

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Thèse présentée en vue de l'obtention du Diplôme :

Doctorat en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par : Mme Senouci Assia

Titre :

Systemes dynamiques chaotiques et synchronisation

Membres du Comité d'Examen :

Mokhtari Zouhir	Prof.	Université de Biskra	Président
Menacer Tidjani	M.C.A	Université de Biskra	Rapporteur
Yahia Djabrane	Prof	Université de Biskra	Examineur
Guedda Lamine	M.C.A	Université d' Eloued	Examineur
Aissaoui Adel	M.C.A	Université d' Eloued	Examineur
Djeffal El Amir	Prof	Université de Batna	Examineur

Soutenue le : 01 / 07 / 2020

DÉDICACE

A ma mère décédée

A mon mari Said

A mon fils Mohamed Kossai et ma fille Zineb

A mes frères Khaled, Abdelhalim et Salah

A mes sœurs Samra et Roughia

A toute ma famille

A tous mes amis

REMERCIEMENTS

Avant tout, ma reconnaissance va à Allah le tout puissant qui m'a donnée la volonté, le courage, la patience et m'a aidée à compléter ce travail.

Ce travail de thèse s'achevant vient le moment des remerciements. Mille excuses à ceux où celles que je vais oublier, mais je vais quand même tâcher de faire de mon mieux, Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes celles et ceux qui m'ont apporté leur soutien, leur amitié où leur expérience tout au long de ce travail de thèse.

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le docteur : *Menacer Tidjani*, qui a dirigé cette thèse. Grâce à ces incessants conseils et son inaltérable motivation cette formation par et pour à la recherche a été des plus passionnantes.

Mes remerciements vont également à monsieur le professeur : *Mokhtari Zouhir* d'avoir accepté d'être président du jury de cette thèse.

Mes remerciements vont aussi à le professeur : *Yahia Djabrane* et monsieur le docteur : *Guedda Lamine*, et monsieur le docteur : *Aissaoui Adel* et monsieur le professeur : *Djeffal El Amir* participation au jury.

Finalement, je remercie tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail même par un mot d'encouragement parmi mes enseignants, mes amies, mes collègues de l'université de Biskra.

Abstract

In this work we have dealt with the problem of control and synchronization of fractional order chaotic dynamic systems.

We started with some preliminaries on dynamical systems and chaos theory, then we give basic notions on fractional calculus. We have approached the chaos control problems in the fractional case, we have proposed the adaptive nonlinear control method and the Pyragas method. We have mentioned to some type of synchronization in the fractional case and in the whole case.

Finally, we have studied the problem of stabilization of the equilibrium points, chaos control and the auxiliary synchronization of two Jerk systems in the fractional case. Theoretical results are validated by simulations.

Key word : Chaotic dynamic systems, fractional computation, auxiliary synchronization, Routh-Hurwitz criterion of fractional order.

Résumé

Dans ce travail nous avons traité le problème de contrôle et la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à d'ordre fractionnaires.

Nous avons commencé par quelques préliminaires sur les systèmes dynamiques et la théorie du chaos, ensuite nous donnons notions de base sur le calcul fractionnel. Nous avons abordé les problèmes de contrôle de chaos dans le cas fractionnaire, nous avons proposé la méthode de contrôle non linéaire adaptatif et méthode de Pyragas. Nous avons mentionné à quelque type de synchronisation dans le cas fractionnaire et dans le cas entier.

En fin, nous avons étudié le problème de stabilisation des points d'équilibre, contrôle de chaos et la synchronisation auxiliaire de deux systèmes de Jerk dans le cas fractionnaire. Les résultats théoriques sont validés par de simulations.

Mot clé : Systèmes dynamiques chaotiques, calcul fractionnel, synchronisation auxiliaire, critère de Routh-Hurwitz d'ordre fractionnaire.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Abstract	iii
Résumé	iv
Table des matières	v
Liste des figures	x
Liste des tableaux	xiii
Introduction	1
1 Introduction aux systèmes dynamiques	4
1.1 Espace de phase	5
1.2 Système autonome ou non	6
1.3 Système conservatif ou non	7
1.4 Trajectoire, Orbite et <i>point d'équilibre</i>	8
1.5 Flot ou système dynamique	8
1.5.1 Flot d'un système linéaire	9
1.5.2 Flot d'un système non linéaire	9
1.6 Cycles limites	10

1.6.1	Classification des cycles limites	10
1.7	Classification des points d'équilibre	10
1.7.1	Cas des systèmes linéaires	10
1.7.2	Cas des systèmes non linéaires	11
1.8	Section de Poincaré	12
1.9	Attracteurs et attracteurs étranges	13
1.9.1	Attracteurs	13
1.9.2	Les différents types d'attracteurs	13
1.10	Stabilité d'équilibres	15
1.10.1	Stabilité des solutions d'équilibre	15
1.10.2	Type de stabilité	16
1.10.3	Stabilité des systèmes linéaires	16
1.10.4	Stabilité des systèmes non linéaires	17
1.11	Bifurcation	20
1.11.1	Bifurcation locale	21
1.12	Conclusion	25
2	Theorie de chaos	26
2.1	Caractérisation de chaos	27
2.1.1	Sensibilité aux conditions initiales	27
2.1.2	Attracteur étranges	28
2.1.3	Diagramme de bifurcation	29
2.2	Détection du chaos	31
2.2.1	les exposants de Lyapunov	31
2.2.2	Dimension fractale	33
2.3	Propriétés du chaos	36
2.4	Le chaos déterministe	37
2.4.1	Transition vers le chaos	37
2.5	Exemple de Système dynamique chaotique	39

2.5.1	Modèle de Lorenz	39
2.6	Conclusion	44
3	Notions du calcul fractionnaire	45
3.1	Notion préliminaires et outils de base	46
3.1.1	La fonction Gamma	46
3.1.2	La fonction Bêta	47
3.1.3	La fonction Mittag-leffler	47
3.2	L'intégrale de Riemann-Liouville (R-L)	48
3.3	Dérivées fractionnaire	48
3.3.1	Approche de Riemann-Liouville (R-L)	48
3.3.2	Quelques propriétés d'approche de dérivation fractionnaire au Riemann Liouville	49
3.3.3	Approche de Caputo	50
3.3.4	Quelques propriétés d'approche de Caputo	50
3.3.5	Lien entre la dérivée fractionnaire de Caputo et de Riemann-Liouville	51
3.4	La transformé de Laplace	51
3.4.1	Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires	52
3.5	Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire	55
3.6	Contrôle du chaos dans le cas fractionnaire	56
3.6.1	Méthode de Contrôle adaptatif	57
3.6.2	Méthode feedback	61
3.7	Conclusion	65
4	Synchronisation des systèmes dynamiques	66
4.1	Définitions de synchronisation :	67
4.2	Méthode de synchronisation	68
4.2.1	Synchronisation bidirectionnelle	68
4.2.2	Synchronisation unidirectionnelle	69

4.3	Types de synchronisation	71
4.3.1	Synchronisation complète	71
4.3.2	Synchronisation généralisée	75
4.3.3	Synchronisation de phase	78
4.3.4	Synchronisation projective	79
4.4	Synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire	79
4.4.1	Synchronisation complète	79
4.4.2	Synchronisation projective	82
4.4.3	Synchronisation généralisée	86
4.5	Conclusion	87
5	Stabilité, contrôle et synchronisation des systèmes de Jerk d'ordre fractionnaire	88
5.1	Introduction	88
5.2	Premier modèle	89
5.2.1	La stabilité du point d'équilibre	90
5.2.2	Contrôle de chaos	91
5.3	Deuxième modèle	93
5.3.1	La stabilité des points d'équilibre	93
5.3.2	Contrôle de chaos	94
5.4	Synchronisation	97
5.4.1	Simulation numérique	99
5.5	Conclusion	99
	Conclusion	101
	Bibliographie	103
	Annexe A : Critère de Routh-Hurwitz dans le cas fractionnaire	109

Table des figures

1.1	<i>Cycle limite</i>	10
1.2	<i>Classification topologique des points d'équilibres</i>	11
1.3	<i>Section de Poincaré</i>	12
1.4	<i>Attracteur réguliers</i>	14
1.5	<i>Signification géométrique au sens de Lyapunov</i>	16
1.6	<i>Signification géométrique de la stabilité asymptotique</i>	17
1.7	<i>Bifurcation nœud-col</i>	21
1.8	<i>Bifurcation fourche</i>	22
1.9	<i>Bifurcation transcritique</i>	23
1.10	<i>Bifurcation de Hopf</i>	24
2.1	<i>Sensibilité aux conditions initiales du système de Lorenz</i>	28
2.2	<i>(a) Sensibilité aux conditions initiales (b) trajectoire chaotique</i>	29
2.3	<i>Diagramme de bifurcation expérimentale pour la vibration d'une poutre déformée :</i>	31
2.4	<i>Exposant de Lypounov de système de Lorenz</i>	32
2.5	<i>Trajectoire du système de Lorenz</i>	40
2.6	<i>Une vue schématique du flux près de l'origine pour r près d'un</i> (a) $r < 1$ (b) $r > 1$	41
2.7	<i>Diagramme de bifurcation du système de Lorenz à $\sigma = 10$ et $b = 8/3$</i>	43
3.1	<i>Fonction Gamma</i>	46

3.2	<i>Région de stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire</i>	56
3.3	<i>Attracteur chaotique et séries chronologiques du système d'ordre fractionnaire</i>	
	<i>3.18 : (a) Chaotique attracteur, (b) séries chronologiques</i>	60
3.4	<i>Les trajectoires du système contrôlé eq. 3.19 équilibre stabilisant point : (a)</i>	
	<i>P_0, (b) P_1, (c) P_2</i>	61
3.5	<i>Diagrammes de phase pour le système Liu avec des ordres fractionnaires pro-</i>	
	<i>portionnels : (a) $\alpha = 1$, (b) $\alpha = 0,99$, (c) $\alpha = 0,9$, (d) $\alpha = 0,85$, (e) $\alpha = 0,83$</i>	63
3.6	<i>Les trajectoires du système commandé 3.24; (a) sont stabilisés au point d'équi-</i>	
	<i>libre $E_1 = (5, 5, 40)$ à $\alpha = 0,9$; (b) ne sont pas stabilisés au point d'équi-</i>	
	<i>libre $E_1 = (5, 5, 40)$ en $\alpha = 1,0$; en utilisant les régulateurs $k_1 = 2$, $k_2 =$</i>	
	<i>4,3783, $k_3 = 1$ et les valeurs de paramètre $a = 10$, $b = 40$, $c = 2, 5$, $\sigma = 4$, $\kappa = 1$</i>	64
3.7	<i>Les trajectoires du système commandé 3.24; (a) sont stabilisés au point d'équi-</i>	
	<i>libre $E_2 = (-5, -5, 40)$ à $\alpha = 0,9$; (b) ne sont pas stabilisés au point d'équi-</i>	
	<i>libre $E_2 = (-5, -5, 40)$ en $\alpha = 1,0$; en utilisant les régulateurs $k_1 = 2$,</i>	
	<i>$k_2 = 4, 3783, k_3 = 1$ et les valeurs de paramètre $a = 10$, $b = 40$, $c = 2, 5$, $\sigma = 4$,</i>	
	<i>$\kappa = 1$</i>	65
4.1	<i>Attracteur de système Rössler</i>	69
4.2	<i>États synchronisés de Rössler et trajectoires d'erreur par couplage bidirectionnel.</i>	70
4.3	<i>États synchronisés de Rössler et trajectoires d'erreur par couplage unidirec-</i>	
	<i>tionnel</i>	70
4.4	<i>Attracteur de Lu</i>	74
4.5	<i>(a) Affiche la réponse temporelle de l'état du variateur (x_1) du système d'en-</i>	
	<i>traînement 4.9 et l'état de réponse (x_2 - -) du système de réponse 4.10 en</i>	
	<i>utilisant le schéma Pecora et Carroll. (b) Affiche la réponse temporelle de les</i>	
	<i>états du lecteur (z_1) du système d'entraînement 4.9 et les états de réponse (z_2</i>	
	<i>- -) du système de réponse 4.10 en utilisant le schéma Pecora et Carroll. . .</i>	75

4.6	<i>Attracteur du système Chua avec un ordre fractionnaire. Ici $(p_1; p_2; a; b) = (10; 14, 87; 1, 27; 0, 68)$, $q = (0, 92; 0, 92; 0, 98)$, la longueur du pas de temps est de 0,02, les 100 premiers points sont supprimés. (a) Le portrait de x contre y. (b) Le portrait de x contre z. (c) Le portrait de y contre z. (d) Le portrait en \mathbb{R}^3</i>	82
4.7	<i>L'évolution des fonctions d'erreur sur la synchronisation du chaos entre 4.21 et 4.22, — signifiee $e_2 = y_s - y_m$, --- signifie $e_3 = z_s - z_m$. Ici $(p_1; p_2; a; b) = (10; 14, 87; 1, 27; 0, 68)$, $q = (0, 92; 0, 92; 0, 98)$</i>	83
4.8	<i>(a) Evolution temporelle du facteur d'échelle x_s/x_m. (b) La projection du maître et de l'esclave système sur le plan $x - y$</i>	85
4.9	<i>Les projections des systèmes maître et esclave sur le plan $x - y$ pour (a) $\beta^* = 5$; (b) $\beta^* = -3$</i>	86
5.1	<i>Les trajectoires du système contrôlé 5.2, Non Stabilisé es point d'équilibre E pour $\alpha = 1$</i>	92
5.2	<i>Les trajectoires du système contrôlé 5.4 Stabilisé au point d'équilibre E_2 pour $\alpha = 0.98$</i>	96
5.3	<i>Les trajectoires du système contrôlé 5.4 non Stabilisé au point d'équilibre E_2 pour $\alpha = 1$</i>	96
5.4	<i>Synchronisation entre 5.6 et 5.7 d'ordre fractionnaire pour $\alpha = 0.98$</i>	99

Liste des tableaux

2.1	Caractérisation d'attracteur	32
-----	--	----

Introduction

"...Pendant que j'étais obligé de garder la chambre durant quelques jours, j'étais occupé de faire des observations sur mes deux horloges du nouvel atelier; j'ai remarqué un effet admirable auquel personne n'aurait jamais penser : C'est que ces deux horloges, accrochées l'une coté de l'autre avec une distance de un ou deux pieds l'une de l'autre gardent entre elles une précision si exacte, que les deux pendules battent toujours ensemble sans jamais varier; ce que j'avais fort admiré pendant un certain temps. J'ai finalement constaté que ceci s'est produit en raison d'une sorte de sympathie : quand j'ai fait balancer les pendules un rythme différent, j'ai constaté qu'une demi-heure plus tard, ils sont toujours revenus la synchronisationcette fois je les ai mis l'une plus loin de l'autre, accrochant une d'un coté de la salle et l'autre une quinzaine de pieds plus loin, j'ai vu qu'après un jour, il y a eu une différence de cinq secondes entre elles et, par conséquent, leur accord plus tôt était seulement du a de la sympathie... A mon avis, cela ne peut pas être provoqué par n'importe quoi, si ce n'est que par une agitation imperceptible de l'aire du au mouvement du pendule..."

Avec cette lettre, adressée par Cristian Huygens à son père Constantin Huygens le 26 février 1665, le phénomène de synchronisation est décrit pour la première fois. Ce phénomène fait l'objet de recherches actives depuis l'aube de la physique. Il a commencé par la découverte de Huygens au 17ème siècle puis a vu une amélioration très intéressante dans les années 1920 car il était lié au développement de la physique électrique [54]. Ce dernier est basé sur l'étude de phénomènes non linéaires périodiques appelés oscillateurs. W.H. Eccles, Vincent, E. Appleton, B. Van Der Pol. . et beaucoup d'autres ont sacrifié leurs recherches et leurs travaux sur ce phénomène non linéaire pendant des années. À cette fin, la synchronisation était connue comme l'une des théories classiques des oscillateurs. Dans ce cas on distingue

deux types de synchronisation : la synchronisation provoquée par une force externe et la synchronisation mutuelle des oscillateurs. Cela signifie que si les oscillateurs ont très peu de fréquences différentes les unes des autres, une très faible interaction peut suffire à les maintenir synchronisés.

Outre le développement du phénomène de synchronisation, une autre branche des mathématiques pique l'intérêt des chercheurs scientifiques : c'est un autre phénomène non linéaire appelé chaos [57]. Poincaré (1854_1912) fut l'un des premiers à avoir un aperçu de la théorie du chaos. Il a découvert le concept de sensibilité aux conditions initiales grâce à l'interaction des trois corps célestes [58]. Cela correspond au fait où les petites causes conduisent à des effets importants. Plus tard, Lorenz (1960) a mis en évidence ce phénomène, grâce notamment à l'avènement des ordinateurs.

Depuis, des chercheurs de domaines variés (biologie, chimie, mathématiques, physique, ingénierie, etc.) se sont intéressés aux dynamiques non linéaires imprévisibles, regroupées sous le nom de chaos et qui jusqu'alors n'avaient pas de solution. Ils voulaient répondre à des questions telles que : comment se forment les nuages ? Comment expliquer des phénomènes tels que les arythmies cardiaques et les fluctuations de population ... etc.

Plusieurs avancées ont été faites dans ce domaine qui ont permis de développer diverses méthodes et techniques d'analyse et de contrôle des systèmes de bifurcation non linéaires et de la dynamique qui leur est associée (chaos, quasi-périodicité, doublement de période, etc.). Le chaos perçu comme un problème majeur en ingénierie, en particulier en automatisation, en électronique et en électrotechnique, est désormais synonyme de polyvalence et de flexibilité grâce à ces nouvelles méthodes.

La théorie des systèmes dynamiques trouve son origine dans les travaux d'Henri Poincaré. Depuis le début du siècle, le mathématicien a montré dans son étude du système solaire qu'il existe des orbites stables et instables et que parfois une très petite perturbation du système peut provoquer un changement d'état d'une orbite. Il s'est rendu compte que des causes identiques peuvent ne pas avoir le même effet. Le système étudié était déterministe, mais le principe de causalité a été violé. Henri Poincaré (1854-1912) a également mis en

évidence l'imprévisibilité d'un système à trois corps en interaction à la fin du XIXe siècle pour proposer, au lieu de s'intéresser à une solution particulière du système, d'utiliser des arguments topologiques et géométriques sur les propriétés du théorème de tous déterminent des solutions.[58]

Notre travail sera organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré aux notions de base sur les systèmes dynamiques, en commençant par une introduction et puis les notions d'espaces de phases, de points d'équilibres et leurs classifications de stabilités, en passant par l'étude qualitative des systèmes dynamiques et finissant par la théorie de bifurcation.

Nous présentons dans le deuxième chapitre les moyens d'appréhender et de reconnaître un comportement chaotique, qualitativement et quantitativement. Nous avons posé les bases afin de comprendre les différents scénarios pouvant amener un système dynamique non linéaire ne présentant pas de comportement chaotique vers une dynamique chaotique, par l'influence d'un ou de plusieurs paramètres de contrôle du système. Nous avons donné les définitions de quelques types des dimensions fractales spécifiques (dimension de Hausdorff, Kolmogorov et dimension de corrélation...etc.). Pour terminer, nous définissons les exposants de Lyapunov, qui constituent l'une des caractérisations quantitatives du chaos les plus fondamentales puisqu'elle s'attache à mesurer la sensibilité aux conditions initiales.

Dans la troisième chapitre est consacré au calcul fractionnaire, aux définitions fondamentales et à l'approximation de l'opérateur fractionnaire dans le domaine fréquentiel est temporelle. Des concepts de base y sont répertoriés pour une bonne compréhension de la partie "résultats".

Dans le quatrième chapitre : nous donnons la théorie de la synchronisation et présenté quelque type de synchronisation dans le cas entier et fractionnaire

Dans cinquième chapitre on propose une synchronisation entre deux différents systèmes chaotiques (système de Jerk) à dérivées d'ordre fractionnaire, α . Pour garantir la stabilité du système erreur nous avons basé sur le critère de Routh-Hurwitz généralisé à l'ordre fractionnaire. A la fin de la thèse, nous terminons par une conclusion générale.

Chapitre 1

Introduction aux systèmes dynamiques

Avant les années 1970, l'étude des systèmes dynamiques était cantonnée à un domaine relativement limité des mathématiques et de la physique mathématique. Depuis, elle est devenue une discipline qui est aujourd'hui l'une des plus importantes de la physique mathématique comme de la physique théorique et expérimentale, et qui comporte également des applications à d'autres domaines, allant de la chimie à la statistique des populations. La théorie des systèmes dynamiques non linéaires ou dissipatifs, correspondent des phénomènes physiques qui appartiennent à ce qu'il est convenu désormais d'appeler la « physique des systèmes chaotiques », ou « du chaos déterministe ».[51]

Un système dynamique est celui dont l'état évolue (change) avec le temps t . L'évolution est régie par un ensemble de règles (pas nécessairement d'équations) qui spécifie l'état du système pour discret ou continu valeurs de t . Une évolution en temps discret est généralement décrite par un système d'équations algébriques (carte), tandis qu'un temps continu l'évolution est généralement décrit par un système d'équations différentielles.

Définition 1.1 *On appelle système dynamique à temps continu sur un ensemble Ω une famille d'application $\{\varphi_t ; t \in G\}$, paramétrée par l'ensemble G ($G = \mathbb{R}$ ou \mathbb{R}^+) vérifiant les propriétés suivantes :*

- (i) Chaque application φ_t est définie sur une partie U_t de Ω , et à valeurs dans Ω .
- (ii) L'application φ_0 , définie sur Ω entier, est Id_Ω .
- (iii) Si $0 \leq t_1 \leq t_2$, alors $U_{t_2} \subset U_{t_1}$.
- (iv) Soient t et s deux éléments de l'ensemble G qui paramètre la famille d'applications considérée. Soit $x \in U_s$. Alors $\varphi_s(x)$ est un élément de U_t si et seulement si x est un élément de U_{s+t} et, lorsque c'est le cas,

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{s+t}(x),$$

L'ensemble Ω est appelé espace des phases du système dynamique.[39]

Définition 1.2 On appelle système dynamique à temps discret sur un ensemble Ω une famille d'application $\{\varphi_n; n \in G\}$, paramétrée par l'ensemble G ($G = \mathbb{Z}$ ou \mathbb{N}) vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) Chaque application φ_n est définie sur une partie U_n de Ω , et à valeurs dans Ω .
- (ii) L'application φ_0 , définie sur Ω entier, est Id_Ω .
- (iii) Si $0 \leq n_1 \leq n_2$, alors $U_{n_2} \subset U_{n_1}$.
- (iv) Soient n et m deux éléments de l'ensemble G qui paramètre la famille d'applications considérée. Soit $x \in U_m$. Alors $\varphi_m(x)$ est un élément de U_n si et seulement si x est un élément de U_{n+m} et, lorsque c'est le cas,

$$\varphi_n(\varphi_m(x)) = \varphi_{m+n}(x)$$

[39].

1.1 Espace de phase

Un système dynamique est caractérisé par un certain nombre de variable d'état, qui on la propriété de définir complètement l'état du système à un instant donné. Le comportement dynamique du système est ainsi relié à l'évolution de chacune de ces variables d'état. Cet

espace est appelé l'espace de phase où chaque point définit un état et le point associé à cet état décrit une trajectoire.

Exemple 1.1 :

– Cas continue (*L'oscillateur de Duffing*)

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t \end{cases}$$

Où δ, ω, γ sont des paramètres physique réels (**variables statistiques**). L'espace des phases est : \mathbb{R} , l'espace des paramètres est \mathbb{R}^3 . Ce système est non linéaire, non autonome, il peut être dissipatif ou conservatif (suivants le mouvement avec ou sans frottement).

– Cas discret (*l'application de Hénon*) :

$$\begin{cases} X_{k+1} = y_k + 1 - aX_k^2 \\ y_{k+1} = bX_k \end{cases}$$

Où a, b sont des paramètre réels, l'espace des phases est : \mathbb{R}^2 , l'espace des paramètres est \mathbb{R}^2 .

1.2 Système autonome ou non

Considérons un système de n équations différentielles du premier ordre :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \tag{1.1}$$

avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ et $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ est un champ de vecteurs (pour simplifier l'écriture, nous ne mentionnons pas les paramètres qui se trouvent dans les f_i . Nous supposons que les f_i sont de classe C^r ($r > 1$) en x et t . Dans ce cas les fonctions $x_i(t)$ sont aussi de classe C^r . Par un changement de variables approprié, les équations différentielles d'ordre n ,

$n > 1$ peuvent se transformer en un système de n équations différentielles du premier ordre.

Par exemple l'équation différentielle

d'ordre n

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f \left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}, t \right)$$

peut s'écrire sous la forme d'un système :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_3, \\ &\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n, \\ \frac{dx_n}{dt} &= f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned}$$

où l'on a posé $x_1 = x$ (à noter que cette transformation n'est pas unique). La solution de 1.1 avec conditions initiales $x(t_0) = x_0$ sera notée $x(x_0, t)$. Elle décrit, dans l'espace des phases) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, une courbe intégrale appelée *trajectoire ou orbite*.

Lorsque le champ de vecteurs f dépend explicitement du temps le système est dit *non-autonome*. Dans le cas contraire, on dit que le système est *autonome*. Dans un système autonome, la trajectoire $x(x_0, t)$ ne dépend pas du temps initial t_0 , alors que dans un système non-autonome elle dépend de t_0 [13].

Exemple 1.2 *Systèmes autonome* : $\dot{X} = f(X), \quad X(t_0) = X_0$

Systèmes non-autonome : $\dot{X} = f(t, X), \quad X(t_0) = X_0$

1.3 Système conservatif ou non

Le caractère conservatif ou non de la dynamique fait référence à un nouveau point de vue sur l'évolution dans l'espace des phases. En effet, les définitions que nous avons introduites jusqu'à présent sont implicitement rattachées à la détermination de trajectoires individuelles (problème aux valeurs initiales) [37].

La différence essentielle entre systèmes dissipatifs et non dissipatifs (improprement appelés ((conservatifs)) se traduit dans l'espace des phases par la propriété suivante : le flot engendré par le champ de vecteurs conserve les volumes pour un système non dissipatif, et les contracte ou les dilate pour un système dissipatif. Cette contraction est mesurée par la divergence du champ de vecteurs.

1.4 Trajectoire, Orbite et *point d'équilibre*

On appelle *trajectoire* d'un point x de M l'application définie sur G et à valeurs dans M par :

$$\begin{aligned}\varphi : G &\rightarrow M \\ t &\rightarrow \varphi_t(x)\end{aligned}$$

On appelle *orbite* d'un point x l'image de la trajectoire issue de x c'est à dire le sous ensemble $\gamma(x)$ de l'espace des phases défini par : $\gamma(x) = \{\varphi_t(x)\}$. Un élément x de Ω est dit *point fixe*, ou *point d'équilibre* du système dynamique son orbite est $\{x\}$ [39].

1.5 Flot ou système dynamique

Soit M un ensemble quelconque et G un groupe additif (\mathbb{R} ou \mathbb{Z}). Considérons $\{\varphi_t\}_{t \in G}$ un group à un paramètre d'applications M dans M indexées par le groupe G . On appelle flot ou système dynamique le couple $(M ; \{\varphi_t\}_{t \in G})$.

L'ensemble M précédent constitue l'espace des phases du flot. Tout point x de cet espace représente un état du système dynamique.

1.5.1 Flot d'un système linéaire

Soit le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{1.2}$$

où A une matrice constante. La solution du système 1.2 avec la valeur initiale $x(0) = x_0$ est $x(t) = x_0 \exp(At)$.

Définition 1.3 *L'ensemble des applications $\exp(At) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé le flot du système 1.2.*

1.5.2 Flot d'un système non linéaire

Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = F(x, t) \tag{1.3}$$

On suppose que les solutions du système 1.3 sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$, le flot du système 1.3 est la famille avec un paramètre d'applications $\{\phi(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de Ω dans lui-même définies par $\phi_t(a) = x(t, a)$, pour tout $a \in \Omega$, $x(t, a)$ est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = F(X, t) \\ X(0) = a \end{array} \right\}$$

* ϕ_t est différentiable sur Ω .

* $\phi_0 = Id$, $\phi_{t_1} \circ \phi_{t_2} = \phi_{t_1+t_2}$ pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, ϕ_t est une bijection de Ω et $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$.

Alors l'ensemble $G = (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre de difféomorphisme.

* $\left. \frac{d\phi_t(a)}{dt} \right|_{t=0} = F(a, 0)$ cette formule montre que la donnée du flot ϕ_t définit le système 1.3.

1.6 Cycles limites

Un cycle limite est une trajectoire fermée solution du système.

Définition 1.4 *Un système $\dot{x} = f(x)$ possède un **cycle limite** C s'il existe un intervalle de temps $[t_0; t_0 + T[$ et un point de départ $x_0 \in C$, tel que en désignant par $\phi(t)$ la solution de système avec pour condition initiale $x(t_0) = x_0 = \phi(t_0)$ on ait :*

- $\phi(t) \in C \quad \forall t \in [t_0; t_0 + T[$,
- $\phi(T) = x_0$.

1.6.1 Classification des cycles limites

Définition 1.5 *Soit C un cycle limite*

1. **stable** : toutes les trajectoires dans un voisinage du cycle $\rightarrow C$.
2. **instable** : toutes les trajectoires divergent de C .
3. **semi-stable** : certaines trajectoires convergent vers C

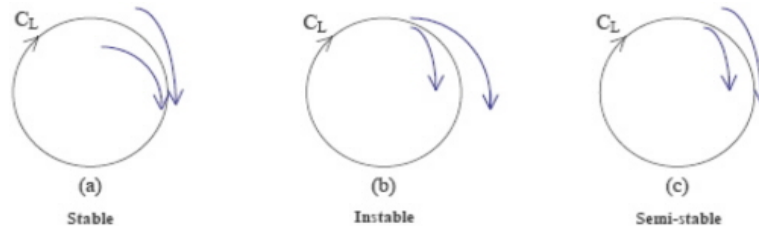


FIG. 1.1 – Cycle limite

1.7 Classification des points d'équilibre

1.7.1 Cas des systèmes linéaires

Définition 1.6 *Considérons le système linéaire*

$$\dot{x} = Ax$$

où $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ et A est une matrice à coefficients constants appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$ inversible. Soient λ_i $i = 1; 2; \dots; n$ les valeurs propres de A : [45]

1. **point selle(S)** : si les valeurs propres λ_i $i = 1; 2; \dots; n$ sont réelles, non nulles et de signe différent,
2. **nœud (N)** si les valeurs propres λ_i $i = 1; 2; \dots; n$ sont réelles et de même signe,
3. **foyer (N)** si les valeurs propres λ_i $i = 1; 2; \dots; n$ sont complexes avec $\text{Re } \lambda_i \neq 0 \forall i = 1; 2; \dots; n$,
4. **centre (N)** si les valeurs propres λ_i $i = 1; 2; \dots; n$ sont imaginaire pure.

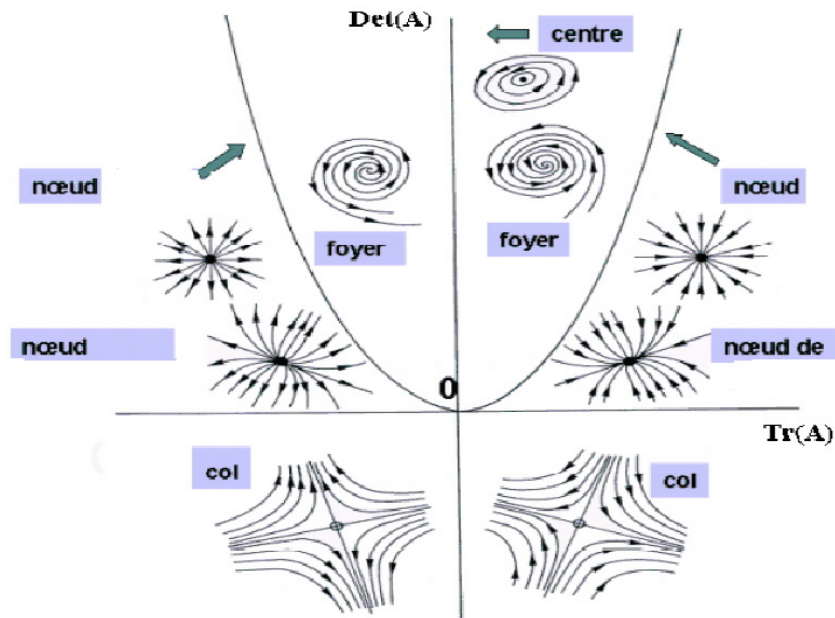


FIG. 1.2 – Classification topologique des points d'équilibres

1.7.2 Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non linéaire

$$\dot{x}(t) = f(x) \tag{1.4}$$

Définition 1.7 Un point critique de x^* de 1.4 est appelé **puits** si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles négatives, il est appelé **sources** si toutes les

valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$ ont des parties réelles positives, il est appelé **selle** s'il est hyperbolique et si $A = Df(x^*)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive ou au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

Théorème 1.1 Soit $\dot{x}(t) = f(x)$; $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, un système dynamique à temps continu. Si x^* un point fixe ($f(x) = 0$), alors si les valeurs propres de $Df(x^*)$ sont de partie réelle négative x^* est stable, et instable si l'une de ces valeurs propres de $Df(x^*)$ est de partie réelle positive.

1.8 Section de Poincaré

La section de Poincaré est une technique classique d'analyse de systèmes dynamiques. Il remplace le flux d'un système en temps continu d'ordre n avec un ordre $(n - 1)$ d'un système à temps discret. La définition de la section de Poincaré garantit que les limites du système à temps discret correspondent aux ensembles limites du flux sous-jacent. L'utilité de la section de Poincaré réside dans la réduction de l'ordre et dans le fait qu'elle l'écart entre les systèmes à temps continu et à temps discret [15].

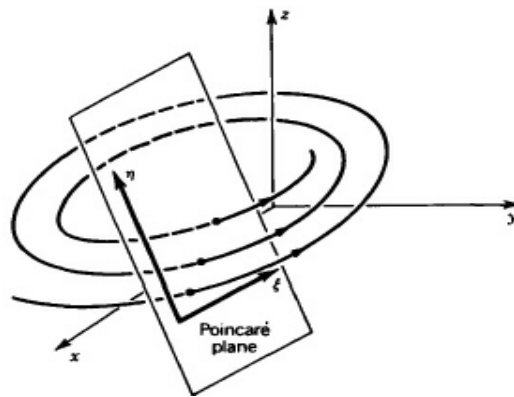


FIG. 1.3 – Section de Poincaré

La technique de la section de Poincaré offre deux avantages :

- D'une part, la recherche des attracteurs autres que les points fixes est possible et leur étude est simplifiée via les applications.

- Par ailleurs, la représentation des résultats est simplifiée. La description et l'interprétation de la dynamique est notamment plus simple dans le plan que dans l'espace pour des systèmes de dimension trois.

1.9 Attracteurs et attracteurs étranges

1.9.1 Attracteurs

Définition 1.8 *Soit A un ensemble compact, fermé de l'espace des phases. On s'appose que A est un ensemble invariant (i. e. $\phi_t(A) = A$ pour tout t)*

On dit que A est stable si pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) = \phi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$. Si de plus :

$$\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(V) = A$$

et s'il existe une orbite dense dans A , alors A est un **attracteur**. Lorsque A est un attracteur, l'ensemble

$$W = \bigcup_{t < 0} \phi_t(V)$$

est appelé le **bassin d'attraction** de A . C'est l'ensemble des points dont les trajectoires asymptotiques convergent vers A . L'attracteur le plus simple est un point fixe. Un deuxième type d'attracteur pour un champ de vecteurs est le cycle limite.

1.9.2 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

Un point fixe : est le plus simple d'attracteur, la trajectoire du pendule dissipatif simple (dans l'espace des phases représentant son altitude et sa vitesse), par exemple, tend vers l'origine du repère, quelles que soient la position et la vitesse initiales.

Un cycle limite : il représente la trajectoire du pendule idéal dans ce même espace des phases.

Un tore : Il est caractérisé par un régime quasi-périodique, qui correspond à l'attracteur obtenu par les mouvements résultant de deux oscillations indépendantes, par exemple : les oscillateurs électriques.

Pour tous les attracteurs réguliers, c'est à dire pour tous les systèmes non chaotiques, des trajectoires qui partent de points proches l'un de l'autre dans l'espace des phases restent indéfiniment voisines. On sait donc prévoir l'évolution à long terme de ces systèmes, à partir d'une situation connue.

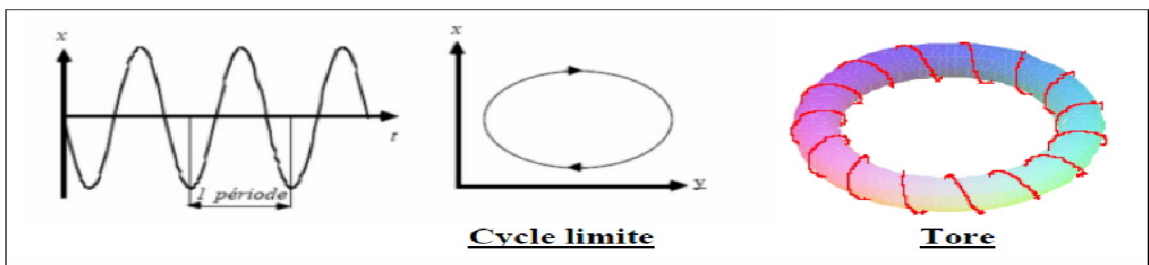


FIG. 1.4 – Attracteur réguliers

Attracteurs étranges

Sont bien plus complexes que les autres, ils seront défini ultérieurement, on parle d'attracteur étrange lorsque la dimension fractale n'est pas entière.

1.10 Stabilité d'équilibres

La question de la stabilité et de l'équilibre se posait naturellement en dynamique, depuis les débuts de l'étude du problème à trois corps au milieu du XVIII^e siècle (avec Clairaut, sur la figure de la Terre, d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, Poisson, etc., sur le système solaire dans son ensemble). La « Stabilité à la Poisson » que Poincaré devait privilégier était telle que, bien que sans périodicité au sens strict, le système étant perturbé retourne au voisinage d'une configuration donnée au bout d'un certain temps. Poincaré aborda les problèmes d'équilibre et de stabilité de l'équilibre en 1885, à propos du comportement d'une masse fluide en rotation dans un champ de forces. Mais c'est surtout dans son travail sur « le problème des trois corps et les équations de la dynamique », de 1890, qu'il développa les idées qui sont à l'origine de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires.

1.10.1 Stabilité des solutions d'équilibre

Avant de présenter les outils d'analyse de la stabilité des solutions non linéaires statiques, quelques définitions, concernant la classe des systèmes dynamiques non linéaires décrits dans l'espace d'état, sont rappelées (Slotine, 1991 ; Nayfeh, 1995).

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.5}$$

où $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs analytiques non linéaires. La stabilité des systèmes dynamiques non linéaires 1.5 est liée aux notions de point d'équilibre et de flot dynamique.

Définition 1.9 *Le point d'équilibre x_e , appelé aussi point singulier, du système 1.5 est défini par la solution du problème non linéaire statique*

$$f(x_e) = 0 \tag{1.6}$$

1.10.2 Type de stabilité

Définition 1.10 *Un système est stable au sens de Lyapunov, si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\|x_0 - x_e\| < \delta$ implique $\|x(t) - x_e\| < \epsilon$.*

Définition 1.11 *Un système est instable au sens de Lyapunov lorsque il n'est pas stable au sens de Lyapunov.*

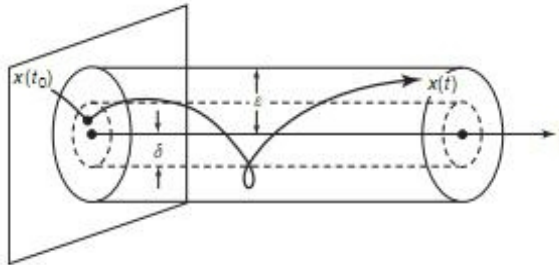


FIG. 1.5 – Signification géométrique au sens de Lyapunov

Définition 1.12 *Le point d'équilibre x_e de $\dot{x} = f(x)$ est attractif si*

$$\exists \delta > 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

Définition 1.13 *Le point d'équilibre $x_e = 0$ du système $\dot{x} = f(x)$ est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif c-à-d*

$$\exists \delta > 0 : \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_e\|$$

[45]

1.10.3 Stabilité des systèmes linéaires

Le cas linéaire se définit par la situation particulière où f est un endomorphisme de \mathbb{R}^n d'où

$$\dot{x} = f(x) = Ax \tag{1.7}$$

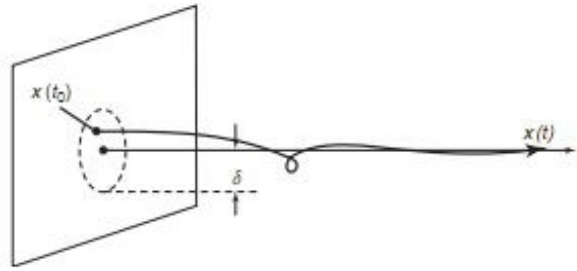


FIG. 1.6 – Signification géométrique de la stabilité asymptotique

où A est une matrice à coefficients constants appartenant à $\mathbb{R}^{n \times n}$.

L'origine est toujours un équilibre de cette équation (mais il peut y en avoir d'autres : tout élément de $\ker A$ est un équilibre).

- L'origine est un équilibre asymptotiquement stable de $\dot{x} = Ax$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.
- Si A a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors l'origine n'est pas un équilibre stable de $\dot{x} = Ax$.

Remarque 1.1 on peut donner une condition nécessaire et suffisante de stabilité : l'origine est un équilibre stable de $\dot{x} = Ax$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle négative ou nulle et si pour toute valeur propre de partie réelle nulle, les multiplicités algébrique et géométrique coïncident, (c'est-à-dire $\mathbb{R}^n = E^s + E^c$ et $A|_{E^c}$ est diagonalisable dans \mathbb{C}).

1.10.4 Stabilité des systèmes non linéaires

Comme souligné précédemment, la propriété de la stabilité des systèmes non linéaires 1.5 est liée à la notion de point d'équilibre, solution de l'équation statique 1.6. Plusieurs solutions peuvent exister donnant lieu à plusieurs points d'équilibre. L'analyse de la stabilité se fait pour chacun de ces points.

Deux approches principales sont définies pour traiter de la stabilité des solutions d'équilibre des systèmes dynamiques non linéaires 1.5. La première, appelée approche indirecte de Lyapunov, s'appuie sur l'analyse du système linéarisé autour du point d'équilibre ex dont on

veut analyser la stabilité. La deuxième s'appuie, quant à elle, sur l'analyse directe du système non linéaire en cherchant à lui construire une fonction de Lyapunov, une notion généralisant celle d'une fonction d'énergie. Cette procédure définit ce qu'on appelle l'approche directe de Lyapunov.

Méthode indirecte de Lyapunov

La méthode indirecte de Lyapunov, pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre x_e , consiste à étudier le système linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{1.8}$$

avec

$$A = Df(x_e) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x_e}$$

A est la matrice jacobienne de f en x_e , qui s'appelle le linéarisé du système 1.5 au point d'équilibre x_e . Par un changement de coordonnées, le point fixe de 1.5 se ramène à l'origine ($f(0) = 0$) et le développement de f en série de Taylor autour de $x = 0$ donne le développement du premier ordre de Taylor suivant :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x, x, x) + \cdots$$

Si A possède n valeurs propres distinctes $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ (les valeurs propres de A sont appelées exposants caractéristiques de l'équilibre 0) alors la solution de 1.8 est

$$x = \sum_{i=1}^n c_i \exp(\lambda_i t) v_i$$

v_i le vecteur propre associé à λ_i les $c_i; i = 1, \dots, n$ sont des constantes (déterminées par les conditions initiales). La stabilité du point d'équilibre est analysée en utilisant les résultats du théorème suivant, pour le système 1.8

1. Si toutes les valeurs propres sont strictement dans le demi-plan complexe gauche alors

x_e est asymptotiquement stable.

2. S'il existe au moins une valeur propre appartenant strictement au demi-plan complexe droit alors x_e est instable.
3. Si toutes les valeurs propres appartiennent strictement au demi-plan complexe gauche avec au moins une qui soit imaginaire pure ou nulle, alors on ne peut rien dire.

Définition 1.14 *Si Df_{x_e} n'a pas de valeurs propres à partie réelles nulles alors le point d'équilibre x_e est dit hyperbolique.*

Théorème 1.2 *Un point d'équilibre hyperbolique est soit asymptotiquement stable soit instable*

Théorème 1.3 (d'Hartman-Grobman) *Soit x_e un équilibre hyperbolique. Notons $\phi_t^L : y \rightarrow e^{tDf(x_e)}y$ le flot du linéarisé en x_e . Alors il existe un homéomorphisme $h : V_{x_e} \rightarrow V_0$, où V_{x_e} et V_0 sont des voisinages respectivement de x_e et 0 dans \mathbb{R}^n tel que*

$$\phi_t^L(h(x)) = h(\phi_t(x))$$

partout où ces expressions ont un sens.

Le théorème de Hartman-Grobman est un résultat important dans la théorie qualitative locale des systèmes différentiels. Il montre qu'au voisinage d'un point équilibre hyperbolique x_e le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.9}$$

a la même structure qualitative du système linéarisé

$$\dot{x} = Df_{x_e}(x) \tag{1.10}$$

Autrement dit, si l'origine est un point selle ou foyer ou noeud pour le système 1.10 alors le point équilibre x_e sera respectivement selle ou foyer ou noeud, pour le système 1.9. Cependant

si l'origine est de type centre pour le système 1.10, alors on ne peut rien dire sur la nature du point équilibre x_e de 1.9.

Méthode directe de Lyapunov

Définition 1.15 (*Fonction définie positive*) Une fonction définie positive est une fonction $f(x) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) > 0, \forall x \neq 0$ et $f(x) = 0$ lorsque $x = 0$.

Définition 1.16 (*Candidat de Lyapunov*) Une fonction définie positive continue, notée $V(x)$, est un candidat de Lyapunov.

Définition 1.17 (*Fonction de Lyapunov*) Une fonction de Lyapunov est un candidat de Lyapunov, à savoir une fonction continue $V(x)$ telle que [45].

$$V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ et } V(x) = 0 \quad x = 0.$$

ayant en plus la propriété

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ et } \dot{V}(x) = 0 \quad x = 0.$$

Théorème 1.4 (*Seconde méthode de Lyapunov, dite aussi méthode directe*) Si une fonction de Lyapunov existe pour un système donné alors ce système est stable.

Si la fonction de Lyapunov est strictement décroissante, c'est-à-dire que $V(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$, alors la stabilité est en plus asymptotique.

1.11 Bifurcation

Le terme bifurcation est généralement associé à la notion de changement du type topologique de la trajectoire d'un système dynamique lorsqu'un ou plusieurs paramètres dont elle dépend varient. C'est une notion très importante en mécanique où l'étude de systèmes d'équations non-linéaires en fonction de paramètres caractéristiques est classique [13].

Définition 1.18 Soit un système dynamique dépendant d'un paramètre μ et présentant un point fixe $a(\mu)$. Ce système subit une **bifurcation** de point fixe.

Pour $\mu = \mu_c$ si, pour cette valeur du paramètre, le système linéarisé au point fixe a admet une valeur propre à partie réelle nulle, i.e le point fixe est non hyperbolique.

Nous illustrons ci-dessous ce concept en présentant quatre types de bifurcations qui se rencontrent dans les systèmes. La codimension est la plus petite dimension de l'espace des paramètres permettant d'aboutir à cette bifurcation. On parle ici seulement de la bifurcation de codimension un et il existe quatre types de bifurcations de codimension un, qui correspondent tous à des comportements génériques.

1.11.1 Bifurcation locale

Bifurcation nœud-col

Définition 1.19 *Un système dynamique présentant un point fixe stable a subit une bifurcation nœud-col en $\mu = \mu_c$ si une valeur propre réelle du système linéarisé autour de a traversé l'axe imaginaire pour $\mu = \mu_c$. Pour μ voisin de μ_c , le comportement du système est alors gouverné, après éventuellement un changement de variable, par l'équation suivante, appelée forme riorniale de la bifurcation nœud-col :*

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2$$

La figure présente le diagramme de bifurcation correspondant [10]

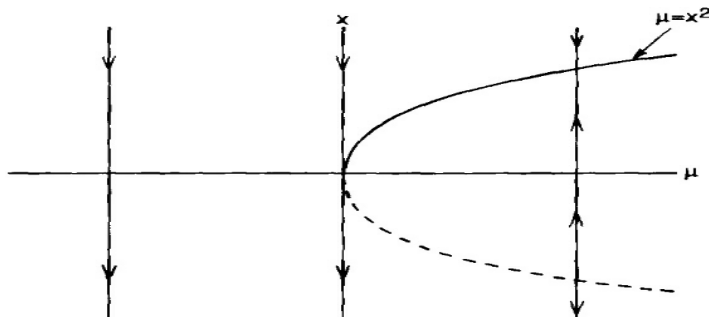


FIG. 1.7 – Bifurcation nœud-col

Bifurcation fourche

Définition 1.20 *Un système dynamique invariant par réflexion, i. e. invariant par la transformation $x \rightarrow -x$ (liée à une symétrie du système physique), et présentant un point fixe stable a , subit une bifurcation fourche en $\mu = \mu_c$, si une valeur propre réelle du système linéarisé autour de a traverse l'axe imaginaire pour $\mu = \mu_c$. Pour μ voisin de μ_c , le comportement du système est gouverné, après éventuellement un changement de variable, par l'équation suivante, appelée forme normale de la bifurcation fourche :*

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - \delta x^3 \quad (1.11)$$

Le cas $\delta = 1$ est dit supercritique, le cas $\delta = -1$ est dit sous-critique.

La figure présente les diagrammes de bifurcation correspondants. Dans le cas supercritique, l'état d'équilibre $x = 0$ est stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$; dans ce dernier cas, toute perturbation de cet état d'équilibre fait bifurquer le système vers l'une des branches stables $\pm\sqrt{\mu}$. Dans le cas sous-critique et $\mu < 0$, $x = 0$ est toujours stable vis-à-vis de perturbations d'amplitude infinitésimale, mais une Perturbation d'amplitude supérieure $\pm\sqrt{-\mu}$, i.e d amplitude finie, peut le déstabiliser; pour $\mu > 0$, toute perturbation de l'état $x = 0$ fait bifurquer le système vers un comportement dont la forme normale 1.11 ne peut pas rendre compte : la considération de termes d'ordre supérieur (de degré cinq au moins) serait nécessaire. [10]

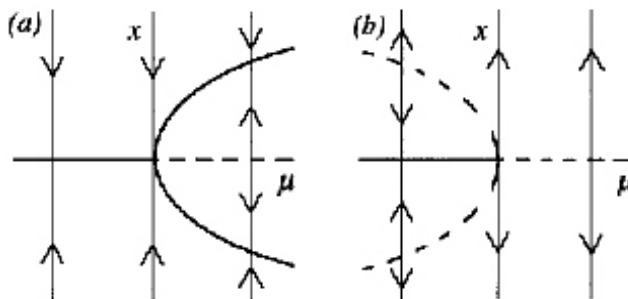


FIG. 1.8 – Bifurcation fourche

Bifurcation d'échange de stabilité (transcritique)

On considère la forme normale suivante :

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^2$$

Cette équation admet deux points d'équilibres $x_1 = 0$ et $x_2 = \mu$

La stabilité de ces deux points d'équilibres peut être investie grâce à la méthode indirecte de Lyapunov et on aura :

$$\ddot{x} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0} x = \mu x$$

Le point $x = 0$ est stable pour une valeur du paramètre $\mu < 0$ et instable pour une valeur du paramètre $\mu \geq 0$

Sinon : $\dot{y} = -\mu y$ avec $y = \mu - x$

On conclut que le point $x_2 = \mu$ est stable pour une valeur du paramètre $\mu > 0$ et devient instable pour $\mu \leq 0$. Ce qui démontre qu'au point $\mu = 0$ il ya un échange de stabilité entre les points $x_1 = 0$ et $x_2 = \mu$.

Cet échange est appelé « **Bifurcation transcritique** ». la figure donne son diagramme de bifurcation.[10]

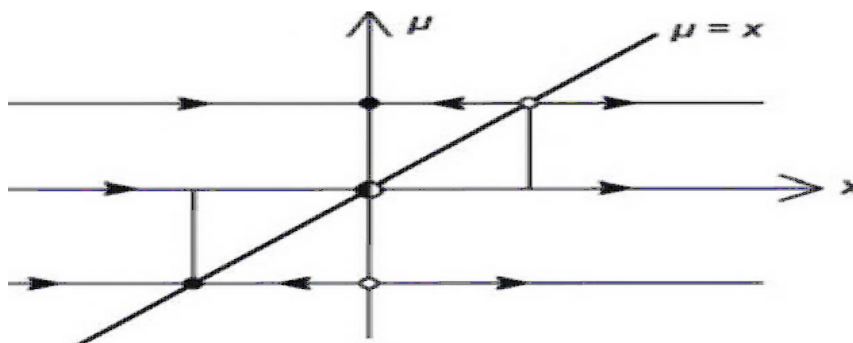


FIG. 1.9 – Bifurcation transcritique

Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf correspond à la présence de deux valeurs propres complexes conjuguées; elle est modélisée par :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega y + x(\mu - (x^2 + y^2)) & x \in \mathbb{R} \quad \mu \in \mathbb{R} \\ \frac{dy}{dt} &= \omega x + y(\mu - (x^2 + y^2)) & y \in \mathbb{R} \quad \omega = cste \end{aligned}$$

Cette équation, en coordonnées polaires, devient $\frac{dr}{dt} = r(\mu - r^2)$, $\frac{d\theta}{dt} = \omega$. Ces deux équations sont découplées, la première correspondant à une bifurcation fourche (valable seulement pour r positif). On en déduit que $\mu_0 = 0$ est une valeur de bifurcation et qu'il y a création d'une orbite fermée asymptotiquement stable et perte de stabilité pour l'origine lorsque μ devient positif. Origine : asymptotiquement stable ($\mu < 0$) \rightarrow instable ($\mu > 0$). Orbite ($r = \sqrt{\mu}$) : n'existe pas ($\mu < 0$) \rightarrow existe et est asymptotiquement stable ($\mu > 0$). Le diagramme de bifurcation de Hopf a été donné par le figure suivant [10]

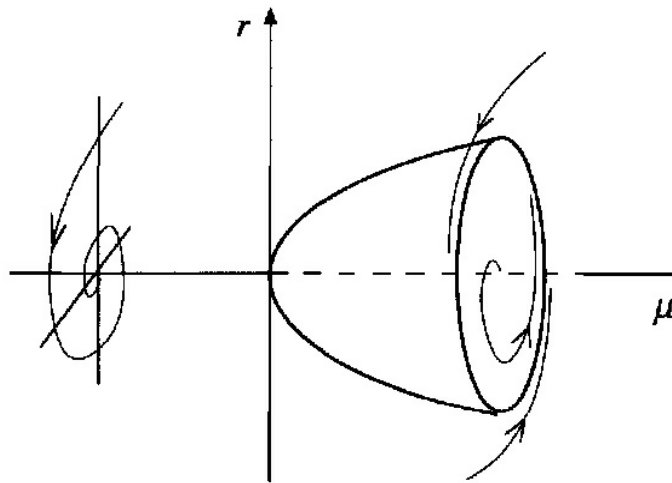


FIG. 1.10 – Bifurcation de Hopf

1.12 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les notions de base de systèmes dynamiques, tel que : les différents types de ces systèmes (discret et continu), espace des phases, section de Poincaré, puis on a donné des notions de stabilité et des méthodes pour leur étude (la fonction de Lyapunov et la linéarisation pour les points fixes, et on passant par théorie de bifurcation.

Chapitre 2

Theorie de chaos

En tant que notion mathématique, le terme chaos a été utilisé pour la première fois en 1975 par Li & Yorke dans leur article [33], mais avant même qu'elle n'ait été observée que des fonctions très simples peuvent donner lieu à des dynamiques très compliquées. Un de la pierre angulaire du développement de la dynamique chaotique est l'article de 1964 «Coexistence des cycles d'une cartographie continue de la ligne en elle-même »(en russe) par Sarkovskii. Au cours des années soixante-dix et quatre-vingt, l'intérêt pour la dynamique chaotique a explosé et diverses tentatives ont été faites pour donner à la notion de chaos une précision mathématique sens. Les travaux remarquables dans ce contexte sont le livre de 1980 «Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems »de Collet & Eckmann, le livre de 1989 « Dynamics of One-Dimension Mappings »(en russe) par Sarkovskii, Kolyada, Sivak & Fedorenko et les Notes de cours de 1992 «Dynamics in One Dimension» de Block & Coppel. Tandis que jusqu'à la fin des années quatre-vingt, le sujet de la dynamique chaotique se limitait principalement à publications axées sur la recherche, le livre de 1986 «An Introduction to Chaotic Dynamical Systems »de Devaney a marqué le point où le chaos (en tant que notion mathématique) est devenu populaire et a commencé à entrer dans les manuels universitaires tels que [9] «A First Course in Discrete Dynamical Systems »par Holmgren (1994) ou « Discrete Chaos »par Elaydi (1999) [6].

Chaos dans le sens de Devaney

Devaney proposa la définition suivante du chaos : un système dynamique est chaotique si et

seulement si :

- il est topologiquement transitif¹.
- il possède un ensemble dense d'orbites périodiques,
- il présente le phénomène de sensibilité aux conditions initiales.

La transitivité signifie simplement que si l'on considère deux voisinages quelconques de deux états distincts d'un système dynamique, il existe une trajectoire qui passe de l'un à l'autre.

Notons que les deux premières hypothèses impliquent la troisième sans que la réciproque soit vraie.[8], [14]

Chaos dans le sens de Li-Yorke

Li et Yorke ont introduit la première définition mathématique du chaos. Ils ont établi un critère très simple "La présence de trois périodes impliquent le chaos". Ce critère joue un rôle très important dans l'analyse des systèmes dynamiques chaotiques.[14]

2.1 Caractérisation de chaos

2.1.1 Sensibilité aux conditions initiales

En 1963 par Edward Lorenz était découverte la sensibilité aux conditions initiales lors de ses travaux en météorologie. Le phénomène de dépendance sensible aux conditions initiales est plus familièrement connu sous le nom d'effet papillon. L'idée est que le temps est un système chaotique, et donc une petite perturbation, comme le battement des ailes d'un papillon, pourrait entraîner de grands changements dans la trajectoire de l'orbite. Dans le contexte de la météo, ce changement de l'orbite pourrait faire différence de trajectoire d'une tornade.[44]

D'un point de vue mathématique on dit que f montre une dépendance sensible aux conditions initiales lorsque

$$\exists \delta > 0 \forall x \in D \forall \epsilon > 0 \exists (y, p) \in D : \begin{cases} \|x - y\| < \epsilon \\ \|f^p(x) - f^p(y)\| > \delta \end{cases}$$

¹L'application $f : J \rightarrow J$ est dite transitive topologiquement si pour toute paire d'ensembles ouverts $U, V \subset J$, il existe $k > 0$ tel que $f^{(k)}(U) \cap V \neq \emptyset$

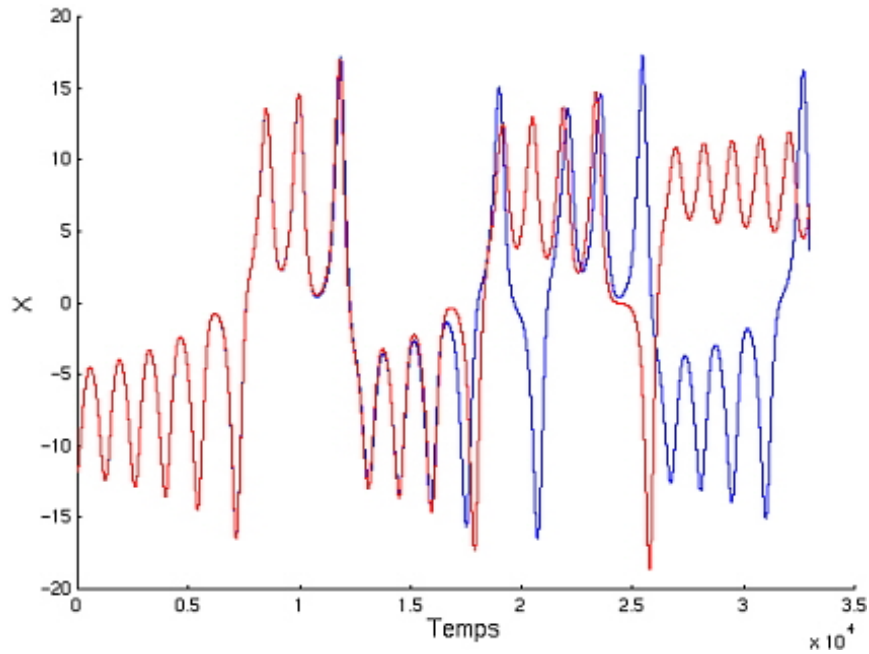


FIG. 2.1 – *Sensibilité aux conditions initiales du système de Lorenz*

2.1.2 Attracteur étranges

Le premier modèle météorologique d'Edward Lorenz présentait un comportement chaotique, mais il impliquait un ensemble de 12 équations différentielles non linéaires. Lorenz a décidé de rechercher un comportement complexe dans un ensemble d'équations encore plus simple, et a été conduit au phénomène de convection de fluide roulant. Le modèle physique est simple : placer un gaz dans une boîte rectangulaire solide avec une source de chaleur au fond.

L'attracteur de Lorenz est un exemple d'un attracteur étrange. Les attracteurs étranges sont uniques des autres attracteurs d'espace de phase en ce que l'on ne sait pas exactement où se trouvera le système. Deux points sur l'attracteur qui sont proches l'un de l'autre en même temps seront arbitrairement éloignés l'un de l'autre ultérieurement. La seule restriction est que l'état du système reste sur l'attracteur. Les attracteurs étranges sont également uniques en ce qu'ils ne se ferment jamais sur eux-mêmes - le mouvement du système ne se répète jamais (non périodique). Le mouvement que nous décrivons sur ces étranges attracteurs est ce que nous entendons par comportement chaotique. [44]

L'attracteur de Lorenz a été le premier attracteur étrange, mais il existe de nombreux systèmes d'équations qui donnent lieu à une dynamique chaotique. Des exemples d'autres at-

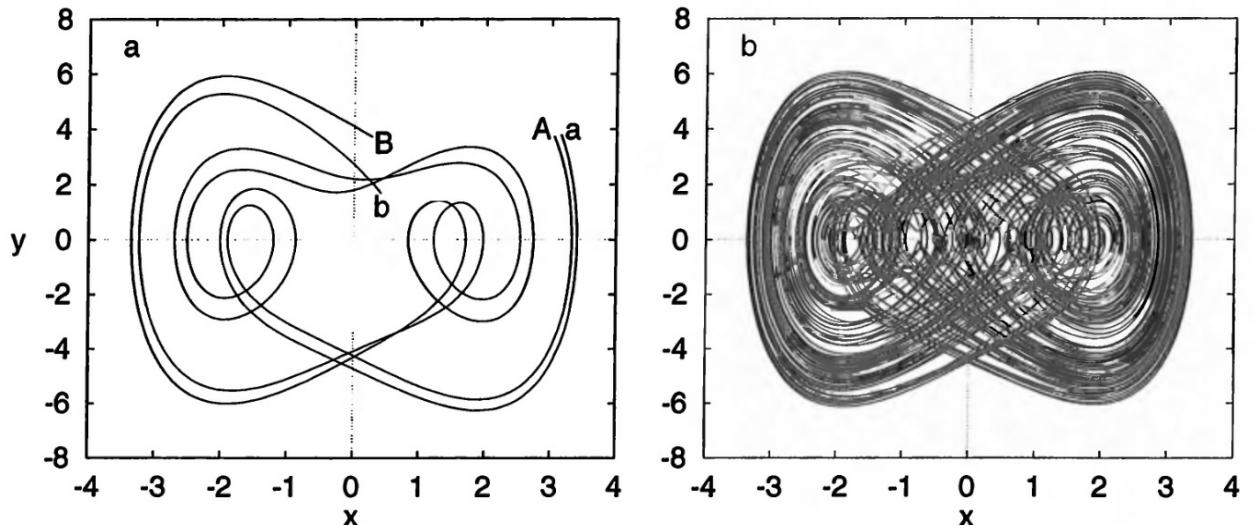


FIG. 2.2 – (a) Sensibilité aux conditions initiales (b) trajectoire chaotique

tracteurs étranges incluent les attracteurs Rössler et Hénon.

Un attracteur étrange aux propriétés suivantes :

- le volume d'attracteur est nul dans l'espace des phases,
- la dimension d'attracteur d est fractale (pas entier) avec $2 < d < n$ où n est la dimension de l'espace des phases.

Courbes de trajectoire sur l'attracteur

- avoir une dépendance sensible aux conditions initiales,
- sont denses² sur l'attracteur.

2.1.3 Diagramme de bifurcation

L'un des signes d'un chaos imminent le comportement dans les systèmes dynamiques est une série de changements dans la nature les mouvements périodiques en tant que paramètre est varié. En règle générale, dans un oscillateur à un seul degré de liberté, alors que le paramètre de commande s'approche d'une valeur critique pour le mouvement chaotique,

²Supposons que X est un ensemble et Y un sous-ensemble de X . Y est dense dans X si, pour n'importe quel élément $x \in X$, il existe un élément y dans le sous-ensemble Y arbitrairement proche de x , c'est-à-dire si la fermeture de Y est égale à X : $\bar{Y} = X$. Ce qui revient à dire que Y est dense dans X si pour tout $x \in X$ on peut trouver une séquence $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in Y$ qui convergent vers x .

des oscillations sous-harmoniques apparaissent. Dans «l'équation logistique» désormais classique, une série d'oscillations de période 2 apparaît $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$. Le phénomène de changement soudain dans le mouvement quand un paramètre est varié est appelé une bifurcation.

Un exemple de diagramme de bifurcation expérimentale est présenté à la figure 2.3. Telle les diagrammes peuvent être obtenus expérimentalement par échantillonnage temporel du mouvement comme dans une carte Poincaré et affichage de la sortie sur un oscilloscope comme illustré à la figure 2.3. Ici la valeur du paramètre de contrôle - pour exemple, une amplitude ou une fréquence de forçage - est tracée sur le l'axe horizontal et les valeurs temporelles du mouvement sont tracées sur l'axe vertical. Ce diagramme représente en fait une série d'expériences, où chaque valeur du paramètre de contrôle est une expérience.

Lorsque le paramètre de contrôle peut être modifié automatiquement, comme par un ordinateur et un appareil numérique-analogique, le diagramme peut être obtenu assez rapidement. Il faut cependant veiller à ce que les transitoires se sont éteintes après chaque modification du paramètre de contrôle.

Dans le diagramme de bifurcation de la figure 2-3, l'horizontale continue les lignes représentent les mouvements périodiques de divers sous-harmoniques. Les valeurs dans les zones en pointillés représentent des régions chaotiques. La frontière entre les mouvements chaotiques et périodiques peut clairement être vue dans ce diagramme.

Lorsque cela est automatisé, il faut faire attention de ne pas confondre un mouvement quasi-périodique pour un mouvement chaotique. Un Poincaré plan de phase map est toujours très utile pour faire la distinction entre quasipériodique et mouvements chaotiques.

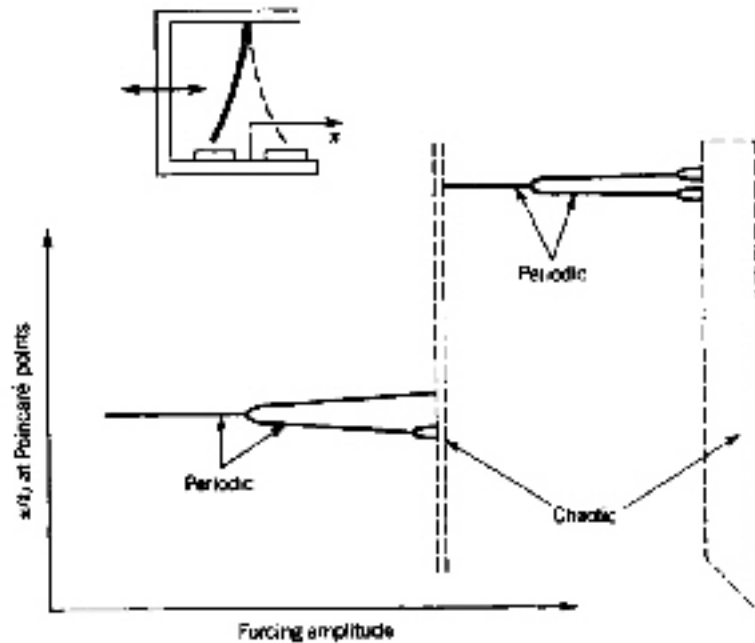


FIG. 2.3 – Diagramme de bifurcation expérimentale pour la vibration d'une poutre déformée :

2.2 Détection du chaos

Il existe des méthodes numériques qui permettent de déterminer le comportement chaotiques d'un système dynamique non linéaire. Elles ne sont généralement pas très nombreuses, ni réparties sur un temps suffisamment long à l'échelle du système étudié. On choisit de mettre en œuvre deux méthodes les plus couramment utilisées : la dimension fractale et les exposants de Lyapunov.

2.2.1 les exposants de Lyapunov

Le test de l'exposant de Lyapunov peut être utilisé pour dissipatif ou systèmes non dissipatifs (conservatifs), alors que le test de dimension fractale n'a de sens que pour les systèmes dissipatifs.

Le test d'exposant de Lyapunov mesure la sensibilité du système aux changements des conditions initiales. Conceptuellement, on imagine une petite boule des conditions initiales dans l'espace des phases et regarde sa déformation dans un ellipsoïde sous la dynamique du système. Si c'est la longueur maximale de l'ellipsoïde et d_0 est la taille initiale de la sphère de

condition initiale, l'exposant de Lyapunov λ est interprété par l'équation

$$d = d_0 2^{\lambda(t-t_0)}$$

Une seule mesure, cependant, n'est pas suffisante et le calcul doit être moyenné sur différentes régions de l'espace des phases. Cette moyenne peut être représentée par

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_1^N \frac{1}{(t_i - t_{0i})} \log_2 \frac{d_i}{d_{0i}}$$

L'exposant de Lyapunov est la vitesse de divergence ou convergence des trajectoires sur l'attracteur .[44]

A titre d'exemple, les types d'attracteurs d'un système tridimensionnel en fonction des signes des exposants de Lyapunov sont donnés dans le tableau suivant.

TAB. 2.1 – Caractérisation d'attracteur

type d'attracteur	signe des exposant de lyapunov
point fixe	---
cycle limite	0--
attracteur étrange	+0-

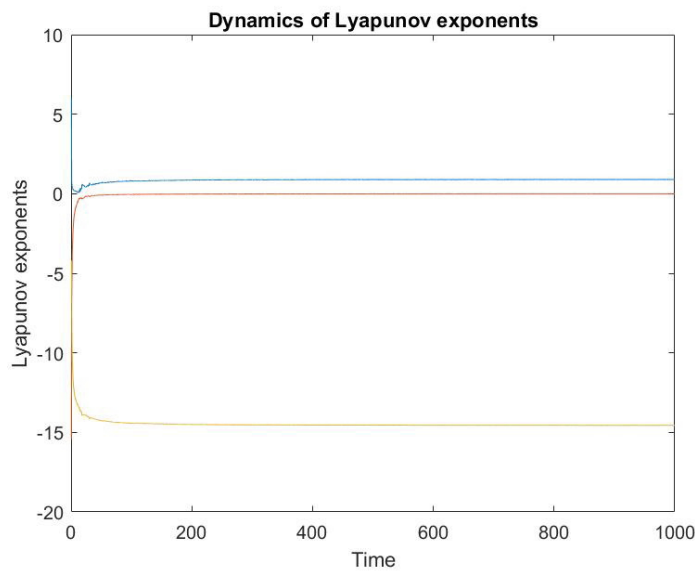


FIG. 2.4 – Exposant de Lyapunov de système de Lorenz

2.2.2 Dimension fractale

L'idée de dimension non entière avait été proposée avant la définition des fractales, des 1919, par le mathématicien Felix Hausdorff, à propos de formes présentant une symétrie géométrique de cette sorte, comme la courbe de Von Koch ou le triangle de Sierpinski. En termes de dimension, la courbe de Von Koch, dont chaque élément de symétrie est divisible en 4 sous-éléments pour un facteur d'échelle 3, est de dimension fractale $\text{Log}4/\text{Log}3 = 1,2618\dots$

Le tamis ou triangle de Sierpinski, obtenu par une suite d'évidements du triangle central dans la série des triangles équilatéraux, formes dans un triangle équilatéral en divisant ses cotes en deux ($N = 3, f = 2$), a pour dimension fractale $\text{Log}3/\text{Log}2 = 1,585$ [44]

Plusieurs définitions de dimension fractale ont été proposées depuis le début de ce siècle. Certaines ont un intérêt purement théorique, pour une étude de ces définitions nous renvoyons à

Définition 2.1 *Il existe plusieurs définitions pour la dimension fractale :*

– *Ceux, qui définissent la dimension d'un ensemble. Cet ensemble peut être un sous ensemble d'un espace métrique quelconque, un attracteur ou non. Nous présentons la dimension de Hausdorff et la dimension de capacité.*

– *Ceux qui tiennent compte de la dynamique d'un système. Ce sont la dimension d'information et la dimension de corrélation. Habituellement on dit qu'on définit la dimension fractale d'un attracteur.*

Il existe plusieurs type de dimensions pour les attracteurs chaotiques, parmi celle-ci on peut citer :

Dimension de Lyapunov

Kaplan et Yorke (1979 a, b) et Fredrickson, Kaplan, Yorke et Yorke (1983) a proposé une relation intéressante entre l'attractrice dimension et ses exposants de Lyapunov $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Pour les systèmes dissipatifs, les volumes dans l'espace d'état se contractent avec le temps, et $t \rightarrow +\infty$, le volume de l'attracteur dans l'espace d'états d'origine est nul. Par conséquent, la somme des exposants de Lyapunov est négative [46].

La dimension de Lyapunov D_L est définie par :

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{\lambda_{j+1}}$$

Où j est le plus grand entier qui satisfait : $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n \geq 0$

Dimension de Hausdorff

Parmi les nombreuses définitions de la dimension fractale, la première en date est celle proposée par Hausdorff 1919. Elle s'applique à des figures très générales, qui ne doivent pas nécessairement être à homothétie interne. Pour la clarifier, il est bon de la décomposer en étapes.

Soit M un ensemble de \mathbb{R}^n recouvert par des ensembles A_i de petits diamètres c'est-à-dire :

$$M \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i, 0 < |A_i| \leq \epsilon$$

On définit la mesure de Hausdorff d -dimensionnelle par :

$$\mu_d(M) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^d \right\}, |A_i| \leq \epsilon$$

La dimension de Hausdorff de l'ensemble M est le réel d_H tq :

$$\mu_d(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } d > d_H \\ +\infty & \text{si } d < d_H \end{cases}$$

Définition 2.2 *On définit la dimension de Hausdorff par :*

[21]

$$d_H(M) = \sup\{d / \mu_d(M) = +\infty\} = \inf\{d / \mu_d(M) = 0\}$$

La dimension de Hausdorff existe toujours. C'est une propriété qui la différencie des autres dimensions fractales.

Dimension de Kolmogorov

Le moyen le plus simple et le plus attrayant d'attribuer une dimension à l'ensemble qui peut donner une dimension fractale à certains types d'ensembles est le soi-disant capacité [46]. Par définition, la dimension de Kolmogorov ou de capacité d_C est la limite si elle existe :

$$d_C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\epsilon))}{\log(1/\epsilon)}$$

Quand l'arête ϵ des hyper cubes tend vers zéro. Par exemple, la dimension de Kolmogorov de l'ensemble triadique de Cantor obtenu est $d_C \approx 0.6309$. Celle du triangle de Sierpinski est $d_C \approx 1.5849$. La dimension de Kolmogorov est plus facile à déterminer que la dimension de Hausdorff-Besicovitch. Cependant, dans beaucoup de cas, d'après le théorème d'Hutchinson, elle est égale à la dimension de Kolmogorov.

La dimension de capacité est un concept purement métrique et n'utilise aucune information sur le système dynamique. Il donne l'échelle du nombre de cubes nécessaires pour couvrir l'attracteur, quel que soit le nombre de points dans chaque cube. Cependant, pour un attracteur étrange, la fréquence de visite de la trajectoire varie énormément d'un cube à l'autre.

Dimension de corrélation

Cette mesure de la dimension fractale a été utilisée avec succès par de nombreux expérimentateurs [par exemple, voir Malraison et al. (1983), Swinney (1985), Ciliberto et Gollub (1985), et Moon et Li (1985a)] et à certains égards est liée à la dimension ponctuelle. Une étude approfondie de cette définition de la dimension a été donnée par Grassberger et Proccacia (1983) [44]. Dans cette méthode, la propriété d'auto similarité d'un attracteur est sondée par le cadrage du comportement de l'intégrale de corrélation :

$$C_M(\epsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N H(\epsilon - \|X_M(i) - X_M(j)\|)$$

Où $H(\cdot)$ est la fonction de Heaviside³. C_M est le nombre (normalisé) de points de l'espace de phases reconstruit appartenant à une sphère de rayon ϵ . La dimension de corrélation découle ainsi directement de l'intégrale de corrélation et s'exprime selon la formule :

Définition 2.3 *On définit la dimension de corrélation par :*

$$D_c(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(C_M(\epsilon))}{\log(\epsilon)}$$

2.3 Propriétés du chaos

Les phénomènes chaotiques, traités par des lois déterministes, sont caractérisés par des propriétés génériques de base, ainsi que par une sensibilité aux conditions initiales. On peut citer les propriétés suivantes :

1. **Le non linéarité** :

Un système linéaire permet des solutions ; les effets sont prévisibles et proportionnels aux causes qui les ont créés. Il peut être démonté en sous-ensembles ou combiné avec d'autres systèmes sans perdre ses propriétés. Cependant, un système non linéaire n'est généralement pas soluble. Plus on essaie de le décomposer, plus la complexité interne se révèle.

2. **La structure fractale** :

Le comportement d'un système chaotique est également reproduit automatiquement à différentes échelles. Plus vous y regardez de plus près, plus vous découvrez de nouveaux détails comparables à ceux des échelles plus élevées. Sa représentation géométrique ne rentre pas dans une pièce avec une dimension entière, mais avec une dimension brisée (une courbe n'est plus une courbe, mais pas une surface).

³La fonction de Heaviside est définie par la relation suivante

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2.4 Le chaos déterministe

Le chaos possède un comportement non prédictible, lié à l'instabilité et au non linéarité des systèmes dynamiques déterministes.

Ceci se manifeste comme ayant une sensibilité élevée aux changements des conditions initiales, provoquant une croissance des erreurs de prédiction entre deux événements, que l'on appelle chaos. Ce phénomène introduit du hasard dans un système physique, même s'il est décrit par des équations parfaitement déterministes. L'effet d'une incertitude sur un état initial peut donc, donner lieu pendant l'évolution temporelle d'un système à des instabilités, tout en restant dans les limites de l'espace de phase.

2.4.1 Transition vers le chaos

Parfois, des vibrations chaotiques apparaissent pour certains changements de paramètres mais s'installent finalement dans un mouvement périodique ou quasi périodique après un court temps. Selon Grebogi, un tel chaos transitoire est une conséquence d'une crise ou de la disparition soudaine de dynamique chaotique. Ainsi, les expériences et la simulation numérique devraient être autorisées à fonctionner pendant un certain temps après que l'on pense que le système est dans le chaos même si la carte de Poincaré semble cartographier une structure fractale caractéristique des attracteurs étranges.

Les problèmes transitoires sont importants dans la dynamique technique. Nouvelles méthodes de caractérisation du comportement chaotique transitoire et de l'imprévisibilité ont récemment retenu l'attention. [44]

Par Intermittences :

Dans un troisième chemin vers le chaos, on observe de longues périodes de mouvement périodique avec des rafales de chaos. Ce scénario s'appelle intermittence. Comme on varie un paramètre, les rafales chaotiques deviennent plus fréquentes et plus longues (p. ex., voir Manneville et Pomeau, 1980).

La preuve de ce modèle pour les préchaos a été revendiquée dans des expériences sur convection dans une cellule (boîte fermée) avec un gradient de température (appelé convection Rayleigh-Benard)

Par doublement de période :

Route doublant la période vers le chaos. Le doublement de période dans les systèmes physiques a été observé expérimentalement dans toutes les branches du classique physique, chimie et biologie ainsi que dans de nombreux dispositifs techniques.

Bien que cette voie vers le chaos dans la science omniprésente, il est par no signifie le seul chemin vers une dynamique imprévisible. Dans le phénomène de doublement de période, on commence par un système avec un mouvement périodique fondamental. Puis, comme un paramètre expérimental est varié, disons A , le mouvement subit une bifurcation ou un changement à un mouvement périodique avec deux fois la période de l'oscillation originale. Comme il a été modifié plus loin, le système bifurque en mouvements périodiques avec deux fois la période de l'oscillation précédente.[44]

Quasi-périodicité :

Bien que le doublement de la période soit le scénario le plus célèbre pour les vibrations chaotiques, plusieurs autres schémas ont été étudiés et observés. Dans une proposition de Newhouse et al. (1978), ils imaginent un système qui subit des instabilités dynamiques successives avant le chaos. Par exemple, supposons qu'un système soit initialement dans un état stable et devienne instable dynamiquement après avoir changé un paramètre (par exemple, flutter). À mesure que le mouvement grandit, les non-linéarités entrent en vigueur et le mouvement devient un cycle limite. Ces transitions sont appelées bifurcations Hopf en mathématiques. Si, après d'autres changements de paramètres, le système subit deux autres bifurcations Hopf de sorte que trois cycles limites couplés simultanés sont présents, des mouvements chaotiques deviennent possibles.

Ainsi, le précurseur d'un tel mouvement chaotique est la présence de deux oscillations pério-

diques simultanées. Lorsque les fréquences de ces oscillations, ω_1 et ω_2 ne sont pas proportionnelles, le mouvement observé n'est pas périodique mais est dit quasipériodique.

2.5 Exemple de Système dynamique chaotique

2.5.1 Modèle de Lorenz

Edward Lorenz fut un météorologue qui, le premier, mit en évidence le caractère chaotique de la météorologie. Le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides. En 1963, Lorenz eut l'idée de chercher un modèle d'équations pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

Ce modèle a joué un rôle historique important puisque son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique. De plus, il constitua le premier et célèbre système différentiel dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange pour certaines valeurs des paramètres. Dans sa version exprimée en paramètres et variables réduits, le système de trois équations différentielles couplées s'écrit :

$$\dot{X} = \sigma(Y - X)$$

$$\dot{Y} = rX - Y - XZ$$

$$\dot{Z} = XY - bZ$$

σ ou Pr désigne le nombre de Prandtl (égale à 10 dans les simulations), $b = 8/3$ et r est le nombre de Rayleigh réduit.

L'origine est un point fixe. La matrice jacobienne à l'origine est :

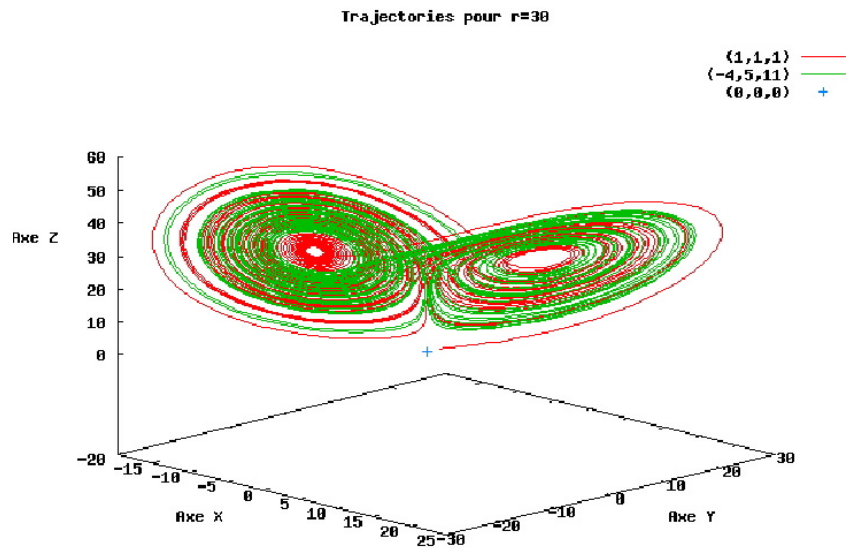


FIG. 2.5 – Trajectoire du système de Lorenz

$$j = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Son équation caractéristique,

$$(\lambda + b) [\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0$$

a pour racines :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)}}{2}, \quad \lambda_3 = -b$$

Tant que $0 < r < 1$, toutes les valeurs propres sont négatives, le point fixe est stable.

Quand $r = 1$, les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -(\sigma + 1), \lambda_3 = -b \tag{2.1}$$

Ce cas correspond à une bifurcation fourche.

Pour $r > 1$, on a $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$. L'origine est devenue instable. Mais lorsque $r > 1$, deux nouveaux points fixes apparaissent que nous désignons par C_1 , C_2 et dont les coordonnées sont :

$$C_1 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \text{ et } C_2 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

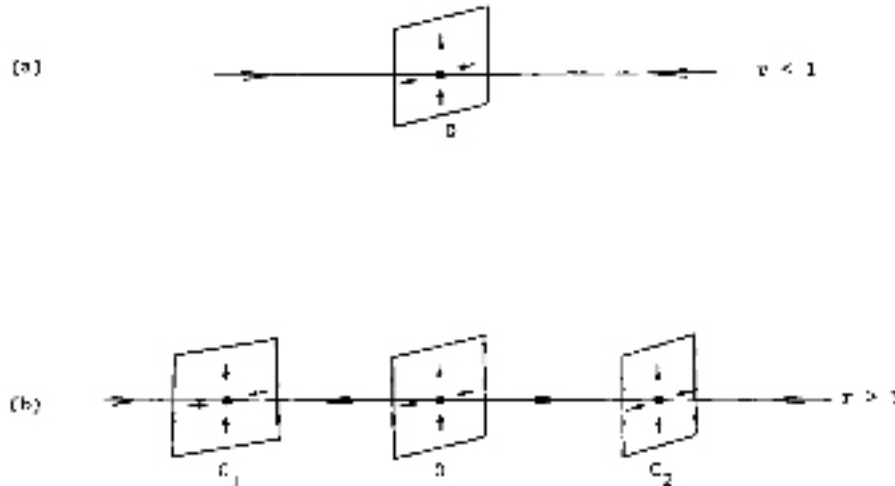


FIG. 2.6 – Une vue schématique du flux près de l'origine pour r près d'un $r > 1$ (a) $r < 1$ (b) $r > 1$

La matrice jacobienne correspondant à ces points fixes s'écrit :

$$j = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r-1) \quad (2.2)$$

Les relations entre les racines et les coefficients de $P(\lambda)$ s'écrivent :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(\sigma + b + 1) \quad (2.3)$$

$$\lambda_2\lambda_1 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3 = b(\sigma + r)$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -2b\sigma(r - 1)$$

Pour $r > 1$, les coefficients de 2.3 sont tous positifs. On en déduit qu'une racine de 2.2 est réelle négative ; notons λ_3 cette racine. Les deux autres racines sont réelles si

$$q^2 + 4\frac{p^3}{27} \leq 0$$

où p et q sont les coefficients de l'équation réduite :

$$u^3 + pu + q = 0$$

avec

$$u = \lambda + \frac{1}{3}(\sigma + b + 1),$$

$$p = b(\sigma + r) - \frac{1}{3}(\sigma + b + 1)^2,$$

$$q = \frac{2}{27}(\sigma + b + 1)^3 - \frac{1}{3}b(\sigma + r)(\sigma + b + 1) + 2b\sigma(r - 1)$$

Pour les valeurs des paramètres $\sigma = 10$ et $b = 8/3$, la relation $q^2 + 4p^3/27 = 0$ est obtenue pour $r = r_1 = 1.34561\dots$. Les trois racines de 2.2 sont donc réelles si

$r < r_1$ et elles sont toutes négatives.

Si r est légèrement plus grand que r_1 , il y a une racine réelle négative λ_3 et deux racines complexes conjuguées. Ecrivons le polynôme caractéristique 2.2 sous la forme :

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_3) (\lambda - \lambda_r - i\lambda_i) (\lambda - \lambda_r + i\lambda_i) \text{ avec } \lambda_{1,2} = \lambda_r + i\lambda_i$$

Les relations entre les racines 2.3 s'écrivent alors :

$$\lambda_3 + 2\lambda_r = -(\sigma + b + 1) \tag{2.4}$$

$$\lambda_r^2 + \lambda_i^2 + 2\lambda_3\lambda_r = b(\sigma + r)$$

$$\lambda_3 (\lambda_r^2 + \lambda_i^2) = -2b\sigma(r - 1)$$

Pour $r > r_1$ et proche de r_1 , λ_r reste négatif et les points fixes C_1, C_2 sont restés stables. Si r continue à croître, on obtient $\lambda_r = 0$ lorsque :

$$r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

(c'est-à-dire $r_c = 24.7368$ pour $\sigma = 10$ et $b = 8/3$). Cette valeur du paramètre r correspond à une bifurcation de Hopf. Les valeurs propres sont alors, d'après 2.4 :

$$\lambda_{1,2} = \pm iw_0 \quad \lambda_3 = -(\sigma + b + 1)$$

avec $w_0^2 = b(\sigma + r_c)$.

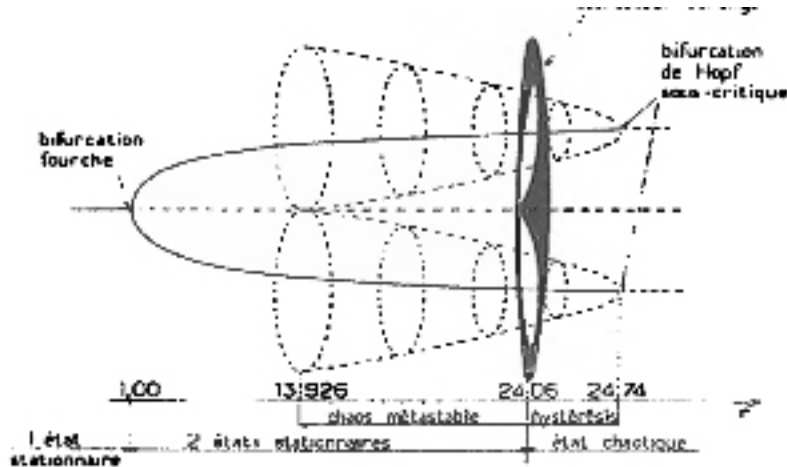


FIG. 2.7 – Diagramme de bifurcation du système de Lorenz à $\sigma = 10$ et $b = 8/3$

2.6 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la théorie du chaos, nous avons introduire par série des définitions sur le phénomène du chaos, nous avons donné les définitions de quelques types des dimensions fractale spécifiques (dimension de Hausdorf, dimension de corrélation etc.). Pour terminer, nous définissons les exposants de Lyapunov, qui constituent l'une des caractérisations quantitatives du chaos les plus fondamentales puisqu'elle s'attache à mesurer la sensibilité aux conditions initiales.

Chapitre 3

Notions du calcul fractionnaire

Le concept de calcul d'ordre fractionnaire est connu depuis la contribution de Leibniz et L'Hôpital en 1695, mais ses applications à l'ingénierie, à la physique et aux mathématiques la biologie ne sont que des sujets d'intérêt récents. Il a été constaté qu'avec l'aide de calcul fractionnaire, la plupart des systèmes dans les domaines interdisciplinaires peuvent être représentés avec délicatesse. En fait, tous les phénomènes physiques de la nature existent sous la forme d'ordre fractionnaires, et l'équation différentielle d'ordre entier (traditionnelle) n'est qu'un cas particulier de la un fractionnaire. L'importance des modèles d'ordre fractionnaire est qu'ils peuvent donner une description explicite et offre un aperçu plus approfondi des processus physiques sous-jacents à un comportement de la mémoire à longue portée. Ainsi, la description fractionnaire est plus proche de la réalité [31].

Une liste de mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes au calcul fractionnaire jusqu'au milieu du 20^{ème} siècle, inclut :

P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A.K. Grunwald (1867, 1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945), E.R. Amor (1938-1996), A. Erdélyi (1939-1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949)

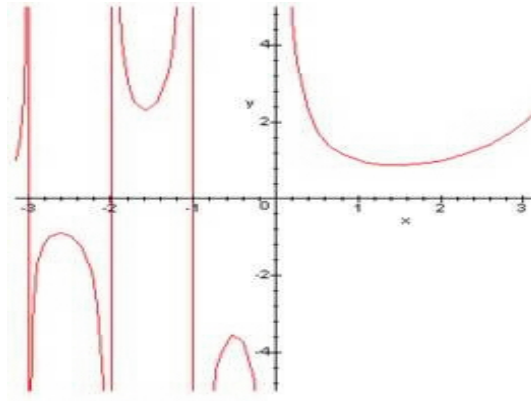


FIG. 3.1 – Fonction Gamma

3.1 Notion préliminaires et outils de base

Dans cette section, nous présentons les définitions des fonctions : Gamma, Béta et Mittag-Leffler qui jouent un rôle très important dans la théorie de calcul fractionnaire et ses applications.

3.1.1 La fonction Gamma

Définition 3.1 Pour $z \in \mathbb{C}$, la fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (3.1)$$

La fonction $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z < 1$. La relation de récurrence

$$\Gamma(z) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (3.2)$$

est une propriété importante de la fonction Gamma, qu'on peut démontrer par une simple intégration par parties.

Partant $\Gamma(1) = 1$ et en utilisant la relation 3.2 nous obtenons par récurrence

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Remarque 3.1 La fonction $\Gamma(z)$ est un prolongement naturel de la factorielle aux nombres

réels positifs et aux nombres complexes a parties réelles positives. [56].

3.1.2 La fonction Bêta

Définition 3.2 *La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tout complexes x et y par : [56]*

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0$$

Elle est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0$$

3.1.3 La fonction Mittag-leffler

Définition 3.3 *La fonction de Mittag Leffler doit son nom au grand mathématicien Suédois **GöstaMagnus Mittag-Leffler** (1846 - 1927) qui l'a définie par la représentation en série suivante : [56]*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \alpha > 0,$$

Cette fonction est une généralisation de la fonction exponentielle a un seul paramètre.

$$E_1(z) = e^z$$

La fonction Mittag-leffler de deux paramètres a été introduit par Humbert Agrawal (1953)

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

3.2 L'intégrale de Riemann-Liouville (R-L)

Pour l'expression de la définition de Riemann-Liouville, nous considérerons le Riemann - Liouville intégrale répétée n-fois définie comme [53]

$$\int_a^t \int_a^{t_n} \int_a^{t_{n-1}} \cdots \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1} dt_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}} dt \quad (3.3)$$

pour $n \in \mathbb{N}, n > 0$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville a droite d'ordre α pour la fonction $f(t)$ peut être exprimée à partir de l'Eq 3.3 comme suit :

$${}_b I_t^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad x < b \text{ pour } \alpha, b \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$$

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville a gauche d'ordre α pour la fonction $f(t)$ peut être exprimée comme suit :

$${}_a I_t^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad x > a \text{ pour } \alpha, a \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$$

3.3 Dérivées fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires. Nous présentons dans cette partie les définitions de Riemann-Liouville et Caputo, qui sont les plus utilisées.

3.3.1 Approche de Riemann-Liouville (R-L)

Soit $f \in L^1([0, T])$, $T > 0$ une fonction intégrables sur $[0, T]$. À partir de la relation 3.3, nous pouvons écrire une formule pour la définition de Riemann-Liouville de dérivée fractionnaire d'ordre α sous la forme suivante : [53, 47]

$$\begin{aligned} {}^R D^\alpha f(t) &= D^n I_a^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

pour $(n - 1 < [\alpha] < n)$,

En particulier si $\alpha = 0$, alors

$${}^R D^0 f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dt} \right) \int_0^t f(\tau) d\tau = f(t)$$

si $\alpha = n$, alors

$${}^R D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \right) \int_0^t f(\tau) d\tau = f^{(n)}(t)$$

3.3.2 Quelques propriétés d'approche de dérivation fractionnaire au Riemann Liouville

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède les propriétés résumées comme suites [56, 28]

Composition avec l'intégrale fractionnaire

Soit $\alpha, \beta > 0$ telle que $\alpha \in [n - 1, n], \beta \in [m - 1, m]$

• Pour $f \in L^1([0, T])$

$${}^R D^\alpha (I_a^\beta f(x)) = f(x)$$

Et en générale

$${}^R D^\alpha (I^\beta f(x)) = {}^R D^{\alpha-\beta} f(x)$$

• Si $\alpha > \beta > 0$ ${}^R D^{\alpha-\beta} f(x) = I_a^{\beta-\alpha} f(x)$

Composition avec les dérivées d'ordre entier

Pour n un nombre entier et α non entier

$$\frac{d^n}{dt^n} [{}^R D^\alpha f(x)] = {}^R D^{n+\alpha} f(x)$$

Et

$${}^R D^\alpha \left[\frac{d^n}{dt^n} f(x) \right] = {}^R D^{n+\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}$$

Composition avec les dérivées fractionnaires

Pour α et β deux nombres non entiers tel que $\alpha \in [n-1; n]$ et $\beta \in [m-1; m]$

$${}^R D^\alpha ({}^R D^\beta f(x)) = {}^R D^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^n [{}^R D^{\alpha-k} f(x)]_{x=a} \frac{(x-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(-\alpha-k+1)}$$

$${}^R D_x^\beta ({}^R D_x^\alpha f(x)) = {}^R D_x^{\beta+\alpha} f(x) - \sum_{k=1}^m [{}^R D_x^{\beta-k} f(x)]_{x=a} \frac{(x-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(-\alpha-k+1)}$$

3.3.3 Approche de Caputo

Définition 3.4 Soient $\alpha \in]n-1, n[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe $C^n([a, b])$, la dérivée de caputo d'ordre α de la fonction f est définie par

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha f(t) &= I^{n-\alpha}(D^n f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-\alpha-1} dt \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.3.4 Quelques propriétés d'approche de Caputo

L'opérateur de dérivation au sens de Caputo possède les propriétés résumées comme suit [56, 28]

Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si $f(x)$ est une fonction continue on :

-

$$D^\alpha [I^\alpha f(x)] = f(x)$$

•

$$I^\alpha [D^\alpha f(x)] = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}$$

3.3.5 Lien entre la dérivée fractionnaire de Caputo et de Riemann-Liouville

$${}_a^R D_x^\beta f(x) = {}_a^C D_x^\beta f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(-\alpha-k+1)} f^{(k)}(a)$$

$${}_x^R D_b^\beta f(x) = {}_x^C D_b^\beta f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^{k-\alpha}}{\Gamma(-\alpha-k+1)} f^{(k)}(b)$$

3.4 La transformé de Laplace

Définition 3.5 Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable temporelle x intégrable et p un nombre complexe, la transformée de $f(x)$ notée : $TL[f(x)]$ ou $F(p)$ ou L est définie par

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx \quad / p \in \mathbb{C} \quad (3.6)$$

$f(x)$ est appelée l'originale de $F(p)$

Remarque 3.2 Transformation de Laplace permet de résoudre des équations différentielles avec conditions initiales prédéfinie, valable des fonctions causales [53]

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

•transformée de Laplace inverse est donnée par

$$f(x) = TL^{-1}[F(p)] = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-px} f(x) dx \quad , c = \text{Re}(s) \succ c_0 \quad (3.7)$$

Où c_0 est réside dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace

•transformée de Laplace de la convolution

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) &= \int_0^x f(x-t)g(t)dt \\ &= \int_0^x f(t)g(x-t)dt \end{aligned} \quad (3.8)$$

soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonction qui sont égale à zéro pour $x < 0$, est égale au produit de leur transformée de Laplace

$$TL[f(x) * g(x)] = F(p) \cdot G(p) \quad (3.9)$$

Sous l'hypothèse que $F(p)$ et $G(p)$ existant

3.4.1 Transformée de Laplace des dérivées fractionnaires

Dans cette section on va prendre la borne inferieure $a = 0$

La transformée de Laplace de l'intégral fractionnaire de (R-L)

Théorème 3.1 Soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ et $f \in l^1[0, b], b > 0$, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de **R-L** de f est donnée par

$$TL[I_0^\alpha f](p) = p^{-\alpha}TL[f](p)$$

Preuve. : On peut écrire $I_a^\alpha f$ comme une convolution de deux fonction, $g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x x^{\alpha-1}$ et $f(t)$

$$\begin{aligned} I_0^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \\ &= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t) \end{aligned}$$

Comme

$$L[x^{\alpha-1}](p) = \Gamma(\alpha)p^{-\alpha}$$

Donc

$$L[I_0^\alpha f](p) = p^{-\alpha} L[f](p)$$

■

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de (R-L)

Théorème 3.2 : Si $f \in l^1[0, b], b > 0$, la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de R-L de f est donné par

$$+ L(D_0^\alpha f)(p) = p^\alpha (Lf)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k [D^{\alpha-k-1} f(x)]_{x=0} \quad (3.10)$$

Avec $n - 1 < \alpha < n$

Preuve. : Par la définition on trouve

$$\begin{aligned} L(D_0^\alpha f)(p) &= L(D^n I^{n-\alpha} f)(p) \\ &= p^n L(I^{n-\alpha} f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{k-n-1} [D^k (I^{n-\alpha} f)(x)]_{x=0} \\ &= p^\alpha (Lf)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{k-n-1} [D^k (I^{n-\alpha} f)(x)]_{x=0} \end{aligned}$$

■

La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre α

Théorème 3.3 : Soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$, et $f \in L^1[0, b]$ pour tout $b > 0$, alors la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de R-L est formulée comme suit

$$L(I^\alpha f)(p) = p^{-\alpha} Lf(p) \quad (3.11)$$

Preuve. : On peut écrire $I_a^\alpha f$ comme une convolution $g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}$ et $f(t)$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \\ &= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * f(t) \end{aligned}$$

Alors

$$L[I_0^\alpha f](p) = L\left[\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right](p) \cdot Lf(p)$$

Comme

$$L[x^{\alpha-1}](p) = \Gamma(\alpha)p^{-\alpha}$$

■

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

Théorème 3.4 : Si $f \in C[0, b]$, pour tout $b > 0$, alors la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo de f est

$$L({}^c D_0^\alpha f)(p) = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+)$$

Preuve. : Pour $\alpha \in]n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x > 0$ alors

$${}^c D_0^\alpha f(x) = I^{n-\alpha} f^{(n)}(x)$$

Donc, d'après 3.11

$$\begin{aligned} L({}^c D_a^\alpha f)(p) &= L(I^{n-\alpha} f^{(n)})(p) \\ &= p^{-n+\alpha} (L f^{(n)})(p) \end{aligned}$$

Et d'après 3.9

$$L({}^c D_a^\alpha f)(p) = p^\alpha (L f)(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0^+)$$

■

3.5 Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire

La stabilité des systèmes fractionnés a été étudiée à fond si nécessaire et des conditions scientifiques ont été obtenues en Il a été démontré que la région de stabilité d'un ensemble linéaire d'équations d'ordre fractionnaire α

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) \quad x(0) = x_0$$

où $x(t) = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3, A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $\alpha \in (0, 1)$, est délimitée par un cône, avec un sommet à l'origine, et qui s'étend dans la moitié droite du plan s de telle sorte qu'il enferme un angle de $\pm\alpha\pi/2$ comme le montre la Fig 3.2. Ainsi, quand un $\alpha = 1$, nous obtenons la région de stabilité toute familière du système d'ordre entier, i.e. le demi-plan gauche où l'axe imaginaire devient la frontière de la région de stabilité.

Par conséquent, si les valeurs propres de la matrice jacobienne du système sont placées n'importe où en dehors du cône dans la Fig 3.2, le système d'ordre fractionnaire sera stable.

Pour le système d'ordre fractionnaire proportionnel non linéaire tridimensionnel suivant :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)) \quad x(0) = x_0 \tag{3.12}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction vectorielle non linéaire en termes de x . Soit $J(x^*) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{ij} \Big|_{x=x^*}$ être la matrice jacobienne à point d'équilibre x^* .

Lemme 3.1 [23] *Le point d'équilibre $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ du système 3.12 est localement asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3$ de la matrice jacobienne J satisfont aux conditions*

$$\arg(\lambda_i) > \alpha \frac{\pi}{2} \quad i = 1, 2, 3$$

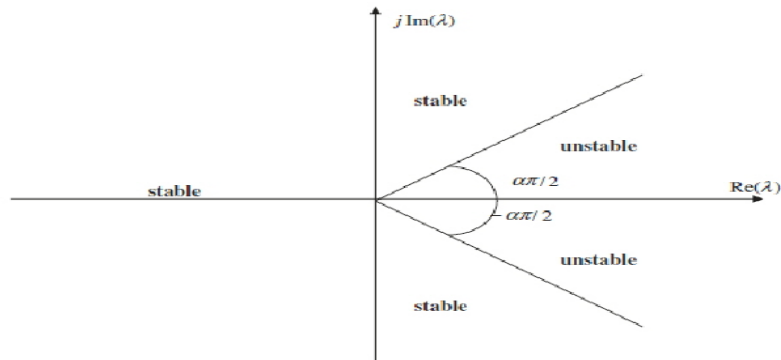


FIG. 3.2 – Région de stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

3.6 Contrôle du chaos dans le cas fractionnaire

Le contrôle des systèmes non linéaires, en particulier des systèmes chaotiques, a fait l'objet d'études intensives au cours des dernières décennies. Comme noté (Andrievskii et Fradkov, 2003, 2004), plusieurs milliers de publications sont apparues au cours de la dernière décennie en raison du fait que le comportement chaotique a été découvert dans de nombreux systèmes en mécanique, laser et radio physique, hydrodynamique, chimie, biologie et médecine, circuits électroniques, systèmes économiques, etc. Pour cette raison, une question naturelle se pose : comment pouvons-nous contrôler les systèmes chaotiques ?

La première chose importante est que nous avons besoin de la formulation mathématique des processus chaotiques par les modèles de base des systèmes chaotiques qui sont utilisés. Les modèles mathématiques les plus populaires utilisés dans la littérature sur le contrôle du chaos sont représentés par les systèmes d'équations différentielles ordinaires. Dans certains travaux, nous pouvons également trouver des modèles discrets définis par des équations d'état de différence. La deuxième chose importante est la formulation des problèmes de contrôle des processus chaotiques. Un type important de problèmes de contrôle des processus chaotiques est représenté par la modification des attracteurs, par exemple, la transformation des oscillations chaotiques en état périodique et ainsi de suite.[53]

Dans le document (Andrievskii et Fradkov, 2003) [5] ont été recueillies et présenté plusieurs méthodes utilisées pour le contrôle des processus chaotiques. Les auteurs ont considéré les systèmes chaotiques d'ordre entier classiques, mais en général nous pouvons utiliser ces méthodes

pour les systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire aussi bien. En outre, d'autres méthodes de contrôle de ces systèmes ont été proposées et peuvent être résumées comme suit :

Contrôle adaptatif développé dans la seconde moitié du dernier siècle, le champ de contrôle adaptatif est encore intéressant, défiant, et excitant avec une variété d'applications dans les systèmes de contrôle modernes. Beaucoup de publications considèrent la possibilité d'appliquer les méthodes adaptatives au contrôle de processus chaotiques, n'étant pas surpris parce que dans beaucoup d'applications physiques, les paramètres et l'information au sujet de la structure du modèle du système contrôlé sont inconnus, par exemple la dimension des équations du système ou la forme caractéristiques des non linéarités dans la plupart du temps sont incomplètes, ainsi la majorité de travaux rend usage directement ou indirectement [5].

Méthode feedback proposée par Pyragas est consisté à stabiliser l'orbite visée par l'ajout de perturbations sur les variables de système.

3.6.1 Méthode de Contrôle adaptatif

Le système dynamique commandé par l'ordre fractionnaire est décrit sous une forme compacte

$$D^\alpha X = F(X) + U_i \quad (3.13)$$

où U_i est le contrôleur ajouté au i ème terme de l'équation système. Le contrôleur est conçu comme

$$U_i = -\kappa(x_i - x_{i^*}) \quad (3.14)$$

où κ est la force de contrôle, dont l'amplitude est ajustée en fonction de la loi adaptative

$$D^\beta \kappa = \mu(x_i - x_{i^*}) \quad (3.15)$$

où $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, $F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_m(X))^T$, $\mu > 0$, $\beta \in (0, 1]$, $X_\star = (x_{1^\star}, x_{2^\star}, \dots, x_{m^\star})$ est l'équilibre du système incontrôlée.

Hypothèse . La fonction $f_i(X)$ est lisse au point d'équilibre X_\star , et il y a une constante ρ ,

telle que

$$\|f_i(X) - f_i(X_*)\| = \|f_i(X)\| \leq \rho \|X - X_*\|_\infty \quad (3.16)$$

où $\|X - X_*\|_\infty$ est la ∞ -norme de $X - X_*$, c'est-à-dire $\|X - X_*\|_\infty = \max_j \|x_j - x_{j*}\|$ $j = 1, 2, \dots, m$. Lors de la mise en œuvre du schéma de contrôle adaptatif, la force de contrôle κ est considérée comme un variable (ressemblant à la variable d'état x_i , $i = 1, 2, \dots, m$). Donc, pour les systèmes 3.13 et 3.15, nous définissons un vecteur d'erreur augmenté comme ci-dessous

$$E^T = (X - X_*, \kappa - \kappa_0) = (x_1 - x_{1*}, x_2 - x_{2*}, \dots, x_m - x_{m*}, \kappa - \kappa_0)$$

avec $\kappa_0 \geq m\rho$. Pour les systèmes augmentés 3.13 et 3.15, la fonction candidate Π pouvez être sélectionné comme

$$\Pi = E^T \cdot B \cdot D^\gamma E \leq 0$$

où, $D^\gamma = (D^\alpha, D^\alpha, \dots, D^\alpha, D^\beta)$, et l'opérateur B est sélectionné comme

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/\mu \end{bmatrix}$$

Ensuite nous avons

$$\Pi = (X - X_*)^T D^\alpha (X - X_*) + \frac{(\kappa - \kappa_0)}{\mu} D^\beta (\kappa - \kappa_0)$$

Compte tenu de la condition de Lipschitz 3.16 donne

$$\begin{aligned}
 \Pi &= (X - X_*)^T [F(X) - \kappa(x_i - x_{i^*})] + (\kappa - \kappa_0) - (x_i - x_{i^*})^2 \\
 &= (X - X_*)^T F(X) - \kappa(x_i - x_{i^*})^2 + (\kappa - \kappa_0) - (x_i - x_{i^*})^2 \\
 &= (X - X_*)^T F(X) - \kappa_0(x_i - x_{i^*})^2 \\
 &\leq (m\rho - \kappa_0) \|X - X_*\|_\infty^2 \\
 &\leq 0
 \end{aligned}$$

Par conséquent, selon le théorème suivant

Théorème 3.5 *Considérons le système dynamique d'ordre fractionnaire suivant :*

$$D^\alpha X = F(X) = A(X) X \quad (3.17)$$

avec $X \in \mathbb{R}^m$, $A(X) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\alpha \in (0, 1]$. S'il existe $B^T = B > 0$, tel que

$$\Pi = X^T \cdot B \cdot D^\alpha X \leq 0$$

puis système 3.17 est asymptotiquement stable.[31]

Preuve. Voir [31] ■

, les systèmes 3.13 et 3.15 sont asymptotiquement stables, que est, X tend vers X_* et κ tend vers κ_0 lorsque $t \rightarrow \infty$

Remarque 3.3 *Schéma proposé à l'expression la plus simple pour le contrôleur et la loi mise à jour adaptative. Et ce schéma est flexible et peut être ajouté à n'importe quel terme de l'équation système. De plus, β peut avoir n'importe quelle valeur de 0 à 1*

Exemple 3.1 *Considérons le système chaotique d'ordre fractionnaire*

$$D^\alpha x_1 = a(x_2 - x_1) \quad (3.18)$$

$$D^\alpha x_2 = (c - a)x_1 + cx_2 - dx_1x_3$$

$$D^\alpha x_3 = -bx_3 + ex_2^2$$

où x_1, x_2, x_3 sont les variables d'état, a, b, c, d, e sont les paramètres de constante positive. Lorsque $2c - a \geq 0$, on peut facilement obtenir trois équilibres de système 3.18 : $P_0(0, 0, 0)$, $P_1(\sqrt{b(2c - a)/de}, \sqrt{b(2c - a)/de}, (2c - a)/d)$, $P_2(-\sqrt{b(2c - a)/de}, -\sqrt{b(2c - a)/de}, (2c - a)/d)$. Quand $a = 38, b = 3, c = 30, d = 1, e = 1$, les équilibres de système 3.18 sont $P_0(0, 0, 0)$, $P_1(8.124, 8.124, 22)$, $P_2(-8.124, -8.124, 22)$.

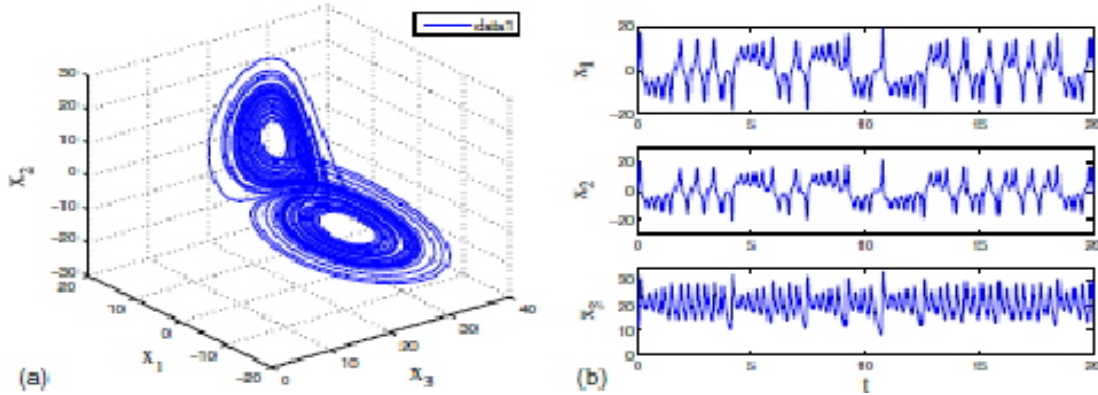


FIG. 3.3 – Attracteur chaotique et séries chronologiques du système d'ordre fractionnaire 3.18 : (a) Chaotique attracteur, (b) séries chronologiques

Le contrôleur est ajouté au deuxième terme de l'équation 3.18, qui est décrit comme

$$D^\alpha x_1 = a(x_2 - x_1) \quad (3.19)$$

$$D^\alpha x_2 = (c - a)x_1 + cx_2 - dx_1x_3 - \kappa(x_2 - x_{2^*})$$

$$D^\alpha x_3 = -bx_3 + ex_2^2$$

$$D^\beta \kappa = \mu(x_2 - x_{2^*}) \quad (3.20)$$

Dans la simulation numérique, les paramètres sont $a = 38, b = 3, c = 30, d = 1, e = 1$ et

$\alpha = 0,92, \beta = 0,3, \mu = 5$, respectivement ; les conditions initiales du système 3.19 sont réglés sur $x_1(0) = 0,5, x_2(0) = 0,2, x_3(0) = 15, \mu(0) = 0,1; x_{2^*}$ est sélectionné comme $0, 8.124, -8.124$, respectivement ; la commande est active lorsque $t \geq 15s$. La réponse temporelle des états de système contrôlé est illustrée à la figure 3. Comme on peut le voir sur la figure, l'état de système 3.19 atteint le point d'équilibre.[31]

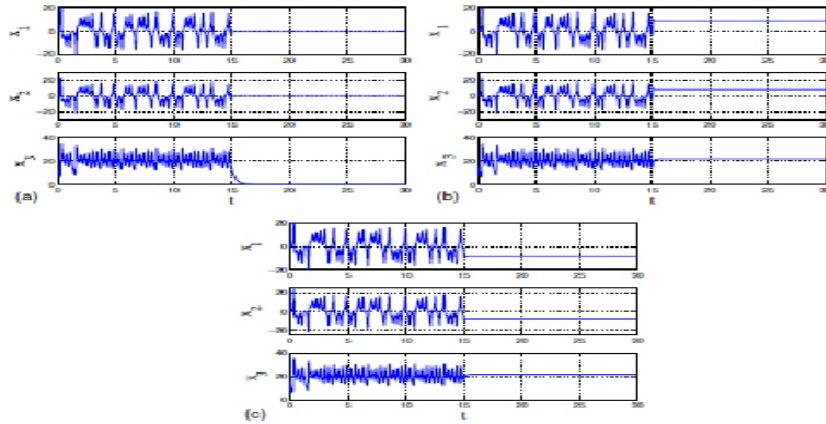


FIG. 3.4 – Les trajectoires du système contrôlé eq. 3.19 équilibre stabilisant point : (a) P_0 , (b) P_1 , (c) P_2

3.6.2 Méthode feedback

Considérons le système fractionnaire

$$D^\alpha x(t) = f(x, \mu, t) \quad (3.21)$$

Où $x(t)$ est le vecteur d'état de système et $\mu(t)$ le vecteur de contrôle. Le problème est de déterminer le contrôle

$$\mu(t) = g(x, t)$$

g est un vecteur non linéaire (inclus le cas linéaire) de telle manière que le système contrôlé

$$D^\alpha x(t) = f(x, g(x, t), t),$$

peut être conduit par le contrôle de rétroaction $g(x, t)$ pour atteindre l'objectif de suivi de la

cible, nous devons donc avoir

$$\lim \|x(t) - \tilde{x}(t)\| = 0$$

Soit $\tilde{x}(t)$ une orbite périodique ou un point fixe du système donné 3.21 avec $\mu = 0$, alors nous obtenons l'erreur de système

$$D^\alpha e(t) = f(e, t) \quad (3.22)$$

Proposition 3.1 *Si 0 est un point fixe du système 3.22 et les valeurs propres de la matrice Jacobienne $A = \frac{\partial f}{\partial x}|_0$ satisfait la condition*

$$\min_i \arg(\lambda_i) > \alpha \frac{\pi}{2} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

alors la trajectoire $x(t)$ du système 3.21 converge vers $\tilde{x}(t)$. [2]

Preuve. Voir [2] ■

Exemple 3.2 *Le système Liu d'ordre fractionnaire proportionnel est donné par*

$$D^\alpha x_1 = a(x_2 - x_1) \quad (3.23)$$

$$D^\alpha x_2 = bx_1 - \kappa x_1 x_3$$

$$D^\alpha x_3 = -cx_3 + \sigma x_1^2$$

où α est l'ordre fractionnaire et $\alpha \in (0, 1)$. Les paramètres a, c, κ, σ sont tous des paramètres réels positifs et $b \in \mathbb{R}$. Quand $\alpha = 1$, le système 3.23 devient le système Liu d'ordre entier d'origine qui présente des comportements chaotiques aux valeurs de définir $a = 10, b = 40, c = 2, 5, \sigma = 4$ et $\kappa = 1$. Pour évaluer les points d'équilibre, soit $D^\alpha x_1 = 0, D^\alpha x_2 = 0$ et $D^\alpha x_3 = 0$, alors $E_0(0, 0, 0)$, $E_1\left(\sqrt{\frac{bc}{\sigma\kappa}}, \sqrt{\frac{bc}{\sigma\kappa}}, \frac{b}{\kappa}\right)$ et $E_2\left(-\sqrt{\frac{bc}{\sigma\kappa}}, -\sqrt{\frac{bc}{\sigma\kappa}}, \frac{b}{\kappa}\right)$.

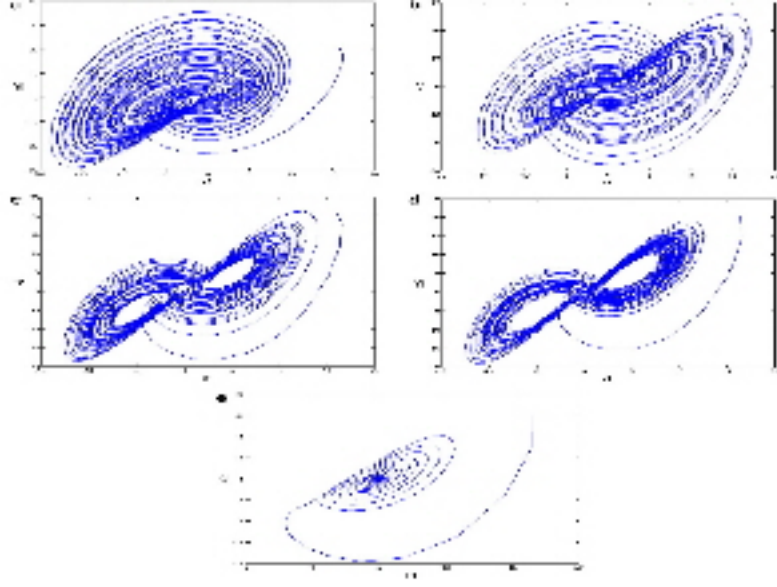


FIG. 3.5 – Diagrammes de phase pour le système Liu avec des ordres fractionnaires proportionnels : (a) $\alpha = 1$, (b) $\alpha = 0,99$, (c) $\alpha = 0,9$, (d) $\alpha = 0,85$, (e) $\alpha = 0,83$

Le système Liu d'ordre fractionnaire proportionnel contrôlé est donné par :

$$D^\alpha x_1 = a(x_2 - x_1) - k_1(x_1 - x_1^*) \quad (3.24)$$

$$D^\alpha x_2 = bx_1 - \kappa x_1 x_3 - k_2(x_2 - x_2^*)$$

$$D^\alpha x_3 = -cx_3 + \sigma x_1^2 - k_3(x_3 - x_3^*)$$

où k_1, k_2 et k_3 sont tous des gains de contrôle de rétroaction positive. Par un choix approprié de ces gains de contrôle de rétroaction selon les conditions de stabilité mentionnées ci-dessus, nous pouvons conduire les trajectoires du système vers l'un des trois équilibres instables points E_0, E_1 et E_2 .

L'équation caractéristique du système contrôlé 3.24 évaluée à l'équilibre les points E_1 et E_2 sont donnés par

$$\lambda^3 + (s_1 + s_2 + k_2)\lambda^2 + (s_1 s_2 + (s_1 + s_2)k_2)\lambda + s_1 s_2 k_2 + 2abc = 0 \quad (3.25)$$

où $s_1 = c + k_3 > 0$ et $s_2 = a + k_1 > 0$ [23].

Le système 3.24 est intégré numériquement avec les valeurs des paramètres ; $a = 10, b =$

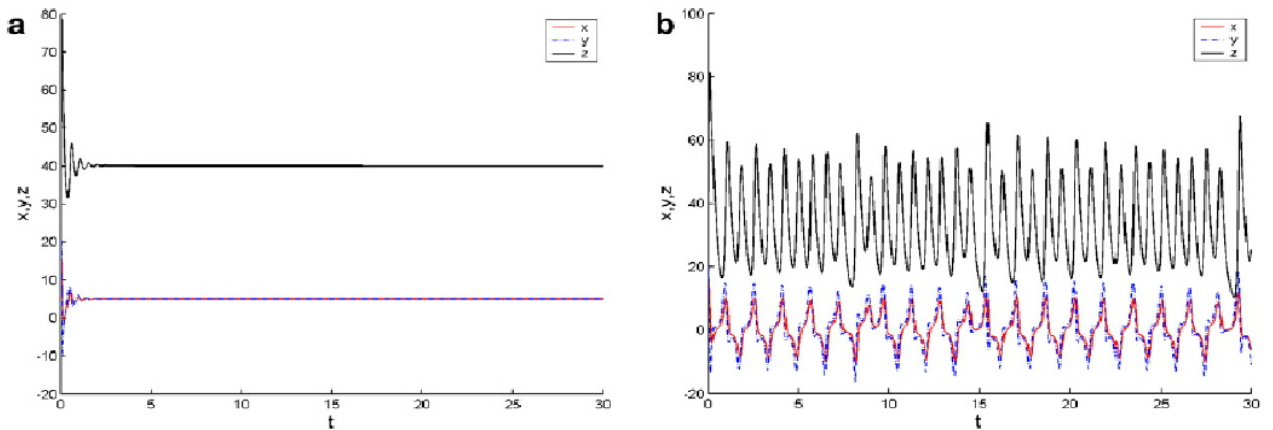


FIG. 3.6 – Les trajectoires du système commandé 3.24 ; (a) sont stabilisés au point d'équilibre $E_1 = (5, 5, 40)$ à $\alpha = 0,9$; (b) ne sont pas stabilisés au point d'équilibre $E_1 = (5, 5, 40)$ en $\alpha = 1,0$; en utilisant les régulateurs $k_1 = 2, k_2 = 4, 3783, k_3 = 1$ et les valeurs de paramètre $a = 10, b = 40, c = 2, 5, \sigma = 4, \kappa = 1$

40, $c = 2, 5, \sigma = 4, \kappa = 1$ et en utilisant l'alimentation- gain de contrôle arrière $k_1 = 2, k_2 = 4, 3783, k_3 = 1$. Pour le choix mentionné ci-dessus des valeurs de paramètre et le contrôle gagne, il est clair que $\phi(P) < 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_1 a_2 = a_3$ et $a_3 > 0$. Par conséquent, toutes les valeurs propres de la caractéristique l'équation 3.25 se situe dans la région stable de la figure 1 selon les conditions de stabilité (i) et (il). Par conséquent, les trajectoires du système commandées 3.24 avec tout ordre fractionnaire à $\alpha \in (0, 1)$, convergent vers les points d'équilibre E_1 et E_2 . Fig.3a et Fig.4a montrent que les trajectoires du système Liu d'ordre fractionnaire contrôlé avec un ordre proportionnel $\alpha = 0,9$ convergent aux points d'équilibre $E_1 = (5, 5, 40)$ et $E_2 = (-5, -5, 40)$ respectivement. Cependant, quant $\alpha = 1,0$, il y a deux imaginaires purs valeurs propres de la caractéristique 3.25. Cela implique que la forme d'ordre entier du système contrôlé 3.24 n'est pas stabilisée aux points d'équilibre $E_1 = (5, 5, 40)$ et $E_2 = (-5, -5, 40)$ lors du choix des valeurs de paramètres mentionnées ci-dessus et les gains de contrôle de rétroaction (voir Fig.3.6 et Fig.3.7).[23]

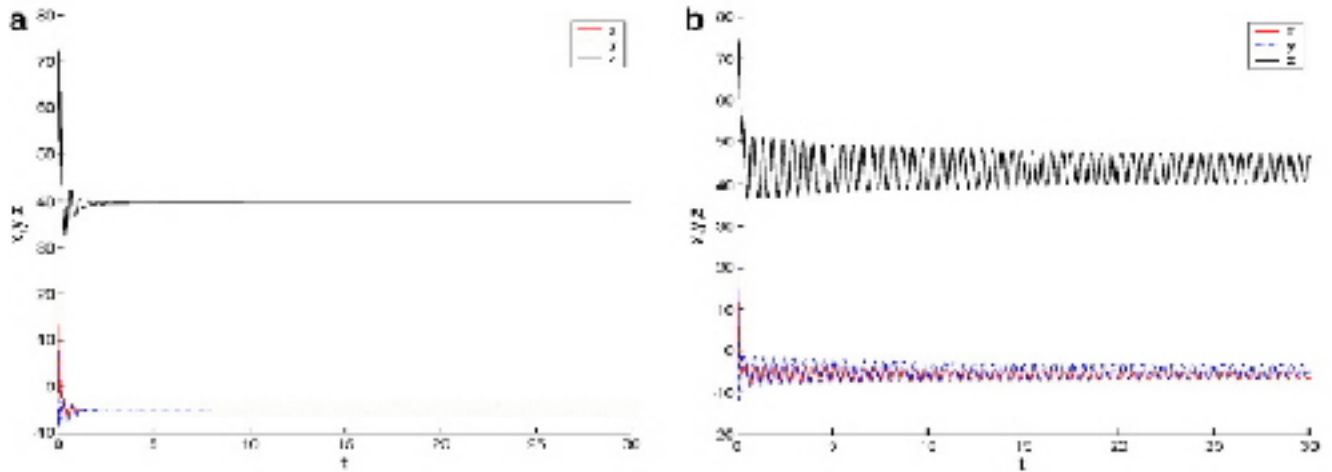


FIG. 3.7 – Les trajectoires du système commandé 3.24 ; (a) sont stabilisés au point d'équilibre $E_2 = (-5, -5, 40)$ à $\alpha = 0,9$; (b) ne sont pas stabilisés au point d'équilibre $E_2 = (-5, -5, 40)$ en $\alpha = 1,0$; en utilisant les régulateurs $k_1 = 2, k_2 = 4, 3783, k_3 = 1$ et les valeurs de paramètre $a = 10, b = 40, c = 2, 5, \sigma = 4, \kappa = 1$

3.7 Conclusion

La dérivée non entière a été introduite à partir de quelques rappels sur les fonctions Gamma, Béta, Mittag leffler plus les approches des dérivées fractionnaires les plus populaires (Riemann-Liouville et de Caputo). on a étudié ces approches, définition, et propriétés. Ainsi que leurs transformés de Laplace.

On remarquera l'absence de généralisation pour la dérivée du produit et de la composition de deux fonctions. Ces caractéristiques de la dérivée classique passent effectivement mal au fractionnaire. Quelle que soit la définition utilisée.

Chapitre 4

Synchronisation des systèmes dynamiques

Le chaos et la synchronisation sont des concepts importants en science, tant d'un point de vue philosophique que pratique de vue. La synchronisation exprime une notion de corrélation forte entre systèmes couplés. Dans sa forme la plus élémentaire et forme intuitive, la synchronisation se réfère à la tendance d'avoir le même comportement dynamique. Les scientifiques aussi reconnaître les formes de synchronisation plus faibles, où certains les aspects clés du comportement dynamique sont les mêmes - comme fréquences - ou lorsque les comportements dynamiques couplés satisfaire une relation spatio-temporelle spécifique - comme un retard de phase constant. [67]

Au cours des deux dernières décennies, la synchronisation dans les systèmes dynamiques chaotiques a suscité un grand intérêt parmi scientifiques de divers domaines de recherche depuis Pecora et Carroll [52] ont introduit une méthode de synchronisation deux systèmes chaotiques identiques avec des conditions initiales différentes. L'idée de la synchronisation est d'utiliser la sortie du maîtresystème pour contrôler le système esclave de sorte que la sortie du système de réponse suive la sortie du système maître asymptotiquement. [50]

4.1 Définitions de synchronisation :

Définition 4.1 (de Larousse) *Synchronisation est un mot grec décomposé en deux parties : Syn veut dire ensemble et Chrono veut dire temps. C'est l'action de mettre en phase pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations, en fonction du temps.*

Définition 4.2 (générale) *La synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.*

Définition de synchronisation en mathématique :

Après plusieurs tentatives pour définir un mouvement synchronisé, Brown et Kocarev ont récemment fourni une définition mathématique de la synchronisation. Pour construire la définition, ils supposent qu'un système dynamique, global, de dimension finie et déterministe est divisible en deux sous-systèmes :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x(t)) \\ \dot{y} &= f(y(t))\end{aligned}\tag{4.1}$$

où, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes.

Définition 4.3 (Brown et Kocarev) *Les sous-systèmes dans les équations 4.1 sont synchronisés sur la trajectoire de $\varphi(w_0)$, par rapport aux propriétés g_x et g_y ; s'il existe un instant indépendant de l'application h tel que $\|h(g_x; g_y)\| = 0$. [9]*

Avec le choix de g_x , g_y et h on peut déterminer le type de synchronisation. Cette approche conduit à l'idée qu'il existe des différents types de synchronisation.

4.2 Méthode de synchronisation

4.2.1 Synchronisation bidirectionnelle

Afin d'observer le comportement de synchronisation, nous considérons deux systèmes chaotiques n - dimensionnels identiques avec différentes conditions initiales. Les systèmes maître et esclave sont décrits respectivement par les relations 4.2 et 4.3 . Le troisième terme du côté droit a été ajouté à la dynamique des systèmes à des fins de conception de commande.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) + K_1(y(t) - x(t)) \quad (4.2)$$

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t)) + K_2(x(t) - y(t)) \quad (4.3)$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non linéaire continue, K_1 et K_2 sont des matrices diagonales qui sont utilisés comme gains de rétroaction à calculer.

En considérant $e(t) = y(t) - x(t)$ et $f(y) - f(x) = M_{x,y}e$, la dynamique d'erreur peut s'écrire

$$\dot{e}(t) = (A + M_{x,y} - (K_1 - K_2))e(t) \quad (4.4)$$

Puisqu'un système chaotique a des trajectoires bornées, $M_{x,y} = M(x,y)$ est une matrice bornée. Le théorème suivant donne le condition suffisante pour que le système 4.4 soit globalement stable. [20]

Théorème 4.1 *S'il existe une matrice constante symétrique définie positive P et une constante $\varepsilon > 0$, telles que*

$$(A + M_{x,y} - (K_1 - K_2))^T P + P (A + M_{x,y} - (K_1 - K_2)) < -\varepsilon I$$

est satisfaite uniformément pour tout x et y , où I est la matrice d'identité, alors le système de dynamique d'erreur 4.4 est globalement stable, c'est-à-dire que les systèmes 4.2 et 4.3 sont synchronisés. [20]

4.2.2 Synchronisation unidirectionnelle

Par rapport au théorème précédente, le résultat peut être simplifié comme la condition des systèmes de chaos de couplage unidirectionnel lorsque $K_1 = 0$ ou $K_2 = 0$.

Basé sur le système chaotique de Lorenz, Rössler a construit un attracteur chaotique plus simple mais topologiquement différent (Fig.4.1), qui peut être décrit par

$$\dot{x} = -y - z$$

$$\dot{y} = x + ay$$

$$\dot{z} = xz - bz + c$$

où $a = 0,2, b = 5,7, c = 0,2$. Le système Rössler est l'un des systèmes de temps continu les plus simples qui présentent des comportements chaotiques.

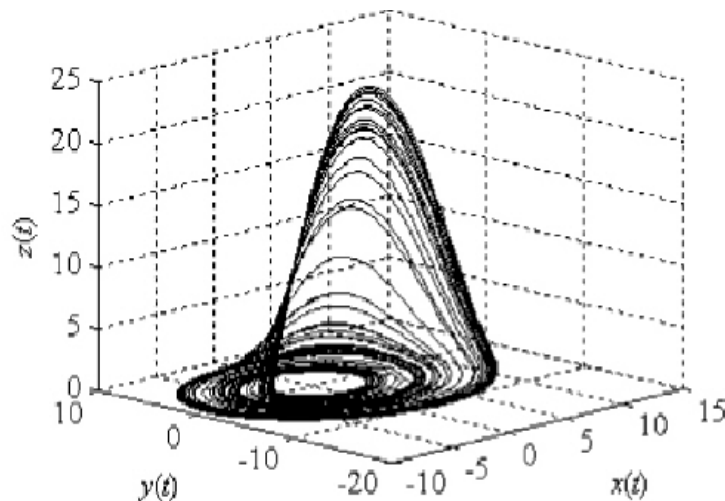


FIG. 4.1 – Attracteur de système Rössler

Synchronisation via couplage bidirectionnel et unidirectionnel : sélection de ε et P comme précédemment et du paramètre de couplage

$K_1 = K_2 = \text{diag}\{8, 8, 15\}$ pour bidirectionnel et $K_1 = 0, K_2 = \text{diag}\{16, 16, 30\}$ pour la

méthode unidirectionnelle satisfaire la condition qui est requise dans le théorème 1. Comme il est montré dans les Fig. 6 et 7 tous les états sont synchronisé dans le système couplé Rössler avec couplage bidirectionnel et unidirectionnel.

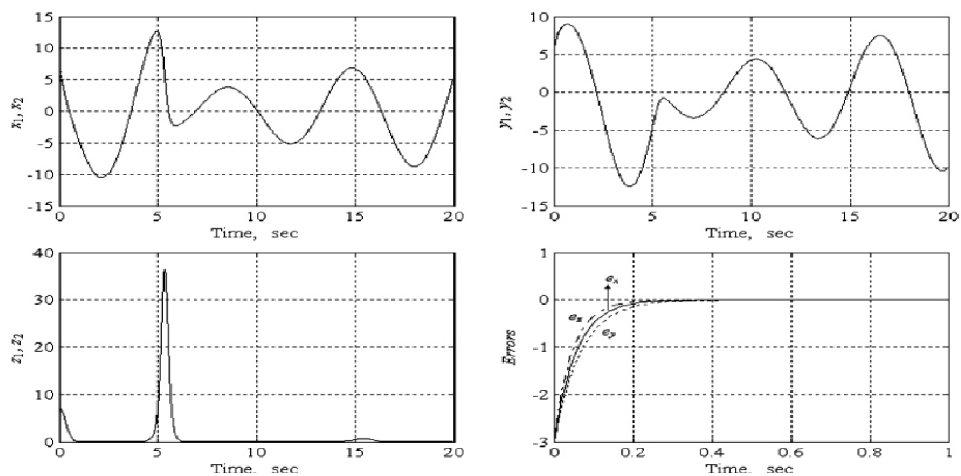


FIG. 4.2 – États synchronisés de Rössler et trajectoires d'erreur par couplage bidirectionnel.

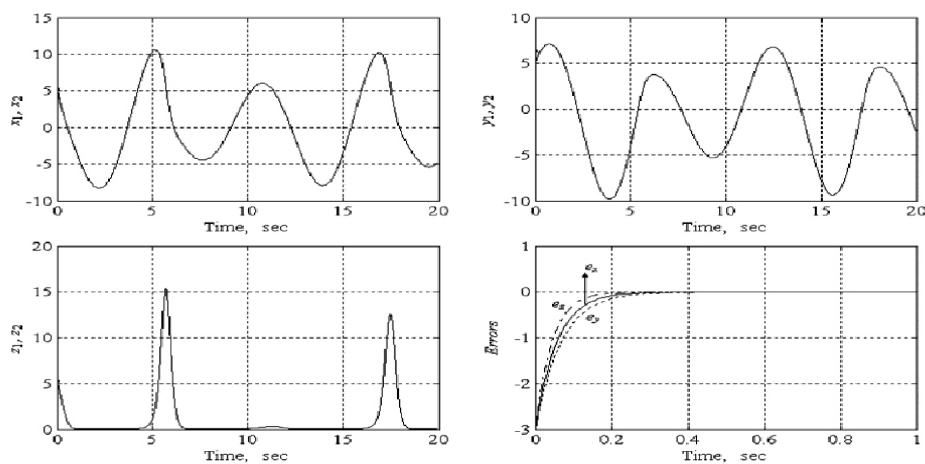


FIG. 4.3 – États synchronisés de Rössler et trajectoires d'erreur par couplage unidirectionnel

4.3 Types de synchronisation

4.3.1 Synchronisation complète

La synchronisation complète a été réalisée grâce aux effets des forces d'accouplement unidirectionnelles des systèmes dynamiques. C'est la forme de la synchronisation la plus simple et la plus typique observée pour deux systèmes.

Définition 4.4 . *Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques liés par un accouplement unidirectionnel, et représentés par les équations suivantes :*

$$\dot{x} = f(x, t)$$

$$\dot{y} = g(x, y, t)$$

On dit qu'il y a une synchronisation complète entre ces deux systèmes si :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t) - x(t)\| = 0,$$

pour toutes conditions initiales $x(0), y(0)$, des deux systèmes.

Si $f = g$, la relation devient une synchronisation complète identique.

D'après cette définition on peut conclure que l'étude de la synchronisation nous ramène à l'étude de la stabilité au voisinage de l'origine d'un nouveau système qu'on s'appelle "système erreur", ce dernier est donné par l'équation :

$$e = y - x$$

Synchronisation identique par la méthode Peccora et Carroll

Depuis Peccora et Carroll ont introduit une méthode pour synchroniser deux systèmes identiques avec des initiales différentes conditions, la synchronisation du chaos, en tant que sujet

très important dans la science non linéaire, a été développé en les dernières années. De manière générale, la synchronisation du chaos peut être considérée comme le problème de conception d'une loi de rétroaction pour un observateur complet utilisant les informations connues de l'installation, afin de garantir la synchronisation du récepteur commandé avec l'émetteur. [20]

Cette procédure de synchronisation peut être décrite comme suit : supposons qu'un système dynamique n -dimensionnel

$$\dot{u}(x) = h(u) \quad u = u(x, y)$$

peut être divisé en deux sous-systèmes

$$\dot{x} = f(x, y) \tag{4.5}$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

Où $x = [u_1, \dots, u_m]^T$, $f = [h_1(u), \dots, h_m(u)]^T$, $y = [u_{m+1}, \dots, u_n]^T$ et $g = [h_{m+1}(u), \dots, h_n(u)]^T$

Créons un nouveau sous-système z identique au sous-système y , substituons l'ensemble de variables x pour le x correspondant dans la fonction g , et augmentons

Équation 4.5 avec ce nouveau système, donnant

$$\dot{x} = f(x, y) \tag{4.6}$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

$$\dot{z} = g(x, z) \tag{4.7}$$

Les deux premières équations de 4.6 sont appelées un sous-système d'entraînement et la troisième un sous-système de réponse. Les exposants Lyapunov du sous-système de réponse pour une entrée particulière $x(t)$ sont appelés exposants Lyapunov conditionnels. Laissez $y(t)$ être une trajectoire chaotique avec la condition initiale $y(0)$ et $\dot{z}(t)$ être une trajectoire

commençant au point $z(0)$ voisin. Il a été démontré que la condition nécessaire et suffisante pour

$$|z(t) - y(t)| \rightarrow 0$$

c'est-à-dire que les deux sous-systèmes sont synchronisés, est que tous les exposants Lyapunov doivent être négatifs. [52] [3]

Exemple 4.1 *Synchronisation de deux systèmes de Lu par la méthode Pecora et Carroll [3]*

L'attracteur de Lu est un nouvel attracteur chaotique, qui relie l'attracteur de Lorenz et l'attracteur de Chen et représente la transition de l'un à l'autre. Ce nouveau attracteur chaotique a été proposé et analysé par Lu et Chen. Le système chaotique Lu est décrit par le système d'équations différentielles suivantes

$$\dot{x} = a(y - x) \tag{4.8}$$

$$\dot{y} = -xz + cy$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

où a, b et c sont des paramètres de contrôle positif. Ce système peut osciller de façon chaotique pour les valeurs des paramètres $a = 36; b = 3$ et $c = 20$ voir le fig 4.1 , ce système est dissipatif pour $c < a + b$.

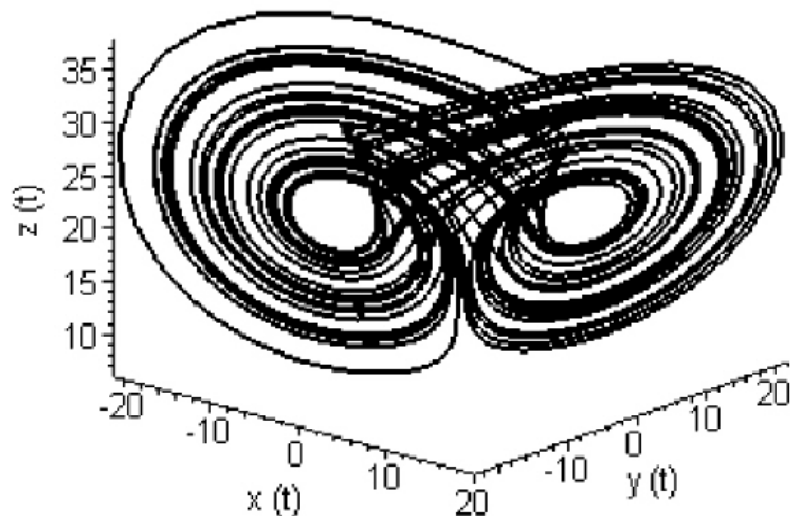
On va synchroniser deux systèmes identiques de Lu par la méthode de Carroll et Peccora, dans le cas où le signal transmetteur est y :

Le système d'entraînement est décrit par

$$\dot{x}_1 = a(y_1 - x_1) \tag{4.9}$$

$$\dot{y}_1 = -x_1z_1 + cy_1$$

$$\dot{z}_1 = x_1y_1 - bz_1$$


 FIG. 4.4 – *Attracteur de Lu*

Le système de réponse est donné par

$$\dot{x}_2 = a(y_1 - x_2) \quad (4.10)$$

$$\dot{z}_2 = x_2 y_1 - b z_2$$

Définissez les erreurs de synchronisation en

$$e_x = x_2 - x_1$$

$$e_z = z_2 - z_1$$

En utilisant ce système de notation et de soustraction 4.9 du système 4.10, on obtient le système d'erreur

$$\dot{e}_x = -a e_x \quad (4.11)$$

$$\dot{e}_z = -b e_z + y_1 e_x$$

Le système linéaire d'erreur de synchronisation 4.11 a deux valeurs propres négatives $\lambda_1 = -a$

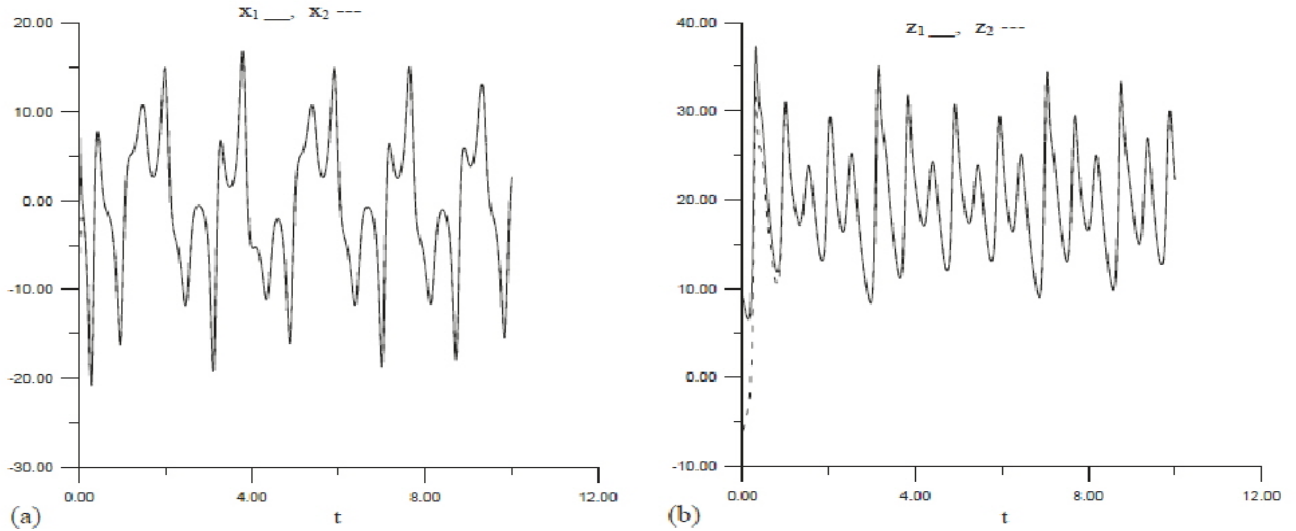


FIG. 4.5 – (a) Affiche la réponse temporelle de l'état du variateur (x_1) du système d'entraînement 4.9 et l'état de réponse (x_2 - -) du système de réponse 4.10 en utilisant le schéma Pecora et Carroll. (b) Affiche la réponse temporelle des états du lecteur (z_1) du système d'entraînement 4.9 et les états de réponse (z_2 - -) du système de réponse 4.10 en utilisant le schéma Pecora et Carroll.

et $\lambda_2 = -b$ et cela implique que la solution zéro du système 4.11 satisfait

$$\|e_x\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

$$\|e_z\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

D'où la solution zéro du système d'erreur 4.11 est asymptotiquement stable, alors la synchronisation réalise.[3]

Remarque 4.1 *Un seul choix induit l'apparition d'une synchronisation chaotique, à savoir $(x; z)$ piloté par y . Pour les autres choix possibles $(x; y)$ pilotés par z ou $(y; z)$ pilotés par x , le schéma Pecora et Carroll n'a pas réussi à réaliser la synchronisation.[3]*

4.3.2 Synchronisation généralisée

Récemment, une généralisation de la synchronisation dans les systèmes chaotiques a été proposée, où on dit que deux systèmes se synchronisent s'il existe une relation fonctionnelle

(statique) entre les états des deux systèmes. Ce type de synchronisation était appelé synchronisation généralisée (GS). Quelques schémas numériques sont proposés pour détecter la présence de la relation fonctionnelle entre les états des systèmes couplés. Une théorie plus générale de la GS a été développée en, où un théorème a été donné sur les conditions nécessaires et suffisantes de la présence de relations entre les états des systèmes d'entraînement et de réponse (appelés ici systèmes à couplage unidirectionnel). Néanmoins, même si nous connaissons l'existence d'une relation fonctionnelle entre les états de deux systèmes donnés ; il est encore difficile pour nous de savoir comment ils sont liés les uns aux autres. Pour certaines raisons pratiques et certaines, il est important de savoir comment l'état d'un système varie selon l'état de l'autre système.

Pour définir la synchronisation généralisée pour deux systèmes chaotiques couplés unidirectionnellement, on va travailler avec des systèmes non-linéaires composés d'un système émetteur autonome avec les variables dynamiques x dans un espace de phase X couplé à un système récepteur avec des variables dynamiques y dans l'espace d'état Y .

La dynamique des systèmes émetteur et récepteur est donnée par :

$$\dot{x} = F(x(t)) \tag{4.12}$$

$$\dot{y} = G(y(t), g, x(t)) \tag{4.13}$$

avec g une constante qui caractérise la force d'accouplement unidirectionnel.

Définition 4.5 *Quand $g \neq 0$, on dit que les deux systèmes chaotiques 4.12, et 4.13 sont synchronisés dans un sens généralisé, s'il y a une transformation $\phi : X \rightarrow Y$ qui prend les trajectoires de l'attracteur de l'espace X dans les trajectoires de l'attracteur de l'espace Y , pour que $y(t) = \phi(x(t))$, et si cette transformation ne dépend pas des conditions initiales du système récepteur $y(0)$ dans le bassin d'attraction de l'attracteur synchronisé.[16]*

Remarque 4.2 *On souligne que dans cette définition de synchronisation généralisée que l'existence de transformation ϕ est exigée seulement pour les trajectoires sur l'attracteur.*

La transformation n'est pas exigée d'exister pour les trajectoires passagères. Plusieurs méthodes ont été proposées pour détecter et étudier la stabilité de la synchronisation généralisée, mais on va proposer une de ces méthodes qui est connue sous le nom de "système auxiliaire approché".

Méthode du système auxiliaire approché

Le principe de cette méthode est basé sur le fait que, si le même système émetteur $x(t)$ conduit deux systèmes récepteurs identiques $y(t)$ et $z(t)$ qui commencent par des conditions initiales différentes dans le bassin d'attraction. La dynamique de la conduite $x(t)$ et le système de réponse $y(t)$ sont

$$\dot{x}(t) = F(x(t))$$

$$\dot{y} = G(y(t), g, x(t))$$

La transformation $y(t) = \phi(x(t))$ associée aux mouvements synchronisés sur l'attracteur chaotique dans l'espace de phase $X \oplus Y$, peut être remplacée par l'analyse de la stabilité tout à fait simple $z(t) = y(t)$ dans l'espace $Z \oplus Y$

On considère le système auxiliaire suivant :

$$\dot{z} = G(z(t), g, x(t)) \tag{4.14}$$

qui est identique au système récepteur 4.13. Clairement, quand le système récepteur 4.13 et son auxiliaire 4.14 ont le même signal émetteur $x(t)$, alors les champs (domaines) vectoriels dans les espaces de phase du récepteur et des systèmes auxiliaires sont identiques, et les systèmes peuvent se développer sur des attracteurs identiques

Il est facile de montrer que la stabilité linéaire du collecteur $z(t) = y(t)$ est équivalente à la stabilité linéaire de la variété du collecteur des mouvements synchronisés dans $X \oplus Y$, qui est déterminé par $\phi(\cdot)$. Les équations linéarisées qui dirigent l'évolution des quantités $\xi_y(t)$ telle que $\xi_y(t) = y(t) - \phi(x(t))$ et $\xi_z(t) = z(t) - \phi(x(t))$, sont :

$$\xi_y(t) = DG(\phi(x(t), g, x(t))) \cdot \xi_y(t) \quad (4.15)$$

$$\xi_z(t) = DG(\phi(x(t), g, x(t))) \cdot \xi_z(t) \quad (4.16)$$

avec

$$DG(w, g, x(t)) = \frac{\partial G(w, g, x(t))}{\partial w} \quad (4.17)$$

Puisque les équations linéarisées pour $\xi_y(t)$ et $\xi_z(t)$ sont identiques, les équations linéarisées pour $\xi_z(t) - \xi_y(t) = z(t) - y(t)$ ont la même matrice Jacobienne $DG(., g, x(t))$ que dans l'équation précédente. Donc, si le collecteur des mouvements synchronisés dans $X \oplus Y \oplus Z$ est linéairement stable pour $z(t) - y(t)$, alors il est linéairement stable pour $\xi_y(t) = y(t) - \phi(x(t))$ et vice versa. Notons que l'équation linéarisées pour $z(t) - y(t)$ est identique à l'équation qui définit les exposants de Lyapunov conditionnels pour le système récepteur. Ainsi, quand le système émetteur, conditionnés sur la valeur du système récepteur $x(t)$, sont tous négatifs.

[1]

4.3.3 Synchronisation de phase

Ce type de synchronisation vient de la notion classique de synchronisation pour deux systèmes périodiques dont les phases sont ϕ_1 et ϕ_2 , qui est exprimée par la relation

$$|n\phi_1 - m\phi_2| < c$$

Où m, n sont des entiers naturels et c est une constante positive. Ainsi, cette notion de synchronisation a été étendue aux systèmes chaotiques, l'approche analytique est l'une des solutions permettant de définir la phase d'un système chaotiques.

Pour exprimer la phase d'un système en représentant son signal analytique $\psi(t)$ sous la forme d'une fonction complexe définie par :

$$\psi(t) = s(t) + j \tilde{s}(t) = A(t) e^{j\phi(t)}$$

Où $\tilde{s}(t)$ est la transformée de Hilbert de la série temporelle $s(t)$, $A(t)$ est l'amplitude de $\psi(t)$ et $\phi(t)$ sa phase.

La synchronisation de phase entre deux systèmes chaotiques couplés se produit si

$$|n\phi_1(t) - m\phi_2(t)| < c$$

Il est à noter que dans ce cas, les amplitudes restent non corrélées.[27]

4.3.4 Synchronisation projective

Définition 4.6 *On dit qu'on a une synchronisation si les variables d'état $y_i(t)$ du système chaotique esclave $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ se synchronisent avec une constante*

multiple de l'état $x_i(t)$ du système chaotique maître $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ tels que :

$$\exists \alpha_i \neq 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|y_i(t) - \alpha_i x_i(t)\| = 0$$

Le cas où tous les α_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète.

4.4 Synchronisation des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire

Dans cette section, nous introduisons différents types de synchronisation à savoir la synchronisation complète, l'anti-synchronisation, la synchronisation décalée, la synchronisation généralisée.

4.4.1 Synchronisation complète

On considère un système chaotique maître représenté par

$$D^\alpha X(t) = F(X(t)) \quad (4.18)$$

d'où $X(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système 4.18 et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Et un système chaotique esclave donné par

$$D^\beta Y(t) = G(Y(t)) + U \quad (4.19)$$

d'où $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système 4.19, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $U \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur de contrôle à déterminer. On définit l'erreur de la synchronisation complète en tant que

$$e(t) = Y(t) - X(t) \quad (4.20)$$

Ainsi, le problème de synchronisation complète est de déterminer le contrôleur U de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Si $F = G$, la relation devient une synchronisation complète identique.

Si $F \neq G$; c'est une synchronisation complète non identique.

La synchronisation complète est donc une coïncidence complète entre les 3 variables d'état des deux systèmes synchronisés.

Exemple 4.2 *Le système d'entraînement est décrit par*

$$\begin{aligned} \frac{d^{q_1} x_m}{dt^{q_1}} &= p_1 (y_m - x_m - f(x_m)) \\ \frac{d^{q_2} y_m}{dt^{q_2}} &= -y_m + x_m - z_m \\ \frac{d^{q_3} z_m}{dt^{q_3}} &= p_2 y_m \end{aligned} \quad (4.21)$$

et le système de réponse est donné par

$$\begin{aligned}\frac{d^{q_2} y_s}{dt^{q_2}} &= -y_s + x_s - z_s \\ \frac{d^{q_3} z_s}{dt^{q_3}} &= p_2 y_s\end{aligned}\quad (4.22)$$

Définissez les erreurs de synchronisation par $e_2 = y_s - y_m$ et $e_3 = z_s - z_m$. en utilise la notation et soustraction du système 4.21 du système 4.22, on obtient le système d'erreur

$$\begin{aligned}\frac{d^{q_2} e_2}{dt^{q_2}} &= -e_2 + e_3 \\ \frac{d^{q_3} e_3}{dt^{q_3}} &= p_2 e_2\end{aligned}\quad (4.23)$$

Prenant la transformation de Laplace des deux côtés de 4.23, laissant

$$E_i(s) = \mathcal{L}(e_i(t)) \quad i = 1, 2, 3$$

en utilisant

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^{q_i} e_i(t)}{dt^{q_i}}\right) = s^{q_i} E_i(s) - s^{q_i-1} e_i(t) \quad i = 1, 2, 3$$

on obtients

$$\begin{aligned}s^{q_2} E_2(s) - s^{q_2-1} e_2(t) &= -E_2(s) + E_3(s) \\ s^{q_3} E_3(s) - s^{q_3-1} e_3(t) &= -p_2 E_2(s)\end{aligned}\quad (4.24)$$

De 4.24 , il s'ensuit immédiatement que

$$\begin{aligned}E_2(s) &= -\frac{1}{p_2} (s^{q_3} E_3(s) - s^{q_3-1} e_3(t)) \\ E_3(s) &= \frac{(s^{q_2+q_3-1} + s^{q_3-1}) e_3(0) - p_2 s^{q_2-1} e_2(0)}{s^{q_2+q_3} + s^{q_3} + p_2}\end{aligned}$$

Par le théorème de la valeur finale de la transformation de Laplace , on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_3(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_3(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s^{q_2+q_3} + s^{q_3}) e_3(0) - p_2 s^{q_2} e_2(0)}{s^{q_2+q_3} + s^{q_3} + p_2} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_2(s) = \frac{1}{p_2} \lim_{s \rightarrow 0} -s^{q_3+1} E_3(s) + s^{q_3} e_3(t) = 0$$

Donc, le système d'entraînement 4.21 et le système de réponse 4.22 la synchronisation est réalisée, voir la Fig.2 .

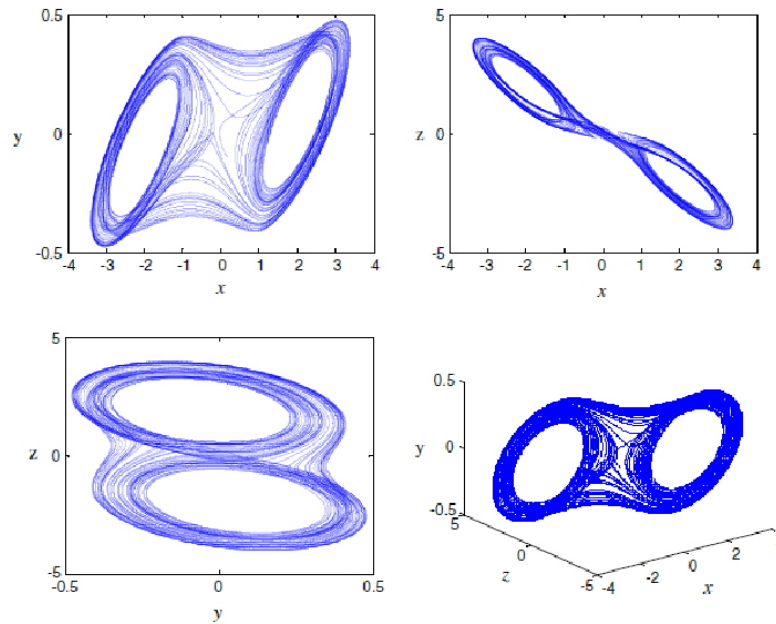


FIG. 4.6 – Attracteur du système Chua avec un ordre fractionnaire. Ici $(p_1; p_2; a; b) = (10; 14, 87; 1, 27; 0, 68)$, $q = (0, 92; 0, 92; 0, 98)$, la longueur du pas de temps est de 0,02, les 100 premiers points sont supprimés. (a) Le portrait de x contre y . (b) Le portrait de x contre z . (c) Le portrait de y contre z . (d) Le portrait en \mathbb{R}^3

4.4.2 Synchronisation projective

La synchronisation projective est le comportement dynamique dans lequel la réponse de deux systèmes identiques se synchronise jusqu'à un facteur d'échelle constant. Ce phénomène a été testé dans les systèmes partiellement linéaires couplés d'ordre fractionnaire [29]

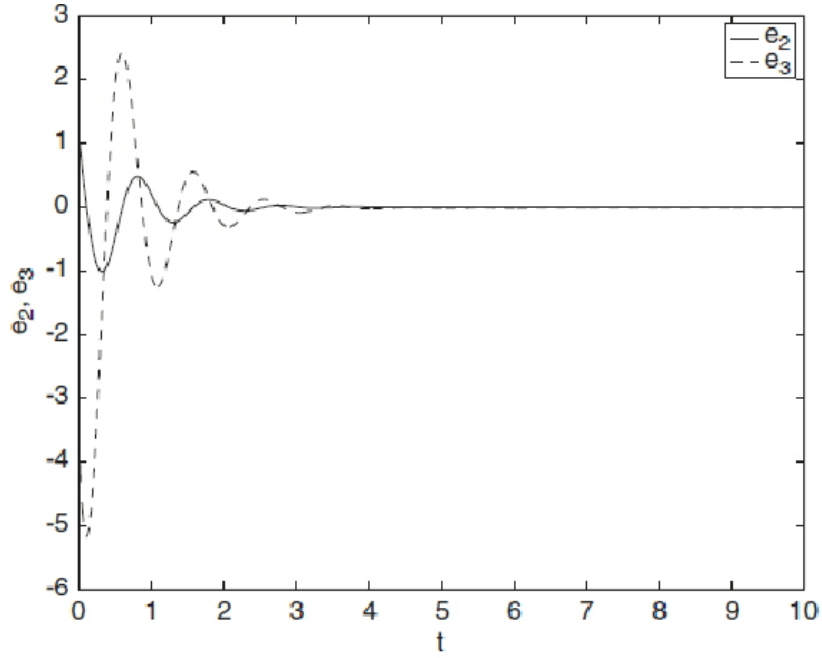


FIG. 4.7 – L'évolution des fonctions d'erreur sur la synchronisation du chaos entre 4.21 et 4.22, — signifie $e_2 = y_s - y_m$, - - - signifie $e_3 = z_s - z_m$. Ici $(p_1; p_2; a; b) = (10; 14, 87; 1, 27; 0, 68)$, $q = (0, 92; 0, 92; 0, 98)$

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha u_m}{dt^\alpha} &= M(z) \cdot u_m \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} &= f(u_m, z) \\ \frac{d^\alpha u_s}{dt^\alpha} &= M(z) \cdot u_s \end{aligned}$$

où α est l'ordre fractionnaire et la matrice $M(z)$ ne dépend que de z , u_m et u_s sont le maître et l'esclave vecteurs d'état, respectivement. Un système partiellement linéaire est un ensemble de différentiels ordinaires équations, dont le vecteur d'état peut être divisé en deux parties (u, z) de cette manière. Le deux systèmes partiellement linéaires sont couplés via z : le z dans le système esclave sera le z du système maître. Le système couplé ci-dessus est dit projectif synchrones si pour une condition initiale il y a une vecteur constante β telle que asymptotiquement dans le temps

$$\|\beta u_m - u_s\| \rightarrow 0$$

Le cas où tous les β_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète. Le cas où tous les β_i sont égaux à -1 représente un cas d'anti-synchronisation complète.[29]

Exemple 4.3 *Synchronisation projective dans les systèmes Chen d'ordre fractionnaire*
le système de Chen d'ordre fractionnaire

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} &= a(y - x) \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} &= (c - a)x - xz + cy \\ \frac{d^\alpha u_s}{dt^\alpha} &= xy - bz\end{aligned}$$

qui est partiellement linéaire avec $u = (x, y)$ et

$$M(z) = \begin{bmatrix} -a & a \\ c - a - z & c \end{bmatrix}$$

Nous considérons un système de Chen couplé avec l'ordre fractionnaire $\alpha = 0.9$. On laisse les paramètres $(a, b, c) = (35, 3, 28)$, de sorte que la fraction ordre système Chen est chaotique. Les valeurs initiales des variables d'état sont des valeurs aléatoires proches de l'origine. Les deux oscillateurs chaotiques peuvent toujours réaliser synchronisation projective dans nos simulations en utilisant la méthode mentionnée ci-dessus. Le comportement dynamique des systèmes maître et esclave dans une simulation est indiquée dans Fig 4.8. Sur cette figure, les valeurs initiales du système couplé sont $(x_m, y_m, z, x_s, y_s) = (0.0440, 0.0701, 0.0610, 0.0300, 0.0856)$. Sur la figure (a), nous montrons l'évolution temporelle de le facteur d'échelle x_s/x_m , qui indique que le facteur d'échelle converge vers un valeur constante. Sur la figure (b), nous montrons les projections du système maître et le système esclave sur le plan $x - y$.

Exemple 4.4 *Comme on voit que les deux attracteurs sont les même en structure mais de taille différente, ce qui indique également clairement la projective synchronisation du système*

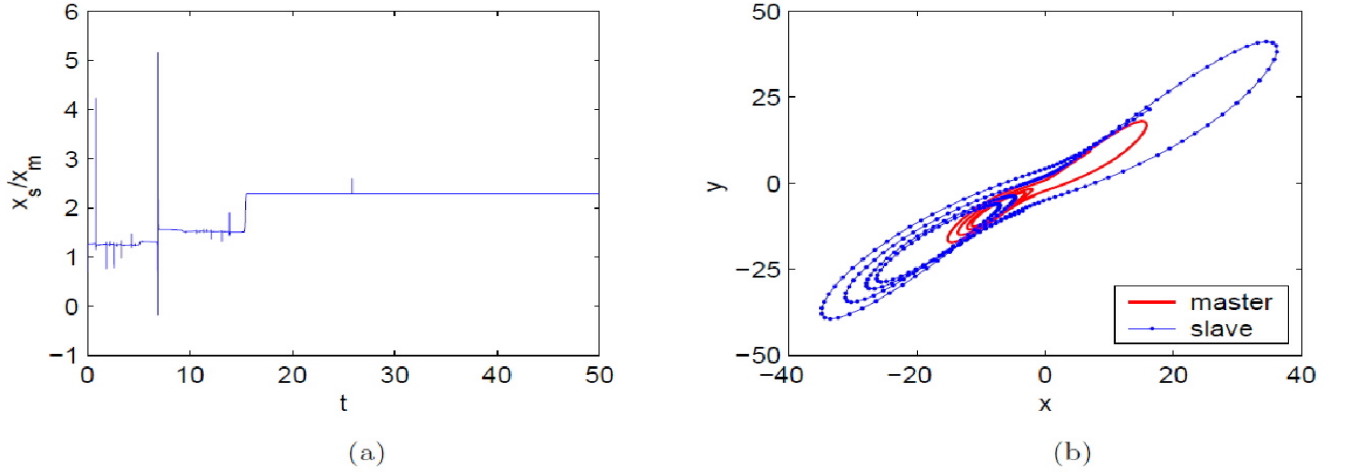


FIG. 4.8 – (a) Evolution temporelle du facteur d'échelle x_s/x_m . (b) La projection du maître et de l'esclave système sur le plan $x - y$

d'ordre fractionnaire couplé. Parce que le facteur d'échelle dans la synchronisation projective dépend de l'état initial et imprévisible, nous présentons également un mécanisme de contrôle de rétroaction simple pour l'ordre fractionnaire couplé système. Nous introduisons un contrôleur dans le système esclave, et le système couplé maintenant devient

$$\begin{aligned}\frac{d^\alpha u_m}{dt^\alpha} &= M(z) \cdot u_m \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} &= f(u_m, z) \\ \frac{d^\alpha u_s}{dt^\alpha} &= M(z) \cdot u_s + k(\beta^* u_m - u_s)\end{aligned}$$

où k est une constante positive et β^* est le facteur d'échelle souhaité. Si une composante de u_s est plus grande que la composante correspondante de $\beta^* u_m$, alors la composante correspondante de $k(\beta^* u_m - u_s)$ sera négatif et le taux de cette composante de u_s sera diminué, donc u_s/u_m sera également diminué, et vice versa. Donc, finalement, le facteur d'échelle devrait converger asymptotiquement vers β^* . Sur laisse $k = 0.1$, et appliquer le mécanisme de commande au système couplé. Le de-facteur d'échelle souhaité β^* peut être atteint pour toutes les valeurs positives et négatives raisonnables avec des conditions initiales aléatoires. Dans les Fig.2 (a) et (b), nous montrons les projections de les systèmes maître et esclave sur le plan

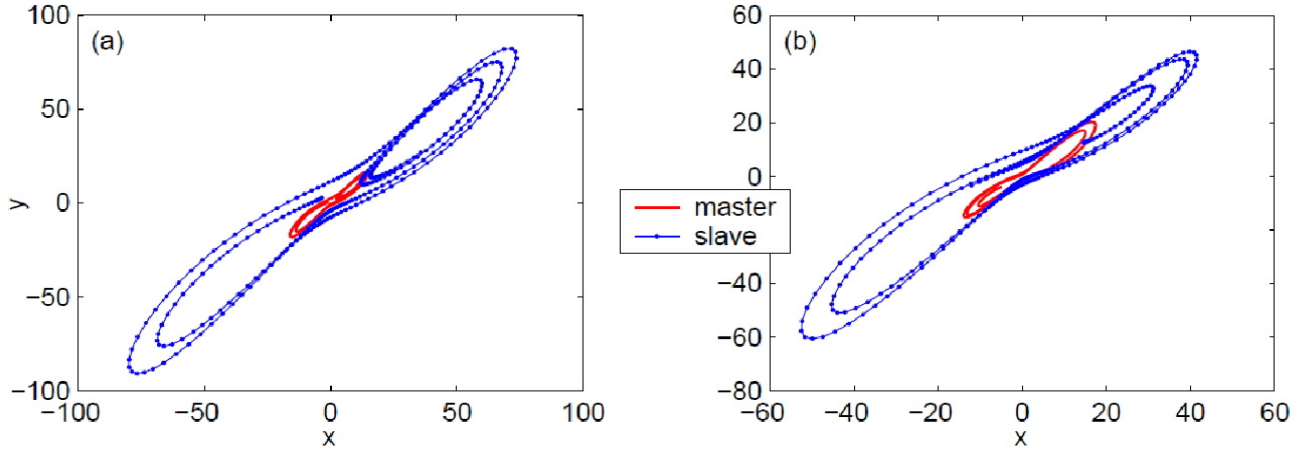


FIG. 4.9 – Les projections des systèmes maître et esclave sur le plan $x - y$ pour (a) $\beta^* = 5$; (b) $\beta^* = -3$

$x - y$ pour $\beta^* = 5$ et -3 , respectivement. Comme on voit que les deux attracteurs de chaque panneau de cette figure sont de structure identique mais différent en taille (et direction). La taille du système maître ne change pas, mais le système esclave est amplifié. Par de nombreuses simulations, nous avons constaté que, même. Pour un très petit k (dire $k = 0.01$), après une longue période, les deux oscillateurs peut aussi sera synchronisé jusqu'au facteur d'échelle constante β^* .

4.4.3 Synchronisation généralisée

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective pour synchroniser des systèmes chaotiques de dimensions et de modèle différent. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre les deux systèmes chaotiques couplés. On considère un couple de systèmes maître-esclave représenté par :

$$D^p X(t) = F(X(t)) \quad (4.25)$$

$$D^q Y(t) = G(Y(t)) + U \quad (4.26)$$

d'où $X(t) \in \mathbb{R}^n, Y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont les états du système maître et système esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m, 0 < p; q \leq 1, {}^C D_t^p, {}^C D_t^q$ sont les dérivées fractionnaires de Caputo d'ordres p et q , respectivement, et $U \in \mathbb{R}^m$ est un contrôleur à déterminer.

S'il existe un contrôleur $U \in \mathbb{R}^m$ et une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telles que toutes les trajectoires des systèmes maître et esclave, avec les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$; vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - \phi(X(t))\| = 0 \quad \forall x(0), \forall y(0)$$

alors, les systèmes maître-esclave 4.25 et 4.26 se synchronisent au sens généralisé par rapport à la fonction ϕ . Si la fonction ϕ est définie par $\phi(X(t)) = \Lambda X(t)$ tel que $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{n \times m}$.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, et après avoir abordé l'histoire de la synchronisation chaotique et ces principaux acteurs, on a essayé d'expliquer au mieux ce phénomène tout en parcourant les méthodes, les plus connues dans la littérature, on cite : la synchronisation identique, la généralisée, de phase et de le cas entier et synchronisation complète, généralisée, projective dans le cas fractionnaire.

Chapitre 5

Stabilité, contrôle et synchronisation des systèmes de Jerk d'ordre fractionnaire

5.1 Introduction

Le calcul fractionné est un sujet vieux de plus de 300 ans. L'idée du calcul fractionnaire a depuis le calcul régulier, la première référence étant probablement associée avec Leibniz et L'Hôpital en 1695. Ses applications à la physique et au génie ne sont qu'un centre d'intérêt récent. Il a été constaté que de nombreux systèmes dans des domaines interdisciplinaires peuvent être élégamment décrits à l'aide de dérivés fractionnaires. En 1996, Hans Gottlieb pensée Quelle est l'équation de secousse la plus simple qui donne le chaos? Par lequel il voulait dire une équation de la forme

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \ddot{x})$$

Le terme «Jerk» vient du fait que dans un système mécanique dans lequel x est le déplacement, \dot{x} est la vitesse, et \ddot{x} est l'accélération, la quantité \ddot{x} est appelée «jerk» (Schot, 1978). C'est la dérivée la plus basse pour laquelle une **ODE** avec Les fonctions peuvent

créer le chaos.

Dans cet article, nous étudions les comportements chaotiques de l'ordre fractionnaire d'un simple système de secousse autonome avec non-linéarité cubique. Le système est une transformation linéaire des modèles **MO4** et **MO11** présentés pour la première fois en référence [64].

Nous trouvons que le chaos existe dans les systèmes modèles fractionnaires MO4 et MO11 avec un ordre moins de 3. De nombreuses autres études sur la dynamique des systèmes d'ordre fractionnaire sont en particulier dans, En outre, la méthode du système auxiliaire généralisée à l'ordre fractionnel, est également présentée pour synchroniser l'ordre chaotique fractionnaire entre MO4 et MO11. Les deux approches, basées sur la théorie de la stabilité de l'ordre fractionnaire sont simples et théoriquement rigoureux. Les résultats de la simulation sont utilisés pour visualiser et illustrer l'efficacité des méthodes de synchronisation proposées.

Le contenu de ce chapitre à fait l'objet d'une publication internationale " Control, Stabilization and Synchronization of Fractional-Order Jerk System"

,” Nonlinear Dynamics and Systems Theory, Vol.19, No.4. (2019). pp523-536.

5.2 Premier modèle

Le modèle mathématique du système de jerk considéré dans ce travail est exprimé par l'ensemble suivant de trois équations différentielles non linéaires de premier ordre couplées

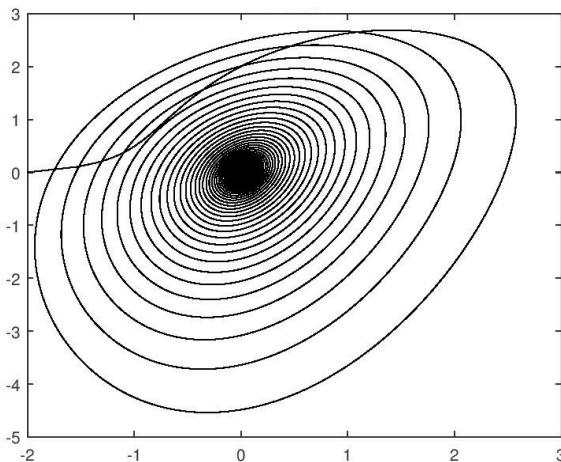
$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = y \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = z \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = -\mu z - y - \beta e^x + \delta \end{cases}, \quad (5.1)$$

où les paramètres μ, β et δ sont des réels positifs et α est l'ordre fractionnaire du système 5.1 admet un point d'équilibre $E \left(\ln \frac{\delta}{\beta}, 0, 0 \right)$.

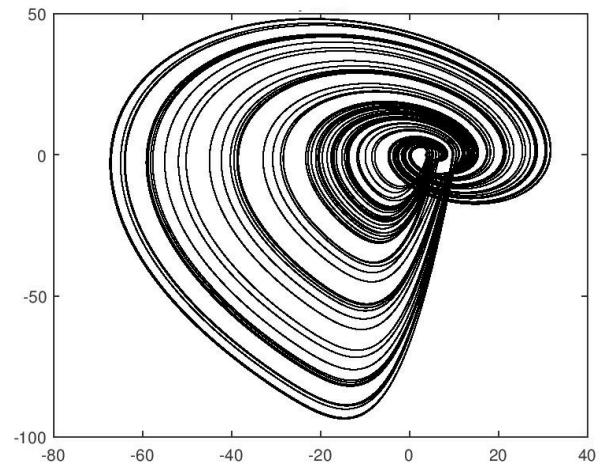
5.2.1 La stabilité du point d'équilibre

Pour les valeurs des paramètres $\mu = 0.5$, $\beta = 1$ et $\delta = 5$, la forme d'ordre entier du système 5.1 présente un comportement chaotique, avec le plus grand exposant de Lyapunov calculé numériquement $LE = 0,035$, et son équilibre $E(\ln 5, 0, 0)$ est localement asymptotiquement stable lorsque $\alpha < 2/3$ et leurs valeurs propres sont données comme : $\lambda_1 = -1.6787$, $\lambda_{2,3} = 0.58933 \pm 1.6221i$.

Le point d'équilibre est un point de selle d'index 2, donc la condition nécessaire pour que le système d'ordre fractionnel 5.1 reste chaotique est $\alpha > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{|\lambda_{2,3}|}{\text{Re } \lambda_{2,3}}\right)$. Par conséquent, l'ordre fractionnaire le plus bas α , pour lequel le système d'ordre fractionnel démontre le chaos aux paramètres mentionnés ci-dessus, est donné par l'inégalité $\alpha > 0.79051$, la figure montre que le système 5.1 est chaotique pour $\alpha = 0.97$, est stable pour $\alpha = 0.77$.



Le système 5.1 stable pour $\alpha = 0.77$



Le système 5.1 chaotique pour $\alpha = 0.97$

5.2.2 Contrôle de chaos

Un système chaotique d'ordre fractionnaire en trois dimensions et le contrôle du chaos sont décrits comme suit

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha X}{dt^\alpha} = F(X) \\ \frac{d^\alpha X}{dt^\alpha} = F(X) - K(X - X^*) \end{cases}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbf{R}^3$, $\alpha_i > 0$, est l'ordre fractionnaire et les systèmes sont chaotiques.. K est une matrice de couplage. Pour simplifier, prenons K de la forme $K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$, où $k_i \geq 0$. L'erreur $e = X - X^*$ et le but du contrôle est de concevoir la matrice de couplage de telle sorte que $\|e(t)\| \rightarrow 0$ comme $t \rightarrow +\infty$. Considérons le système 5.1. Le système d'ordre fractionné contrôlé associé au système 5.1 est donné par :

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = y - k_1(x - x^*) \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = z - k_2(y - y^*) \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = -\alpha z - y - \beta e^x + \delta - k_3(z - z^*) \end{cases}, \quad (5.2)$$

où (x^*, y^*, z^*) représente un point d'équilibre arbitraire du système 5.1. Le but est de conduire les trajectoires du système vers l'un des trois points d'équilibre instables E . Pour simplifier, nous allons choisir les gains de rétroaction $K = \text{diag}(0, k_2, 0)$.

La condition suffisante de la stabilisation de contrôle de chaos est donnée par la proposition suivante :

Proposition 5.1 *si $k_2 = \frac{-1}{2\mu} \left(-\sqrt{-2\mu^2 + \mu^4 + 4\mu\beta + 1} + \mu^2 + 1 \right)$ et $\beta > \mu$ alors les trajectoires des contrôlés système 5.2 sont conduits au point d'équilibre instable E .*

Preuve. Le polynôme caractéristique du point d'équilibre E est donné par

$$\lambda^3 + (\mu + k_2) \lambda^2 + (\mu k_2 + 1) \lambda + \beta = 0.$$

Choisissez le paramètre $\beta > \mu$ et le gain de contrôle de rétroaction,

$$k_2 = \frac{-1}{2\mu} \left(-\sqrt{-2\mu^2 + \mu^4 + 4\mu\beta + 1} + \mu^2 + 1 \right) \text{ alors}$$

Si $D(p) < 0$ pour la valeur trouvée du paramètre k_2 , alors la condition (3) de critère de Routh-Hurwitz est vérifiée qui signifie la stabilité des trajectoires du système contrôlé 5.2 sont conduit au point d'équilibre stable E pour tous $\alpha \in]0, 1[$. ■

Simulation numérique :

Dans cette sous-section, nous proposons des résultats de simulation numérique obtenus par critère de Routh-Hurwitz dans le cas fractionnaire pour résoudre système 5.2. Les paramètres de système chaotique $\mu = 0.5$, $\beta = 1$, $\delta = 5$ et l'ordre fractionnaire $q = 0.97$.

Par la proposition précédente, nous prenons $k_2 = 0.35078$, $k_1 = k_3 = 0$. Il s'ensuit que $D(p) = -22.25 < 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1 a_2 = a_3$. Cela implique que les trajectoires du système d'ordre fractionné contrôlé 5.2 convergent vers le point d'équilibre E comme le montre la Fig 5.1..

Mais dans le cas de l'ordre entier, il existe deux valeurs propres imaginaires pures de l'équation caractéristique. Cela signifie que la forme d'ordre entier du système contrôlé 5.2 n'est pas stabilisée au même point d'équilibre E lors du choix des valeurs de paramètres et des gains de contrôle en retour mentionnés ci-dessus, voir Fig.5.1.

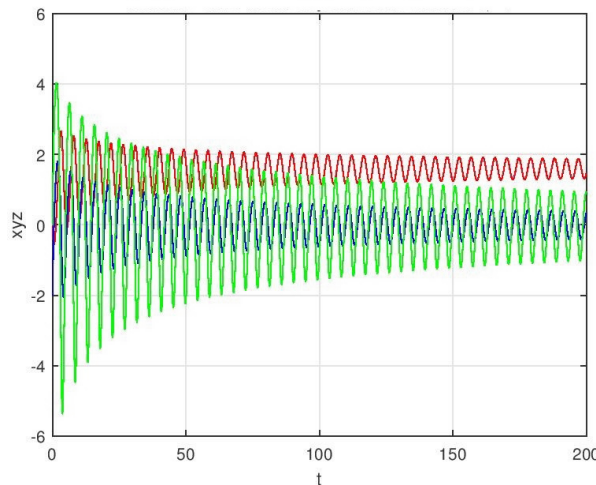


FIG. 5.1 – Les trajectoires du système contrôlé 5.2, Non Stabilisé es point d'équilibre E pour $\alpha = 1$

5.3 Deuxième modèle

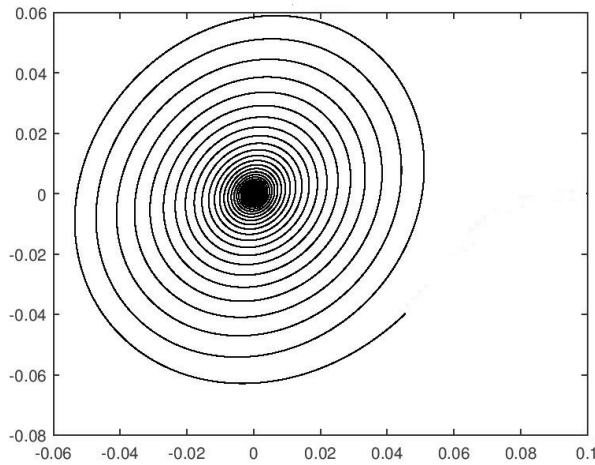
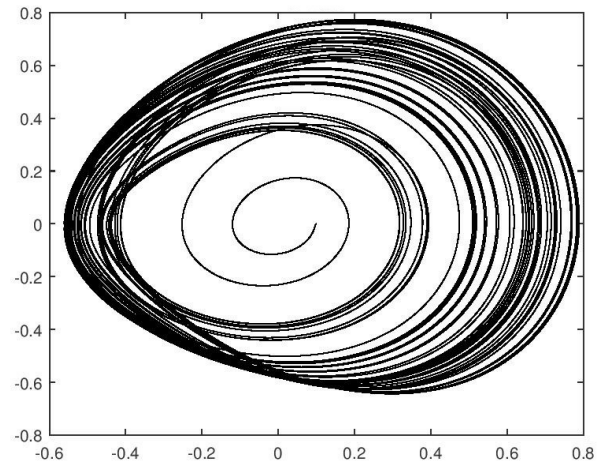
Le modèle mathématique du système de jerk considéré dans ce travail est exprimé par la ensemble suivant de trois équations différentielles non linéaires de premier ordre couplées

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = y \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = z \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = -\mu z - y - \sigma x(x-1) \end{cases}, \quad (5.3)$$

où les paramètres μ, σ sont des réels positifs et α est l'ordre fractionnaire du système 5.3 admet deux points d'équilibres $E_1(0, 0, 0), E_2(1, 0, 0)$.

5.3.1 La stabilité des points d'équilibre

Pour les valeurs des paramètres $\mu = 0.5$ et $\sigma = 1$, la forme d'ordre entier du système 5.3 présente un comportement chaotique, avec le plus grand exposant de Lyapunov calculé numériquement $LE = 0.094$, et son équilibre E_1 est instable et $E_2(1, 0, 0)$ est localement asymptotiquement stable lorsque $\alpha < 2/3$ et leurs valeurs propres sont données comme : $E_1 : \lambda_1 = -0.80376, \lambda_{2,3} = 0.15188 \pm 1.105i, E_2 : \lambda_1 = 0.60149, \lambda_{2,3} = -0.55075 \pm 1.1659i$. Le point d'équilibre est un point de selle d'index 2, donc la condition nécessaire pour que le système d'ordre fractionnel 5.3 reste chaotique est $\alpha > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{|\lambda_{2,3}|}{\operatorname{Re} \lambda_{2,3}}\right)$. Par conséquent, l'ordre fractionnaire le plus bas α , pour lequel le système d'ordre fractionnel démontre le chaos aux paramètres mentionnés ci-dessus, est donné par l'inégalité $\alpha > 0.91384$, la figure montre que le système 5.3 est chaotique pour $\alpha = 0.99$, est stable pour $\alpha = 0.90$


 Le système 5.3 stable pour $\alpha = 0.9$

 Le système 5.3 chaotique pour $\alpha = 0.99$

5.3.2 Contrôle de chaos

Le système d'ordre fractionné contrôlé associé au système 5.3 est donné par

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = y - k_1(x - x^*) \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = z - k_2(y - y^*) \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = -\mu z - y - \sigma x(x - 1) - k_3(z - z^*), \end{cases} \quad (5.4)$$

où (x^*, y^*, z^*) représente un point d'équilibre arbitraire du système 5.3. Le but est de conduire les trajectoires du système vers l'un des deux points d'équilibre instables E_1 et E_2 . Comme dans le modèle précédent, nous avons choisi les gains de feedback $K = \text{diag}(0, k_2, 0)$. Pour simplifier, nous allons choisir la condition suffisante de la stabilisation de contrôle de chaos est donnée par la proposition suivante

Proposition 5.2 *Les trajectoires du système 5.4 ne sont pas conduit vers le point d'équilibre instable E_1 .*

si $k_2 = \frac{-1}{2\mu} \left(-\sqrt{-2\mu^2 + \mu^4 + 4\mu\sigma + 1} + \mu^2 + 1 \right)$ et $\sigma > 0$ alors les trajectoires des contrôlés système 5.4 sont conduits vers l'écurie point d'équilibre E_1 pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

Preuve. Le polynôme caractéristique du point d'équilibre E_1 est donné par

$$\lambda^3 + (\mu + k_2) \lambda^2 + (\mu k_2 + 1) \lambda - \sigma = 0.$$

On trouve $a_3 = -\sigma$, par appliquer la 4^{ième} condition de critère Routh-Hurwitz d'ordre fractionnaire le système contrôlé 5.4 ne peut pas être stable.

Choisissez le paramètre $\sigma > 0$ et le gain de contrôle feedback,

$$k_2 = \frac{-1}{2\mu} \left(-\sqrt{-2\mu^2 + \mu^4 + 4\mu\beta + 1} + \mu^2 + 1 \right)$$

et en supposant que $D(p) < 0$, la condition de stabilité (3) de critère Routh-Hurwitz d'ordre fractionnaire est satisfaite et les trajectoires de le système contrôlé 5.4 est conduit au point d'équilibre stable E_2 pour tout $\alpha \in]0, 1[$ ■

Simulation numérique :

Dans cette sous-section, nous proposons des résultats de simulation numérique obtenus par critère de Routh-Hurwitz dans le cas fractionnaire pour résoudre système 5.3. Les paramètres de système chaotique $\mu = 0.5$, $\sigma = 1$ et l'ordre fractionnaire $\alpha = 0.98$.

Par la proposition précédente, nous prenons $k_2 = 0.35078$, $k_1 = k_3 = 0$. Il s'ensuit que $D(p) < 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1 a_2 = a_3$. Cela implique que les trajectoires du système d'ordre fractionné contrôlé 5.4 convergent vers le point d'équilibre E_2 comme le montre la Fig 5.3. Mais dans le cas de l'ordre entier, il existe deux valeurs propres imaginaires pures de l'équation caractéristique. Cela signifie que la forme d'ordre entier du système contrôlé 5.4 n'est pas stabilisée au même point d'équilibre E_2 lors du choix des valeurs de paramètres et des gains de contrôle en retour mentionnés ci-dessus.

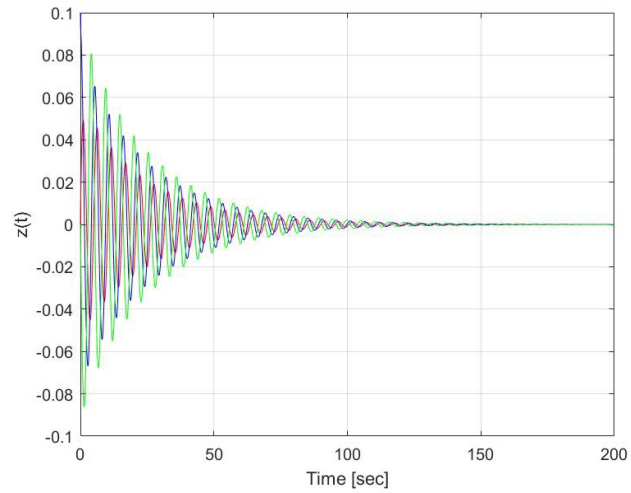


FIG. 5.2 – Les trajectoires du système contrôlé 5.4 Stabilisé au point d'équilibre E_2 pour $\alpha = 0.98$

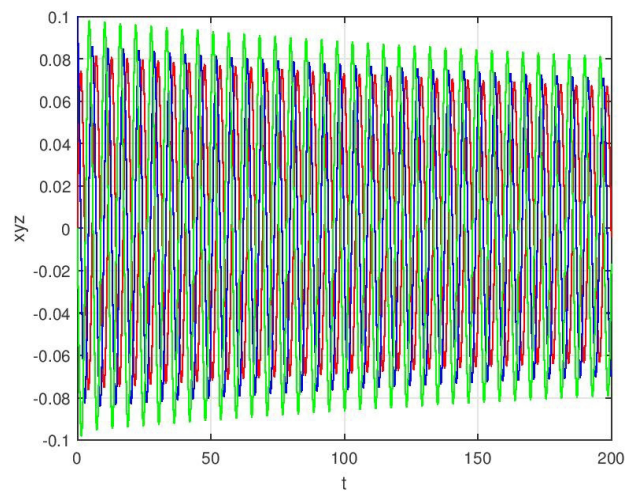


FIG. 5.3 – Les trajectoires du système contrôlé 5.4 non Stabilisé au point d'équilibre E_2 pour $\alpha = 1$

5.4 Synchronisation

Analyse théorique

Reprenons les deux systèmes étudiés dans la section précédente et nous allons détecter leur synchronisation avec un système auxiliaire, en se basant sur le critère de Routh-Hurwitz pour étudier la stabilité du système erreur entre les deux. Pour cela, nous supposons le système de premier modèle comme émetteur (maître) :

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} = y_1 \\ \frac{d^\alpha y_1}{dt^\alpha} = z_1 \\ \frac{d^\alpha z_1}{dt^\alpha} = -\mu z_1 - y_1 - \beta e^{x_1} + \delta \end{cases} . \quad (5.5)$$

et le système de deuxième modèle comme récepteur (esclave)

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} = y_2 - k_1(x_2 - x_1) \\ \frac{d^\alpha y_2}{dt^\alpha} = z_2 - k_2(y_2 - y_1) \\ \frac{d^\alpha z_2}{dt^\alpha} = -\mu z_2 - y_2 - \sigma x_2(x_2 - 1) - k_3(z_2 - z_1). \end{cases} \quad (5.6)$$

Le système maître est couplé avec le système esclave seulement par le scalaire $x(t)$. Nous choisissons comme système auxiliaire, le système qui est identique au système esclave (avec des conditions initiales différentes).

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x_3}{dt^\alpha} = y_3 - k_1(x_3 - x_1) \\ \frac{d^\alpha y_3}{dt^\alpha} = z_3 - k_2(y_3 - y_1) \\ \frac{d^\alpha z_3}{dt^\alpha} = -\mu z_3 - y_3 - \sigma x_3(x_3 - 1) - k_3(z_3 - z_1), \end{cases} \quad (5.7)$$

La soustraction de deux systèmes 5.6 et 5.7 donne la synchronisation d'ordre fractionnaire système d'erreur qui peut s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d^q e_1}{dt^q} = e_2 - k_1 e_1 \\ \frac{d^q e_2}{dt^q} = e_3 - k_2 e_2 \\ \frac{d^q e_3}{dt^q} = -\alpha e_3 - e_2 - \sigma e_1 x_3 - \sigma e_1 x_2 - e_1 - k_3 e_3 \end{cases} , \quad (5.8)$$

Où $e_1 = x_3 - x_2$, $e_2 = y_3 - y_2$ et $e_3 = z_3 - z_2$.

De plus 5.5 peut être écrit comme

$$\text{Où } e = [e_1, e_2, e_3]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 1 \\ -1 & -1 & -\mu - k_3 \end{bmatrix} \text{ et } \varphi(x_{2,3}, y_{2,3}, z_{2,3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sigma e_1 (x_2 + x_3) \end{pmatrix}$$

$\varphi(x_{2,3}, y_{2,3}, z_{2,3})$ est une fonction non linéaire satisfaisant la condition de Lipchitz, donc, proche de zéro, elle converge vers zéro. Pour étudier la stabilité du système 5.5, nous utilisons les conditions du critère Routh-Hurwitz généralisé en ordre fractionnaire. Le polynôme caractéristique de la matrice A est donné par

$$\lambda^3 + (\mu + k_1 + k_2 + k_3) \lambda^2 + ((\mu + k_3)(k_1 + k_2) + k_1 k_2 + 1) \lambda + (k_1 + k_1 k_2 (\mu + k_3) + 1).$$

Pour simplifier, nous choisissons les gains de feedback $k_1 = k_2 = 0$ et $k_3 = k$. Le polynôme caractéristique devient

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (k + \mu) \lambda^2 + \lambda + 1. \quad (11)$$

Son discriminant est le suivant :

$$D(p) = -3k^2 + (18 - 6\mu)k - 3\mu^2 + 18\mu - 31,$$

ce qui est toujours négatif pour toutes les valeurs de k et μ , maintenant pour que la condition $a_1 \times a_2 - a_3 = 0$ soit satisfaite, il suffit que $k = 1 - \mu$. Par conséquent, la solution zéro du système 5.8 est localement asymptotiquement stable pour tous les $\alpha \in]0; 1[$. Dans ce cas, les systèmes d'entraînement et de réponse d'ordre fractionnaire 5.6 et 5.7 sont synchronisés.

5.4.1 Simulation numérique

Dans les simulations numériques, nous définissons les paramètres du système émetteur comme $\mu = 0.5$, $\beta = 1$ et $\delta = 5$, les paramètres des systèmes de réponse et auxiliaires comme $\mu = 0.5$ et $\sigma = 1$ avec l'ordre fractionnaire $\alpha = 0.98$ et le coefficient de fonction de contrôle $k = 0.5$. Nous avons également les conditions initiales $x_1(0) = 1$, $y_1(0) = 2$, $z_1(0) = 5$ pour le système émetteur, les conditions initiales $x_2(0) = 10$, $y_2(0) = 32$, $z_2(0) = 7$ pour le système esclave, et $x_3(0) = 9$, $y_3(0) = 28$, $z_3(0) = 8$ pour le système auxiliaire. Les résultats numériques montrent que la synchronisation de deux systèmes d'ordre fractionnaire différents est réalisée, voir Fig 5.5.

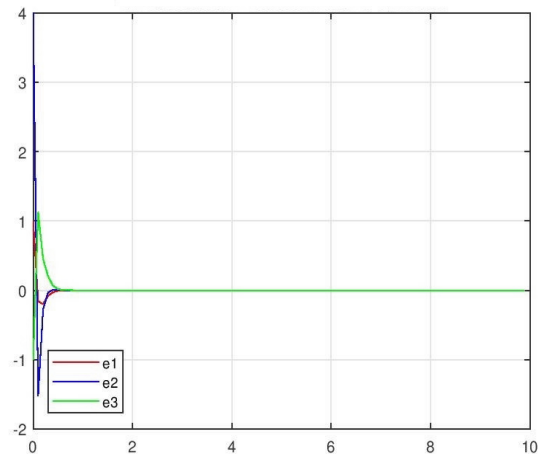


FIG. 5.4 – Synchronisation entre 5.6 et 5.7 d'ordre fractionnaire pour $\alpha = 0.98$

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons examiné la stabilité locale de l'équilibre du système fractionnaire en utilisant les conditions de Routh-Hurwitz qui généralisées à l'ordre fractionnaire sont également utilisées pour contrôler le chaos dans les systèmes proposés vers leur équilibre en choisissant des contrôleurs linéaires spécifiques. Nous avons montré que les systèmes d'ordre fractionnaire sont contrôlés à leurs points d'équilibre, mais pas leurs homologues d'ordre entier. Ce fait donne un avantage aux systèmes d'ordre fractionnaire par rapport à leurs

homologues d'ordre entier, l'effet du système fractionnaire sur la synchronisation du chaos de ces systèmes a également été présenté. Et la simulation numérique correspond à l'analyse théorique.

Conclusion générale et perspective

L'objectif de ce travail est l'étude de synchronisation et de contrôle des systèmes dynamiques chaotiques dans le cas fractionnaire et pour arriver aux buts visés, nous avons divisé notre thèse en cinq chapitres :

Dans le premier chapitre nous présentons des notions de base sur le système dynamique : système dynamique continu, système dynamique discrète, attracteur, point d'équilibre, stabilité de point d'équilibre.

Dans le deuxième chapitre nous avons consacré la théorie de chaos nous avons proposé quelques définitions du chaos et ses caractéristiques, nous avons présenté la transition de chaos et nous avons fini ce chapitre par un exemple d'un système chaotique Lorenz.

Dans le troisième chapitre nous avons proposé sur les dérivées fractionnaires, nous avons commencé par des outils de base et défini les trois principales définitions des dérivées fractionnaires (Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville et celle de Caputo) en clarifiant la relation et les différences entre eux. Nous avons donné quelques exemples de contrôle du chaos d'ordre fractionnaires.

Dans le quatrième chapitre nous avons présenté la théorie de la synchronisation et donnons quelques types de synchronisation dans le cas fractionnaire et dans le cas entier (identique, généralisée, projective ...)

Dans le cinquième chapitre on propose le problème de stabilisation des points d'équilibre et une synchronisation entre deux différents systèmes chaotiques (système de Jerk) à dérivées d'ordre fractionnaire par un système auxiliaire. Pour garantir la stabilité du système erreur nous avons basé sur le critère de Routh-Hurwitz généralisé à l'ordre fractionnaire et la simulation numérique démontrent l'efficacité de la méthode de synchronisation proposée et

vérifient les résultats théoriques.

En effet, les méthodes que nous avons appliquées présentent les caractéristiques suivantes : Ces méthodes sont appliquées pour la synchronisation des systèmes identiques, systèmes différents, systèmes hyperchaotiques et les systèmes incertains. Nous avons montré l'effet de l'ordre fractionnaire sur la synchronisation ce qui favorise l'efficacité de cette méthode pour distinguer le cas fractionnaire à celui du cas entier et souligner l'importance de la synchronisation des systèmes fractionnaires.

Par rapport aux résultats existants, les contrôleurs proposés sont plus simples et pratiques, par conséquent, ces méthodes ont une certaine signification pour réduire le coût et la complexité du contrôleur et la mise en œuvre.

Cette étude a ouvert des perspectives sur les nouvelles méthodes de contrôle de chaos où la recherche en est encore à ses débuts comme : Contrôle prédictif du réacteur industriel , mode glissant. Ces méthodes pourraient être abordées dans une étude prochaine.

Sur les nouvelles méthodes de synchronisation, ils seraient très intéressants de faire appliquer à d'autres systèmes dynamiques de dimensions différentes, entre autres, en temps discret et aussi son extension pour des systèmes hyperchaotiques d'ordre entier et fractionnaire.

Bibliographie

- [1] Abarbanel, H. D., Rulkov, N. F., & Sushchik, M. M. (1996). Generalized synchronization of chaos : The auxiliary system approach. *Physical Review E*, 53(5), 4528.
- [2] Abd-Elouahab, M. S., Hamri, N. E., & Wang, J. (2010). Chaos control of a fractional-order financial system. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010.
- [3] Agiza, H. N. (2004). Chaos synchronization of Lü dynamical system. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 58(1-2), 11-20
- [4] Ahmad, W. M., El-Khazali, R., & Al-Assaf, Y. (2004). Stabilization of generalized fractional order chaotic systems using state feedback control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(1), 141-150.
- [5] Andrievskii, B. R., & Fradkov, A. L. (2003). Control of chaos : methods and applications. I. Methods. *Automation and remote control*, 64(5), 673-713.
- [6] Aulbach, B., & Kieninger, B. (2001). On three definitions of chaos. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, 1(1), 23-37
- [7] Azar, A. T., Vaidyanathan, S., & Ouannas, A. (Eds.). (2017). Fractional order control and synchronization of chaotic systems (Vol. 688). Springer.
- [8] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G., & Stacey, P. (1992). On Devaney's definition of chaos. *The American mathematical monthly*, 99(4), 332-334.
- [9] Brown, R., & Kocarev, L. (2000). A unifying definition of synchronization for dynamical systems. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 10(2), 344-349.
- [10] Charru, F. (2012). *Instabilités hydrodynamiques*. EDP Sciences.

- [11] Chen, G. (Ed.). (1999). Controlling chaos and bifurcations in engineering systems. CRC press.
- [12] Chen, H. H., Sheu, G. J., Lin, Y. L., & Chen, C. S. (2009). Chaos synchronization between two different chaotic systems via nonlinear feedback control. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 70(12), 4393-4401
- [13] Dang-Vu, H., & Delcarte, C. (2000). Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica. Ellipses Ed. Marketing.
- [14] Devaney, R. (2008). An introduction to chaotic dynamical systems. Westview press.
- [15] Feldman, D. P. (2012). Chaos and fractals : an elementary introduction. Oxford University Press.
- [16] González-Miranda, J. M. (2004). Synchronization and control of chaos : an introduction for scientists and engineers.
- [17] Grassberger, P., & Procaccia, I. (1983). Characterization of strange attractors. *Physical review letters*, 50(5), 346.
- [18] Grebogi, C., Lai, Y. C., & Hayes, S. (1997). Control and applications of chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 7(10), 2175-2197.
- [19] Haag, J. (1950). Sur la synchronisation des systèmes oscillants non linéaires. In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (Vol. 67, pp. 321-392)
- [20] Haeri, M., & Khademian, B. (2006). Comparison between different synchronization methods of identical chaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 29(4), 1002-1022.
- [21] Hamaizia, T. (2013). systèmes dynamiques et chaos : " Application à l'optimisation à l'aide d'algorithme chaotique" (Doctoral dissertation, Thèse de Doctorat, Université Mentouri de Constantine).
- [22] Hateley, J. The Lorenz system. Lecture Notes, <http://web.math.ucsb.edu/~jhateley/paper/lorenz.pdf>, (Access date : 23.09. 2019).

- [23] Hegazi, A. S., Ahmed, E., & Matouk, A. E. (2013). On chaos control and synchronization of the commensurate fractional order Liu system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(5), 1193-1202.
- [24] Hirsch, M. W., Devaney, R. L., & Smale, S. (1974). *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra* (Vol. 60). Academic press.
- [25] Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2012). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press.
- [26] Jean, F. (2010). *Systemes dynamiques. Stabilité et commande*. Cours AO102, ENSTA.
- [27] Kapitaniak, T. (1996). *Controlling chaos : theoretical and practical methods in non-linear dynamics*. Academic Press
- [28] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* Elsevier. North-Holland. Mathematics studies..
- [29] Li, C. (2006). Projective synchronization in fractional order chaotic systems and its control. *Progress of theoretical physics*, 115(3), 661-666.
- [30] Li, C., Liao, X., & Yu, J. (2003). Synchronization of fractional order chaotic systems. *Physical Review E*, 68(6), 067203.
- [31] Li, C., & Tong, Y. (2013). Adaptive control and synchronization of a fractional-order chaotic system. *Pramana*, 80(4), 583-592.
- [32] Li, C. P., Deng, W. H., & Xu, D. (2006). Chaos synchronization of the Chua system with a fractional order. *Physica A : Statistical Mechanics and Its Applications*, 360(2), 171-185
- [33] Li, T. Y., & Yorke, J. A. (2004). Period three implies chaos. In *The Theory of Chaotic Attractors* (pp. 77-84). Springer, New York, NY..
- [34] Liao, T. L., & Lin, S. H. (1999). Adaptive control and synchronization of Lorenz systems. *Journal of the Franklin Institute*, 336(6), 925-937
- [35] Ioannou, P., & Fidan, B. (2006). *Adaptive control tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

- [36] Mainardi, F. (1997). Fractional calculus. In *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics* (pp. 291-348). Springer, Vienna.
- [37] Manneville, P. (2005). *Dynamique non linéaire et chaos*. Ecole d'été de physique e2phy.
- [38] Matouk, A. E. (2011). Chaos, feedback control and synchronization of a fractional-order modified Autonomous Van der Pol–Duffing circuit. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(2), 975-986
- [39] Marle, C. M. (2003). *Systèmes dynamiques : une introduction*. Ellipse
- [40] Menacer, T., & Hamri, N. (2011). Synchronization of different chaotic fractional-order systems via approached auxiliary system the modified Chua oscillator and the modified Van der Pol-Duffing oscillator. *Electronic Journal of Theoretical Physics, EJTP*, 8(25), 253-266.
- [41] Miliou, A. N., Stavrinides, S. G., Valaristos, A. P., & Anagnostopoulos, A. N. (2009). Nonlinear electronic circuit, Part I : Multiple routes to chaos. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 71(12), e3-e20.
- [42] Miller, K. S., & Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley.
- [43] Miller, K. S., & Ross, B. (1993). *An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John-Wily and Sons. Inc. New York.
- [44] Moon, F. C. (2008). *Chaotic and fractal dynamics : introduction for applied scientists and engineers*. John Wiley & Sons.
- [45] Müllhaupt, P. (2009). *Introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaires*. PPUR Presses polytechniques.
- [46] Nayfeh, A. H., & Balachandran, B. (2008). *Applied nonlinear dynamics : analytical, computational, and experimental methods*. John Wiley & Sons.
- [47] Oldham, K., & Spanier, J. (1974). *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Elsevier.
- [48] Ott, E. (2002). *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press

- [49] Pac, J. L. (2012). Systèmes dynamiques : cours et exercices corrigés. Hachette.
- [50] Park, J. H. (2006). Chaos synchronization between two different chaotic dynamical systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 27(2), 549-554.
- [51] Paty, M. (2012). La physique du XX e siècle. Edp Sciences.
- [52] Pecora, L. M., & Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Physical review letters*, 64(8), 821.
- [53] Petráš, I. (2011). Fractional-order nonlinear systems : modeling, analysis and simulation. Springer Science & Business Media
- [54] Pikovsky, A., Kurths, J., Rosenblum, M., & Kurths, J. (2003). Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences (Vol. 12). Cambridge university press.
- [55] Pikovsky, A., & Maistrenko, Y. L. (Eds.). (2012). Synchronization : theory and application (Vol. 109). Springer Science & Business Media.
- [56] Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering. fongamma
- [57] Poincaré, H. (1881). Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I). *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 7, 375-422.
- [58] Poincaré, H. (1899). Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste (Vol. 3). Gauthier-Villars.
- [59] Ross, B. (Ed.). (2006). Fractional calculus and its applications : proceedings of the international conference held at the University of New Haven, June 1974 (Vol. 457). Springer.
- [60] Scheinerman, E. R. (2012). Invitation to dynamical systems. Courier Corporation.
- [61] Senouci, A, & Menacer, A. (2019). Control, Stabilization and Synchronization of Fractional-Order Jerk System. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 19(4), 523-536.
- [62] Sprott, J. C. (1997). Some simple chaotic jerk functions. *American Journal of Physics*, 65(6), 537-543.

- [63] Sprott, J. C. (2000). Simple chaotic systems and circuits. *American Journal of Physics*, 68(8), 758-763.
- [64] Sprott, J. C. (2010). *Elegant chaos : algebraically simple chaotic flows*. World Scientific.
- [65] Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual : With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press.
- [66] Yang, S., & Duan, C. (1998). Generalized synchronization in chaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 9(10), 1703-1707.
- [67] Wang, Y. W., & Guan, Z. H. (2006). Generalized synchronization of continuous chaotic system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 27(1), 97-101.
- [68] Zhan, M., Wang, X., Gong, X., Wei, G. W., & Lai, C. H. (2003). Complete synchronization and generalized synchronization of one-way coupled time-delay systems. *Physical Review E*, 68(3), 036208.
- [69] Zeng, Y., & Singh, S. N. (1997). Adaptive control of chaos in Lorenz system. *Dynamics and Control*, 7(2), 143-154.
- [70] Zhang, H., Liu, D., & Wang, Z. (2009). *Controlling chaos : suppression, synchronization and chaotification*. Springer Science & Business Media.
- [71] Zhu, H., Zhou, S., & Zhang, J. (2009). Chaos and synchronization of the fractional-order Chua's system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 39(4), 1595-1603.

Annexe A : Critère de Routh-Hurwitz dans le cas fractionnaire

Considérons le système :

$$D^\alpha x(t) = f(x) \quad (5.9)$$

où $\alpha \in]0, 1]$, $x \in \mathbf{R}^3$ et $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Nous supposons que x_{eq} est le point d'équilibre de cet système, alors son polynôme caractéristique est donnée comme suit

$$P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

son discriminant est donné par

$$D(P) = 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3(a_1)^3 - 4(a_2)^3 - 27(a_3)^2.$$

Nous avons les conditions de Routh - Hurwitz d'ordre fractionnaire suivantes :

1. Si $D(P) > 0$, alors la condition nécessaire et suffisante pour que le point d'équilibre E soit localement asymptotiquement stable est $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ et $a_1a_2 - a_3 > 0$.
2. Si $D(P) < 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_3 > 0$, alors E est localement asymptotiquement stable pour $\alpha < 2/3$. Cependant, si $D(P) < 0$, $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, $\alpha > 2/3$, alors E est instable.
3. Si $D(P) < 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_1a_2 - a_3 = 0$, alors E est localement asymptotiquement stable pour tout $\alpha \in]0, 1[$.
4. La condition nécessaire pour que le point d'équilibre E soit localement asymptotiquement stable est $a_3 > 0$.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de cet thèse sont expliquées ci-dessous.

$\Gamma(x)$	Fonction Gamma de la variable x .
$\beta(x, y)$	Fonction Béta du variable x et y .
$f'(x)$	La dérivée d'ordre 1 de la fonction f .
$f^{(\alpha)}(x)$	La dérivée de la fonction f d'ordre α .
${}^G D_a^\alpha$	La dérivée de la fonction d'ordre α de la définition de Grunwald-Letnikov.
I_a^α	L'intégration d'ordre α .
${}^R D_a^\alpha$	Dérivée fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville.
${}^C D_a^\alpha$	Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo.
R_n^α	Le reste de série
$L\{f(x)\}$	La transformé de Laplace de la fonction f .
$L^{-1}\{f(p)\}$	Transformé de Laplace inverse
$(f * g)(x)$	Convolution des fonctions f et g
$R - L$	Riemann-Liouville
$G - L$	Grunwald-Letnikov
x_e	point d'équilibre
$\gamma(x)$	espace de phase
\oplus	Somme direct
Df_{x_e}	Matrice Jacobienne
\mathbb{R}	l'ensemble des nombre réels
\mathbb{C}	l'ensemble des nombre complexes
λ_i	l'exposant de lyapunov
\int	intégrale
\lim	limite
\sum	la somme algébrique