).

**Preuve.** Il est clair que  $K_j(Z)$  est une solution de l'équation (3.7), le reste de la preuve en ce qui concerne la positivité de  $K_j(Z)$  sur  $[-1, 1]$  est basé sur le Lemme 119, donc, il suffit de démontrer que  $\Psi(Z^2)$  vérifié la condition (3.12) et  $K_j(0) > 0$ . On a :

$$\begin{aligned} \Psi(Z^2) &= \frac{D_{0j}(Z)C_j(-Z)}{(D_{0j}(Z))^2 + (C_j(-Z))^2} \frac{D_{0j}(-Z)C_j(Z)}{(D_{0j}(-Z))^2 + (C_j(Z))^2} \\ \Rightarrow |\Psi(Z^2)| &= \left| \frac{D_{0j}(Z)C_j(-Z)}{(D_{0j}(Z))^2 + (C_j(-Z))^2} \right| \left| \frac{D_{0j}(-Z)C_j(Z)}{(D_{0j}(-Z))^2 + (C_j(Z))^2} \right| \\ &\leq \left( \frac{|D_{0j}(Z)||C_j(-Z)|}{|(C_j(-Z))|^2} \right) \left( \frac{1 \left( (D_{0j}(-Z))^2 + (C_j(Z))^2 \right)}{2 \left( (D_{0j}(-Z))^2 + (C_j(Z))^2 \right)} \right) \\ \Rightarrow |\Psi(Z^2)| &\leq \frac{|D_{0j}(Z)|}{|(C_j(-Z))|}, \end{aligned}$$

et  $K_j(0) = D_{0j}(0) > 0$  (voir appendix), d'après le lemme 119  $K_j(Z)$  est positive sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . ■

**Proposition 121** (2) (Approximation de la solution  $K_j(Z)$ ). Basé sur le théorème de Weierstrass et les polynômes de Bernstein (voir annexe), on approxime sur l'intervalle  $[-1, 1]$  la fraction  $F(Z)$  par les polynômes de Bernstein  $B_n(F)(Z)$  tel que, nous obtenons la solution polynomiale  $D_j(Z)$  de l'équation (3.7) avec les mêmes propriétés de  $K_j(Z)$ , si on pose :

$$B_n(F)(Z) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k F\left(\frac{k}{n}\right) (1+Z)^k (1-Z)^{n-k}. \quad (3.14)$$

et  $\Psi(Z^2) \simeq \Phi(Z^2)$ , avec

$$\Phi(Z^2) = B_n(F)(Z)B_n(F)(-Z),$$

alors :

$$D_j(Z) = D_{0j}(Z) + Z\Phi(Z^2)C_j(-Z).$$

Est une solution positive de l'équation (3.7).

**Preuve.** En utilisant la condition (3.12) et le théorème suivant, on peut prouver que  $D_j(Z)$  est une solution polynomiale positive de l'équation (3.7) sur  $[-1, 1]$ . ■

**Théorème 122** (2) Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[-1, 1]$  et soit  $h$  une fonction positive sur l'intervalle  $D_h$ , où  $D_h$  est l'ensemble de définition de la fonction  $h$ ,  $B_n(f)(Z)$  est l'approximation polynomiale de la fonction  $f$ . si :

$$|f(Z)| \leq h(Z) \text{ pour tout } Z \in [-1, 1]. \quad (3.15)$$

Alors :

$$|B_n(f)(Z)| \leq h(Z), \text{ pour tout } Z \in [-1, 1]. \quad (3.16)$$

**Preuve.** On a :

$$B_n(f)(Z) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) (1+Z)^k (1-Z)^{n-k},$$

alors :

$$\begin{aligned} |B_n(f)(Z)| &= \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) (1+Z)^k (1-Z)^{n-k} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_n^k (1+Z)^k (1-Z)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right|. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Comme  $f$  est continue sur le compact  $[-1, 1]$ , alors  $|f|$  est également continue sur le même intervalle, donc, il existe une constante  $c \in [-1, 1]$  telle que :  $|f(c)| = \sup_{Z \in [-1, 1]} |f(Z)|$ , équivalent à :  $|f(Z)| \leq |f(c)|$ ,  $\forall Z \in [-1, 1]$  en particulier  $|f\left(\frac{k}{n}\right)| \leq |f(c)|$ ,  $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , d'où, la relation (3.17) devienne comme suit :

$$\begin{aligned} |B_n(f)(Z)| &\leq \frac{1}{2^n} \left( \sum_{k=0}^n C_n^k (1+Z)^k (1-Z)^{n-k} \right) |f(c)| \\ &= \frac{1}{2^n} 2^n |f(c)| \leq h(Z). \end{aligned}$$

Finalement :

$$|B_n(f)(Z)| \leq h(Z).$$

■

**Corollaire 123** (2) Pour tout  $Z \in [-1, 1]$ , on pose :

$$f(Z) = \frac{D_{0j}(Z)C_j(-Z)}{(D_{0j}(Z))^2 + (C_j(-Z))^2} = F(Z) \quad \text{et} \quad h(Z) = \frac{|D_{0j}(Z)|}{|C_j(-Z)|}, \quad C_j(-Z) \neq 0.$$

Si  $\Psi(Z^2)$  satisfait l'inégalité suivante  $|\Psi(Z^2)| \leq h(Z)$ , alors,  $\Phi(Z^2)$  aussi satisfait  $|\Phi(Z^2)| \leq h(Z)$ .

**Preuve.** On a :  $|\Psi(Z^2)| = |f(Z)f(-Z)| \leq h(Z)$  alors  $|f(Z)| \leq \frac{h(Z)}{|f(-Z)|}$  tel que  $f(-Z) \neq 0$ , on utilise (3.15) et (3.16) on obtient :

$$|B_n(f)(Z)| \leq \frac{h(Z)}{|f(-Z)|},$$

par conséquent,

$$|B_n(f)(Z)B_n(f)(-Z)| \leq \frac{h(Z)}{|f(-Z)|} |B_n(f)(-Z)| \leq h(Z).$$

Si  $f(Z) \neq 0$ , de même manière, nous obtenons :

$$|B_n(f)(Z)B_n(f)(Z)| \leq h(Z).$$

Finalement, on conclure que : si  $|\Psi(Z^2)| \leq h(Z)$  alors

$$|\Phi(Z^2)| \leq h(Z). \tag{3.18}$$

L'inégalité (3.18) montre que les racines du polynôme :

$$D_j(Z) = D_{0j}(Z) + Z\Phi(Z^2)C_j(-Z),$$

sont hors l'intervalle  $[-1, 1]$  et avec  $D_j(0) = D_{0j}(0) > 0$ , on déduit que  $D_j(Z)$  est positive sur  $[-1, 1]$ . ■

Pour illustrer notre idée, on considère l'exemple suivant.

### 3.6 Exemple illustratif

Si on prend  $\alpha = 0$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $N = 1$ ,  $j = 1$ ,  $n = 1$  on trouve

$$C(Z) = 4 + 8Z + 4Z^2, \quad D_0(Z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}Z,$$

$$F(Z) = \frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}Z\right)(4 - 8Z + 4Z^2)}{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}Z\right)^2 + (4 - 8Z + 4Z^2)^2},$$

$$\Psi(Z^2) = F(Z)F(-Z),$$

$$K(Z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}Z + Z\Psi(Z^2)(4 - 8Z + 4Z^2).$$

C'est à dire :

$$K(Z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}Z + Z \frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}Z\right)(4 - 8Z + 4Z^2)}{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}Z\right)^2 + (4 - 8Z + 4Z^2)^2} - \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}Z\right)(4 + 8Z + 4Z^2)}{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}Z\right)^2 + (4 + 8Z + 4Z^2)^2} (4 - 8Z + 4Z^2),$$

est une solution positive de l'équation de Bézout sur  $[-1, 1]$  ( Fig 26).

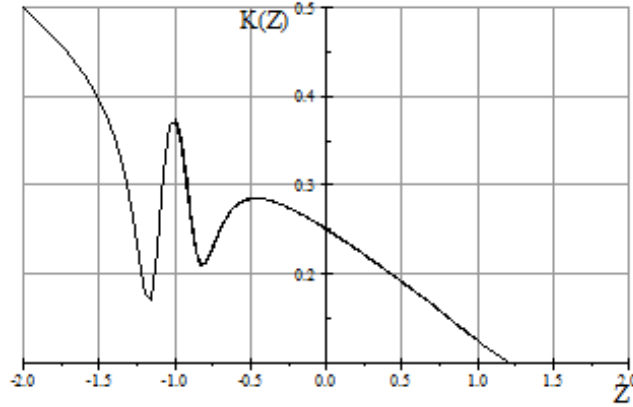


Fig 26 : La solution  $K(Z)$ .

Il reste d'approximer cette solution par les polynômes de Bernstein. On a :

$$B_1(F)(Z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=1} C_1^k F\left(\frac{k}{1}\right) (1+Z)^k (1-Z)^{1-k}$$

$$B_1(F)(Z) = \frac{1}{2} (F(0)(1-Z) + F(1)(1+Z)) = \frac{8}{257} (1-Z)$$

$$\Phi(Z^2) = B_1(F)(Z) B_1(F)(-Z) = \frac{8}{257} (1-Z) \frac{8}{257} (1+Z)$$

$$\Phi(Z^2) = \frac{64}{66\,049} - \frac{64}{66\,049} Z^2$$

$$D(Z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} Z + Z \Phi(Z^2) (4 - 8Z + 4Z^2)$$

$$D(Z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} Z + Z \left( \frac{64}{66\,049} - \frac{64}{66\,049} Z^2 \right) (4 - 8Z + 4Z^2),$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} D(Z) = -0.0039Z^5 + 0.0077Z^4 - 0.0077Z^2 - 0.1211Z + 0.2500 \\ Z = \frac{z + z^{-1}}{2}, \end{array} \right.$$

il est clair que  $D(Z)$  est positif sur  $[-1, 1]$  (Fig 27)

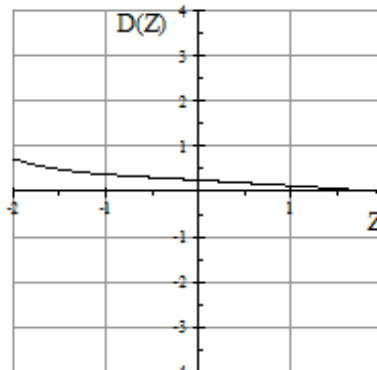


Fig 27 : Solution polynomiale  
 $D(Z)$ .

Donc on applique le lemme de Fejér-Riesz on obtient

$$Q(z) = 0.4794z^4 - 0.1217z^3 - 0.0056z^2 + 0.0019z - 0.0005,$$

mais  $H(z) = R_{2j\vec{\alpha}}(z) Q(z)$  c'est-à-dire

$$H(z) = (1 + z^{-1})^2 Q(z),$$

$$H(z) = 0.4749z^4 + 0.8371z^3 + 0.2304z^2 - 0.1310z - 0.0023 + 0.0009z^{-1} - 0.0005z^{-2},$$

donc les coefficients de la fonction  $\varphi$  sont donnés par :

$$h_{-4} = 0.4749, h_{-3} = 0.8371, h_{-2} = 0.2304, h_{-1} = -0.1310, h_0 = -0.0023, h_1 = 0.0009, h_2 = -0.0005$$

remarquant que  $\sum_{k=-4}^{k=2} h_k = 1.4095 \simeq \sqrt{2}$ .

d'où les filtres d'onde mère résulte de la relation suivante  $g_k = (-1)^k h_{1-k}$ , c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{-1} = -h_2 = 0.0005 \\ g_0 = h_1 = 0.0009 \\ g_1 = -h_0 = 0.0023 \\ g_2 = h_{-1} = -0.1310 \\ g_3 = -h_{-2} = -0.2304 \\ g_4 = h_{-3} = 0.8371 \\ g_5 = -h_{-4} = -0.4794. \end{array} \right.$$

On a :  $\sum_{k=-1}^{k=5} g_k = 0$ , on applique maintenant l'algorithme de cascade on obtient les figures 28 et 29.

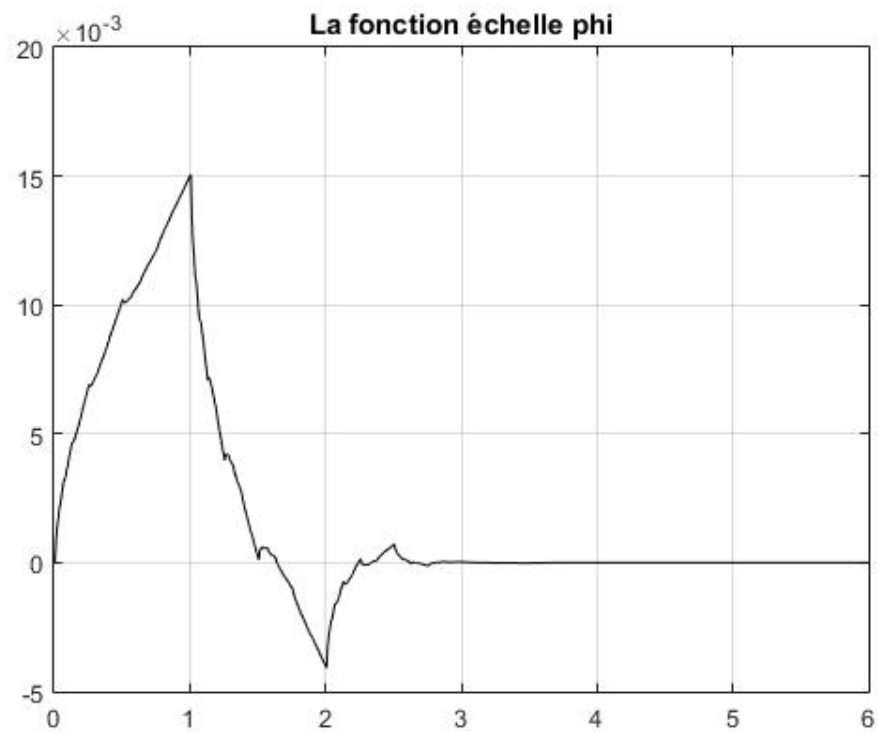


Figure 28 : La fonction d'echelle  $\varphi$ .



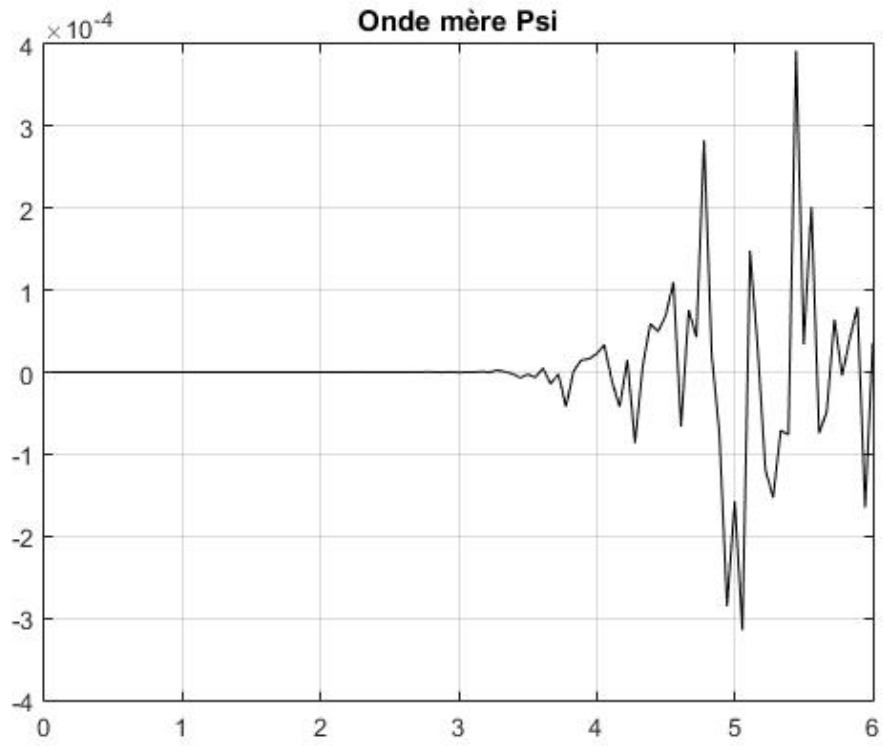


Figure 29 : L'onde mere  $\psi$ .

Quelques exemples sur les ondelettes de Daubechies :

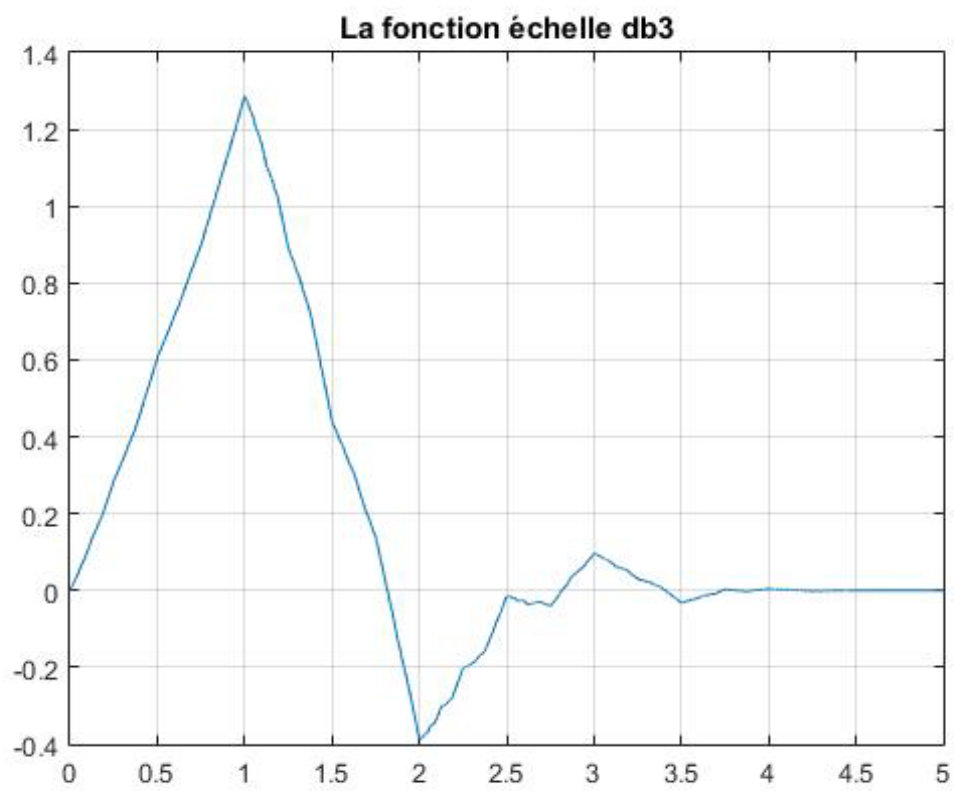


Fig 30 : La fonction echelle db3

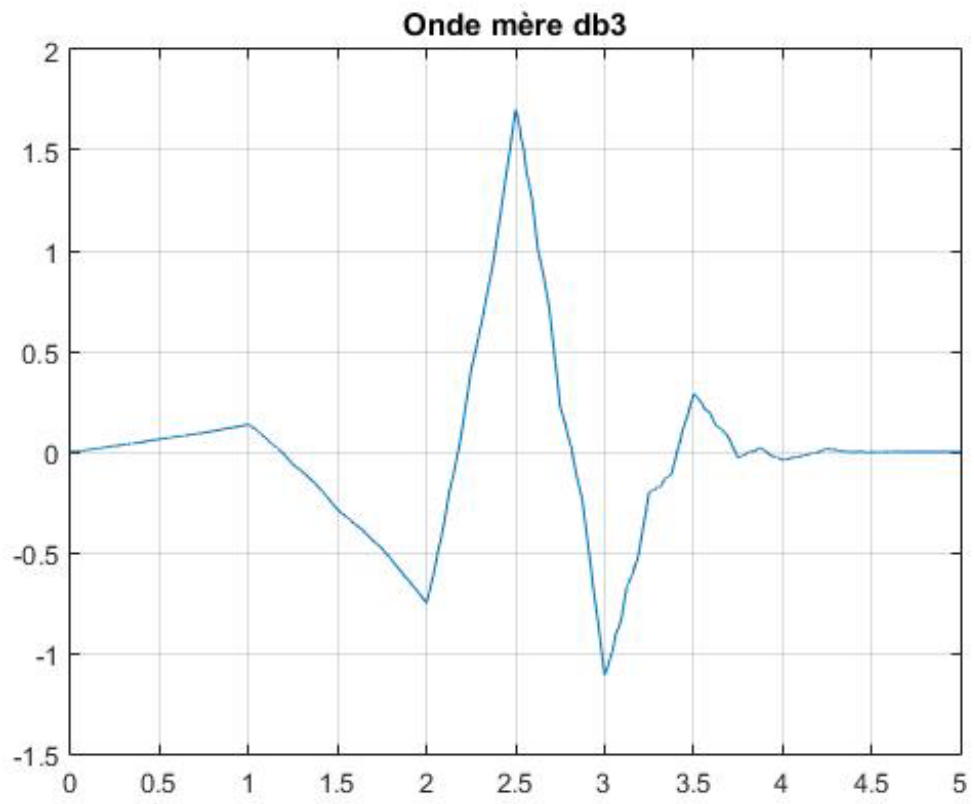


Fig 31 : Onde mere db3

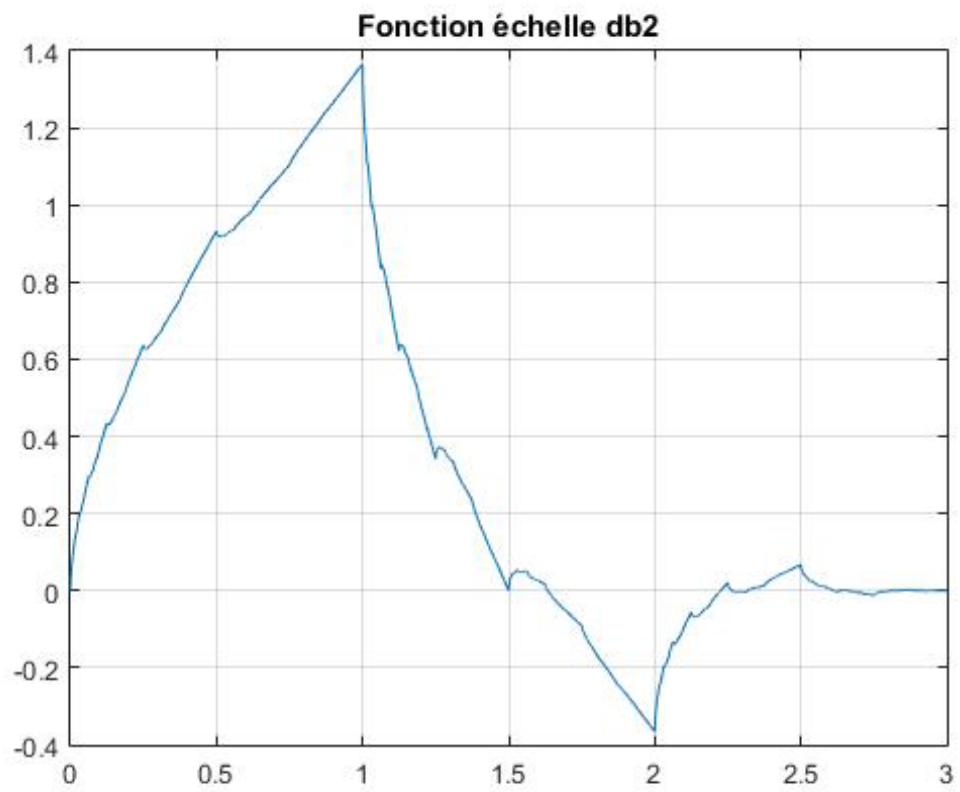


Fig 32 : Foction echelle db2

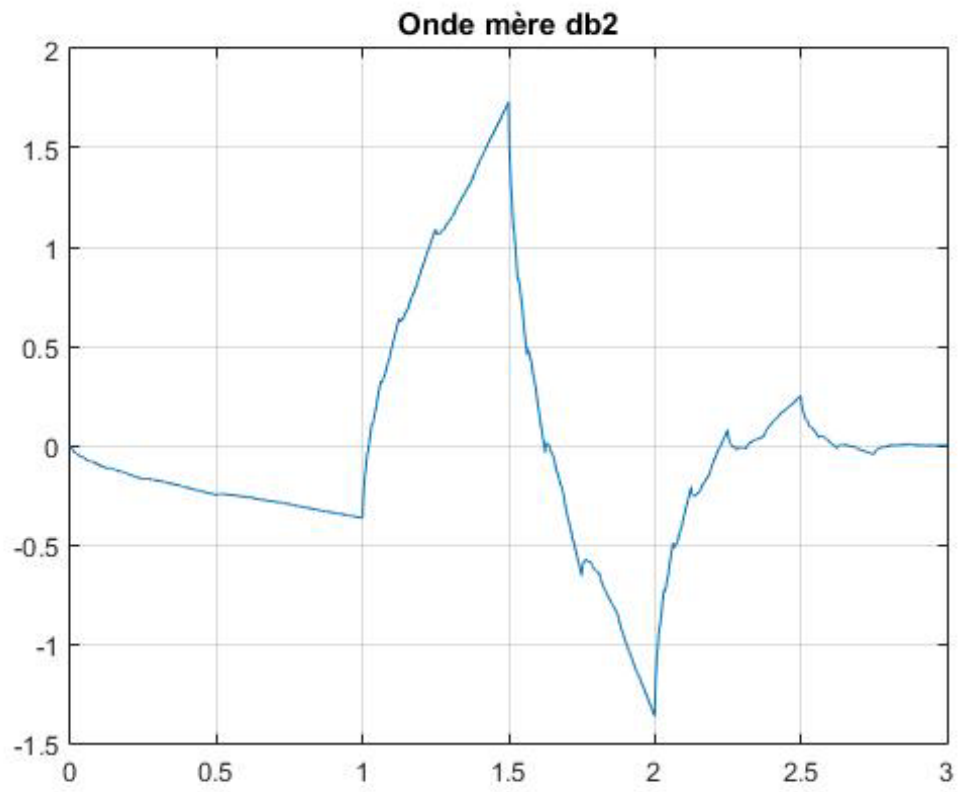


Fig 33 : Onde mere db2

### 3.7 Application à la compression d'images

La compression d'image est basée sur le nombre de zero, puisque si on a dans une information le nombre de zero est élevé l'opération du codage donne un bon résultat c'est-à-dire, on peut coder l'information avec un petit nombre de coefficients.

*3.7.1 Résultats obtenus.* On effectue une simulation sous-Matlab dans le but de calculer le nombre de zéro obtenu après la décomposition d'une image par la transformée en ondelettes. Dans notre cas nous avons utilisé l'image **Lena 512** et nous avons comparé notre résultat avec un ensemble d'ondelettes connus (ondelette de Daubechies), surtout la **bior4.4** qui est utilisée beaucoup par la communauté des ingénieurs dans le domaine de la compression. Les résultats du tableau ci-dessous clarifient la domination de notre ondelette non stationnaire.

Ondelette	db1	db2	db3	db4	db5	bior4.4	<b>notre ondelette</b>
Nombre de zéro	106645	105679	105842	106234	106831	106813	<b>107023</b>

3.7.2 *Figures de la décomposition.*

**Image originale**



Fig 34 : Image originale

Image décomposée par l'ondelette non stationnaire



Fig 35 : Image décomposée par l'ondelette non stationnaire.



## Conclusion

Dans ce travail, une conception d'ondelettes stationnaires et non stationnaires a été présentée. La nouvelle technique utilisée dans ce travail est la suivante : à partir de l'ensemble des solutions positives sur l'intervalle  $[-1, 1]$  de l'équation de Bézout, nous avons fourni une méthode d'une construction d'une ondelette non stationnaire et nous avons utilisé les polynômes de Bernstein pour approcher cette solution avec la préservation de la positivité sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . Les coefficients du filtre d'échelle sont obtenus d'après l'utilisation d'une factorisation spectrale. En raison de la simplicité dans l'implémentation, la procédure proposée peut être adoptée dans différents domaines de l'ingénierie tels que le traitement du signal et de l'image.

## IV. Annexe

**Démonstration que  $D_j(0) > 0$  :**

On a  $D_j(0) = D_{0j}(0)$  et  $D_{0j}(0)C_j(0) = 1$  d'autre part on a

$$C_j(Z) = c_j \prod_{m=1}^M \left(1 + 2e^{2^j \alpha} Z + e^{2^{j+1} \alpha}\right),$$

et comme  $C_j(0) = c_j \prod_{m=1}^M \left(1 + e^{2^{j+1} \alpha}\right) > 0$  alors  $D_j(0) > 0$ .

### 4.1 Théorème de Weierstrass

**Théorème 124 (33) :** *Supposons que  $f$  est une fonction à valeurs réelles et continue sur  $[a, b]$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme  $p(x)$  tel que pour tout  $x$  dans  $[a, b]$ , on a  $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ , ou de manière équivalente, la norme supremum  $\|f - p\| < \varepsilon$ .*

### 4.2 Les polynômes de Bernstein

4.2.1 *Famille des polynômes de Bernstein.* Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k \leq n$  on appelle

polynôme de Bernstein  $B_{k,n}$  le polynôme

$$B_{k,n}(x) = \frac{1}{2^n} C_n^k (1+x)^k (1-x)^{n-k},$$

$$\text{où } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

#### Propriétés

- Le degré de  $B_{k,n}$  égale à  $n$ ,
- $\sum_{k=0}^n B_{k,n}(x) = 1$  pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,
- $B_{k,n}$  est positif sur  $[-1, 1]$ ,

- $B_{k,n} = 0$  pour  $k < 0$  ou  $k > n$ ,
- $B_{k,n}$  atteint son maximum sur  $[-1, 1]$ ,
- $(B_{k,n})'(x) = n(B_{k-1,n-1}(x) - B_{k,n-1}(x))$
- $(B_{k+1,n+1})'(x) = (1-x)(B_{k+1,n})'(x) + x(B_{k,n})'(x)$

**Théorème 125** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les polynômes  $(B_{k,n})_{0 \leq k \leq n}$  forment une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

#### 4.2.2 Polynômes de Bernstein associés à une fonction.

**Définition 126** Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[-1, 1]$  pour tout entier non nul  $n$ , le polynôme de Bernstein associé à  $f$  est défini par :

$$B_n(f(x)) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) (1+x)^k (1-x)^{n-k}.$$

on dit que la suite  $B_n(f)$  est une approximation polynomiale de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ .

**Théorème 127** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[-1, 1]$ , alors la suite  $B_n(f)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[-1, 1]$ .

**Proposition 128** Soit  $f$  une fonction admette une dérivée second sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , alors l'erreur d'approximation par les polynômes de Bernstein est donnée par la formule suivante :

$$\forall x \in [-1, 1] : E_n(x) = B_n(f(x)) - f(x) = \frac{1}{8n} (1-x^2) f''\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Pour plus des détails sur les polynômes de Bernstein voir D. F. Walnut (39)

## *Bibliographie*

1. O. Barkat, Analyse multi-résolution et bases d'ondelettes Non stationnaire. Magister thesis, Université Mohamed Khider - Biskra, (2012).
2. M.Brahimi, k.Melkemi and A.Boussaad, Design of nonstationary wavelets through the positive solution of Bezout's equation, *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 10.1080/09720502.2020.1792102, (1-13), (2020).
3. P. J. Barry. de Boor-Fix, dual functionals and algorithms for Tchebyshev B-spline curves. *Constr. Approx*, pages 385-408, 1996.
4. I. Boggess and F. J. Narcowich, *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.
5. C. de Boor, R.A. DeVore and A. Ron, On the construction of multivariate (pre) wavelets. *Construct. Approx.* **9** (1993), no. 2-3, 123-166.
6. E. W. Cheney and D. R. Kincaid, *Numerical Analysis : Mathematics of Scientific Computing*, 3rd ed., Brooks/Cole, Belmont, CA, 2001.
7. O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, Boston, Mass, USA, 2003.
8. A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau, Biorthogonal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.* **45** (1992), 485-560.
9. R.R. Coifman and Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs III, Opérateurs multilinéaires*. Hermann, Paris (1991).
10. R. Coifman and M. V. Wickerhauser, Entropy-based algorithms for best basis selection, *IEEE Trans. Inform. Theory* **38** (1992), 713-718.
11. I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* **41**(1988), no. 7, 909-996 .
12. I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
13. N. Dyn and D. Levin, "Analysis of asymptotically equivalent binary subdivision schemes," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 193, no. 2, pp.594-621, 1995.
14. N. Dyn, D. Levin, and A. Luzzatto, "Refining oscillatory signals by non-stationary subdivision schemes," in *Modern Developments in Multivariate Approximation*, vol. 145 of *International Series of Numerical Mathematics*, pp. 125-142, Birkhäuser, Basel, Switzerland, 2003.
15. N. Dyn and A. Ron. Cardinal translation invariant Tchebysheffian  $B$ -splines. *Approximation Theory and its Applications*, 6(2) : 1-12, 1990.
16. B.Han and Z.Shen, Characterization of Sobolev Spaces of arbitrary Smoothness using non stationary tight Wavelet frames. NSERC, Grant RGP228051. Canada (2007).
17. D. Hong, J. Wang, and R. Gardner, *Real Analysis with an Introduction to Wavelets and Applications*, Academic Press, San Diego, CA, 2004.

18. D. A. Huffman, A method for the construction of minimum-redundancy codes, Proc. Inst. Radio Eng. **40** (1952), 1098-1101.
19. R. Q. Jia and J. Wang, "Stability and linear independence associated with wavelet decompositions," Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 117, no. 4, pp.1115–1124, 1993.
20. D. W. Kammler, A First Course in Fourier Analysis, 2nd ed., Cambridge University Press, New York, 2008.
21. I. Khalidov and M. Unser, From differential equations to the construction of new wavelet-like bases. IEEE Trans Sig. Process. **54**(2006), no. 4, 1256-1267.
22. P. J. Laurent. Approximation et Optimisation. Hermann, 1970.
23. Y. J. Lee and J. Yoon. Analysis of Compactly Supported Nonstationary Biorthogonal Wavelet Systems Based on Exponential B-Splines. Hindawi Publishing Corporation. Abstract and Applied Analysis, Article ID 593436, 17 pages, 2011.
24. P.G. Lemarié, Ondelettes .a localisation exponentielle. J. Math. Pures Appl. **67**(1988), no. 3, 227-236.
25. T. Lyche. A recurrence relation for chebyshevian B-splines. Constructive Approximation, 1 :155{173, 1985.
26. S. Mallat, A wavelet tour of signal processing. Academic press (1999).
27. S.G. Mallat, Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$ . Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1989), no. 1, 69-87.
28. M. L. Mazure and P. J. Laurent. piecewise smooth spaces in duality : application to blossoming. Journal of Approximation Theory, 98 : 316-353, 1999.
29. M.L. Mazure and K. Melkemi, Orthonormality of cardinal Chebyshev B-spline bases in weighted Sobolev spaces Constr. Approx. **18** (2002), no. 3, 387-415.
30. K. Melkemi, Orthogonalité des B-splines de Chebyshev cardinales dans un espace de Sobolev pondéré. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble, (1999).
31. Y. Meyer, Wavelets and Operators, Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1992.
32. W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1976.
33. D. k. Ruch and P. J. Van Fleet, Wavelet Theory an Elementary Approach with Application.
34. K. Saxe, Beginning Functional Analysis. Springer New York, (2002).
35. K.Scherer and L. L. Schumaker. A dual basis for  $L$ -splines and applications. Journal of Approximation Theory, 29 : 151-169, 1980.
36. H. G. Ter Morsche. Interpolational andextramal extramal proprieties of L-spline functions. PhD thesis, Eindoven University of Technology, (1982).
37. M. Unser and T. Blu, "Cardinal exponential splines. I. Theory and filtering algorithms,"IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 53, no. 4, pp. 1425–1438, 2005.
38. C. Vonesch, T. Blu and M. Unser, Generalized Daubechies wavelet families. IEEE Trans Sig. Process. **55** (2007), no. 9, 4415-4429.
39. D. F. Walnut, An Introduction to Wavelet Analysis, Birkhäuser, Boston, 2002.

40. A.C. Zaanen, Continuity, Integration and Fourier Theory. Springer Berlin Heidelberg, (1989) .

## Résumé

Ce travail a présenté une étude sur les ondelettes stationnaires et non stationnaires ainsi des concepts sur l'analyse multirésolution stationnaire et non stationnaire avec l'utilité des  $B$ -splines exponentielles dans la construction des ondelettes non stationnaires. Une présentation d'une nouvelle technique de construction une ondelette non stationnaire à partir de l'ensemble des solutions positives de l'équation de Bézout à été donnée. Par la suite nous avons approximé cette solution par les polynômes de Bernstein avec l'intention de réaliser une factorisation spectrale par laquelle les coefficients d'ondelettes sont déterminés.

**Mots clés :** Ondelettes stationnaires, ondelettes non stationnaires, analyse multirésolution, équations de Bézout,  $B$ -splines exponentielles.

## Abstract

This work presented a study on stationary and non-stationary wavelets as well as concepts on stationary and non-stationary multiresolution analysis with the utility of exponential  $B$ -splines in the construction of non-stationary wavelets. A presentation of a new technique for constructing a non-stationary wavelet from the set of positive solutions of the Bézout's equation was given. Subsequently we approximated this solution by Bernstein polynomials with the intention to perform a spectral factorization by which the wavelet coefficients are determined.

**Key words:** stationary wavelets, non-stationary wavelets, multiresolution analysis, Bézout's equation, exponentials  $B$ -splines.

## ملخص

قدم هذا العمل دراسة حول الموجات الثابتة وغير الثابتة بالإضافة إلى بعض المفاهيم حول التحليل متعدد الحل الثابت وغير الثابت مع إبراز أهمية الخطوط الاسية في بناء الموجات غير الثابتة، كما يقدم هذا العمل عرضا جديدا حول بناء موجات غير ثابتة إنطلاقا من مجموعة الحلول الموجبة لمعادلة بيزوت، بعدها قمنا بتقريب هذا الحل باستعمال كثيرات حدود برنشتاين وهذا من أجل تحقيق التحليل الطيفي الذي عن طريقه يتم تعيين معاملات الموجات.

**الكلمات المفتاحية:** الموجات الثابتة، الموجات غير الثابتة، تحليل الحل المتعدد، معادلة بيزوت،  
الخطوط الأسية.