République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche scientifique
Université Mohamed Khider Biskra

Faculté des Sciences Exactes et de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques

Réf:............

Thèse pour obtenir le titre de Doctorat en Sciences

Filière : Mathématiques Appliquées

Thèse présentée

Par

Mostefa Djedidi

EXISTENCE ET STABILITÉ DE POINT FIXE ET DE MEILLEUR POINT DE PROXIMITÉ POUR LES FONCTIONS ET LES MULTIFONCTIONS DÉFINIES SUR DES DIFFÉRENTS ESPACES

Devant le jury composé de :

Djamel Meraghni	**Pr**	**Univ Biskra**	**Président**
Abdelouahab Mansour	**Pr**	**Univ Eloued**	**Directeur de thèse**
Said Beloul	**MCA**	**Univ Eloued**	**Examinateur**
Yahia Djabrane	**MCA**	**Univ Biskra**	**Examinateur**

A mes parents,
A ma femme et mes enfants,
A mes frères et mes soeurs.

Remerciements

Par ces quelques lignes, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin au bon déroulement de cette thèse, en espérant navoir oublié personne...
Je tiens à remercier spécialement mon directeur de thèse **Mansour Abdelouahab**, Professeur au département de Mathématiques, Université d'Eloued pour le temps et la patience que vous m'avez accordés tout au long de ces années. Pour votre générosité, votre compréhension, votre efficacité et pour tout ce que vous m'avez donné, je vous remercie très sincèrement.
Il m'est particulièrement agréable de pouvoir exprimer mes vifs et sincères remerciements à Monsieur **Djamel Meraghni**, Professeur au département de Mathématiques, Université de Biskra, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury.
Je tiens à remercier vivement Monsieur **Yahia Djabrane**, Maitre de conférence au département de Mathématiques, Université de Biskra, pour avoir bien voulu prendre part au jury. Je le remercie pour lhonneur quil me fait en acceptant de juger ce travail. L'occasion m'est offerte pour lui témoigner toute ma gratitude
Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur **Said Beloul** Maitre de conférence au département de Mathématiques, Université d'Eloued pour s'être intéressé à mon travail et pour avoir accepté de l'examiner et prendre part au jury.

Je ne saurais oublier de réitérer mes sincères remerciements au Professeur **Khadra Nachi** pour votre patience et vos précieux conseils.

Je tiens à remercier mon ami Monsieur **Ali Labsi**, Maitre de conférence au département d'Economie, Université d'Eloued, pour sa disponibilité, ses encouragements et ses qualités humaines.

1 Liste des abréviations et des symboles

X : ensemble
$d(.,.)$: métrique
k : constante de contraction
F : multifonction
$e(.,.)$: excès de Hausdorf
$D(.,.)$: distance de Hausdorf
$p(.,.)$: métrique partielle
$p^s(.,.)$: métrique
$p^w(.,.)$: métrique
B : boule
$\overline{B}_X$: boule d'unité fermée
$e_p(.,.)$: excès partielle de Hausdorf
$D_p(.,.)$: distance partielle de Hausdorf
UC : propriété UC
P : propriété P
PF :ensemble de meilleurs points de proximité
dom :domaine de définition
$p-$: p point
$d-$: d point
Fix : ensemble de points fixes
Gr : graphe
λ : valeur propre
$[.,.]$: produit sous interne
(x_n) : écriture allégée de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\Pi_n X_n$: écriture allégée de $\Pi_{n\in\mathbb{N}} X_n$
$(x_n) \in \Pi_n X_n$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans X telle que $x_n \in X_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$
$\Pi_n X_{s(n)}$ écriture allégée de $\Pi_{n\in\mathbb{N}} X_{s(n)}$ où $s \in \mathbb{S}$
$(x_{s(n)}) \in \Pi_n X_{s(n)}$: $(x_{s(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans X telle que $x_{s(n)} \in X_{s(n)}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$
$\liminf X_n := \{x \in X : \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Pi_n X_n, x_n \to x\}$

Résumé

Les travaux de cette thèse portent sur l'existence de point fixe des fonctions. Dans un premier temps, nous établissons des résultats d'existence de point fixe des multifonctions qui ne sont pas pseudo-contractantes et non-dilatantes et satisfont une certaine condition de contraction asymptotique. Par la suite nous donnons quelques résultats de points fixes et de meilleur point de proximité pour les multifonctions en espaces métriques partiels. Nos résultats généralisent et complètent divers résultats connus. Quelques exemples sont également donnés pour illustrer les principaux résultats présentés. D'autre part, nous obtenons un nouveau résultat sur l'existence d'un point fixe pour une classe de fonctions à valeurs définies satisfaisant une condition de contraction sur un espace métrique partiel, notre méthode s'appuie sur le principe variationnel d'Ekeland. Et on a terminé par un résultat de stabilité de point fixe qui donne une variante du théorème de Nadler.

Mots clés : Point fixe, point de proximité, point de coïncidence, espace métrique, espace ordonné, espace conique.

Abstract

The work of this thesis is the existence of fixed point functions. First, we establish results of fixed point existence for multifunction that are not pseudo-contracting and no expansive and satisfy a certain asymptotic contraction condition. Subsequently we give some results of fixed points and best proximity point for multifunctional spaces partial metrics. Our results generalize and complete various results known. Some examples are also given to illustrate the main results presented. On the other hand, we obtain a new result on the existence of a fixed point for a class of functions with defined values satisfying a contraction condition on a partial metric space, our method is based on the variational principle of Ekeland. And we end up with a fixed point stability result that gives a variant of Nadler's theorem.

Keywords: fixed point, proximity point, coincidence point, metric space, ordered space, cone space.

ملخص

يتناول عمل هذه الأطروحة وجود النقاط الثابتة للدوال. بداية تحصلنا على نتائج وجود نقاط ثابتة للدوال مضاعفة القيم التي ليست شبه متقلصة وغير متوسعة وتلبي شروط تقلص مقارب معينة. في وقت لاحق نعطي بعض النتائج على النقاط الثابتة ونقطة التقارب الأفضل للدوال مضاعفة القيم في الفضاءات المترية الجزئية. نتائجنا تعميم وإكمال لنتائج مختلفة معروفة. بعض الأمثلة تعطى لتوضيح النتائج الرئيسية المقدمة. من ناحية أخرى ،تحصلنا على نتيجة جديدة تخص وجود نقطة ثابتة لفئة من الدوال مضاعفة القيم ذات قيم محددة تلبي شرط التقلص على فضاءات مترية جزئية. تعتمد طريقتنا على المبدأ المتغير لاكلند. وينتهي بنا المطاف بنتيجة استقرار النقطة الثابتة تعطي نظرية مختلفة عن نتيجة نادلار .

كلمات مفتاحية: نقطة ثابتة ، نقطة تقريب ، نقطة صدفة ، فضاء متري ، فضاء مرتب ، فضاء مخروط .

Table des matières

2 Introduction

la résolution de plusieurs problèmes mathématiques se ramène souvent à la recherche de point fixe pour certaines fonctions non linéaires. De plus, plusieurs problèmes intervenant en physique,dans des disciplines aussi diverses que l'économie, la biologie, la physique, la mécanique, etc... de nombreux phénomènes sont modélisables sous forme de problèmes mathématiques. Cette mise en forme permet d'utiliser les ressources des mathématiques appliquées : programmation mathématique, recherche de points fixes. Lorigine de la théorie des points fixes est une méthode des approximations successives utilisée pour prouver l'existence des solutions d'équations différentielles introduites indépendamment par Liouville en 1837 et Picard en 1890. La théorie classique est le travail de Banach 1922 qui fournit une méthode constructive pour trouver les points fixes et le principe de contraction de Banach d'une fonction contractante sur un espace métrique complet pour assurer un point fixe unique forment une base pour le développement important dans la théorie des points fixes . Donc divers résultats relatives aux points fixes, aux points fixes communs, aux points de coïncidence, etc. ont été étudié pour des fonctions satisfaites différentes conditions contractives dans différents domaines. Les descriptions des évolutions importantes dans cette période prouvent l'existence des théorèmes du point fixe en utilisant des fonctions contractives plus généralisées que les fonctions contractives précédentes. Plus des fonctions contractives généralisées ont été concues par Bianchini, Caristi. Dans les années 1980 Sessa et Jungck ont introduit la notion de la commutativité faible et les fonctions compatibles. Par la suite, un de théorèmes du point fixe commun a été introduit par Sessa et Pant. L'objectif de ce travail de thèse est de contribuer à l'amélioration des résultats récemment obtenues par des généralisations des théorèmes de point fixe dans le cas univoque et multivoque sur des espaces métriques ordonnés et également essayer d'affaiblir les hypothèses nécessaires d' existence d'un point fixe ou un meilleur point de proximité.
Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions mathématiques de base nécessaires sur les espaces métriques et les espaces mériques

parciels. Aussi deux théorèmes d'existence de point fixe pour une multifonction qui ne sont pas pseudo-contractantes sont établits.
Dans le deuxième chapitre nous donnons un théorème d'existence de point fixe pour une multifonction de type $(F + G)/2$ où F et G sont non-dilatantes et satisfont une certaine condition de contraction asymptotique. Des résultats antérieurs seront alors une conséquence immédiate. Nous étudions des theorems de points fixes pour des multifonctions mon-dilatantes verifiant certaines conditions asymptotiques. Cette étude a été le sujet de nombreux travaux ([23], [41], [52], [72], [73], [75])pour une fonction asymptotiquement contractive.
Dans le troisième chapitre, nous obtenons quelques résultats de points fixes et de meilleur point de proximité pour les multifonctions en espaces métriques partiels. Nos résultats généralisent et complètent divers resultats connus. Quelques exemples sont également inclus pour illustrer les principaux résultats présentés.
Dans le quatrième chapitre, nous donnons une nouvelle version du principe variationnel dEkeland sur les éspaces métriques partiels. Nous avons établi un résultat sur lexistence dun point fixe pour une classe généralisés des contractions sur un espace métrique partiel.

Dans le cinquième chapitre, on donne un résultat de stabilité de point fixe qui donne une variante du théorème de Nadler.

Chapitre 1

Théorèmes du point fixe pour des fonctions contractantes et non pseudo-contractives

Dans ce chapitre, on donne les définitions préliminaires de certains termes et et quelques théorèmes bien connus en rapport avec les contractions des fonctions sur un espace métrique. Aussi deux théorèmes d'existence de point fixe pour une multifonction de type $(F+G)/2$ où F et G ne sont pas pseudo-contractantes sont établits .

1 Quelques définitions sur les espaces métriques

Définition 1.1 *Un espace métrique (X,d) est un ensemble X muni d'une fonction $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ appelée distance ou métrique, possédant les trois propriétés suivantes :*
$\forall x, y \in X : d(x,y) \geqslant 0; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
$\forall x, y \in X d(x,y) = d(y,x).$
$\forall x, y, z \in X d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z).$

Définition 1.2 *Soient (X,d) un espace métrique et $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction, on dit que T est contractante s'il existe $k \in (0,1)$ tel que pour tous $x, y \in X$ $d(T(x),T(y)) \leq kd(x,y)$*

Définition 1.3 *On dit que la suite (x_n) dans l'espace métrique (X,d) est de Cauchy si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N_\epsilon > 0$ tel que $n, m > N_\epsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon$.*

Définition 1.4 *L'espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.*

Définition 1.5 *Soient* (X, d) *est un espace métrique et* $T : X \to X$*. Alors* T *a un point fixe s'il existe* $x \in X$ *tel que* $Tx = x$*. Le point* x *est appelé point fixe de* T*.*

Définition 1.6 *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T, S : X \to X$ *deux fonctions alors* $x \in X$ *est appelé point de coincidence de* T *et* S*, si* $Tx = Sx$*.*

Définition 1.7 *Un espace métrique*(X, d) *est complet, si toute suite de Cauchy est convergente.*

Théorème 1.1 *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une fonction contractante. Alors* F *admet un unique point fixe* $\overline{x} \in X$*.*

On présente maintenant quelques définitions et propriétés sur les multifonctions.

Définition 1.8 *Soient* (X, d) *un espace métrique et* $T : X \to 2^X$*. Alors* T *a un point fixe s'il existe* $x \in X$ *tel que* $x \in Tx$*. Le point* x *est appelé point fixe de* T*.*

Définition 1.9 *Soient* (X, d) *un espace métrique et* $CB(X)$ *la famille de tous les sous ensembles fermés et bornés de* X*.* $\forall A, B \in CB(X)$ *on définit*

$$H(A, B) = max\{sup_{a\in A} d(a, B), sup_{b\in B} d(b, A)\}$$

où $d(x, A) = inf\{d(x, a),\ a \in A\}$ *est la distance entre le point* a *et l'ensemble* A *et* H *est la métrique d'Pompeiu-Hausdorf dans* $CB(X)$ *induite par la métrique* d*.*

Définition 1.10 (X, d) *est un espace métrique et* $T : X \to 2^X$*. S'il existe* $k \in [0, 1)$ *pour* $x, y \in X$ *tel que* $H(Tx, Ty) \leqslant kd(x, y)$*. Alors la multifonction* T *est contractante.*

2 Espaces métriques partiels

Définition 1.11 *On dit que la fonction* $p : X \times X \to [0, +\infty[$ *est une métrique partielle sur* X *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(a) $p(x, x) = p(y, y) = p(x, y)$ *si et seulement si* $x = y$ *pour tous* $x, y \in X$,

(b) $p(x, x) \leq p(x, y)$ *pour tous* $x, y \in X$,

(c) $p(x, y) = p(y, x)$ *pour tous* $x, y \in X$,

(d) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$ *pour tous* $x, y, z \in X$.

Alors (X, p) *est dite un espace métrique partiel.*

Pour une métrique partielle p sur X, la fonction $p^s : X \times X \to \mathbb{R}^+$ donnée par

$$p^s(x, y) = 2P(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \tag{1.1}$$

et

$$p^w(x, y) = p(x, y) - min\{p(x, x), p(y, y)\} \tag{1.2}$$

sont des métriques sur X. Chaque métrique partielle p sur X engendre τ_p est une T_0 topologie sur X avec une base des familles d'ouvertes p-boules

Exemple 1.1 *Un simple exemple d'un espace métrique partiel est la paire* $(\mathbb{R}^+, p)$, *où* $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est définie par* $p(x, y) = max\{x, y\}$.

Exemple 1.2 [62] *Si* $X = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$, *alors* $p([a, b], [c, d]) = max\{b, d\} - min\{a, c\}$ *est une métrique partielle sur* X.

Définition 1.12 [62]

(i) *Une suite* $\{x_n\}$ *dans un espace métrique partiel* (X, p) *converge vers* $x \in X$ *si et seulement si* $p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x, x_n)$.

(ii) *une suite* $\{x_n\}$ *dans un espace métrique partiel* (X, p) *est dite de Cauchy si et seulement si* $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ *existe (et finie).*

(iii) *un espace métrique partiel* (X, p) *est complet si toute suite de Cauchy* $\{x_n\}$ *dans* X *converge vers un point* $x \in X$ *tel que* $p(x, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$.

Lemme 1.1 [62]

($a1$) *Une suite $\{x_n\}$ est de Cauchy dans un espace métrique partiel (X, p) si et seulement si $\{x_n\}$ est de Cauchy dans l'espace métrique (X, p^s).*

($a2$) *Un espace métrique partiel (X, p) est complet si et seulement si l'espace métrique (X, p^s) est complet.*

$$\lim_{n\to\infty} p^s(x, x_n) = 0 \Leftrightarrow p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x, x_n) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m). \tag{1.3}$$

3 Fonctions pseudo-lipschitziennes

Soient (X, d) un espace métrique, A et B deux sous-ensemble de X. On a par définition :

$$\begin{aligned} d(x, B) &= \inf_{y\in B} d(x, y) \text{ avec la convention } \inf_{\emptyset} = +\infty, \\ e(A, B) &= \sup_{x\in A} d(x, B) \text{ si } B \neq \emptyset,\ e(A, \emptyset) = +\infty \text{ si } A \neq \emptyset,\ e(\emptyset, B) = 0, \\ D(A, B) &= \max(e(A, B), e(B, A)). \end{aligned}$$

Ici $e(A, B)$ est l'excès de A sur B et $D(A, B)$ est la distance de Pompeiu-Hausdorf entre A et B.

Introduisons la notion de pseudo-lipschitziannité d'une multifonction $T : X \rightrightarrows X$ relativement à un sous-ensemble non vide U de X.

Définition 1.13 *La multifonction T est dite pseudo-lipschitzienne relativement à U s'il existe $\kappa \geq 0$ tel que pour tous $x, x' \in U$*

$$e(Tx \cap U, Tx') \leq \kappa d(x, x').$$

Lorsque $\kappa \in [0, 1)$, on dit que T pseudo-contractante relativement à U. Si $\kappa = 1$, T est dite pseudo-nondilatante relativement à U.

Notons que lorsque $U = X$, on retrouve la définition classique de multifonction lipschitzienne (resp. contractante) caractérisée par l'existence d'un réel $\kappa \geq 0$ (resp. $\kappa \in [0,1)$)

$$D(Tx,Ty) \leq \kappa d(x,y) \ \forall x,y \in X.$$

De même, si $\kappa = 1$, T est dite non-dilatante i.e.

L'existence de points fixes pour les multifonctions pseudo-contractante est bien connue (voir [17], [31], [45], [74]). Ce résultat d'existence a été formulé initialement par Nadler [66, Theorem 5] pour une multifonction contractante $T : X \rightrightarrows X$ à valeurs fermées, bornées et non vides ; l'hypothèse de bornétude des valeurs est en fait inutile (voir , Covitz-Nadler [26]).

Théorème 1.2 *Soient (X,d) un espace métrique complet, $T : X \rightrightarrows X$ une multifonction à valeurs fermées, non vides. On suppose que T est pseudo-contractante relativement à une certaine boule ouverte $B(x_0,r_0)$ et $r := (1-\kappa)^{-1}d(x_0,Tx_0) < r_0$ (κ étant la constante de contraction). Alors l'ensemble de points fixes $\Phi_T := \{x \in X : x \in Tx\}$ de T est non vide et*

$$d(x_0, \Phi_T \cap B(x_0,r_0)) \leq r.$$

4 Existence de point fixe pour les multifonctions non pseudo-contractives

Soient (X,d) un espace métrique, A et B deux sous-ensemble de X. On a par définition :

$$\begin{aligned} d(x,B) &= \inf_{y\in B} d(x,y) \text{ avec la convention } \inf_{\emptyset} \ = +\infty, \\ e(A,B) &= \sup_{x\in A} d(x,B) \text{ si } B \neq \emptyset,\ e(A,\emptyset) = +\infty \text{ si } A \neq \emptyset,\ e(\emptyset,B) = 0, \\ D(A,B) &= \max(e(A,B), e(B,A)). \end{aligned}$$

Ici $e(A,B)$ est l'excès de A sur B et $D(A,B)$ est la distance de Pompeiu-Hausdorff entre A et B.

Introduisons la notion de pseudo-lipschitzienneté d'une multifonction $F : X \rightrightarrows X$ relativement à un sous-ensemble non vide U de X.

Définition 1.14 *La multifonction F est dite pseudo-lipschitzienne relativement à U s'il existe $\theta \geq 0$ tel que pour tous $x, x' \in U$*

$$e(Fx \cap U, Fx') \leq \theta d(x, x').$$

Lorsque $\theta \in [0,1)$, on dit que F pseudo-contractante relativement à U. Si $\theta = 1$, F est dite pseudo-nondilatante relativement à U.

Notons que lorsque $U = X$, on retrouve la définition classique de multifonction lipschitzienne (resp. contractante) caractérisée par l'exiqtence d'un réel $\theta \geq 0$ (resp. $\theta \in [0,1)$)

$$D(Fx, Fy) \leq \theta d(x, y) \ \forall x, y \in X.$$

De même, si $\theta = 1$, T est dite non-dilatante.
Dans la suite on prend $U = B(x_0, r) = \{x, d(x_0, x) \leqslant r\}$

4.1 Existence de point fixe

Théorème 1.3 *Soient (X, d) un espace métrique complet, $F : X \rightrightarrows X$ une multifonction à valeurs fermées, non vides. On suppose que F verifie : $\forall x \in X \cap B(x_0, r)$ $\exists \theta_1, \theta_2 \in [0,1)$ et $y \in F(x)$, tels que*
$\theta_1 + \theta_2 < 1$, $(1 - \theta_1)u \leq \theta_2 d(y, x)$ et $u_0 < (1 - \theta_1 - \theta_2)r$ avec $u = d(y, F(y))$ et $u_0 = d(x_0, F(x_0))$

Alors l'ensemble de points fixes $\Phi_F := \{x \in X : x \in F(x)\}$ de F est non vide et

$$d(x_0, \Phi_F \cap B(x_0, r)) \leq \frac{u_0}{(1 - \theta_1 - \theta_2)}.$$

Démonstration. Considérons $d(x_0, F(x_0)) < (1 - \theta_1 - \theta_2)r$, on peut trouver $x_1 = y \in F(x_0)$ tel que $d(x_0, x_1) < (1 - \theta_1 - \theta_2)r$ alors $x_1 \in B(x_0, r)$.

-Si $\theta_1 + \theta_2 = 0$, puisque $u_1 = d(x_1, F(x_1)) = 0$ on trouve $x_1 \in F(x_1)$ on prend la suite $x_n = x_1$ pour tout $n \geq 1$.

-Si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$, on construit une suite finie $x_1, ..., x_n$ dans $B(x_0, r)$ verifie $x_i \in F(x_{i-1})$ et $d(x_i, x_{i-1}) \leq (\theta_1 + \theta_2)^{i-1} u_0$ pour tous $i = 1, 2, ..., n$.

Puisque $x_n \in F(x_{n-1}) \cap B(x_0, r)$ on a :

$$\begin{aligned} u_n = d(x_n, F(x_n)) &\leq (\theta_1 + \theta_2) d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq (\theta_1 + \theta_2)^n u_0 \end{aligned}$$

aussi on peut trouver $x_{n+1} \in F(x_n)$ tel que $d(x_n, x_{n+1}) \leq (\theta_1 + \theta_2)^n u_0$ d'où

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{n+1}) &\leq \sum_{i=1}^{n+1} d(x_i, x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} (\theta_1 + \theta_2)^{i-1} u_0 \\ &\leq (1 - (\theta_1 + \theta_2))^{-1} u_0 \\ &\leq r \end{aligned}$$

et $x_{n+1} \in B(x_0, r)$, on a définit une suite de cauchy (x_n) dans $B(x_0, r)$ ou X est un espace métrique complet si on prend $\overline{x}$ comme limite on a :

$$\begin{aligned} d(\overline{x}, x_0) &\leq \lim_{n \to \infty} d(x_{n+1} - x_0) \\ &\leq (1 - (\theta_1 + \theta_2))^{-1} u_0 \\ &\leq r \end{aligned}$$

ceci donne $\overline{x} \in B(x_0, r)$

d'autre part, on a la suite $u_n = d(x_n, F(x_n))$ converge vers 0, il existe une suite $(z_n) telque$ $z_n \in F(x_n)$ et $u_n = d(x_n, z_n)$:

$$\begin{aligned} d(\overline{x}, F(\overline{x})) &\leq \inf_{y \in F(\overline{x})} d(\overline{x}, y) \\ &\leq \lim \inf_{y \in F(x_n)} d(x_n, y) \\ &\leq \lim\inf d(x_n, z_n) = 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

D'où $\overline{x} \in \Phi_F$ et $d(\overline{x}, x_0) \leq \dfrac{r}{1 - (\theta_1 + \theta_2)}$. ∎

Théorème 1.4 *Soient* (X,d) *un espace métrique complet,* $F : X \rightrightarrows X$ *une multifonction à valeurs fermées, non vides. On suppose que* F *verifie :* $\forall x \in X \cap B(x_0,r)$ $\exists \theta \in [0,1)$ *et* $y \in F(x)$ *, tel que* $u \leq \theta d(y,x)$ *et* $u_0 < (1-\theta)r$ *avec* $u = d(y,F(y))$ *et* $u_0 = d(x_0,F(x_0))$ *Alors l'ensemble de points fixes* $\Phi_F := \{x \in X : x \in F(x)\}$ *de* F *est non vide et*

$$d(x_0, \Phi_F \cap B(x_0,r)) \leq \frac{u_0}{(1-\theta)}.$$

Démonstration. Considérons $d(x_0,F(x_0)) < (1-\theta)r$, on peut trouver $x_1 = y \in F(x_0)$ tel que $d(x_0,x_1) < (1-\theta)r$ alors $x_1 \in B(x_0,r)$.

-Si $\theta = 0$, puisque $u_1 = d(x_1,F(x_1)) = 0$ on trouve $x_1 \in F(x_1)$ on prend la suite $x_n = x_1$ pour tout $n \geq 1$.

-Si $\theta \neq 0$, on construit une suite finie $x_1,...,x_n$ dans $B(x_0,r)$ verifie $x_i \in F(x_{i-1})$ et $d(x_i,x_{i-1}) \leq \theta^{i-1}u_0$ pour tous $i = 1,2,...,n$.

Puisque $x_n \in F(x_{n-1}) \cap B(x_0,r)$ on a :

$$\begin{aligned} u_n = d(x_n,F(x_n)) &\leq \theta d(x_n,x_{n-1}) \\ &\leq \theta^n u_0 \end{aligned}$$

aussi on peut trouver $x_{n+1} \in F(x_n)$ tel que $d(x_n,x_{n+1}) \leq \theta^n u_0$ d'où

$$\begin{aligned} d(x_0,x_{n+1}) &\leq \sum_{i=1}^{n+1} d(x_i,x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} (\theta)^{i-1} u_0 \\ &\leq (1-\theta)^{-1} u_0 \\ &\leq r \end{aligned}$$

et $x_{n+1} \in B(x_0,r)$, on a définit une suite de cauchy (x_n) dans $B(x_0,r)$ ou X est un espace métrique complet si on prend $\overline{x}$ comme limite on a :

$$\begin{aligned} d(\overline{x},x_0) &\leq \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}-x_0) \\ &\leq r \end{aligned}$$

ceci donne $\overline{x} \in B(x_0,r)$

d'autre part, on a la suite $u_n = d(x_n, F(x_n))$ converge vers 0, il existe une suite $(z_n) telleque\ z_n \in F(x_n)$ et $u_n = d(x_n, z_n)$:

$$\begin{aligned} d(\overline{x}, F(\overline{x})) &\leq \inf_{y \in F(\overline{x})} d(\overline{x}, y) \\ &\leq \lim \inf_{y \in F(x_n)} d(x_n, y) \\ &\leq \lim \inf d(x_n, z_n) = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

D'où $\overline{x} \in \Phi_F$ et $d(\overline{x}, x_0) \leq \dfrac{u_0}{1-\theta}$. ■

Remarque 1.1 *Dans le théorème 1.3 et 1.4 précédents la multifonction F n'est pas nécessairement pseudo-θcontractante.*

Exemple 1.3 *Soient $X = [0,1]\, et\, d(x,y) = |x-y|$ on a (X,d) un espace métrique complet, la multifonction $F : X \rightrightarrows X$ est définie par :*

$$F(X) = \begin{cases} \{0,1\}, x = 0 \\ \{\frac{1}{2}x\}, x \in (0,1) \\ \{\frac{1}{2}, 1\}, x = 1 \end{cases}$$

Si on prend $r = \frac{1}{2}$,$x_0 = 0 \in X$, pour $x = 0\, et\, x' = \frac{1}{3}$ il est clair que F ne verifie pas la condition du pseudo-θcontractante mais $\forall x \in X \cap B(0, \frac{1}{2})$ $\exists \theta \in [0,1)\,, y \in F(x)\,, u \in d(y, F(y))\, et\, u_0 = 0 = d(0,0)$ tel que $u \leq \theta d(y,x)$ et $u_0 < \frac{(1-\theta)}{2}$ et on a : $\Phi_F \cap B(x_0, r) = \{0\}$

Théorème 1.5 *Soient (X,d) un espace métrique complet, $F : X \rightrightarrows X$ une multifonction à valeurs fermées, non vides. On suppose que pour tous $r > 0$ et $x_0 \in X$, F verifie : $\forall x \in X \cap B(x_0, r)$ $\exists \theta \in [0,1)\, et\, y \in F(x)\,$, tel que $u \leq \theta d(y,x)$ avec $u = d(y, F(y))$.*
Alors F a un point fixe dans X si et seulement si

$$\inf_{0<r} \inf_{x \in B(x_0,r)} \frac{(1-\theta)d(x,x_0) + d(x, F(x))}{(1-\theta)r} < 1 \tag{1.6}$$

Démonstration. On prend $x \in \Phi_F$ et $d(x, x_0) < r$ on a la condition 1.6 est necessaire.

On peut choisir $0 < r$ et $x_1 \in B(x_0, r)$ tel que

$$(1-\theta)d(x_1, x_0) + d(x_1, F(x_1)) < (1-\theta)r$$

on a :

$$d(x_1, F(x_1)) < (1-\theta)(r - d(x_1, x_0))$$

on applique le théorème 1.4 en remplaçant x_0 et r par x_1 et $r - d(x_1, x_0)$ on obtient F a un point fixe dans X. ■

Théorème 1.6 *Soient X un espace de Banach, $F : X \rightrightarrows X$ et $G : X \rightrightarrows X$ deux multifonctions à valeurs fermées, non vides. On suppose que F et G verifient :*
$\forall x \in X \cap B(x_0, r)\ \exists \theta \in [0,1)$ *et* $y \in F(x)$, *tel que* $u \leq \theta d(y, x)$

$\forall x \in X \cap B(x_0, r)\ \exists \theta' \in [0,1)$ *et* $y' \in G(x)$, *tel que* $u' \leq \theta' d(y', x)$ *et* $u_0 < (1 - \frac{(\theta+\theta')}{2})r$ *avec* $u = d(y, F(y))$, $u' = d(y', F(y'))$ *et* $u_0 = d(x_0, \frac{F+G}{2}(x_0))$.

Alors l'ensemble de points fixes $\Phi_{(F+G)/2} := \left\{ x \in X : x \in \frac{F+G}{2}(x) \right\}$ *de* $(F+G)/2$ *est non vide et*

$$d(x_0, \Phi_{(F+G)/2} \cap B(x_0, r_0)) \leq r.$$

Démonstration. Considérons $d(x_0, \frac{F+G}{2}(x_0)) < \beta$ et $\beta(1 - \frac{\theta+\theta'}{2})^{-1} < r$, on peut trouver $x_1 \in \frac{F+G}{2}(x_0)$ tel que $\|x_1 - x_0\| < \beta$ alors $x_1 \in B(x_0, r)$.

-Si $\theta + \theta' = 0$ on trouve $x_1 \in \frac{F+G}{2}(x_0) \cap B(x_0, r) \subset \frac{F+G}{2}(x_1)$ on prend la suite $x_n = x_1$ pour tout $n \geq 1$.

-Si $\theta + \theta' \neq 0$, on construit une suite finie $x_1, ..., x_n$ dans $B(x_0, r)$ verifie $x_i \in \frac{F+G}{2}(x_{i-1})$ et $\|x_i - x_{i-1}\| \leq \beta(\frac{\theta+\theta'}{2})^{i-1}$ pour tous $i = 1, 2, ..., n$.

Puisque $x_n \in \dfrac{F+G}{2}(x_{n-1}) \cap B(x_0, r)$ et pour tous $y_n \in F(x_n)$ et $y'_n \in G(x_n)$ on a

$$\begin{aligned} d(x_n, \frac{F+G}{2}(x_n)) &\leq \|x_n - \frac{y_n + y'_n}{2}\| \\ &\leq \frac{1}{2}(\|x_n - y_n\| + \|x_n - y'_n\|) \\ &\leq (\frac{\theta + \theta'}{2})\|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq (\frac{\theta + \theta'}{2})^n \beta \end{aligned}$$

aussi on peut trouver $x_{n+1} \in \dfrac{F+G}{2}(x_n)$ tel que $\|x_n - x_{n+1}\| \leq \beta(\dfrac{\theta+\theta'}{2})^n$ d'où

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n+1}\| &\leq \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i - x_{i-1}\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} (\frac{\theta + \theta'}{2})^{i-1} \beta \\ &< (1 - \frac{\theta + \theta'}{2})^{-1} \beta \end{aligned}$$

et $x_{n+1} \in B(x_0, r)$, on a définit une suite de cauchy (x_n) dans $B(x_0, r)$ si on prend $\overline{x}$ comme limite on a

$$\begin{aligned} \|\overline{x} - x_0\| &\leq \lim_{n \to \infty} \|x_{n+1} - x_0\| \\ &< (1 - \frac{\theta + \theta'}{2})^{-1} \beta \end{aligned}$$

ceci donne $\overline{x} \in B(x_0, r)$ et pour tous $\overline{f} \in F(\overline{x})$ et $\overline{g} \in G(\overline{x})$ on a

$$\begin{aligned} d(\overline{x},\frac{F+G}{2}(\overline{x})) &\leq \|\overline{x}-x_n\| + d(x_n,\frac{F+G}{2}(\overline{x}) \\ &\leq \|\overline{x}-x_n\| + \|x_n - \frac{\overline{f}+\overline{g}}{2}\| \\ &\leq \|\overline{x}-x_n\| + \frac{1}{2}(\|x_n-\overline{f}\| + \|x_n-\overline{g}\|) \\ &\leq \|\overline{x}-x_n\| + (\frac{\theta+\theta'}{2})\|x_{n-1}-\overline{x}\| \end{aligned}$$

on obtient alors $\overline{x} \in \frac{F+G}{2}(\overline{x})$. D'où $\overline{x} \in \Phi_{(F+G)/2}$ et $\|\overline{x}-x_0\| \leq \frac{\beta}{1-\frac{\theta+\theta'}{2}}$. ■

Théorème 1.7 *Soient X un espace de Banach, $F : X \rightrightarrows X$ et $G : X \rightrightarrows X$ deux multifonctions à valeurs fermées, non vides.On suppose que pour tous $r > 0$ et $x_0 \in X$, les deux multifonctions F et G vérifient :*
$\forall x \in X \cap B(x_0,r)$ $\exists \theta \in [0,1)$ et $y \in F(x)$, tel que $u \leq \theta d(y,x)$

$\forall x \in X \cap B(x_0,r)$ $\exists \theta' \in [0,1)$ et $y' \in G(x)$, tel que $u' \leq \theta' d(y',x)$ avec $u = d(y,F(y))$, $u' = d(y',F(y'))$. Alors $(F+G)/2$ a un point fixe dans X si et seulement si pour $x_0 \in X$

$$\inf_{r>0} \inf_{x\in B(x_0,r)} \frac{(1-\frac{\theta+\theta'}{2})\|x-x_0\| + d(x,\frac{F+G}{2}(x))}{r(1-\frac{\theta+\theta'}{2})} < 1 \qquad (1.7)$$

Démonstration. -On prend $x \in \Phi_{(F+G)/2}$ et $\|x-x_0\| < r$ on a la condition 1.7 est necessaire.

-On peut choisir $r > 0$ et $x_1 \in B(x_0,r)$ tel que

$$(1-\frac{\theta+\theta'}{2})\|x_1-x_0\| + d(x_1,\frac{F+G}{2}(x_1)) < r(1-\frac{\theta+\theta'}{2})$$

on a F et G sont pseudo-θ contractante et pseudo-θ'contractante respectivement relativement à une boule ouverte $B(x_1, r - \|x_1 - x_0\|)$

$$d(x_1, \frac{F+G}{2}(x_1)) < (r - \|x_1 - x_0\|)(1 - \frac{\theta + \theta'}{2})$$

on applique le théorème 1.7 en remplaçant x_0 et r par x_1 et $r - \|x_1 - x_0\|$) on trouve $(F+G)/2$ a un point fixe dans X. ■

Chapitre 2

Existence de point fixe pour les multifonctions asymptotiquement contractives

Nous donnons un théorème d'existence de point fixe pour une multifonction de type $(F+G)/2$ où F et G sont non-dilatantes et satisfont une certaine condition de contraction asymptotique. Des résultats antérieurs seront alors une conséquence immédiate. Nous étudions des théorèmes de points fixes pour des multifonctions non-dilatantes verifient certaines conditions asymptotiques. Cette étude a été le sujet de nombreux travaux ([23], [41], [52], [72], [73], [75])pour une fonction asymptotiquement contractive.

1 Point fixe pour les fonctions asymptotiquement contractives

On commence par le résultat suivant sur les fonctions asymptotiquement contractives

Théorème 2.1 *Soient X un espace de Banach réflexif et C un sous-ensemble convexe fermé non vide. Soient $f, g : C \to C$ deux fonctions non-dilatantes telles que $I - \dfrac{f+g}{2}$ soit demi-fermé. On suppose que pour* *un certain $x_0 \in C$*

$$\lim_{x\in C, \|x\|\to\infty} \sup\left(\frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|} + \frac{\|g(x)-g(x_0)\|}{\|x-x_0\|}\right) < 1. \tag{2.1}$$

Alors la fonction $h := \dfrac{f+g}{2}$ admet un point fixe dans C.

Démonstration. Considérons une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(0,1)$ avec $t_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$. Définissons la fonction $\phi_n : x \in C \to \phi_n(x) := t_n(\frac{f+g}{2})(x) + (1-t_n)x_0$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Comme f et g sont à valeurs dans C qui est convexe alors $\phi_n(C) \subset C$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. D'autre part, les fonctions étant non-dilatantes alors

$$\|\phi_n(x) - \phi_n(x')\| \leq t_n\|x - x'\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi les fonctions ϕ_n sont t_n-contractantes de C dans C. Le théorème de Picard-Banach assure que chaque ϕ_n admet un unique point fixe $x_n \in C$. Remarquons que si la suite (x_n) est bornée dans un espace de Banach réflexif, elle admet une sous-suite (x_n) convergente faiblement vers un point $\bar{x}$. Comme C est convexe fermé donc faiblement fermé et on aura $\bar{x} \in C$. On conclut d'après l'hypothèse de fermeture que $0 \in (I - (f+g)/2)(\bar{x})$ i.e. $(\frac{f+g}{2})(\bar{x}) = \bar{x}$.

Pour finir la démonstration, il suffit de montrer que (x_n) est bornée. Supposons le contraire, il existe alors une sous-suite, notée (x_n) telle que $\|x_n\| \longrightarrow \infty$. D'après la condition (2.1), il existe $\alpha \in (0,1)$ et $\rho > 0$ tels que pour tout $x \in C$ vérifiant $\|x\| \geq \rho$ on a

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \alpha\|x - x_0\| \text{ et } \|g(x) - g(x_0)\| \leq \alpha\|x - x_0\|.$$

D'où, comme, pour n assez grand, $\|x_n\| \geq \rho$, on a

$$\begin{aligned}\|x_n\| &= \|\phi_n(x_n)\| \\ &\leq \frac{t_n}{2}(\|f(x_n) - f(x_0)\| + \|f(x_0)\| + \|g(x_n) - g(x_0)\| + \|g(x_0)\|) + (1-t_n)\|x_0\| \quad (2.2) \\ &\leq \frac{t_n}{2}((2\alpha)\|x_n - x_0\| + \|f(x_0)\| + \|g(x_0)\|) + (1-t_n)\|x_0\|.\end{aligned}$$

Divisant par $\|x_n\|$, il vient

$$1 \le t_n(\alpha \frac{\|x_n - x_0\|}{\|x_n\|} + \frac{\|f(x_0)\| + \|g(x_0)\|}{\|x_n\|}) + (1 - t_n)\frac{\|x_0\|}{\|x_n\|}$$
$$1 \le t_n(\alpha(1 + \frac{\|x_0\|}{\|x_n\|}) + \frac{\|f(x_0)\| + \|g(x_0)\|}{\|x_n\|}) + (1 - t_n)\frac{\|x_0\|}{\|x_n\|}.$$

En passant à la limite, on en déduit que $\alpha \ge 1$ d'où la contradiction. La démonstration est donc achevée. ■

Corollaire 2.1 *[75] Sous les mêmes hypothèses et avec $g = f$, la fonction f admet au moins un point fixe dans C.*

2 Point fixe pour les multifonctions asymptotiquement contractives

Notre but ici est d'obtenir une certain généraisation en utilisant la notion (semi$-$) de multifonctions asymptotiquement contractives que introduits au dessous . Pour commencer, on donne certaines notations et conventions sur un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$, l'ouverture la boule avec le centre x et le rayon r dans X est notée par $B(x, r)$; la boule d'unité fermée est notée par $\overline{B}_X$. pour tous les sous-ensembles C, D sous-ensembles$X$, on définissons

$$\begin{aligned}
&d(x, D) = \inf_{y \in D} \|x - y\| \qquad \text{avec le convention } \inf_{\varnothing} = +\infty,\\
&e(C, D) = \sup_{x \in C} d(x, D) \ \text{ if } C \neq \varnothing,\ e(\varnothing, D) = 0,\\
&d(C, D) = \max(e(C, D), e(D, C)).
\end{aligned}$$

On rappele qu'une multifonction $F : C \to 2^X$ est *contractante* (resp. multifonction non-dilatante) dans $C \subset X$ s'il existe $\theta \in [0, 1)$ tel que pour tout $x, x' \in C$, on a

$$F(x) \subset F(x') + \theta \|x - x'\| \overline{B}_X, \tag{2.3}$$

$$\text{(resp. } F(x) \subset F(x') + \|x - x'\| \overline{B}_X).$$

notons que lorsque $F(x) := \{f(x)\}$, où $f : C \to X$ est une fonction , F est une fonction contractante avec un taux θ (resp. non-dilatantes) sur C si et seulement si f est une fonction contractante avec un taux θ (resp. non-dilatantes) fonction sur C : pour tous $x, x' \in C$

$$\|f(x) - f(x')\| \leq \theta \|x - x'\|$$
$$(\text{resp. } \|f(x) - f(x')\| \leq \|x - x'\|)$$

Le théorème d'existence de points fixes pour la multifonction contractive est bien connu (voir [66]).Plus généralement, une généralisation de théorème de Picard-Banach sur les multifonctionss pseudo-contractives est donné dans ([17], [31], [45, Lemme 1], [74, Prop. 2.5]). Rappelons ce résultat :

Proposition 2.1 *([17], [45], [74]) Soient (X, d) un espace métrique complet et $F : X \to 2^X$ une multifonction avec valeurs non vides et fermés. Supposons que F est pseudo-θ-contractive par rapport à une boule $B(x_0, r_0)$ pour quelque $\theta \in [0, 1)$ (i.e. $e(F(x) \cap B(x_0, r_0), F(x')) \leq \theta d(x, x')$ pour $x, x' \in B(x_0, r_0)$) et $r := (1-\theta)^{-1} d(x_0, F(x_0)) < r_0$. Alos l'ensemble des points fixes est défini sur $\mathrm{Fix}F := \{x \in X : x \in F(x)\}$ de F est non vide et*

$$d(x_0, \mathrm{Fix}F \cap B(x_0, r_0)) \leq r. \tag{2.4}$$

Dans ce paragraphe, la réflexivité des espaces de Banach et la propriété de la demi-fermeture des multifonctions jouent un rôle important pour avoir un résultat de points fixes . Rappelons que $F : C \to 2^X$ est dite *demi-fermé* si son graphe $\mathrm{Gr}(F)$ est fermé séquentiellement dans le produit de la topologie faible sur C avec la topologie de la norme sur un espace de Banach X i.e.

$$((x_n, y_n))_n \subset \mathrm{Gr}(F),\ (x_n) \rightharpoonup x,\ (y_n) \to y \implies x \in C,\ y \in F(x)$$

où $\mathrm{Gr}(F) := \{(x, y) \in C \times X : y \in F(x)\}$.

Il est bien connu que si $f : C \to X$ est non-dilatante sur C a un sous-ensemble fermé convexe d'un espace de Banach uniformément convexe

X, alors $I - f$ est demi-fermé ([75], [98, Proposition 10.9 p. 476]), où un l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ est uniformément convexe si et seulement si tout $\varepsilon \in]0,2]$ il existe $\delta(\varepsilon) \in]0,1]$ tel que pour tout x, $y \in X$, $r > 0$, on a

$$[\|x\| \leq r, \ \ \|y\| \leq r, \ \ \|x - y\| \geq \varepsilon r] \Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq (1 - \delta(\varepsilon))r.$$

Par exemple, chaque espace de Hilbert est uniformément convexe, les espaces l_p et $L_p(\Omega)$ sont uniformément convexes pour $1 < p < \infty$ (Ω est un domaine dans $\mathbb{R}^n$) ce qui n'est pas le cas pour $p \in \{1, \infty\}$. Il est également bien connu que chaque espace de Banach uniformément convexe est réflxif ([98, Proposition 10.7]).

La définition suivante généralise la notion des fonctions asymptotiquement contractives a valeurs définies. notons que la signification du mot“asymptotique” n'est pas lié aux iterations de la multifonction comme dans [51] mais porte sur le comportement de la correspondes définie à l'infini . Ce comportement peut être étudié en utilisant notions de cônes asymptotiques et de compacité asymptotique, comme dans [9], [27], [57], [58], [59], [77].

Définition 2.1 *Soient C un sous-ensemble d'un espace de Banach X et $F : C \to 2^X$ une multifonction avec des valeurs non vides. On dit que F est asymptotiquement contractive sur C s'il existe $x_0 \in C$ tel que*

$$\limsup_{x \in C, \ \|x\| \to \infty} \frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|} < 1. \tag{2.5}$$

Notons que lorsque $F(x) := \{f(x)\}$, où $f : C \to X$ est une fonction, on obtient la définition des fonctions asymptotiquement contractives sur C donné dans [75] en tant que variante de la notion introduite dans [58].

Si $e(F(x), F(x')) < \infty$ pour tout $x, x' \in C$ (particulièrement , si F est une multifonction avec des valeurs bornées) alors la condition (2.5) est indépendante du choix de $x_0 \in C$. En effet, soit $x_1 \in C$ $(x_1 \neq x_0)$.

Depuis $e(F(x), F(x_1)) \leq e(F(x), F(x_0)) + e(F(x_0), F(x_1))$, nous avons

$$\frac{e(F(x), F(x_1))}{\|x - x_1\|} \leq \left(\frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|} + \frac{e(F(x_0), F(x_1))}{\|x - x_0\|}\right)\frac{\|x - x_0\|}{\|x - x_1\|},$$

et

$$\limsup_{x \in C,\ \|x\| \to \infty} \frac{e(F(x), F(x_1))}{\|x - x_1\|} \leq \limsup_{x \in C,\ \|x\| \to \infty} \frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|} < 1.$$

La proposition 2.2 est une version à plusieurs valeurs du résultat principal de [75].

Proposition 2.2 *Soient X un espace de Banach réflexif et C un sous-ensemble non vide convexe fermé de X. Soit $F : C \to 2^X$ une multifonction avec valeurs fermées et non vides telles que F est non-dilatantes sur C. Supposons que F est asymptotiquement contractive sur C à x_0 avec $F(x_0)$ borné. Si $F(C) \subset C$ et $I - F$ sont demi-fermés, alors F admet un point fixe.*

Démonstration. Soit (θ_n) une suite dans $(0, 1)$ tel que $\theta_n \to 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous définissons une multifonction $F_n : C \rightrightarrows X$ par

$$F_n(x) := \theta_n F(x) + (1 - \theta_n)x_0. \tag{2.6}$$

Il est clair que $F_n(x) \subset C$ pour tout n et $x \in C$. D'autre part, pour $x, x' \in C$ et $v_n \in F_n(x)$, de (2.6), il existe $u_n \in F(x)$ tel que $v_n = \theta_n u_n + (1 - \theta_n)x_0$. On applique (2.3), puisque F est non-dilatantes alors il existe $u'_n \in F(x')$ satisfaisant $\|u_n - u'_n\| \leq \|x - x'\|$. Ainsi, pour $v'_n = \theta_n u'_n + (1 - \theta_n)x_0 \in F_n(x')$, on a

$$\|v_n - v'_n\| \leq \theta_n \|x - x'\|.$$

Alors F_n est une contraction avec le taux θ_n sur C. le théorème de Nadler [66] garantit que chaque F_n à valeurs multiples admet une valeur fixe point x_n en C. Donc, à partir de (2.6) et pour certains $y_n \in F(x_n)$, on a

$$y_n - x_0 = \theta_n^{-1}(x_n - x_0), \tag{2.7}$$

$$(1-\theta_n)(x_0 - y_n) = x_n - y_n \in (I-F)(x_n). \tag{2.8}$$

notons que si la suite (x_n) a une sous-suite bornée, la démonstration est finie. En effet , on pend une sous-suite si nécessaire, (x_n) admet une limite faible $\bar{x} \in C$ (C est fermé , convexe dans l'espace réflexif X). Comme (y_n) est borné (par égalité (2.9)), une suite $(x_n - y_n)$ converge vers 0. Nous concluons que $0 \in (I-F)(\bar{x})$,i.e. $\bar{x}$ est un point fixe de F.

Ainsi, pour compléter la démonstration de la proposition, montrons que la suite (x_n) est bornée . Si ce n'est pas le cas, on prend une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que $(\|x_n\|) \to \infty$. Lorsque la condition (2.5) est satisfaite, il existe $c \in (0,1)$ et $\rho > 0$ tel que

$$\forall x \in C, \|x\| \geq \rho : e(F(x), F(x_0)) < c\,\|x - x_0\|\,.$$

Pour n, on a $\theta_n > c$ et $\|x_n\| \geq \rho$, alors

$$d(y_n, F(x_0)) < c\,\|x_n - x_0\|\,.$$

Il existe alors une suite (z_n) dans $F(x_0)$ telle que

$$\|y_n - z_n\| \leq c\,\|x_n - x_0\|\,.$$

Par contre, à partir des égalités (2.9) et (2.8), on obtient

$$\begin{aligned}
\|x_n\| &\leq \|x_n - y_n\| + \|y_n - z_n\| + \|z_n\|\,, \\
&\leq (1-\theta_n)\,\|x_0 - y_n\| + c\,\|x_n - x_0\| + \|z_n\|\,, \\
&\leq ((1-\theta_n)\theta_n^{-1} + c)\,\|x_n - x_0\| + \|z_n\|\,.
\end{aligned}$$

En divisant par $\|x_n\|$ on obtient

$$1 \leq (\theta_n^{-1} - 1 + c)(1 + \frac{\|x_0\|}{\|x_n\|}) + \frac{\|z_n\|}{\|x_n\|}.$$

Si $(\|x_n\|) \to \infty$ et $\theta_n \to 1$, on obtient une contradiction, alors la suite (x_n) a une sous-suite bornée et la proposition est prouvée . ∎

Remarque 2.1 *Si $e(F(x_0), F(x)) < \infty$ pour tout $x \in C$ (en particulier, si $F(x_0)$ est compact) alors la condition (2.5) est indépendante du choix $x_0 \in C$: en effet, soit $x_1 \in C$ ($x_1 \neq x_0$). Comme*

$$\begin{aligned}\frac{e(F(x), F(x_1))}{\|x - x_1\|} &\leq \left(\frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|} + \frac{e(F(x_0), F(x_1))}{\|x - x_0\|}\right)\frac{\|x - x_0\|}{\|x - x_1\|} \\ &\leq \left(\frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|} + \frac{e(F(x_0), F(x_1))}{\|x - x_0\|}\right)\left(1 + \frac{\|x_1 - x_0\|}{\|x - x_1\|}\right),\end{aligned}$$

alors

$$\limsup_{x \in C \|x\| \to \infty} \frac{e(F(x), F(x_1))}{\|x - x_1\|} \leq \limsup_{x \in C \|x\| \to \infty} \frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|} < 1.$$

D'autre part, lorsque F est univoque i.e. $F(x) := \{f(x)\}$ avec $f : C \to X$, on retrouve la définition d'une fonction asymptotiquement-contractive sur C donnée par Penot [75].

Rappelons qu'une multifonction $F : C \rightrightarrows X$ est non-dilatante si pour tous $x, x' \in C$, on a

$$F(x) \subset F(x') + \|x - x'\| \, B_X, \tag{2.9}$$

Et où B_X est la boule unité fermée dans X et F est demi-fermée si son graphe $\mathrm{Gr}(F) := \{(x, y) \in C \times X : y \in F(x)\}$ est séquentiellement fermé dans l'espace produit $C \times X$ muni de la topologie faible dans C et de la topologie de la norme dans X, i.e.

$$((x_n, y_n))_n \subset \mathrm{Gr}(F), x_n \rightharpoonup x \text{ et } y_n \to y \implies x \in C \text{ et } y \in F(x).$$

Théorème 2.2 *Soient X un espace de Banach réflexif et C un sous-ensemble convexe fermé non vide. Soient $F : C \rightrightarrows 2^X$ et $G : C \rightrightarrows 2^X$ deux multifonctions non-dilatantes à valeurs fermées non vides telles que $F(C) \subset C$, $G(C) \subset C$ et $I - \dfrac{F + G}{2}$ soit demi-fermé. On suppose qu'il* *existe $x_0 \in C$ tel que $F(x_0)$, $G(x_0)$ soient bornés et*

$$\lim_{x\in C, \|x\|\to\infty} \sup\left(\frac{e(F(x),F(x_0))}{\|x-x_0\|} + \frac{e(G(x),G(x_0))}{\|x-x_0\|}\right) < 1. \tag{2.10}$$

Alors $H := \dfrac{F+G}{2}$ admet un point fixe dans C.

Démonstration. Procédons comme dans le théorème (2.1). Considérons une suite (θ_n) dans $(0,1)$ avec $\theta_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$. Définissons la fonction $\Phi_n : x \in C \rightrightarrows \Phi_n(x) := \dfrac{\theta_n}{2}(F+G)(x) + (1-\theta_n)x_0$ pour tout entier n. Comme C est convexe, $\Phi_n(C) \subset C$ $\forall n \in \mathbb{N}$. De plus, comme F et G sont non-dilatantes alors, pour tous $x, x' \in C$,

$$e(F(x),F(x')) \leq \|x-x'\| \text{ et } e(G(x),G(x')) \leq \|x-x'\|$$

Φ_n est donc θ_n-contractante. En effet, il suffit de montrer que

$$e(\Phi_n(x),\Phi_n(x')) \leq \theta_n\|x-x'\| \ \forall x, x' \in C.$$

Soient $x, x' \in C$ et $w_n \in \Phi_n(x)$. Il va alors exixter $u_n \in F(x)$ et $v_n \in G(x)$ tels que $w_n = \dfrac{\theta_n}{2}(u_n+v_n) + (1-\theta_n)x_0$. Donc, d'après les propriétés de la fonction $x \to d(x,A) := \inf\limits_{a\in A}\|x-a\|$, on a

$$\begin{aligned}
d(w_n,\Phi_n(x')) &= d\left(\frac{\theta_n}{2}(u_n+v_n)+(1-\theta_n)x_0, \frac{\theta_n}{2}(F+G)(x')+(1-\theta_n)x_0\right)\\
&= d\left(\frac{\theta_n}{2}(u_n+v_n), \frac{\theta_n}{2}(F+G)(x')\right)\\
&= \frac{\theta_n}{2} d(u_n+v_n,(F+G)(x'))\\
&\leq \frac{\theta_n}{2}(d(u_n,F(x'))+d(v_n,G(x')))\\
&\leq \frac{\theta_n}{2}(e(F(x),F(x'))+e(G(x),G(x')))\\
&\leq \theta_n\|x-x'\|.
\end{aligned}$$

On conclut, en prenant le supremum sur $\Phi_n(x)$, que
$e(\Phi_n(x),\Phi_n(x')) \leq \theta_n\|x-x'\|$ et par symétrie que Φ_n est donc θ_n-contractante ($\forall n \in \mathbb{N}$). Le théorème de Nadler [66] assure que, pour tout

n, il existe $x_n \in C$ tel que $x_n \in \Phi_n(x_n)$. Donc $x_n = \theta_n z_n + (1-\theta_n)x_0$ avec $z_n := \dfrac{y_n + y'_n}{2}$, $y_n \in F(x_n)$ et $y'_n \in G(x_n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Remarquons que si la suite (x_n) est bornée dans X étant réflexif, il existerait une sous-suite notée aussi (x_n) convergente faiblement vers un point $\bar{x} \in C$ (C convexe fermé). Comme $z_n = x_0 + \theta_n^{-1}(x_n - x_0)$, la suite (z_n) est bornée et donc $x_n - z_n = (1-\theta_n)(x_0 - z_n) \to 0$ avec $(x_n - z_n) \in (I - \dfrac{F+G}{2})(x_n)$. On en déduit que $0 \in (I - \dfrac{F+G}{2})(\bar{x})$ i.e. $\bar{x}$ est un point fixe de la multifonction $\dfrac{F+G}{2}$. Il reste à montrer que (x_n) est bornée. Supposons le contraire, il existe alors une sous-suite notée par x_n telle que $\|x_n\| \longrightarrow \infty$. En utilisant la condition (2.12), il existe $c \in (0,1)$ tel que pour n assez grand

$$d(y_n, F(x_0)) \leq c\|x_n - x_0\| \text{ et } d(y'_n, G(x_0)) \leq c\|x_n - x_0\|.$$

Et donc il va exister $u_n \in F(x_0)$ et $v_n \in G(x_0)$ tels que

$$\begin{aligned}\|y_n - u_n\| &\leq c\|x_n - x_0\| \\ \|y'_n - v_n\| &\leq c\|x_n - x_0\|.\end{aligned}$$

D'autre part, les sous-ensembles $F(x_0)$ et $G(x_0)$ sont bornés donc les suites (u_n) et (v_n) le sont aussi. Et comme on a les inégalités :

$$\begin{aligned}\|x_n\| &= \|\frac{\theta_n}{2}y_n + \frac{\theta_n}{2}y'_n + (1-\theta_n)x_0\| \\ &\leq \frac{\theta_n}{2}\|y_n - u_n\| + \frac{\theta_n}{2}\|y'_n - v_n\| + \frac{\theta_n}{2}\|u_n\| + \frac{\theta_n}{2}\|v_n\| + (1-\theta_n)\|x_0\| \\ &\leq c\theta_n\|x_n - x_0\| + \frac{\theta_n}{2}\|u_n\| + \frac{\theta_n}{2}\|v_n\| + (1-\theta_n)\|x_0\| \\ 1 &\leq \theta_n(c\frac{\|x_n - x_0\|}{\|x_n\|} + \frac{\|u_n\| + \|v_n\|}{2\|x_n\|}) + (1-\theta_n)\frac{\|x_0\|}{\|x_n\|}\end{aligned}$$

il vient, par passage à la limite, que $c \geq 1$ et la contradiction s'en suit. ■

Autre technique pour montrer que Φ_n est une contraction On prend $x, x' \in C$ et $w_n \in \Phi_n(x)$ alors ils existent $u_n \in F(x)$ et $v_n \in G(x)$ tels que $w_n = \dfrac{\theta_n}{2}(u_n + v_n) + (1-\theta_n)x_0$. Comme

$$F(x) \subset F(x') + \|x - x'\|B_X \quad \text{et} \quad G(x) \subset G(x') + \|x - x'\|B_X,$$

il existe $u'_n \in F(x')$ et $v'_n \in G(x')$ vérifiant $\|u_n - u'_n\| \leq \|x - x'\|$ et $\|v_n - v'_n\| \leq \|x - x'\|$. Posons alors $w'_n := \dfrac{\theta_n}{2}(u'_n + v'_n) + (1-\theta_n)x_0 \in \Phi_n(x')$ et de plus $\|w_n - w'_n\| \leq \dfrac{\theta_n}{2}\|u_n - u'_n\| + \dfrac{\theta_n}{2}\|v_n - v'_n\| \leq \theta_n\|x - x'\|$. On a donc montrer que pour tous $x, x' \in C$ et $w_n \in \Phi_n(x)$ il existe $w'_n \in \Phi_n(x')$ tel que $\|w_n - w'_n\| \leq \theta_n\|x - x'\|$ i.e. on a

$$\Phi_n(x) \subset \Phi_n(x') + \theta_n\|x - x'\|B_X \qquad \forall x, x' \in C.$$

D'où la contraction de chaque Φ_n.

Une première conséquence peut-être donnée par le corollaire suivant assure l'exsitence de points fixes pour une multifonction nondilatente et asymptotiquement contractive. Notons que le corollaire ci-dessous est semblable à un résultat obtenu dans [66].

Corollaire 2.2 *Sous les mêmes hypothèses et avec $G = F$, F admet au moins un point fixe.*

Une seconde conséquence est donnée par :

Corollaire 2.3 *Soit C une partie convexe fermé et non vide dans X un espace de Banach réflexif. Soient $f, g : C \to C$ deux fonctions non-dilatantes telles que $I - \dfrac{f+g}{2}$ soit demi-fermé. On suppose que pour un certain $x_0 \in C$*

$$\lim_{x \in C, \|x\| \to \infty} \sup\left(\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\|g(x) - g(x_0)\|}{\|x - x_0\|}\right) < 1. \tag{2.11}$$

Alors la fonction $h := \dfrac{f+g}{2}$ admet un point fixe dans C.

Démonstration. Il suffit de considérer F et G définies par $F(x) := \{f(x)\}$ et $G(x) := \{g(x)\}$ pour tout $x \in C$. ∎

Les résultats précédents peuvent être appliqués aux propriétés de coïncidence entre deux multifonctions. Donnons dabord la définition suivante.

Définition 2.2 *Soient X un ensemble et Y un espace linéaire et $F, G : X \to 2^Y$ deux multifonctions . Nous disons que F et G présentent une coïncidence X s'il existe $u \in X$ tel que*

$$0 \in (F - G)(u).$$

Le point u est appelé un point de coïncidence de F et G.

notons que si $Y = X$ et $G(x) := \{x\}$ pour tout $x \in X$, on obtient la définition d'un point fixe du multifonction F. On a aussi que la relation $0 \in (F - G)(u)$ peut s'écrire $F(u) \cap G(u) \neq \varnothing$, pour que deux fonctions $f, g : X \to Y$ présentent un coïncidence sur X S'il existe $u \in X$ tel que $f(u) = g(u)$.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate donne l'existence d'un point fixe d'une somme (resp. un point de coïncidence de deux multifonctions).

Corollaire 2.4 *Soit C un cône convexe fermé non vide d'un espace réflexif de Banach X. Soit $\theta \in (0, 1)$, $F : C \to 2^C$ une multifonction $\theta-$contraction (resp. $G : C \to 2^C$ une multifonction $(1-\theta)-$contraction) sur C avec des valeurs fermées et non vides. Supposons que $I - (F + G)$ est demi-dermé et il existe $x_0 \in C$ tel que $F(x_0)$, $G(x_0)$ sont bornés et on a*

$$\lim_{x \in C,\ \|x\| \to \infty} \sup \left(\frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|} + \frac{e(G(x), G(x_0))}{\|x - x_0\|} \right) < 1. \tag{2.12}$$

Alors la multifonction $H := F + G$ admet un point fixe sur C qui est un point de coïncidence de $(I - F)$ et G.

Démonstration. Puisque pour tous les sous-ensembles A, A', B, B' de X on a

$$e(A + B, A' + B') \leq e(A, A') + e(B, B'), \tag{2.13}$$

La multifonction H est non-dilatante et

$$\limsup_{x \in C,\ \|x\| \to \infty} \frac{e(H(x), H(x_0))}{\|x - x_0\|} < 1.$$

Puisque C est le cône convexe, $H(C)$ est contenu dans C, le résultat s'en suit du proposition 2.2. ■

notons que si $\bar{x}$ est un point fixe de H tel que $F(\bar{x}) = G(\bar{x})$ et si $F(\bar{x})$ est un cône convexe, alors $\bar{x}$ est un point fixe commun de F et G.

Corollaire 2.5 *Soit C un cône convexe fermé non vide d'un espace uniformément convexe de Banach X. Soit $\theta \in (0,1)$, $f : C \to C$ est une $\theta-$contraction (resp. $g : C \to C$ soit une multifonction $(1-\theta)-$contraction) sur C. Supposons que*

$$\lim_{x \in C, \|x\| \to \infty} \sup \left(\frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} + \frac{\|g(x) - g(x_0)\|}{\|x - x_0\|} \right) < 1.$$

Alors la multifonction $f + g$ admet un point fixe sur C qui est un point de coïncidence de $(I - f)$ et g.

La notion de valeur propre est très importante dans l'analyse non linéaire, elle a beaucoup d'applications en tant que notion de point fixe . Nous présentons maintenant quelques résultats liés aux valeurs propres. On obtient notamment un résultat d'existence pour les valeurs propres des fonctions non-dilatantes.

Nous rappelons qu'un nombre réel λ est dit une valeur propre pour une multifonctions $F : C \to 2^X$ s'il existe un élément $\overline{x} \in C$, $\overline{x} \neq 0$ tel que $\lambda\overline{x} \in F(\overline{x})$, quand $F(x) := \{f(x)\}$, où $f : C \to X$ est une fonction, on obtient la définition habituelle d'une valeur propre pour une fonction.

La proposition suivante donne un résultat d'existence.

Proposition 2.3 *Soit C un cône convexe fermé d'un espace réflexif de Banach X. Soit $\lambda > 1$ et soit $F : C \to 2^C$ une multifonction non-dilatante sur C avec des valeurs non vides et fermés et $0 \notin F(0)$. Supposons que $I - \lambda^{-1}F$ est demi-fermé et qu'il existe $x_0 \in C$ tel que $F(x_0)$*

est borné et on a

$$\lim_{x\in C, \|x\|\to\infty} \sup \frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|} < 1.$$

Alors λ est une valeur propre pour F associé à un vecteur propre $\overline{x} \in C$. et si $F(\overline{x})$ est un cône alors $\overline{x}$ est un point fixe de F.

Démonstration. On prend $H := \theta I + \lambda^{-1}(1-\theta)F$ avec $\theta \in (0,1)$, on a $H(C) \subset C$ (C un cône convexe), $H(x_0)$ borné et $I - H = (1-\theta)(I - \lambda^{-1}F)$ pour que $I - H$ est demi-fermé. De plus, en utilisant l'inégalité (2.13), on a

$$\frac{e(H(x), H(x_0))}{\|x - x_0\|} \leq \theta + \lambda^{-1}(1-\theta)\frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|},$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\in C, \|x\|\to\infty} \sup \frac{e(H(x), H(x_0))}{\|x - x_0\|} &\leq \theta + \lambda^{-1}(1-\theta) \lim_{x\in C, \|x\|\to\infty} \sup \frac{e(F(x), F(x_0))}{\|x - x_0\|} \\ &< \theta + \lambda^{-1}(1-\theta) < \theta + (1-\theta) = 1.\end{aligned}$$

Donc, il existe un point fixe $\overline{x}$ de $\theta I + \lambda^{-1}(1-\theta)F$ i.e., on a

$$\begin{aligned}\overline{x} &\in \theta\overline{x} + \lambda^{-1}(1-\theta)F(\overline{x}), \\ (1-\theta)\overline{x} &\in \lambda^{-1}(1-\theta)F(\overline{x}), \\ \overline{x} &\in \lambda^{-1}F(\overline{x}),\end{aligned} \tag{2.14}$$

Pour que $\lambda\overline{x} \in F(\overline{x})$ et $\overline{x} \neq 0$ ($0 \notin F(0)$). Remarquons que si $F(\overline{x})$ est un cône, on a donc $\overline{x} \in \lambda^{-1}F(\overline{x}) \subset F(\overline{x})$, i.e., $\overline{x}$ est un point fixe de F. ■

Corollaire 2.6 *Soit C un cône convexe fermé d'un espace de Banach uniformément convexe X. Soient $\lambda > 1$ et $f : C \to C$ une fonction non-dilatantes sur C telle que $f(0) \neq 0$. Supposons qu'il existe $x_0 \in C$ tel que*

$$\lim_{x\in C, \|x\|\to\infty} \sup \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|} < 1.$$

Alors λ est une valeur propre sur F associée à un vecteur propre $\overline{x} \in C$.

3 Condition contractive asymptotique par rapport au produit sous-interne

Dans cette section, nous présentons quelques résultats de points fixes pour des fonctions multiples sous une autre condition asymptotique. Cette étude s'inspire du travail [46]. Pour cet objectif, introduisons quelques définitions. Rappelons qu'un produit sous-interne sur un espace vectoriel X est une fonction $[\cdot,\cdot] : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétées suivantes pour tous $x, y, z \in X$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$[x+y, z] = [x, z] + [y, z], \tag{2.15}$$

$$[\lambda x, y] = \lambda[x, y] \tag{2.16}$$

$$[x, x] > 0 \quad \text{for} \quad x \neq 0, \tag{2.17}$$

$$|[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y]. \tag{2.18}$$

Il est prouvé dans [40] et [60] qu'un espace sous-interne produit est un espace linéaire normé avec la norme $\|x\|_s := [x, x]^{1/2}$ et chaque espace de Banach peut être dote de différente produits sous-interne sauf pour les espaces de Hilbert où $[\cdot,\cdot]$ est produit interne. On dit que le produit sous-interne sur un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ est compatible avec la norme $\|\cdot\|$ si $[x, x] = \|x\|^2$. Introduisons la définition suivante des multifonctions asymptotiquement contractives en ce qui concerne un produit sous-interne $[\cdot,\cdot]$ sur un espace de Banach X.

Définition 2.3 *Soit C un sousensemble d'un espace de Banach X et soit $F : C \to 2^X$ une multifonction avec des valeurs non vides. On dit que F est asymptotiquement contractive sur C s'il existe $(x_0, y_0) \in \mathrm{Gr}F$ tel que*

$$\limsup_{x \in C,\ \|x\| \to \infty} \sup_{y \in F(x)} \frac{[y - y_0, x - x_0]}{\|x - x_0\|^2} < 1. \tag{2.19}$$

notons que quand $F(x) := \{f(x)\}$, où $f : C \to X$ est une fonction, on a la définition de la fonction contractive asymptotique sur C comme variante de la notion introduite dans [46]. En effet, la condition (2.19) devient dans ce cas comme suit : il existe $(x_0, y_0) \in \mathrm{Gr}F$ de sorte que

$$\limsup_{x\in C,\ \|x\|\to\infty} \frac{[f(x)-y_0, x-x_0]}{\|x-x_0\|^2} < 1.$$

Observons que si X est un espace de Hilbert avec de produit scalaire noté $(\cdot \mid \cdot)_X$, l'inégalité ci-dessus est alors écrit

$$\limsup_{x\in C,\ \|x\|\to\infty} \frac{(f(x)-y_0 \mid x-x_0)_X}{\|x-x_0\|^2} < 1, \tag{2.20}$$

et la fonction $f : C \to X$ est dite scalairement asymptotiquement contractive sur C si (2.20) est satisfait pour certains $(x_0, y_0) \in \mathrm{Gr}F$.

Dans la suite, nous ne considérons que les espaces sur produits sous-interne de Banach $(X, \|\cdot\|)$ qui sont compatibles avec la norme $\|\cdot\|$. Le prochain théorème est une version du résultat principal [46, Th. 3.2] sur les multifonctions.

Théorème 2.3 *Soient X un espace de Banach réflexif et C un sous-ensemble non vide convexe fermé de X. Soit $F : C \to 2^X$ une multifonction non-dilatante sur C avec des valeurs fermées et non vide. Supposons que F est asymptotiquement contractive sur C si $F(C) \subset C$ et $I-F$ est demi fermé alors F admet un point fixe sur C.*

Démonstration. Soit $(x_0, y_0) \in \mathrm{Gr}F$ tel que (2.19) est satisfait et soit (θ_n) une suite dans $(0,1)$ tel que $\theta_n \to 1$. pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous définissons la multifonction $F_n : C \rightrightarrows X$ en mettant

$$F_n(x) := \theta_n F(x) + (1-\theta_n)y_0. \tag{2.21}$$

Il est clair que $F_n(x) \subset C$ pour tout n et $x \in C$. On a pour $x, x' \in C$ et $v_n \in F_n(x)$, de (2.21), il existe $u_n \in F(x)$ tel que $v_n = \theta_n u_n + (1-\theta_n)y_0$. Appliquons (2.3) or F est non-dilatante et $F(x')$ est fermé, convexe dans l'espace réflexif X, il existe $u'_n \in F(x')$ satisfaisant $\|u_n - u'_n\| \le \|x - x'\|$.

Ainsi, pour $v'_n = \theta_n u'_n + (1-\theta_n)y_0 \in F_n(x')$, on a

$$\|v_n - v'_n\| \leq \theta_n \|x - x'\| .$$

Alors F_n est une contraction avec le taux θ_n sur C. Le théoréme de Nadler [66] assure que chaque multifonction F_n admette un point fixe x_n dans C. Donc, à partir de (2.21) et pour certains $y_n \in F(x_n)$, un a

$$y_n - y_0 = \theta_n^{-1}(x_n - y_0), \tag{2.22}$$

$$(1-\theta_n)(y_0 - y_n) = x_n - y_n \in (I - F)(x_n). \tag{2.23}$$

Comme dans la Proposition 2.2, il suffit de montrer que (x_n) est borné . Supposons le contraire , on prend une sous-suite telle que $(\|x_n\|) \to \infty$. Comme la condition (2.20) est saisfaite , il existe $c \in (0,1)$ et $\rho > 0$ tel que

$$\forall x \in C, \|x\| \geq \rho, \forall y \in F(x) : [y - y_0, x - x_0] < c\|x - x_0\|^2 .$$

Pour n, on a $\theta_n > c$, $\|x_n\| \geq \rho$ et $x_n = \theta_n y_n + (1-\theta_n)y_0 \in F_n(x_n)$ avec $y_n \in F(x_n)$ pour que

$$[y_n - y_0, x_n - x_0] < c\|x_n - x_0\|^2 .$$

D'après les propriétés des produits sous-interne , on a

$$\|x_n - x_0\|^2 = [x_n - x_0, x_n - x_0] = [x_n - y_0, x_n - x_0] + [y_0 - x_0, x_n - x_0]$$

$$\leq \theta_n[y_n - y_0, x_n - x_0] + \|y_0 - x_0\| \|x_n - x_0\|$$

$$< \theta_n c\|x_n - x_0\|^2 + \|y_0 - x_0\| \|x_n - x_0\| .$$

En divisant par $\|x_n - x_0\|^2$ et on prend la limite pour obtenir $c \geq 1$ ce qui conduit à une contradiction et la conclusion de la proposition. ∎

Remarquons que lorsque $F(x) := \{f(x)\}$, où $f : C \to X$ est une fonction, on a le corollaire suivant qui est une variante de [75, Proposition 1].

Corollaire 2.7 *Soient X un espace réflexif de Banach et C un sous-ensemble convexe fermé non vide de X. et $f : C \to X$ une fonction non-dilatante sur C. Supposons que pour certains $x_0 \in C$, on a*

$$\limsup_{x\in C,\ \|x\|\to\infty} \frac{[f(x)-f(x_0), x-x_0]}{\|x-x_0\|^2} < 1.$$

Si $f(C) \subset C$ et $I-f$ est demi-fermé, alors f admet un point fixe .

Nous introduisons maintenant le concept suivant qui généralise la définition des fonctions $\varphi-$ asymptotiquement bornées .

Définition 2.4 *Soient X un espace de Banach et C un sous ensemble non vide fermé et convexe dans X, $F : C \to 2^X$ une multifonction avec des valeurs non vides et soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, on dit que F est $\varphi-$ asymptotiquement bornée sur C si pour certain $(x_0, y_0) \in \mathrm{Gr}F$ il existe $\rho, c > 0$ tel que pour tout $x \in C\backslash\overline{B}(0,\rho)$ et $y \in F(x)$ on a*

$$\|y-y_0\| \leq c\varphi(\|x-x_0\|). \tag{2.24}$$

Nous donnons un résultat de point fixe pour une multifonction non-dilatante F lorsque $F-G$ satisfait certaines conditions de contraction asymptotique sous l'hypothèse que G est une multifonction $\varphi-$asymptotiquement bornées.

Proposition 2.4 *Soient X un espace de Banach réfexif et C un sous ensemble non vide convexe fermé dans X, et soient $F : C \to 2^X$ une multifonction non-dilatante avec des valeurs non vide fermé et $G : C \to 2^X$ une multifonction $\varphi-$asymptotiquement borné sur C et $(x_0, z_0) \in \mathrm{Gr}G$ avec $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\varphi(t)}{t} = 0$. On suppose qu'il existe $c \in (0,1)$, $\rho > 0$ tel que pour $y_0 \in F(x_0)$ on a*

$$\forall x \in C, \|x\| \geq \rho, \forall y \in F(x), \exists z \in G(x) : [y-z-y_0, x-x_0] < c\|x-x_0\|^2. \tag{2.25}$$

Si $F(C) \subset C$ et $I-F$ est demi-fermé alors F a un point fixe C.

Démonstration. Il suffit de prouver que la condition (*2.19*) est satisfait. Soit $(x_0, z_0) \in \mathrm{Gr}G$, $c \in (0,1)$, $c', \rho > 0$ tel que (2.24) et (*2.25*) sont satisfaites. Considérons $x \in C \setminus \overline{B}(0,\rho)$ et $y \in F(x)$, on a alors, pour $z \in G(x)$,

$$\begin{aligned}\frac{[y-y_0, x-x_0]}{\|x-x_0\|^2} &= \frac{[y-z+z-z_0+z_0-y_0, x-x_0]}{\|x-x_0\|^2} \\ &= \frac{[y-z-y_0, x-x_0]}{\|x-x_0\|^2} + \frac{[z-z_0, x-x_0]}{\|x-x_0\|^2} + \frac{[z_0, x-x_0]}{\|x-x_0\|^2} \\ &< c + \frac{\|z-z_0\|}{\|x-x_0\|} + \frac{\|z_0\|}{\|x-x_0\|}.\end{aligned}$$

On obtient

$$\sup_{y\in F(x)} \frac{[y-y_0, x-x_0]}{\|x-x_0\|^2} \leq c + c'\frac{\varphi(\|x-x_0\|)}{\|x-x_0\|} + \frac{\|z_0\|}{\|x-x_0\|}$$

$$\begin{aligned}\limsup_{x\in C,\ \|x\|\to\infty} \sup_{y\in F(x)} \frac{[y-y_0, x-x_0]}{\|x-x_0\|^2} &\leq c + \lim_{\|x\|\to\infty} (c'\frac{\varphi(\|x-x_0\|)}{\|x-x_0\|} + \frac{\|z_0\|}{\|x-x_0\|}) \\ &\leq c < 1.\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.3, F a un point fixe. ∎

Corollaire 2.8 *Soient X un espace de Banach réfexif et C un cône non vide convexe fermé dans X. et soit $f : C \to X$ une fonction $\theta-$contractante avec $\theta \in (0,1)$ et $F : C \to 2^X$ une multifonction non-dilatante avec des valeurs non vides fermés et $(1-\theta)-$contractante. On suppose que F est une multifonction $\varphi-$asymptotiquement borné sur C et $(x_0, z_0) \in \mathrm{Gr}G$ avec $\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$. On suppose qu'il existe $c \in (0,1)$, $\rho > 0$ tel que pour $y_0 \in F(x_0)$. Si $f(C) \subset C$, $F(C) \subset C$ et $I-(f+F)$ est demi-fermé alors $f+F$ a un fixe point fixe dans C.*

Démonstration. On vérife les hypothèses de la proposition 2.4 avec $[\cdot,\cdot]$ est un produit semi-interne compatible avec la norme dans X. Il est claire que $H := f + F$ est non-dilatante dans un cône convexe C,

$H(C) = f(C)+F(C) \subset C+C \subset C$. Considérons $z_0 = f(x_0)+y_0 \in H(x_0)$ et $(x,z) \in \mathrm{Gr}H$. Il existe $y \in F(x)$ tel que $z = f(x) + y$. On utilise les properiétées de $[\cdot,\cdot]$, on obtient les inégalités

$$\begin{aligned}[z - y - z_0, x - x_0] &= [f(x) - f(x_0) - y_0, x - x_0]\\ &= [f(x) - f(x_0), x - x_0] + [-y_0, x - x_0]\\ &\le \|f(x) - f(x_0)\| \, \|x - x_0\| + \|y_0\| \, \|x - x_0\|\\ &\le \theta \, \|x - x_0\|^2 + \|y_0\| \, \|x - x_0\| \, .\end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in C$ tel que $\|x - x_0\| \ge 2(1-\theta)^{-1} \|y_0\|$, on obtient

$$\begin{aligned}[z - y - z_0, x - x_0] &\le \theta \, \|x - x_0\|^2 + \frac{1}{2}(1-\theta) \, \|x - x_0\|^2\\ &\le \frac{1}{2}(1+\theta) \, \|x - x_0\|^2 \, .\end{aligned}$$

D'où la propriété (2.25) est satisfaite avec la constante $c := \frac{1}{2}(1+\theta) \in (0,1)$. ■

Le résultat suivant est similaire au Corollaire 2.3 qui donne lexistence d'une valeur propre d'une multifonction non-dilatante et $\varphi-$ asymptotiquement.

Corollaire 2.9 *Soit C un cône non vide convexe fermé dans un espace de Banach réfexif X. Soit $\lambda \ge 1$, $\theta \in (0,1)$ et Soit $F : C \to 2^C$ une multifonction non-dilatante avec des valeurs non vides fermés dans C tel que $0 \notin F(0)$ et $F(C) \subset C$. On suppose que $I - \lambda^{-1}F$ est demi fermé et F est une multifonction $\varphi-$asymptotiquement bornée avec $\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$. Alors λ est une valeur propre de la multifonction F associée à un vecteur propre $\overline{x} \in C$.*

Démonstration. Puisque toutes les hypothèses du corollaire ci-dessus sont satisfait, il existe $\overline{x} \in \theta\overline{x} + \lambda^{-1}(1-\theta)F(\overline{x})$ ou $(1-\theta)\overline{x} \in \lambda^{-1}(1-\theta)F(\overline{x})$. Ainsi $\lambda\overline{x} \in F(\overline{x})$ et comme $0 \notin F(0)$, $\overline{x} \neq 0$. ■

Sous certaines conditions d'assymptotique on obtient le point fixe des multifonctions pas nécessairement multifonction non-dilatante, un résutat qui généalise le résultat de Park [72] est obtenu. On présente la définition d'une multifonction assymptotiquement contractante.

Définition 2.5 *Soit C un sous-ensemble non vide d'un espace de Banach X et soit $F : C \to 2^X$ une multifonction à valeurs non vides. On dit que F est asymptotiquement k-contractive sur C s'il existe une fonction $k : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que*

1. *k est symmétrique.*
2. *pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ $\lim\limits_{y\to\infty} supk(x,y) < 1$.*
3. *il existe $r_0 \geqslant 0$ tel que pour tous $x, y \geqslant r_0$, $k(x,y) \leqslant 1$.*
4. *il existe $r_1 \geqslant r_0$ tel que si $\|x\| \geqslant r_0$, $F(x) \subset C - r_1 B_x$.*
5. *pour tous $X \in F(x)$ et $Y \in F(y)$ ou $x, y \in C$, $\|X - Y\| < k(\|x\|, \|y\|)\|x - y\|$.*

On donne le résultat suivant :

Théorème 2.4 *Soient X un espace de Banach réflexif et C un sous-ensemble convexe fermé non vide de X. Soit $F : C \to 2^X$ une multifonction asymptotiquement k-contractante à valeurs fermées non vides telles que $F(C) \subset C$ et $I - F$ soit demi-fermé. On suppose qu'il existe $x_0 \in C$ tel que $F(x_0)$ soit borné. Alors F admet un point fixe dans C.*

Démonstration. Considérons une suite (θ_n) dans $(0,1)$ telle que $(\theta_n \longrightarrow 1)$.
Définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la multifonction $F_n : C \to 2^X$ par :$F_n(x) = \theta_n F(x) + (1-\theta_n)x_0$,$x_0 \in C$ pour n assez grand, on a $F : C - r_0 B_x \to C - r_0 B_x$. Soit $(v_n) \in F_n(x)$, il existe $(u_n) \in F(x)$, tel que $v_n(x) = \theta_n u_n + (1-\theta_n)x_0$ alors

$$\begin{aligned}
\|v_n\| &= \|\theta_n u_n + (1-\theta_n)x_0\| \\
&\geq \theta_n \|u_n\| + (1-\theta_n)\|0\| \\
&\geq \theta_n r_1 + (1-\theta_n)\|0\| \\
&> r_0.
\end{aligned}$$

D'aure part, soit n assez suffisant et pour $x, x' \in C - r_0 B_x$ soient $(u'_n) \in F_n(x)$ et $(v'_n) \in F_n(x')$, il existe $u_n, v_n \in F(x)$, tel que $u'_n = \theta_n u_n + (1 - \theta_n)x_0$ et $v'_n = \theta_n u_n + (1 - \theta_n)x_0$. D'où :

$$\begin{aligned} \|u'_n - v'_n\| &= \theta_n \|u_n - v_n\| \\ &\geq \theta_n k(\|x\|, \|y\|) \|x - y\| \\ &\geq \theta_n(\|x - y\| \end{aligned} \tag{2.26}$$

ce qui montre que F_n est θ_n-contraction. Le théorème de Nadler assure alors l'existence d'un point fixe de $F_n(x)$. On a $x_n \in C - r_0 B_x$ pour n assez grand il existe $y_n \in F(x_n)$ vérifie $x_n = \theta_n y_n + (1 - \theta_n)x_0$ et donc $(1 - \theta_n)(x_n - y_n) = x_n - y_n \in (I - F)(x_n)$. Comme la suite (x_n) est borné, la démonstration est achevé puisque x_n est borné dans un espace de Banach réflexif, elle admet une sous-suite converge faiblement vers un point fixe $\overline{x}$ et la suite converge vers 0 et comme $I - F$ demi-fermé on trouve $\overline{x} = f(\overline{x})$ avec $\overline{x} \in C$. Si la suite (x_n) est non bornée, on suppose la sous-suite (x_n) où

$$\lim_{x \to \infty} \|x_n\| = \infty$$

et soient $(y_n) \in F(x)$ et $(y_n^0) \in F(x_0)$ telles que $\|y_n - y_n^0\| \leqslant \alpha \|x_n - x_0\|$ ou

$$\begin{aligned} \|x_n\| &\leqslant \|x_n - y_n\| + \left\|y_n - y_n^0\right\| + \left\|y_n^0\right\| \\ &\leqslant (1 - \theta_n) \|x_n - y_n\| + \alpha \|x_n - x_0\| + \left\|y_n^0\right\| \\ &\leqslant ((1 - \theta_n)\theta_n^{-1} + \alpha) \|x_n - x_0\| + \left\|y_n^0\right\|. \end{aligned}$$

D'où :$1 \leqslant \left(\dfrac{1 - \theta_n + \alpha\theta_n}{\theta_n}\right)\left(1 + \dfrac{\|x_0\|}{\|x_n\|}\right) + \dfrac{\|y_n^0\|}{\|x_n\|}$ et on passe à la limite pour trouver la contradiction $\alpha \geqslant 1$. ■

Par la définition suivante aussi on trouve des conditions sufisantes pour l'existence d'un point fixe.

Définition 2.6 *Soit C un sous-ensemble non vide d'un espace de Banach X et soit $F : C \to 2^X$ une multifonction à valeurs non vides. On dit que F est asymptotiquement k'-contractive sur C s'il existe une* *fonction* $k' : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *telle que*

1. *k' est symmétrique.*
2. *pour tout* $x \in \mathbb{R}^+ \lim\limits_{y\to\infty} supk'(x,y) < 1.$
3. *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^+$, $k'(x,y) \leqslant 1.$
4. *pour tous* $X \in F(x)$ *et* $Y \in F(y)$ *où* $x, y \in C$, $\|X - Y\| < k'(\|x\|, \|y\|) \|x - y\|.$

On donne le résultat suivant :

Théorème 2.5 *Soient* X *un espace de Banach réflexif et* C *un sous-ensemble convexe fermé non vide de* X. *Soit* $F : C \to 2^X$ *une multi-fonction asymptotiquement k'-contractante à valeurs fermées non vides telles que* $F(C) \subset C$ *et* $I - F$ *est demi-fermé. On suppose qu'il existe* $x_0 \in C$ *tel que* $F(x_0)$ *soit borné.*

Alors F *admet un point fixe dans* C.

La démonstration est similaire au démonstration du théorème (2.4).

Chapitre 3

Points fixes et meilleurs points de proximité pour les multifonctions contractantes cycliques

Dans ce chapitre, nous obtenons quelques résultats de points fixes et de meilleur point de proximité pour les multifonctions en espaces métriques partiels. Nos résultats généralisent et complètent divers résultats connus. Quelques exemples sont également donnés pour illustrer les principaux résultats présentés.

1 Introduction

La notion d'espaces métriques partiels a été introduite par Matthews [62], cette classe d'espaces fournit un cadre permettant de construire des modèles de calcul pour les espaces métriques et les structures associées. Dans un espace métrique partiel, les applications répandues de la notion d'espaces métriques partiels dans la programmation et la théorie ont attiré l'attention de nombreux auteurs qui ont récemment publié d'importantes aboutit à la généralisation de ce principe, pour plus de détails, on peut se référer à [1, 2, 4, 5, 11, 50, 51, 70]. Tout dabord, rappelons quelques définitions et propriétés de base sur les espaces métriques partiels.

Soient A, B deux sous-ensemles non vides d'un espace métrique partiel (X,p), l'excès partiel $e_p(A,B)$ de A sur B et $D_p(A,B)$ est la distance de Pompeiu-Hausdorf partielle entre A et B sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} p(x,B) &= \inf_{y\in B} p(x,y) \\ e_p(A,B) &= \sup_{x\in A} p(x,B) \\ D_p(A,B) &= \max(e_p(A,B), e_p(B,A)). \end{aligned}$$

Remarque 3.1 [5] *Soient (X,p) un espace métrique partiel et A un sous-ensemble non vide de X, alors $a \in \overline{A} \Leftrightarrow p(a,A) = p(a,a)$.*

Lemme 3.1 [11] *Soient (X,p) un espace métrique partiel et A, B deux sous-ensembles non vides, fermées et bornées de X, et $h > 1$. Alors pour tout $a \in A$, il existe $b \in B$, tel que $p(a,b) \leq hD_p(A,B)$.*

Et on prend les notations
$A_0 = \{x \in A : p(x,y) = p(A,B), pour\, certains\, y \in B\}$,
$B_0 = \{y \in B : p(x,y) = p(A,B), pour\, certains\, x \in A\}$.

Définition 3.1 [3] *Soient (X,p) un espace métrique partiel et (A,B) un couple de sous-ensembles non vides de X, et $A \neq \emptyset$.*
On dit que la paire (A,B) a la P-proporietée si et seulement si

$$\begin{cases} p(x_1,y_1) = p(A,B) \\ p(x_2,y_2) = p(A,B) \end{cases} \Rightarrow \; p(x_1,y_1) = p(x_2,y_2).$$

Où $x_1, x_2 \in A_0$ et $y_1, y_2 \in B_0$.

2 Points fixes pour les multifonction cycliques

Dans [67], les auteurs ont établi les résultats suivants.

Théorème 3.1 [67] *Soient A et B deux sous-ensembles fermés d'un espace métrique complet (X,d). On suppose que $F : A \cup B \rightrightarrows A \cup B$ une*

multifonction à valeurs fermées, bornées, et non vides.
S'il existe une constante $\theta \in (0,1)$ tel que

$$D(F(x),F(y)) \leq \theta d(x,y)\ \forall x \in A\, et\, \forall y \in B.$$

Alors F a au moins un point fixe dans $A \cap B$.

Théorème 3.2 [67] *Soient A et B deux sous-ensembles non vides d'un espace métrique (X,d) tel que (A,B) satisfait la propriété **UC** et A est complet. Soit F une multifonction cyclique (sur A et B) à valeurs bornées et fermées et contractante. Alors F a un meilleur point de proximité z dans A.*

On donne maintenant les résultats suivants :

Théorème 3.3 *Soient A et B deux sous-ensembles fermés et non vides d'un espace métrique complet (X,p). On suppose que $F : A \cup B \rightrightarrows A \cup B$ est une multifonction cyclique à valeurs multiples i.e., $F(A) \subseteq B$ et $F(B) \subseteq A$ avec des valeurs fermées et bornées.*
S'il existe une constante $\theta \in (0,1)$ tel que

$$D(F(x),F(y)) \leq \theta d(x,y)\ \forall x \in A \text{ et } \forall y \in B. \tag{3.1}$$

Alors F a au moins un point fixe dans $A \cap B$.

Démonstration. Soient $\beta > 1$ tel que $k := \beta\theta < 1, x_0 \in A$ on obtient $x_1 \in F(x_0) \subseteq B$.
-Si $D_p(F(x_0),F(x_1)) = 0$, alors $F(x_0) = F(x_1)$, on obtient $x_1 \in F(x_1)$.
-Si $D_p(F(x_0),F(x_1)) > 0$, par lemme 3.1, il existe $x_2 \in F(x_1) \subseteq A$ tel que $p(x_1,x_2) \leq \beta D_p(F(x_0),F(x_1)$. par définition de F, on a $p(x_1,x_2) \leq \beta\theta p(x_0,x_1) = kp(x_0,x_1)$.
-Si $D_p(F(x_1),F(x_2)) = 0$, alors $F(x_1) = F(x_2)$, on obtient $x_2 \in F(x_2)$.
-Si $D_p(F(x_0),F(x_1)) > 0$, on peut utiliser lemme 3.1 pour montrer qu'il existe $x_3 \in F(x_2) \subseteq B$ tel que $p(x_2,x_3) \leq kp(x_1,x_2)$.
De cette manière, on obtient une suite x_n telle que $x_{2n} \in A, x_{2n+1} \in B$, et $p(x_n,x_{n+1}) \leq kp(x_{n-1},x_n)$, pour $n = 1,2,...,$.

Par induction, on obtient $p(x_n, x_{n+1}) \leq k^n p(x_0, x_1)$, pour $n = 1, 2, ...$, on a

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+p}) &\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+p}) - p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+p}) \\ &\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+2}) + p(x_{n+2}, x_{n+p}) - p(x_{n+2}, x_{n+2}) \\ &\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+2}) + p(x_{n+2}, x_{n+p}) \end{aligned}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+p}) &\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + p(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq k^n p(x_0, x_1) + k^{n-1} p(x_0, x_1) + k^{n+p-1} p(x_0, x_1) \\ &\leq (k^n + k^{n-1} + k^{n+p-1}) p(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} p(x_0, x_1) \to 0 \, as \, n \to +\infty. \end{aligned}$$

Par la définition de p^s, on a $p^s(x_n, x_{n+p}) \leq 2p(x_n, x_{n+p}) \to 0$ quand $n \to +\infty$, ce qui implique que x_n est une suite de Cauchy dans (X, p^s), puisque (X, p) est complet, par le lemme 1.1, l'espace métrique correspondant (X, p^s) est également complet. Donc, la suite x_n est convergente dans X, en ce qui concerne à la métrique p^s.

Soit $\overline{x} = \lim x_n$, donc $\overline{x} = \lim x_{2n}, \overline{x} = \lim x_{2n+1}$. Puisque A et B sont fermés, on a $\overline{x} \in A \cap B \neq \emptyset$.
Et on a $\lim p^s(x_n, \overline{x}) = 0$. Par lemme 1.1, on a
$p(\overline{x}, \overline{x}) = \lim\limits_{n \to +\infty} p(x_n, \overline{x}) = \lim\limits_{n,m \to +\infty} p(x_n, x_m) = 0$.
Et

$$\begin{aligned} p(\overline{x}, F(\overline{x})) &\leq p(\overline{x}, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, F(\overline{x})) - p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq p(\overline{x}, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, F(\overline{x})) \\ &\leq p(\overline{x}, x_{n+1}) + D_p(F(x_n), F(\overline{x})) \\ &\leq p(\overline{x}, x_{n+1}) + \theta p(x_n, \overline{x}). \end{aligned}$$

Si $n \to +\infty$, on a $p(\overline{x}, F(\overline{x})) = 0$ alors $p(\overline{x}, F(\overline{x})) = p(\overline{x}, \overline{x})$. Par remarque 3.1, on en déduit que $\overline{x} \in \overline{F(\overline{x})} = F(\overline{x})$ ■

Exemple 3.1 *Soient* $X = \{0, 1, 2, 3\}$ *et* $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *une métrique partielle sur* X *définie par*
$p(0,0) = p(1,1) = 0, p(2,2) = \frac{3}{20}, p(3,3) = \frac{1}{20}$,
$p(0,1) = p(1,0) = \frac{7}{20}$,
$p(0,2) = p(2,0) = \frac{9}{20}$,
$p(0,3) = p(3,0) = \frac{4}{20}$,
$p(1,2) = p(2,1) = \frac{9}{20}$,
$p(1,3) = p(3,1) = \frac{6}{20}$,
$p(2,3) = p(3,2) = \frac{9}{20}$.
Soient $A = \{0, 2\}, B = \{0, 1\}$.
Et $F : A \cup B \rightrightarrows A \cup B$ *défine par*
$F(0) = F(1) = \{0\}, F(2) = \{0, 1\}$ *et* $F(3) = \{2\}$.

Notons que, $F(x)$ *est fermé et borné pour* $x \in A \cup B$ *dans l'espace métrique partiel donné* (X, p). *nous montrons que ,* $\forall x \in A \, et \, \forall y \in B$, *la condition contractive est satisfaite avec* $\theta \in (\frac{7}{9}, 1)$. *Pour cela, nous considérons les cas suivants :*
- $x = y = 0$:

$$D_p(F(0), F(0)) = D_p(\{0\}, \{0\}) = 0.$$

- $x = 0, y = 1$:

$$D_p(F(0), F(1)) = D_p(\{0\}, \{0\}) = 0.$$

- $x = 2, y = 0$:

$$\begin{aligned} D_p(F(2), F(0)) &= D_p(\{0,1\}, \{0\}) \\ &= max\{p(\{0,1\}, \{0\}), max\{p(0,0), p(1,0)\}\} \\ &= \frac{7}{20} \leq \theta p(2,0) \end{aligned}$$

- $x = 2, y = 1$:

$$\begin{aligned} D_p(F(2), F(1)) &= D_p(\{0,1\},\{0\}) \\ &= max\{p(\{0,1\},\{0\}), max\{p(0,0), p(1,0)\}\} \\ &= \frac{7}{20} \leq \theta p(2,1). \end{aligned}$$

Donc toutes les conditions du théoréme 3.3 sont satisfaites. Alors $x = 0$ est un point fixe de F. Par contre, la métrique p^s induite par la métrique partiél p est donnée par
$p^s(0,0) = p^s(1,1) = p^s(2,2) = p^s(3,3) = 0$,
$p^s(0,1) = p^s(1,0) = \frac{7}{20}$,
$p^s(0,2) = p^s(2,0) = \frac{6}{20}$,
$p^s(0,3) = p^s(3,0) = \frac{3}{20}$,
$p^s(1,2) = p^s(2,1) = \frac{6}{20}$,
$p^s(1,3) = p^s(3,1) = \frac{5}{20}$,
$p^s(2,3) = p^s(3,2) = \frac{5}{20}$.
Notons que, dans le cas d'une métrique de Pompeiu-Hausdorf ordinaire, la multifoction donnée ne satisfait pas la condition (1). En effet, pour $x = 2, y = 0$, la condition n'est pas satisfaite. En fait, nous avons

$$\begin{aligned} D_{p^s}(F(2), F(0)) &= D_{p^s}(\{0,1\},\{0\}) \\ &= max\{p^s(\{0,1\},\{0\}), max\{p^s(0,0), p^s(1,0)\}\} \\ &= \frac{7}{20} \not\leq \frac{6}{20}\theta = \theta p^s(2,0), \end{aligned}$$

évidemment, le raisonnement du théoréme 3.3 peut facilement être étendu à un ensemble finis, de la maniére suivante.

Théorème 3.4 *Soient A_i, pour $i = 1...n$, des sous-ensembles fermées et non vides d'un espace métrique complet (X, p). Supposons que $F : \cup_{i=1}^n A_i \rightrightarrows \cup_{i=1}^n A_i$ est une multifonction avec des valeurs fermées et bornées vérifie les conditions suivantes (où $A_{n+1} = A_1$).*
- $F(A_i) \subseteq A_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n$.

- *S'il existe une constante* $\theta \in [0,1)$ *telle que*

$$D_p(F(x), F(y)) \leq \theta d(x,y) \ \forall x \in A_i \, et \, \forall y \in A_{i+1}$$

pour $1 \leq i \leq n$.

Alors F *a au moins un point fixe dans* $\cap_{i=1}^{n} A_i$.

2.1 Cas des multifonctions cycliques $(\theta, L)-$faible contractives

Donnons le résultat suivant

Théorème 3.5 *Soient* A *et* B *deux sous-ensembles fermés et non vides d'un espace métrique complet* (X,p). *Supposons que* $F : A \cup B \rightrightarrows A \cup B$ *est une multifonction cyclique i.e.,* $F(A) \subseteq B$ *et* $F(B) \subseteq A$ *avec des valeurs fermées et bornées.*
S'il existe une constante $\theta \in (0,1)$ *et* $L > 0$ *telle que*

$$D_p(F(x), F(y)) \leq \theta d(x,y) + Lp^w(y, F(x)) \ \forall x \in A \ et \ \forall y \in B.$$

Donc l'ensemble des points fixe $\Phi_F := \{x \in X : x \in F(x)\} \subseteq A \cap B$ *de* F *est non vide et complet.*

Démonstration. Soit $\beta > 1$ tel que $k := \beta\theta < 1, x_0 \in A$ on obtient $x_1 \in F(x_0) \subseteq B$.
-Si $D_p(F(x_0), F(x_1)) = 0$, alors $F(x_0) = F(x_1)$, on obtient $x_1 \in F(x_1)$.
-Si $D_p(F(x_0), F(x_1)) > 0$, Par lemme 3.1, il existe $x_2 \in F(x_1) \subseteq A$ tel que $p(x_1, x_2) \leq \beta D_p(F(x_0), F(x_1)$. Par la définition de F, on a $p(x_1, x_2) \leq \beta\theta p(x_0, x_1) + \beta L p^w(x_1, F(x_0)) \leq kp(x_0, x_1))$.
-Si $D_p(F(x_1), F(x_2)) = 0$, alors $F(x_1) = F(x_2)$, on obtient $x_2 \in F(x_2)$.
-Si $D_p(F(x_0), F(x_1)) > 0$, on peut utiliser lemme 3.1 pour montrer qu'il existe $x_3 \in F(x_2) \subseteq B$ tel que $p(x_2, x_3) \leq kp(x_1, x_2)$.
De cette manière, on obtient une suite x_n telle que $x_{2n} \in A, x_{2n+1} \in B$, et $p(x_n, x_{n+1}) \leq kp(x_{n-1}, x_n)$, pour $n = 1, 2, ...$, par induction, on obtient

$p(x_n, x_{n+1}) \leq k^n p(x_0, x_1)$, pour $n = 1, 2, ...$, on a

$$\begin{aligned}
p(x_n, x_{n+p}) &\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+p}) - p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\
&\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+p}) \\
&\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+2}) + p(x_{n+2}, x_{n+p}) - p(x_{n+2}, x_{n+2}) \\
&\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+2}) + p(x_{n+2}, x_{n+p})
\end{aligned}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned}
p(x_n, x_{n+p}) &\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + p(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\
&\leq k^n p(x_0, x_1) + k^{n-1} p(x_0, x_1) + k^{n+p-1} p(x_0, x_1) \\
&\leq (k^n + k^{n-1} + k^{n+p-1}) p(x_0, x_1) \\
&\leq \frac{k^n}{1-k} p(x_0, x_1) \to 0 \, as \, n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Par la définition de p^s, on obtient $p^s(x_n, x_{n+p}) \leq 2p(x_n, x_{n+p}) \to 0$ quand $n \to +\infty$, ce qui implique que (x_n) est une suite de Cauchy dans (X, p^s). Puisque (X, p)est complet, par lemme 1.1, l'espace métrique (X, p^s) est aussi complet. Donc, la suite x_n est convergente dans X, en ce qui concerne la métrique p^s. Soient $\overline{x} = \lim x_n$, ainsi $\overline{x} = \lim x_{2n}, \overline{x} = \lim x_{2n+1}$. Puisque A et B sont fermées, on a $\overline{x} \in A \cap B \neq \emptyset$. Soient $\overline{x} = \lim x_n$, alors $\overline{x} = \lim x_{2n}, \overline{x} = \lim x_{2n+1}$. Puisque A et B sont fermées, on a $\overline{x} \in A \cap B \neq \emptyset$.
Et on a $\lim p^s(x_n, \overline{x}) = 0$. par lemme 1.1, on a $p(\overline{x}, \overline{x}) = \lim\limits_{n \to +\infty} p(x_n, \overline{x}) = \lim\limits_{n,m \to +\infty} p(x_n, x_m) = 0$.
Et

$$\begin{aligned}
p(\overline{x}, F(\overline{x})) &\leq p(\overline{x}, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, F(\overline{x})) - p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\
&\leq p(\overline{x}, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, F(\overline{x})) \\
&\leq p(\overline{x}, x_{n+1}) + D_p(F(x_n), F(\overline{x})) \\
&\leq p(\overline{x}, x_{n+1}) + \theta p(x_n, \overline{x}).
\end{aligned}$$

Si $n \to +\infty$, on a $p(\overline{x}, F(\overline{x})) = 0$ alors $p(\overline{x}, F(\overline{x})) = p(\overline{x}, \overline{x})$. par remarque 3.1, on en déduit que $\overline{x} \in \overline{F(\overline{x})} = F(\overline{x})$.

Il reste à montrer que Φ_F est complet. Soit (x_n) une suite dans Φ_F, telle que $x_n \to \overline{x}$. Puisque $A \cap B$ est fermés, on a $\overline{x} \in A \cap B$ Notons que

$$\begin{aligned}
p(\overline{x}, F(\overline{x})) &\leq p(\overline{x}, x_n)) + p(x_n, F(x_n)) - p(x_n, x_n) + e_p(F(x_n), F(\overline{x})) \\
&\leq p(\overline{x}, x_n)) + p(x_n, F(x_n)) - p(x_n, x_n) + e_p(F(x_n), F(\overline{x})) \\
&\leq p(\overline{x}, x_n)) + p(x_n, x_n) - p(x_n, x_n) + e_p(F(x_n), F(\overline{x})) \\
&\leq p(\overline{x}, x_n)) + e_p(F(x_n), F(\overline{x})) \\
&\leq p(\overline{x}, x_n)) + \theta p(x_n, \overline{x}) + Lp^w(\overline{x}, F(x_n)) \\
&\leq p(\overline{x}, x_n)) + \theta p(x_n, \overline{x}) + L(p^w(\overline{x}, x_n) + p^w(x_n, F(x_n)) \\
&\leq p(\overline{x}, x_n)) + \theta p(x_n, \overline{x}) + Lp^w(\overline{x}, x_n).
\end{aligned}$$

Donc, si $n \to +\infty$, on obtient $p(\overline{x}, F(\overline{x})) = 0$ on a $p(\overline{x}, F(\overline{x})) = p(\overline{x}, \overline{x})$, par la remarque 3.1 on obtient $\overline{x} \in \overline{F(\overline{x})} = F(\overline{x})$.
Et Φ_F est fermées. ■

Évidemment, le raisonnement du théoréme 3.5 peut facilement être étendu à une collection d'ensembles finis, dans la suite.

Théorème 3.6 *Soient A_i, pour $i = 1...n$, des sous-ensembles fermés et non vides d'un espace métrique complet (X, p). Supposons que $F : \cup_{i=1}^n A_i \rightrightarrows \cup_{i=1}^n A_i$ est une multifonction avec des valeurs fermées et bornées vérifiant les conditions suivantes ($A_{n+1} = A_1$).*
- $F(A_i) \subseteq A_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n$.
- S'il existe deux constantes $\theta \in (0, 1)$ et $L > 0$ telle que

$$D_p(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y) + Lp^w(y, F(x)) \ \forall x \in A_i \text{ et } \forall y \in A_{i+1}$$

pour $1 \leq i \leq n$. Alors l'ensemble des points fixes $\Phi_F := \{x \in X : x \in F(x)\} \subseteq \cap_{i=1}^n A_i$ de F est non vide et complet.

3 Meilleurs points de proximité pour une multifonction cyclique

Dans cette section, nous considérons le théorème 2.1 dans le cas où $A \cap B = \emptyset$ et (A, B) satisfait la propriété **UC**.

Définition 3.2 *Soient A et B dans (X, p). On dit que (A, B) satisfait la propriété* ***UC*** *si (x_n) et (x'_n) sont des suites dans A et (y_n) est une suite de B telles que $\lim_{n\to\infty} p(x_n, y_n) = p(A, B)$ et $\lim_{n\to\infty} p(x'_n, y_n) = p(A, B)$, alors $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x'_n) = 0$.*

Définition 3.3 *Soient A et B deux sous-ensembles non vides d'un espace métrique (X, p). La multifoncion $F : A \cup B \rightrightarrows A \cup B$ est une contraction cyclique s'il existe une constante $\theta \in (0, 1)$ telle que*

$$D_p(F(x), F(y)) \leq \theta p(x, y) + (1 - \theta)p(A, B) \ \forall x \in A \text{ et } \forall y \in B. \quad (3.2)$$

Lemme 3.2 *Soient A et B deux sous-ensembles non vides d'un espace métrique (X, p) avec la propriété* ***UC*** *et soit (x_n) une suite dans A. S'il existe une constante (y_n) dans B telle que $\lim_{n\to\infty} p(x_n, y_n) = p(A, B)$ et $\lim_{n\to\infty} p(x_{n+1}, y_n) = p(A, B)$, alors (x_n) est une suite de Cauchy dans (X, p^s).*

Démonstration. Soient (x_n) et (y_n) deux suites telles que $\{x_n\} \subset A$, $\{y_n\} \subset B$ et $\lim_{n\to\infty} p(x_n, y_n) = p(A, B)$ $\lim_{n\to\infty} p(x_{n+1}, y_n) = p(A, B)$.
Par la propriété **UC**, on obtient $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = 0$.
Et on a

$$\begin{aligned}
p(A, B) &\leq p(y_{n+p}, x_n) \\
&\leq p(y_{n+p}, x_n) \\
&\leq p(y_{n+p}, x_{n+p}) + p(x_{n+p}, x_n) - p(x_{n+p}, (x_{n+p})) \\
&\leq p(y_{n+p}, x_{n+p}) + p(x_{n+p}, x_n) \\
&\leq p(y_{n+p}, x_{n+p}) + p(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + ... + p(x_{n+1}, x_n).
\end{aligned}$$

En passant à la limite, on obtient $\lim_{n\to\infty} p(x_{n+p}, y_{n+p}) + \lim_{n\to\infty} p(x_{n+p}, x_n) = p(A, B)$.

On a $\lim_{n\to\infty} p(x_{n+p}, x_n) = 0$ et

$$\begin{aligned} p^s(x_{n+p}, x_n) &= 2p(x_{n+p}, x_n) - p(x_{n+p}, x_{n+p}) - p(x_n, x_n) \\ p^s(x_{n+p}, x_n) &\leq 2p(x_{n+p}, x_n) \to 0. \end{aligned}$$

On obtient (x_n) est une suite de Cauchy dans (X, p^s). ■

Théorème 3.7 *Soient A et B deux sous-ensembles non vides d'un espace métrique (X, p). tels que (A, B) vérifie la propriété **UC** et A est complet . $F : A \cup B \rightrightarrows A \cup B$ est une multifonction cyclique i.e., $F(A) \subseteq B$ et $F(B) \subseteq A$ avec des valeurs fermées et bornées.*
Alors F a un meilleur point de proximité $\overline{z} \in A$.

Démonstration. Soit $x_0 \in A$, on obtient $x_1 \in F(x_0) \subseteq B$. Il existe $x_2 \in F(x_1) \subseteq A$. tel que

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) &\leq p(x_1, F(x_1)) + \theta \\ &\leq e_p(F(x_0), F(x_1)) + \theta \\ &\leq D_p(F(x_0), F(x_1)) + \theta. \end{aligned}$$

Il existe $x_3 \in F(x_2) \subseteq B$ tel que

$$p(x_2, x_3) \leq D_p(F(x_1), F(x_2)) + \theta^2.$$

En utilisant l'induction, nous obtenons une suite (x_n) avec $x_{2n} \in A$, $x_{2n+1} \in$

$B\, x_{n+1} \in F(x_n)$ et

$$\begin{aligned}
p(x_n, x_{n+1}) &\leq D_p(F(x_{n-1}), F(x_n)) + \theta^n \\
&\leq \theta p(x_{n-1}, x_n) + (1-\theta)p(A,B) + \theta^n \\
&\leq \theta(D_p(F(x_{n-2}), F(x_{n-1})) + \theta^{n-1}) + (1-\theta)p(A,B) + \theta^n \\
&\leq \theta(\theta p(x_{n-2}, x_{n-1}) + (1-\theta)p(A,B) + \theta^n + \theta^{n-1}) + (1-\theta)p(A,B) + \theta^n \\
&\leq \theta^2 p(x_{n-2}, x_{n-1}) + (1-\theta^2)p(A,B) + 2\theta^n \\
&\vdots \\
&\leq \theta^n p(x_0, x_1) + (1-\theta^n)p(A,B) + n\theta^n.
\end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) \leq p(A,B)$ et puisque $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) \geq p(A,B)$ nous obtenons $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = p(A,B)$. Puisque $(x_{2n}) \subseteq A$, $(x_{2n+2}) \subseteq A$ et $(x_{2n+1}) \subseteq B$, et par le lemme 3.2, (x_{2n}) est une suite de Cauchy dans (X, p^s). Par la complétude de A, il existe $\overline{z} \in A$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_{2n}, \overline{z}) = 0$. Puisque $p(A,B) \leq p(\overline{z}, x_{2n-1}) \leq p(\overline{z}, x_{2n}) + p(x_{2n}, x_{2n-1}) - p(x_{2n}, x_{2n})$, nous obtenons $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_{2n-1}, \overline{z}) = p(A,B)$, Et $p(A,B) \leq p(F(x_{2n}, \overline{z})) \leq e_p(F(x_{2n-1}), F(\overline{z}))) \leq D_p(x_{2n-1}, \overline{z}) + (1-\theta)p(A,B)$, on a $p(F(\overline{z}), \overline{z}) = p(A,B)$. Donc F a un meilleur point de proximité $\overline{z}$ dans A. ■

Exemple 3.2 *Soient* $X = \{0,1,2,3,4\}$ *et* $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *une métrique partielle sur* X *définie par*

$p(0,0) = \frac{3}{10}, p(1,1) = 0, p(2,2) = \frac{1}{10}, p(3,3) = p(4,4) = 0$

$p(0,1) = p(1,0) = \frac{5}{10}, \qquad p(0,2) = p(2,0) = \frac{3}{10},$

$p(0,3) = p(3,0) = \frac{5}{10}, \qquad p(0,4) = p(4,0) = \frac{4}{10}$

$p(1,2) = p(2,1) = \frac{3}{10}, \qquad p(1,3) = p(3,1) = \frac{3}{10}$

$p(1,4) = p(4,1) = \frac{2}{10}, \qquad p(2,3) = p(3,2) = \frac{3}{10}$

$p(2,4) = p(4,2) = \frac{3}{10}, \qquad p(3,4) = p(4,3) = \frac{3}{10}$

Soit $A = \{0,1\}, B = \{3,4\}$. *et* $F : A \cup B \rightrightarrows A \cup B$ *définie par* $F(0) = \{3,4\}$, $F(1) = \{4\}$, $F(3) = F(4) = \{1\}$, *Notons que,* $F(x)$ *est fermé et borné pour tout* $x \in A \cup B$ *dans l'espace métrique partiel donné* (X,p). *nous montrerons que ,* $\forall x \in A\, et\, \forall y \in B$, *la condition contractive (2) est satisfaite avec* $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$. *Pour cela , nous considérons les cas suivants avec* $p(A,B) = p(1,4)$ *:*

- $x = 0, y = 3$:

$$\begin{aligned} D_p(F(0), F(3)) &= D_p(\{3,4\}, \{1\}) \\ &= max\{p(\{1\}, \{3,4\}), max\{p(3,1), p(4,1)\}\} \\ &= \frac{3}{10} \leq \theta p(0,3) + (1-\theta)p(A,B) \end{aligned}$$

- $x = 0, y = 4$:

$$\begin{aligned} D_p(F(0), F(4)) &= D_p(\{3,4\}, \{1\}) \\ &= max\{p(\{1\}, \{3,4\}), max\{p(3,1), p(4,1)\}\} \\ &= \frac{3}{10} \leq \theta p(0,4) + (1-\theta)p(A,B) \end{aligned}$$

- $x = 1, y = 3$:

$$\begin{aligned} D_p(F(1), F(3)) &= D_p(\{4\}, \{1\}) \\ &\leq \theta p(1,3) + (1-\theta)p(A,B) \end{aligned}$$

- $x = 1, y = 4$:

$$\begin{aligned} D_p(F(1), F(4)) &= D_p(\{4\}, \{1\}) \\ &\leq \theta p(1,4) + (1-\theta)p(A,B) \end{aligned}$$

Ainsi toutes les conditions du théorème 3.7 sont remplies. Ici $x = 1$ est un meilleur point de proximité de F. Par contre, La métrique p^s induite par la métrique partielle p donnée par
$p_s(0,0) = p_s(1,1) = p_s(2,2) = p_s(3,3) = p_s(4,4) = p_s(5,5) = 0,$
$p_s(0,1) = p_s(1,0) = \frac{7}{10}, \qquad p_s(0,2) = p_s(2,0) = \frac{2}{10},$
$p_s(0,3) = p_s(3,0) = \frac{7}{10}, \qquad p_s(0,4) = p_s(4,0) = \frac{5}{10}$
$p_s(1,2) = p_s(2,1) = \frac{5}{10}, \qquad p_s(1,3) = p_s(3,1) = \frac{6}{10}$
$p_s(1,4) = p_s(4,1) = \frac{4}{10}, \qquad p_s(2,3) = p_s(3,2) = \frac{5}{10}$
$p_s(2,4) = p_s(4,2) = \frac{5}{10}, \qquad p_s(3,4) = p_s(4,3) = \frac{6}{10}$
Notons que, dans le cas d'une métrique de Pompeiu-Hausdorf ordinaire, la multifonction donnée ne satisfait pas la condition (2). En effet , Pour $x = 0, y = 4$, cette condition n'est pas satisfaite car

$$\begin{aligned}
D_{p^s}(F(0),F(4)) &= D_{p^s}(\{3,4\},\{1\}) \\
&= max\{p^s(\{3,4\},\{1\}), max\{p^s(3,1),p^s(4,1)\}\} \\
&= \frac{6}{10} \nleq \theta p^s(0,4) + (1-\theta)p^s(A,B) \\
\frac{6}{10} &\nleq \frac{5}{10}\theta + \frac{4}{10}(1-\theta).
\end{aligned}$$

4 Meilleur Point de proximitè pour les multifonctions non auto-applications

Dans cette paragraphe nous donnons des théorèmes d'existence de meilleurs points de proximité pour une multifonction non auto-application dans un espace métrique partiel et des approximations sur les ensembles des meilleurs points de proximité.

4.1 Existence de meilleur Point de proximité pour une multifonction non auto-application

Soient A, B deux sous-ensembles non vides d'un espace métrique (X, d). Le but de cette paragraphe est d'établir des théorèmes d'existence d'un point $\overline{x} \in A$, appelé le meilleur point de proximité, qui satisfait $inf\{p(\overline{x}, y) : y \in F(\overline{x})\} = dist(A, B)$ pour une multifonction non auto-application $F : A \to 2^B$. Nous avons prouvé que les résultats obtenus en [3] peut être améliorés et généralisés sur les espaces métriques partiels. Certains exemples sont donnés pour illustrer l'efficacité de nos résultats.

Théorème 3.8 [3] *Soit (X, d) un espace métrique complet et A, B deux sous ensembles non vides et fermés de X tels que $A_0 \neq \emptyset$ et la paire (A, B) a la P-proporietée, on suppose que $F : A \rightrightarrows 2^B$ une multifonction à valeurs fermées, bornées et non vides. S'il existe une constante $\theta \in (0, 1)$ tel que*

$$D(F(x), F(y)) \leq \theta d(x, y) \ \forall x \in A \, et \, \forall y \in A,$$

et $F(x) \subseteq B_0$ pour tout $x \in A_0$. Alors F à un meilleur point de proximité $\overline{x}$ dans A.

Théorème 3.9 *Soient (X,p) un espace métrique partiel complet et A, B deux sous ensembles non vides et fermés de X tels que $A_0 \neq \emptyset$ et la paire (A,B) a la P-proporietée, on suppose que $F : A \rightrightarrows 2^B$ une multifonction à valeurs fermés, bornés et non vides. S'il existe une constante $\theta \in (0,1)$ telle que*

$$D_p(F(x), F(y)) \leq \theta p(x,y) \ \forall x \in A \, et \, \forall y \in A,$$

et $F(x) \subseteq B_0$ pour tout $x \in A_0$. Alors F à un meilleur point de proximité $\overline{x}$ dans A.

Démonstration. Soit $x_0 \in A_0$, on trouve $y_0 \in F(x_0) \subseteq B_0$. Alors il existe $x_1 \in A_0$, tel que $p(x_1, y_0) = p(A,B)$, on obtient $y_1 \in F(x_1) \subseteq B_0$ tel que $p(y_0, y_1) \leq D_p(F(x_0), F(x_1)) + \theta$.
Et aussi il existe $x_1 \in A_0$, tel que $p(x_1, y_1) = p(A,B)$, et $y_2 \in f(x_2) \subseteq B_0$ tel que $p(y_1, y_2) \leq D_p(F(x_1), F(x_2)) + \theta^2$.
On cotinue pour trouver $x_n \in A_0$, tel que $p(x_n, y_{n-1}) = p(A,B)$, et $y_n \in F(x_n) \subseteq B_0$ telles que $p(y_{n-1}, y_n) \leq D_p(F(x_{n-1}), F(x_n)) + \theta^n$.
Puisque $p(x_{n+1}, y_n) = p(A,B)$ et $p(x_n, y_{n-1}) = p(A,B)$, par la P-proporietée, on trouve $p(x_n, x_{n+1}) = p(y_{n-1}, y_n)$.
Ceci donne

$$\begin{aligned}
p(x_n, x_{n+1}) = p(y_{n-1}, y_n) &\leq D_p(F(x_{n-1}), F(x_n)) + \theta^n \\
&\leq \theta p(x_{n-1}, x_n) + \theta^n \\
&\leq \theta p(y_{n-2}, y_{n-1}) + \theta^n) \\
&\leq \theta(D_p(F(x_{n-2}), F(x_{n-1})) + \theta^{n-1}) + \theta^n \\
&\leq \theta^2 p(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2\theta^n \\
&\vdots \\
&\leq \theta^n p(x_0, x_1) + n\theta^n \to 0 \, quand \, n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Et par définition de p^s, on trouve $p^s(x_n, x_{n+1}) \leq 2p(x_n, x_{n+p}) \to 0$ quand $n \to +\infty$. D'autre part on va démontrer que (x_n) est une suite de Cauchy

dans (X, p^s). On suppose qu'il existe un $\epsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, ils existent $m_k, n_k \in \mathbb{N}$ tels que $m_k > n_k > k$ et $p(x_{m_k}, x_{n_k}) > \epsilon$.
On a

$$\begin{aligned}
p(A,B) &\leq p(y_{n_k-1}, x_{m_k}) \\
&\leq p(y_{n_k-1}, x_{n_k}) + p(x_{n_k}, x_{m_k}) - p(x_{n_k}, x_{n_k}) \\
&\leq p(y_{n_k-1}, x_{n_k}) + p(x_{n_k}, x_{m_k}) \\
&\leq p(y_{n_k-1}, x_{n_k}) + p(x_{n_k}, x_{n_k+1}) + ... + p(x_{m_k-1}, x_{m_k})
\end{aligned}$$

On prend la limite on touve $\lim\limits_{n\to\infty} p(y_{n_k-1}, x_{n_k}) + \lim\limits_{n\to\infty} p(x_{n_k}, x_{m_k}) = p(A,B)$. Ceci donne $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_{n_k}, x_{m_k}) = 0$. Puisque $p^s(x_{n_k}, x_{m_k}) < 2p(x_{n_k}, x_{m_k}) \to 0$, on trouve que (x_n) est une suite de Cauchy dans (X, p^s), et comme (X, p) est complet, alors selon le lemme 1.1, (X, p^s) est un espace métrique complet et la suite x_n est convergente dans X. Soit $\overline{x} = \lim x_n$. Puisque A est fermé, nous avons $\overline{x} \in A$.
Et comme $p(x_n, x_{n+1}) = p(y_{n-1}, y_n)$ on a la suite y_n est convergente dans X. Soit $\overline{y} = \lim y_n$. Puisque B est fermé, nous avons $\overline{y} \in B$.
D'autre part, d'après le lemme 1.1, on a
$p(\overline{x}, \overline{x}) = \lim\limits_{n\to+\infty} p(x_n, \overline{x}) = \lim\limits_{n,m\to+\infty} p(x_n, x_m) = 0$,
$p(\overline{y}, \overline{y}) = \lim\limits_{n\to+\infty} p(y_n, \overline{y}) = \lim\limits_{n,m\to+\infty} p(y_n, y_m) = 0$
et $p(\overline{x}, \overline{y}) = p(A,B)$. Et donc

$$\begin{aligned}
0 &\leq p(y_n, F(\overline{x})) \\
&\leq D_p(F(x_n), F(\overline{x})) \\
&\leq \theta p(x_n, \overline{x}).
\end{aligned}$$

On prend la limite $n \to +\infty$, on trouve $p(\overline{y}, F(\overline{x})) = 0$ ceci donne $p(\overline{y}, F(\overline{x})) = p(\overline{y}, \overline{y})$, et on utilise la remarque 3.1, pour obtenir $\overline{y} \in \overline{F(\overline{x})} = F(\overline{x})$. On obtient alors $\overline{x}$ est un un meilleur point de proximité dans A qui verifie $p(\overline{x}, F(\overline{x})) = p(A,B)$. ■

Exemple 3.3 *Soit* (X, p) *un espace métrique partiel tel que* $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, *et* $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *est définie par*

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{p(0,0) = \frac{3}{10}, p(1,1) = p(2,2) = \frac{2}{10}, p(3,3) = p(4,4) = p(5,5) = 0,} \\
p(0,1) = p(1,0) = \frac{5}{10}, & p(0,2) = p(2,0) = \frac{4}{10}, \\
p(0,3) = p(3,0) = \frac{2}{10}, & p(0,4) = p(4,0) = \frac{5}{10}, \\
p(0,5) = p(5,0) = \frac{5}{10}, & \\
p(1,2) = p(2,1) = \frac{4}{10}, & p(1,3) = p(3,1) = \frac{3}{10}, \\
p(1,4) = p(4,1) = \frac{3}{10}, & p(1,5) = p(5,1) = \frac{5}{10}, \\
p(2,3) = p(3,2) = \frac{3}{10}, & p(2,4) = p(4,2) = \frac{3}{10}, \\
p(2,5) = p(5,2) = \frac{3}{10}, & p(3,4) = p(4,3) = \frac{3}{10}, \\
p(3,5) = p(5,3) = \frac{3}{10}, & p(4,5) = p(5,4) = \frac{3}{10}.
\end{array}$$

On prend $A = \{0, 1\}, B = \{3, 4, 5\}$, $A_0 = \{0\}$, $B_0 = \{3\}$ *et* $p(A, B) = p(0, 3)$.
Et $F : A \cup B \rightrightarrows A \cup B$ *est définie par*
$F(0) = \{3, 4\}$, $F(1) = \{4, 5\}$, *on remarque que* $F : A \rightrightarrows 2^B$ *est une multifonction à valeurs fermées, bornées et non vides. Il existe une constante* $\theta \in (\frac{3}{5}, 1)$ *telle que*

$$D_p(F(x), F(y)) \leq \theta p(x, y) \ \forall x \in A \, et \, \forall y \in A,$$

et $F(x) \subseteq B_0$ *pour tout* $x \in A_0$. *:*
- $x = 0, y = 0$:

$$D_p(F(0), F(0)) = D_p(\{3, 4\}, \{3, 4\}) = 0$$

- $x = 0, y = 1$:

$$\begin{aligned} D_p(F(0), F(1)) &= max\{e_p(\{4, 5\}, \{3, 4\}), e_p(\{3, 4\}, \{4, 5\})\} \\ &= \frac{3}{10} \leq \theta p(0, 1) \end{aligned}$$

- $x = 1, y = 1$:

$$D_p(F(1), F(1)) = D_p(\{4, 5\}, \{4, 5\}) = 0$$

Alors toutes les conditions de théorème 3.9 sont satisfaites et on a un meilleur point de proximité $\overline{x} = 0 \in A$. D'autre part le théorème 3.8 ne peut pas être appliqué, on a

$p^s(0,0) = p^s(1,1) = p^s(2,2) = p^s(3,3) = p^s(4,4) = p^s(5,5) = 0,$
$p^s(0,1) = p^s(1,0) = \frac{5}{10}$, $\quad p^s(0,2) = p^s(2,0) = \frac{3}{10}$,
$p^s(0,3) = p^s(3,0) = \frac{1}{10}$, $\quad p^s(0,4) = p^s(4,0) = \frac{7}{10}$,
$p^s(0,5) = p^s(5,0) = \frac{7}{10}$,
$p^s(1,2) = p^s(2,1) = \frac{4}{10}$, $\quad p^s(1,3) = p^s(3,1) = \frac{4}{10}$,
$p^s(1,4) = p^s(4,1) = \frac{3}{10}$, $\quad p^s(1,5) = p^s(5,1) = \frac{8}{10}$,
$p^s(2,3) = p^s(3,2) = \frac{4}{10}$, $\quad p^s(2,4) = p^s(4,2) = \frac{4}{10}$,
$p^s(2,5) = p^s(5,2) = \frac{4}{10}$, $\quad p^s(3,4) = p^s(4,3) = \frac{6}{10}$,
$p^s(3,5) = p^s(5,3) = \frac{6}{10}$, $\quad p^s(4,5) = p^s(5,4) = \frac{6}{10}$.
On prend $x = 0, y = 1$:

$$\begin{aligned} D_{p^s}(F(0), F(1)) &= max\{e_{p^s}(\{4,5\},\{3,4\}), e_{p^s}(\{3,4\},\{4,5\})\} \\ &= \frac{6}{10} \not\leq \theta p^s(0,1) \end{aligned}$$

Dans la suite, soit PF_i l'esemble des meilleurs points de proximité pour une multifonction F_i.

Théorème 3.10 *Soient (X, d) un espace métrique complet et A, B deux sous ensembles non vides et fermés de X tels que $A_0 \neq \emptyset$ et la paire (A, B) a la P-proporietée. Soient $F_i : A \rightrightarrows 2^B, i = 1, 2$ deux multi-fonctions à valeurs compacts et non vides, s'ils existent deux constantes $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ telles que*

$$D(F_1(x), F_1(y)) \leq \theta_1 d(x, y) \ \forall x \in A \, et \, \forall y \in A.$$

$$D(F_2(x), F_2(y)) \leq \theta_2 d(x, y) \ \forall x \in A \, et \, \forall y \in A,$$

et $F_i(x) \subseteq B_0, i = 1, 2,$ pour tout $x \in A_0$. Alors

$$D(PF_1, PF_2) \leq \frac{1}{1 - min\{\theta_1, \theta_2\}}[\sup_{x \in A} D(F_1(x), F_2(x))].$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $\beta > 0$ tel que $\beta \sum n\theta^n < 1$

et $\alpha = \dfrac{\beta\varepsilon}{(1-\theta)}$.Soit $x_{0,1} = x_0 \in PF_1$, il existe $y_{0,1} \in F_1(x_0) \subseteq B_0$ tel que $d(x_0, y_{0,1}) = d(A, B)$. D'autre part, ils existent $y_0 \in F_2(x_0) \subseteq B_0$ et $x_1 \in A_0$ tels que $d(x_1, y_0) = d(A, B)$. par la P-proporietée, on trouve $d(x_0, x_1) = d(y_{0,1}, y_0)$. Ceci donne $d(x_0, x_1) \leq D(F_1(x_0), F_2(x_0)) + \varepsilon$.
On prend $y_1 \in F(x_1) \subseteq B_0$ tel que $d(y_0, y_1) \leq D(F_2(x_0), F_2(x_1)) + \theta\alpha$.
Et aussi il existe $x_1 \in A_0$, tel que $d(x_1, y_1) = d(A, B)$, et il existe $y_2 \in F_2(x_2) \subseteq B_0$ tel que $d(y_1, y_2) \leq D(F_2(x_1), F_2(x_2)) + \theta^2\alpha$.
On cotinue pour trouver $x_n \in A_0$, tel que $d(x_n, y_{n-1}) = d(A, B)$, et il existe $y_n \in F_2(x_n) \subseteq B_0$ tel que $d(y_{n-1}, y_n) \leq D(F_2(x_{n-1}), F_2(x_n)) + \theta^n\alpha$.
Puisque $d(x_{n+1}, y_n) = d(A, B)$ et $d(x_n, y_{n-1}) = d(A, B)$, par la P-proporietée, on trouve $d(x_n, x_{n+1}) = d(y_{n-1}, y_n)$.
Ceci donne

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) = d(y_{n-1}, y_n) &\leq D(F_2(x_{n-1}), F_2(x_n)) + \theta^n\alpha \\
&\leq \theta d(x_{n-1}, x_n) + \theta^n\alpha \\
&\leq \theta d(y_{n-2}, y_{n-1}) + \theta^n\alpha \\
&\leq \theta(D(F_2(x_{n-2}), F_2(x_{n-1})) + \theta^{n-1}) + \theta^n\alpha \\
&\leq \theta^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2\theta^n\alpha \\
&\vdots \\
&\leq \theta^n d(x_0, x_1) + n\theta^n\alpha \to 0 \, quand \, n \to +\infty.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

D'autre part on va démontrer que (x_n) est une suite de Cauchy dans A. On suppose qu'il existe un $\epsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, ils existent $m_k, n_k \in \mathbb{N}$ tels que $m_k > n_k > k$ et $d(x_{m_k}, x_{n_k}) > \epsilon$.
On a

$$\begin{aligned}
d(A, B) &\leq d(y_{n_k-1}, x_{m_k}) \\
&\leq d(y_{n_k-1}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{m_k}) \\
&\leq d(y_{n_k-1}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{m_k}) \\
&\leq d(y_{n_k-1}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_{n_k+1}) + ... + d(x_{m_k-1}, x_{m_k})
\end{aligned} \tag{3.4}$$

On prend la limite on touve $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_{n_k-1}, x_{n_k}) + \lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n_k}, x_{m_k}) = d(A,B)$. Ceci donne $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n_k}, x_{m_k}) = 0$. On trouve que (x_n) est une suite de Cauchy dans un espace métrique complet et donc la suite x_n est convergente dans X. Soit $\overline{x_2} = \lim x_n$. Puisque A est fermé, nous avons $\overline{x_2} \in A$. Et comme $d(x_n, x_{n+1}) = d(y_{n-1}, y_n)$, on a la suite y_n est convergente dans X. Soit $\overline{y} = \lim y_n$, puisque B est fermé, nous avons $\overline{x_2} \in B$.

Et

$$\begin{aligned} 0 &\leq d(y_n, F_2(\overline{x_2})) \\ &\leq D(F_2(x_n), F_2(\overline{x_2})) \\ &\leq \theta d(x_n, \overline{x_2}). \end{aligned}$$

On prend la limite $n \to +\infty$, on trouve $d(\overline{y}, F_2(\overline{x_2})) = 0$. On obtient alors $\overline{x_2}$ est un un meilleur point de proximité dans A qui verifie $d(\overline{x_2}, F_2(\overline{x_2})) = d(A,B)$. On a alors

$$\begin{aligned} d(x_0, \overline{x_2}) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (\theta_2^n d(x_0, x_1) + n\theta_2^n \alpha) \\ &\leq \frac{1}{1-\theta_2} d(x_0, x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} n\theta_2^n \alpha) \\ &\leq \frac{1}{1-\theta_2} (d(x_0, x_1) + \varepsilon) \\ &\leq \frac{1}{1-\theta_2} (D(F_1(x_0), F_2(x_0)) + 2\varepsilon) \end{aligned}$$

On obtient pour tout $\varepsilon > 0$, $d(x_{0,1}, \overline{x_2}) \leq \dfrac{1}{1-\theta_2} (D(F_1(x_{0,1}), F_2(x_{0,1})) + \varepsilon)$. Soit $x_{0,2} \in PF_2$, il existe $\overline{x_1} \in PF_1$ tel que
$d(x_{0,2}, \overline{x_1}) \leq \dfrac{1}{1-\theta_1} (D(F_1(x_{0,1}), F_2(x_{0,1})) + \varepsilon)$, pour tout $\varepsilon > 0$. ∎

Théorème 3.11 *Soient (X, p) un espace métrique partiel complet et A, B deux sous ensembles non vides et fermés de X tels que $A_0 \neq \emptyset$ et la paire (A, B) a la P-proporietée. Soient $F_i : A \rightrightarrows 2^B, i = 1, 2$ deux multi-fonctions à valeurs compacts et non vides. S'ils existent deux constantes $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ telle que*

$$D_p(F_1(x), F_1(y)) \leq \theta_1 p(x, y) \ \forall x \in A \, et \, \forall y \in A.$$

$$D_p(F_2(x), F_2(y)) \leq \theta_2 p(x, y) \ \forall x \in A \, et \, \forall y \in A.$$

Et $F_i(x) \subseteq B_0, i = 1, 2,$ pour tout $x \in A_0$. Alors

$$D_p(PF_1, PF_2) \leq \frac{1}{1 - max\{\theta_1, \theta_2\}}[\sup_{x \in A} D_p(F_1(x), F_2(y))].$$

Démonstration. Soit $x_{0,1} = x_0 \in PF_1$, il existe $y_{0,1} \in F_1(x_0) \subseteq B_0$ tel que $d(x_0, y_{0,1}) = d(A, B)$. D'autre part, il existent $y_0 \in F_2(x_0) \subseteq B_0$ et $x_1 \in A_0$ tels que $p(x_1, y_0) = p(A, B)$. par la P-proporietée, on trouve $p(x_0, x_1) = p(y_{0,1}, y_0)$. Ceci donne $p(x_0, x_1) \leq D_p(F_1(x_0), F_2(x_0)) + \varepsilon$.
On prend $y_1 \in F(x_1) \subseteq B_0$ tel que $p(y_0, y_1) \leq D_p(F_2(x_0), F_2(x_1)) + \theta$.
Et aussi il existe $x_1 \in A_0$, tel que $p(x_1, y_1) = p(A, B)$, et il existe $y_2 \in F_2(x_2) \subseteq B_0$ tel que $p(y_1, y_2) \leq D_p(F_2(x_1), F_2(x_2)) + \theta^2$.
On cotinue pour trouver $x_n \in A_0$, tel que $p(x_n, y_{n-1}) = p(A, B)$, et il existe $y_n \in F_2(x_n) \subseteq B_0$ tel que $p(y_{n-1}, y_n) \leq D_p(F_2(x_{n-1}), F_2(x_n)) + \theta^n$.
Puisque $p(x_{n+1}, y_n) = p(A, B)$ et $p(x_n, y_{n-1}) = p(A, B)$, par la P-proporietée, on trouve $p(x_n, x_{n+1}) = p(y_{n-1}, y_n)$. Ceci donne

$$\begin{aligned}
p(x_n, x_{n+1}) = p(y_{n-1}, y_n) &\leq D_p(F_2(x_{n-1}), F_2(x_n)) + \theta^n \\
&\leq \theta p(x_{n-1}, x_n) + \theta^n \\
&\leq \theta(D_p(F_2(y_{n-2}), F_2(y_{n-1})) + \theta^{n-1}) \\
&\leq \theta(D_p(F_2(x_{n-2}), F_2(x_{n-1})) + \theta^{n-1}) + \theta^n \\
&\leq \theta^2 p(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2\theta^n \\
&\vdots \\
&\leq \theta^n p(x_0, x_1) + n\theta^n \to 0 \, quand \, n \to +\infty.
\end{aligned}$$

Et par définition de p^s, on trouve $p^s(x_n, x_{n+1}) \leq 2p(x_n, x_{n+p}) \to 0$ quand $n \to +\infty$. D'autre part on va démontrer que (x_n) est une suite de Cauchy dans (X, p^s). On suppose qu'il existe un $\epsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, ils existent $m_k, n_k \in \mathbb{N}$ tels que $m_k > n_k > k$ et $p(x_{m_k}, x_{n_k}) > \epsilon$.
On a

$$\begin{aligned}
p(A,B) \leq\, & p(y_{n_k-1}, x_{m_k}) \\
\leq\, & p(y_{n_k-1}, x_{n_k}) + p(x_{n_k}, x_{m_k}) - p(x_{n_k}, x_{n_k}) \\
\leq\, & p(y_{n_k-1}, x_{n_k}) + p(x_{n_k}, x_{m_k}) \\
\leq\, & p(y_{n_k-1}, x_{n_k}) + p(x_{n_k}, x_{n_k+1}) + ... + p(x_{m_k-1}, x_{m_k})
\end{aligned}$$

On prend la limite on touve $\lim\limits_{n\to\infty} p(y_{n_k-1}, x_{n_k}) + \lim\limits_{n\to\infty} p(x_{n_k}, x_{m_k}) = p(A,B)$. Ceci donne $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_{n_k}, x_{m_k}) = 0$. Puisque $p^s(x_{n_k}, x_{m_k}) < 2p(x_{n_k}, x_{m_k}) \to 0$, on trouve que (x_n) est une suite de Cauchy dans (X, p^s), et comme (X, p) est complet alors selon le lemme 1.1, (X, p^s) est un espace métrique complet et la suite x_n est convergente dans X. Soit $\overline{x_2} = \lim x_n$. Puisque A est fermé, nous avons $\overline{x_2} \in A$.
Et comme $p(x_n, x_{n+1}) = p(y_{n-1}, y_n)$ on a la suite y_n est convergente dans X. Soit $\overline{y} = \lim y_n$, puisque B est fermé, nous avons $\overline{y} \in B$.
D'autre part, d'après le lemme 1.1, on a
$p(\overline{x_2}, \overline{x_2}) = \lim\limits_{n\to+\infty} p(x_n, \overline{x_2}) = \lim\limits_{n,m\to+\infty} p(x_n, x_m) = 0$,
$p(\overline{y}, \overline{y}) = \lim\limits_{n\to+\infty} p(y_n, \overline{y}) = \lim\limits_{n,m\to+\infty} p(y_n, y_m) = 0$
et $p(\overline{x_2}, \overline{y}) = p(A,B)$. Et donc

$$\begin{aligned}
0 \leq\, & p(y_n, F_2(\overline{x_2})) \\
\leq\, & D_p(F_2(x_n), F_2(\overline{x_2})) \\
\leq\, & \theta p(x_n, \overline{x_2}).
\end{aligned}$$

On prend la limite $n \to +\infty$, on trouve $p(\overline{y}, F_2(\overline{x_2})) = 0$ ceci donne $p(\overline{y}, F_2(\overline{x_2})) = p(\overline{y}, \overline{y})$, et on utilise la remarque 3.1, pour obtenir $\overline{y} \in \overline{F_2(\overline{x_2})} = F_2(\overline{x_2})$. On obtient alors $\overline{x_2}$ est un un meilleur point de proximité dans A qui verifie $p(\overline{x_2}, F_2(\overline{x_2})) = p(A, B)$. On a alors

$$\begin{aligned}
p(x_0, \overline{x_2}) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} p(x_n, x_{n+1}) - \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n, x_n) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} p(x_n, x_{n+1}) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} (\theta_2^n p(x_0, x_1) + n\theta_2^n \alpha) \\
&\leq \frac{1}{1-\theta_2} p(x_0, x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} n\theta_2^n \alpha) \\
&\leq \frac{1}{1-\theta_2} (p(x_0, x_1) + \varepsilon) \\
&\leq \frac{1}{1-\theta_2} (D_p(F_1(x_0), F_2(x_0)) + 2\varepsilon)
\end{aligned}$$

On obtient pour tout $\varepsilon > 0$, $p(x_{0,1}, \overline{x_2}) \leq \dfrac{1}{1-\theta_2}(D_p(F_1(x_{0,1}), F_2(x_{0,1})) + \varepsilon)$. Soit $x_{0,2} \in PF_2$, il existe $\overline{x_1} \in PF_1$ tel que $p(x_{0,2}, \overline{x_1}) \leq \dfrac{1}{1-\theta_1}(D_p(F_1(x_{0,1}), F_2(x_{0,1})) + \varepsilon)$, pour tout $\varepsilon > 0$. ∎

Exemple 3.4 *Soit (X, p) un espace métrique partiel tel que $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, et p :$X \times X \to \mathbb{R}^+$ est définie par*

$p(0,0) = 0.25$, $p(1,1) = 0.15$, $p(2,2) = 0.20$,
$p(3,3) = p(4,4) = p(5,5) = p(6,6) = p(7,7) = p(8,8) = 0$,
$p(0,1) = 0.4$, $p(0,2) = p(0,6) = 0.4$,
$p(0,3) = p(1,6) = 0.26$, $p(0,4) = p(0,5) = p(0,7) = p(0,8) = 0.5$,
$p(1,2) = p(3,6) = 0.4$, $p(1,3) = p(1,4) = p(1,7) = 0.3$,
$p(1,5) = p(1,8) = 0.5$
$p(2,3) = p(2,4) = p(2,5) = p(2,6) = p(2,7) = p(2,8) = 0.3$,
$p(3,4) = p(3,5) = p(3,6) = p(3,7) = p(3,8) = 0.3$,
$p(4,5) = p(4,6) = p(4,7) = p(4,8) = p(5,6) = p(5,7) = p(5,8) = 0.3$,
$p(5,6) = p(5,7) = p(5,8) = p(6,7) = p(6,8) = p(7,8) = 0.3$,
et $p(x,y) = p(y,x)\, \forall x \in X, \forall y \in X$

On prend $A = \{0,1\}, B = \{3,4,5,6,7,8\},\ A_0 = \{0,1\}$,
$B_0 = \{3,6\}$ *et* $p(A,B) = p(0,3) = p(1,6)$.
Et $F_1, F_2 : A \cup B \rightrightarrows A \cup B$ *sont définies par*
$F_1(0) = \{3,4\},\ F_1(1) = \{4,5\},\ F_2(0) = \{6,7\},\ F_2(1) = \{7,8\}$, *On remarque que* $F_1, F_2 : A \rightrightarrows 2^B$ *sont deux multifonctions à valeurs compacts et non vides. Ils existent deux constantes* $\theta_1, \theta_2 \in (\frac{3}{4}, 1)$ *telles que*

$$D(F_i(x), F_i(y)) \leq \theta_i d(x,y).\ \forall x \in A\, et\, \forall y \in A,$$

et $F_i(x) \subseteq B_0\ \forall x \in A_0$ *pour* $i = 1, 2$.

Alors toutes les conditions de théorème 3.11, sont satisfaites et on a

$$D(PF_1, PF_2) \leq \frac{1}{1 - min\{\theta_1, \theta_2\}}[\sup_{x \in A} D(F_1(x), F_2(x))].$$

tel que $PF_1 = \{0\}, PF_1 = \{1\}$ *:*

$$D(\{0\},\{1\}) \leq \frac{1}{1 - \frac{3}{5}}[max\{D(F_1(0), F_2(0)), D(F_1(1), F_2(1))\}].$$

D'autre part le théorème 3.10, ne peut pas être appliqué, on a F_1 *et* F_2 *ne sont pas contractantes :*
$p^s(0,1) = 0.5,\ p^s(3,4) = 0.6,\ p^s(3,5) = 0.6$,
$p^s(0,1) = 0.5,\ p^s(3,6) = 0.8,\ p^s(3,7) = 0.6,\ p^s(4,6) = p^s(4,7) = 0.6$,
$p^s(4,8) = p^s(5,7) = p^s(5,8) = 0.6$,
et $p^s(x,y) = p^s(y,x)\, \forall x \in X, \forall y \in X$.
On prend $x = 0, y = 1$:

$$\begin{aligned} D_{p^s}(F(0), F(1)) &= max\{e_{p^s}(\{4,5\},\{3,4\}), e_{p^s}(\{3,4\},\{4,5\})\} \\ &= 0.6 \nleq \theta p^s(0,1). \end{aligned}$$

Chapitre 4

Théorème du point fixe pour les contractions généralisées sur un espace métrique partiel

Dans ce chapitre nous donnons une nouvelle version du principe variationnel dEkeland sur les éspaces métriques partiels. Nous avons établi un résultat sur lexistence dun point fixe pour une classe généralisé des contractions sur un espace métrique partiel.

1 Introduction

Le but de ce chapitre est de donner un nouveau résultat sur lexistence dun point fixe pour une classe de fonctions à valeurs définies satisfaisant une condition de contraction sur un espace métrique partiel. Ici notre méthode s'appuie sur le principe variationnel d'Ekeland [33, 1972] (voir aussi [34]) et non sur la méthode classique de Banach-Picard. Dans ce but, on commence par montrer que le principe variationnel classique d'Ekeland peut être généralisé sur les éspaces mérique partiel. Le Principe variationnel d'Ekeland est lun des résultats les plus important de lanalyse non linéaire, il est utilisé aux problèmes de la théorie des points fixes, optimisation, théorie de contrôle optimal, théorie de jeux, équations non linéaires, systèmes dynamiques, etc. voir, par exemple, ([6] - [7], [20], [21], [33] - [36], [43], [64], [68], [79], [92]).

Rappelons que la formule classique du principe variationnel dEkeland est la suivante :

Théorème 4.1 *([19], [16, Théorème 2.1], [79, Théorème B]) Soit (X, d) est un espace métrique. Alors les properiétés suivantes sont équivalent :*

(1) (X, d) *est complet.*

(2) Pour chaque fonction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ semi-continue inférieurement et brnée admet un $d-$point il existe $x \in X$ tel que

$$f(x) < f(y) + d(x, y) \quad \forall y \in X, y \neq x. \tag{4.1}$$

2 Principe variationnel d'Ekeland sur l'espace métrique partiel

Dans cette paragraphe, nous donnons un principe de variation dEkeland sur un espace métrique pour les fonctions satisfaisant certaines conditions de contraction. Commençons par la définition suivante :

Définition 4.1 *Soient (X, p) un espace métrique partiel et la fnction $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Un point $x \in \mathrm{dom} f := f^{-1}(\mathbb{R})$ est appelé un $p-$point de f si*

$$f(x) + p(x, x) < f(y) + p(x, y) \qquad \forall y \in X, y \neq x \ / \ p(y, y) = p(x, x). \tag{4.2}$$

notons que si $p := d$ est une métrique, cette définition coïncide avec lhabituel (4.1). Observez que $p-$ points sont dans $\mathrm{dom} f$, et que tout minimum global de f est un $p-$ point. En effet, considérons que x est un minimum global de f et $y \neq x$ tel que $p(y, y) = p(x, x)$. Par conséquent, $p(x, y) > p(x, x)$ et on obtient

$$f(x) \leq f(y) < f(y) + p(x, y) - p(x, x)$$

x est un $p-$ point de f. notons aussi que si x est un d_p- point de f, est un $p-$ point de $f/2$.

Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction définie sur un espace métrique partiel (X, p). Alors f est semi-continue inférieurement sur X si pour tout x et toute suite (x_n) dans X, on a

$$p(x_n, x) \to p(x, x) \Longrightarrow f(x) \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n). \tag{4.3}$$

Considérons l'ensemble

$$S(x) := \{y \in X \;\; / \;\; p(y, y) = p(x, x) \text{ et } f(y) + p(y, x) \le f(x) + p(x, x)\} \tag{4.4}$$

qui est non vide ($x \in S(x)$) et soit $\hat{f} := f_{|S(x)}$ la restriction de f a $S(x)$.

Proposition 4.1 *Nous avons les propriétés suivantes :*

- **(1)** *x est un $p-$point de f ssi $S(x) = \{x\}$,*
- **(2)** *Si $\hat{x}$ est un $p-$point de la restriction $\hat{f}$ sur $S(x)$ alors $\hat{x}$ est un $p-$point de f sur X,*
- **(3)** *Si $y \in S(x)$ alors $S(y) \subset S(x)$,*
- **(4)** *Si f est semi-continue inférieurement (X, p) alors pour tout x, $S(x)$ est fermé dans (X, d_p) :*

$$\forall (x_n) \subset S(x), \quad \lim_{n\to\infty} d_p(x_n, \bar{x}) = 0 \Longrightarrow \bar{x} \in S(x).$$

Démonstration. (1) Il est clair que si $S(x) = \{x\}$, x est un $p-$point de f. Inversement, considérons un point $y \in X$ tel que $y \neq x$. Si $p(y, y) \neq p(x, x)$, $y \notin S(x)$. On suppose $p(y, y) = p(x, x)$ alors $f(x) + p(x, x) < f(y) + p(y, x)$ (par l'hypothèse) i.e., $y \notin S(x)$.

(2) $\hat{x}$ est un $p-$point de $\hat{f}$ sur $S(x)$ et $y \in X, y \neq \hat{x}$ tel que $p(y, y) = p(\hat{x}, \hat{x})$. Par conséquent, $p(y, y) = p(x, x)$. Si $y \in S(x)$ alors (4.2) satisfait pour $\hat{x}$. On suppose $y \notin S(x)$ et comme $\hat{x} \in S(x)$, nous obtenons la conclusion depuis

$$f(\hat{x}) + p(x, \hat{x}) \le f(x) + p(x, x) < f(y) + p(y, x)$$

(3) Soit $y \in S(x)$ et $z \in S(y)$ alors $p(z,z) = p(y,y) = p(x,x)$ et

$$\begin{aligned} f(z) + p(x,z) &\leq f(z) + p(x,y) + p(y,z) - p(y,y) \\ &\leq f(y) + p(y,x) \leq f(x) + p(x,x) \end{aligned}$$

on a $z \in S(x)$.

(4) On suppose que f est semi-continue inférieurement et x dans X. Considérons une suite (x_n) dans $S(x)$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} d_p(x_n, \bar{x}) = 0$, donc $p(\bar{x}, \bar{x}) = \lim_{n\to\infty} p(\bar{x}, x_n) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = p(x,x)$ car $x_n \in S(x)$ pour tout n. De plus, en utilisant l'inégalité suivante

$$p(\bar{x}, x) \leq p(\bar{x}, x_n) + p(x_n, x) - p(x,x),$$

On obtient

$$p(\bar{x}, x) \leq \liminf_{n\to\infty} p(x_n, x).$$

De plus par (4.4), on a

$$f(x_n) + p(x_n, x) \leq f(x) + p(x,x)$$

et la semi-continuité inférieure de f conduit à

$$f(\bar{x}) + p(\bar{x}, x) \leq \liminf_{n\to\infty} (f(x_n) + p(x_n, x)) \leq f(x) + p(x,x)$$

Alors $S(x)$ est fermé. ■

Nous donnons maintenant notre principal résultat sur le principe de variation dEkeland sur les espaces métriques.

Théorème 4.2 *Soit (X,p) est un espace mérique complet et soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ semi-continue inférieurement et brnée. Soient $x_0 \in \mathrm{dom} f$ et $\lambda > 0$ fixé. Alors il existe $\bar{x} \in X$ tel que $p(\bar{x}, \bar{x}) = p(x_0, x_0)$ et*

(1) $f(\bar{x}) - f(x_0) \leq \lambda(p(x_0, x_0) - p(\bar{x}, x_0)) \leq 0,$

(2) $f(\bar{x}) + \lambda p(\bar{x}, \bar{x}) < f(y) + \lambda p(\bar{x}, y)$ *pour tout $y \in X, y \neq \bar{x}$ tel que $p(y,y) = p(\bar{x}, \bar{x})$ alors f admet un $p-$point.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer $\lambda := 1$. Pour $x \in \mathrm{dom} f$, on définit $v(x) := \inf_{y \in S(x)} f(y) > -\infty$ puisque f est semi-continue inférieurement et brnée. Soit $x_0 \in \mathrm{dom} f$ on suppose que x_0 n'est pas un $p-$point (sinon il n'y a rien à prouver). Il existe alors $x_1 \in S(x_0)$, $x_1 \neq x_0$ tel que $f(x_1) \leq v(x_0) + \frac{1}{2}$. Supposons qu'on a construit une suit (x_n) telle que pour n,

$$x_{n+1} \in S(x_n), x_{n+1} \neq x_n \text{ tel que } f(x_{n+1}) \leq v(x_n) + \frac{1}{2^n}. \tag{4.5}$$

Observons d'abord que de la Proposition 4.1, la suite $(S(x_n))$ est décroissante ($S(x_m) \subset S(x_n)$ pour $m \geq n$) alors pour tout $m \geq n$, $p(x_m, x_m) = p(x_n, x_n)$. De plus, en appliquant l'inégalité triangulaire nous obtenons pour tout n,

$$\begin{aligned} f(x_{n+2}) + p(x_n, x_{n+2}) &\leq f(x_{n+2}) + p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+2}) - p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq f(x_{n+1}) + p(x_n, x_{n+1}) \\ &\leq f(x_n) + p(x_n, x_n) \end{aligned}$$

donc par induction, on a

$$f(x_m) + p(x_n, x_m) \leq f(x_n) + p(x_n, x_n) \tag{4.6}$$

pour tout $n, m\,;\, m \geq n$,

$$0 \leq p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) \leq f(x_n) - f(x_m). \tag{4.7}$$

Observons que (4.7) implique que $(f(x_n))$ est une suite décroissante des nombres réels et comme elle est bornée, la suite $(f(x_n))$ est convergente. Donc, $\lim_{n,m\to\infty} (p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n)) = 0$.
Ainsi $\lim_{n,m\to\infty} d_p(x_n, x_m) = 2 \lim_{n,m\to\infty} (p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n)) = 0$ par conséquent (x_n) est une suite de Cauchy dans (X, d_p) qui est complet (par le Lemme 1.1). Il exite alors $\bar{x} \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} d_p(x_n, \bar{x}) = 0$ alors de (1.3),

$$p(\bar{x}, \bar{x}) = \lim_{n\to\infty} p(\bar{x}, x_n) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m).$$

D'autre part, depuis $S(x_{n+m}) \subset S(x_n)$ pour tout n, m, la suite $(x_{n+m})_m$ est dans $S(x_n)$ et verifie $\lim\limits_{m\to\infty} d_p(x_{n+m}, \bar{x}) = 0$ pour tout n fixé ainsi $\bar{x} \in S(x_n)$ pour tout n ($S(x_n)$ est fermé). Particulièrement, $\bar{x} \in S(x_0)$ alors $\bar{x}$ vérifie
$p(\bar{x}, \bar{x}) = p(x_0, x_0)$ et $f(\bar{x}) + p(\bar{x}, x_0) \leq f(x_0) + p(x_0, x_0)$.

Nous prouvons maintenant que $\bar{x}$ est un $p-$point de f. Considérons un point y dans $S(\bar{x})$ avec $y \neq \bar{x}$. Alos $y \in S(x_n) \subset S(x_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$ et on utilise (4.5), on obtient

$$f(y) \leq f(y) + p(x_n, y) - p(x_n, x_n) \leq f(x_n) \leq v(x_{n-1}) + \frac{1}{2^n} \leq f(y) + \frac{1}{2^n}$$

Ainsi

$$0 \leq p(x_n, y) - p(x_n, x_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Nous concluons que $\lim_{n\to\infty} p(x_n, y) = p(\bar{x}, \bar{x})$ car $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = p(\bar{x}, \bar{x})$. Comme

$$p(\bar{x}, y) + p(x_n, x_n) - p(\bar{x}, x_n) \leq p(x_n, y) \leq p(\bar{x}, y) + p(x_n, \bar{x}) - p(\bar{x}, \bar{x}),$$

$\lim_{n\to\infty} p(x_n, y) = p(\bar{x}, y)$. Ainsi $p(\bar{x}, y) = p(\bar{x}, \bar{x}) = p(y, y)$ $(y \in S(\bar{x}))$ et donc $y = \bar{x}$. Cela conduit a $\bar{x}$ est un $p-$point. ■

L'inverse du théorème ci-dessus est le suivant :

Théorème 4.3 *Soit (X, p) un espace métrique complet et soit pour toute $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semi-continue inférieurement et bornée et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x_\varepsilon \in X$ tel que*

$$f(x_\varepsilon) \leq \inf_{x\in X} f(x) + \varepsilon$$

et

$$f(x_\varepsilon) + \varepsilon p(x_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq f(x) + \varepsilon p(x, x_\varepsilon) \quad \forall x \in X.$$

Démonstration. Considérons (x_n) est une suite de Cauchy sur (X, p) et on définit une fonction $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ tel que $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} p(x_n, x) - p(x, x)$ pour tout $x \in X$. Alors f est non négative sur (X, p). En effet, Soit $y \in X$ et on prend la suite (y_m) telle que $\lim_{m\to\infty} p(y_m, y) = p(y, y)$. Or pour tout n et m,

$$p(x_n, y) - p(y, y) \leq p(x_n, y_m) + p(y_m, y) - p(y_m, y_m) - p(y, y)$$

on obtient quand $n \to \infty$,

$$f(y) \leq f(y_m) + p(y_m, y) - p(y, y)$$

Et ainsi

$$f(y) \leq \liminf_{m\to\infty} f(y_m).$$

De plus, depuis (x_n) est une suite de Cauchy donc $\lim_{m\to\infty} f(x_m) = 0$ en utilisant le fait que $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = \lim_{m\to\infty} p(x_m, x_m) \in \mathbb{R}$. Par conséquent $\inf_{x\in X} f(x) = 0$.

Soit $\varepsilon \in (0, 1)$ par hypothèse il existe $\bar{x} \in X$ tel que $f(\bar{x}) \leq \varepsilon$ et

$$f(\bar{x}) + \varepsilon p(\bar{x}, \bar{x}) \leq f(x) + \varepsilon p(x, \bar{x}) \quad \forall x \in X$$

Ainsi

$$f(\bar{x}) \leq f(x_n) + \varepsilon(p(x_n, \bar{x}) - p(\bar{x}, \bar{x})).$$

On prend la limite quand $n \to \infty$, on obtient $f(\bar{x}) \leq \varepsilon f(\bar{x})$ et $f(\bar{x}) = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} p(x_n, \bar{x}) = p(\bar{x}, \bar{x})$. On déduit que (x_n) converge vers $\bar{x}$ et (X, p) est complet. ■

3 Point fixe de contractions généralisées

Lexistence de points fixes pour des fonctions contractantes à valeurs définies avait été étudié par nombreux auteurs dans différentes conditions. La théorie des points fixes de Les contractions définies établies par Nadler [66] ont été développées dans différents instructions de nombreux auteurs, en particulier de Reich [82, 1972], Mizoguchi-Takahashi [65, 1989], Takahashi [91, 1991], Azé-Penot [17, 2006], Feng-Liu [37, 2006], Benahmed-Azé [19, 2010].

Aydi et al. [10, 2013] ont introduit le concept de point fixe de Nadler sur l'espace métrique partiel de Hausdorf.

Notre but est maintenant détablir un théorème de point fixe sur les espaces métriques partiels en utilisant notre version précédente du principe variationnel dEkeland. On obtient alors une nouvelle généralisation du résultat dAydi [10] et Le résultat de Benahmed [19].

On a la métrique partielle de Pompeiu-Hausdorf sur un espace métrique partiel (X, d) est défini comme suit . Soient A, B deux sous-ensembles non vides de X, l'excé partiel de A sur B est défini par

$$e_p(A, B) := \sup(p(x, B), x \in A)$$

où $p(x, B) := \inf(p(x, y), y \in B)$. Il est prouvé dans [10] que e_p vérifie :

$$\begin{aligned}
&e_p(A, A) = \sup_{a \in A} p(a, a), \\
&e_p(A, A) \leq e_p(A, B), \\
&e_p(A, B) = 0 \Longrightarrow A \subseteq B, \\
&e_p(A, B) \leq e_p(A, C) + e_p(C, B) - \inf_{c \in C} p(c, c)
\end{aligned}$$

pour tous $A, B, C \in CB^p(X)$ où $CB^p(X)$ est la famille de tous les sous-ensembles non vides, fermés et bornés de l'espace métrique partiel (X, p). notons que la fermeture concerne la métrique partielle p, A est fermé sur (X, τ_p) si $\bar{A} = A$, et la limite est donnée comme suit : A est un sous-ensemble lié dans (X, p) s'il existe une boule $B_p(x_0, r)$ telle que un $sous-ensemble B_p(x_0, r)$ est $p(x_0, a) < p(a, a) + r$ pour tout $a \in A$.

Considérons maintenant la métrique partielle de Pompeiu-Hausdorf de A et B définie dans [10] est donnée par

$$h_p(A, B) := \max(e_p(A, B), e_p(B, A))$$

pour tout $A, B \in CB^p(X)$.

Le résultat suivant est le théorème généralisé de contraction de Banach donné récemment par Aydi et al. [10] :

Théorème 4.4 *Soit* (X, p) *un espace mérique partiel complet et soit* $k \in [0, 1)$. *Si* $T : X \to CB^p(X)$ *est une mutifonction telle que pour tout*

$x, y \in X$, on a

$$h_p(Tx, Ty) \leq kp(x, y)$$

alors T a un point fixe $x \in X$ tel que $x \in Tx$.

On présente la propriété de contraction généralisée suivante de multifonction sur les espaces métriques partiels : a partir d'une fonction à valeurs définies $T : X \rightrightarrows X$ avec des valeurs non vides, on dit que T est une $p-$contraction généraliée s'il existe $\theta, \kappa \in (0, 1)$ alors pout tout $x \in X$ tel que $p(x, Tx) > p(x, x)$ il existe $y \in Tx$ avec $y \neq x$ et $p(y, y) = p(x, x)$ qui vérifie

$$\begin{cases} (i)\ \kappa p(x, y) + (1 - \kappa)p(x, x) < p(x, Tx) \leq p(x, y) \\ \\ (ii)\ p(y, Ty) \leq \theta p(x, y) + (1 - \theta)p(x, x). \end{cases} \tag{4.8}$$

Quand on considère la métrique partielle comme une métrique dans (4.8), et tant que cas particulier de la notion de contraction généralisée des fonctions à valeur définie donnée par Benahmed-Azé [19].

On note par $\mathcal{F}_T := \{x \in X : x \in Tx\}$ l'ensemble de points fixes de T et on observe qui est chaque valeur de T est fermé par rapport à la topologie τ_p on a

$$\mathcal{F}_T := \{x \in X : p(x, Tx) = p(x, x)\} \tag{4.9}$$

puisque on a l'équivalence (voir [10, Remarque 2.1])

$$a \in \bar{A} \iff p(a, A) = p(a, a) \tag{4.10}$$

pour tout ensemble non vide $A \subset X$.

On va montrer que chaque fonction à valeurs définies $T : X \rightrightarrows X$ qui est une $p-$contraction généralisée satisfaite la proporiété de point fixe approximatif (voir [42]) alors

$$\inf_{x \in X} (p(x, Tx) - p(x, x)) = 0$$

On a pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x_\varepsilon \in X$ tel que

$$p(x_\varepsilon, Tx_\varepsilon) < p(x_\varepsilon, x_\varepsilon) + \varepsilon.$$

On remarque que $p(x,x) \leq p(x,Tx)$ depuis $p(x,x) \leq p(x,y)$ pour tout $x, y \in X$.

Proposition 4.2 *Soit (X,p) un espace mérique partiel et soit $T : X \rightrightarrows X$ une mltifonction $p-$contractive généralisée avec des valeurs fermés telle que $\theta < \kappa$. Alors $\inf\limits_{x\in X}(p(x,Tx) - p(x,x)) = 0$.*

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ tel que $p(x_0, Tx_0) > p(x_0, x_0)$. par (4.8), on trouve $x_1 \in T(x_0)$, $x_1 \neq x_0$ et $p(x_1, x_1) = p(x_0, x_0)$ alors

$$\begin{cases} \kappa p(x_0, x_1) + (1-\kappa)p(x_0, x_0) < p(x_0, Tx_0) \\ \\ p(x_1, Tx_1) \leq \theta p(x_0, x_1) + (1-\theta)p(x_0, x_0). \end{cases}$$

Et $p(x_1, x_1) \leq p(x_1, Tx_1)$. Si $p(x_1, Tx_1) = p(x_1, x_1)$, on obtient la conclusion demandée. On suppose maintenant $p(x_1, T(x_1)) > p(x_1, x_1)$ et on constuit une suite fini $(x_i)_{i=0,..,n}$ telle que pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, $p(x_i, Tx_i) > p(x_i, x_i)$ et pour $i \in \{0, ..., n-1\}$, $x_{i+1} \in Tx_i$ ($x_{i+1} \neq x_i$, $p(x_{i+1}, x_{i+1}) = p(x_i, x_i)$) avec

$$\begin{cases} \kappa p(x_i, x_{i+1}) + (1-\kappa)p(x_i, x_i) < p(x_i, Tx_i) \\ \\ p(x_{i+1}, Tx_{i+1}) \leq \theta p(x_i, x_{i+1}) + (1-\theta)p(x_i, x_i). \end{cases} \tag{4.11}$$

On applique l'hypothèse (4.8), on peut trouver $x_{n+1} \in Tx_n$ tel que $x_{n+1} \neq x_n$, $p(x_{n+1}, x_{n+1}) = p(x_n, x_n)$ et

$$\begin{cases} \kappa p(x_n, x_{n+1}) + (1-\kappa)p(x_n, x_n) < p(x_n, Tx_n) \\ \\ p(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq \theta p(x_n, x_{n+1}) + (1-\theta)p(x_n, x_n). \end{cases} \tag{4.12}$$

Si $p(x_{n+1}, Tx_{n+1}) = p(x_{n+1}, x_{n+1})$ alors $\inf\limits_{x\in X}(d(x,Tx) - p(x,x)) = 0$.

On suppose que $p(x_{n+1}, Tx_{n+1}) > p(x_{n+1}, x_{n+1})$. Par induction, soit le processus s'arrête s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p(x_k, Tx_k) = p(x_k, x_k)$ ou on a construit (x_n) qui vérifie $p(x_n, Tx_n) > p(x_n, x_n)$ et (4.12) pour tout n. Soit us set $\delta_n := p(x_n, Tx_n) - p(x_n, x_n)$ et $\mu_n := p(x_n, x_{n+1}) - p(x_n, x_n)$. On remarque que $0 \leq \delta_n \leq \mu_n$ depuis $x_{n+1} \in Tx_n$. D'autre part, on a $\theta < \kappa$, qui donne depuis (4.11) et (4.12) et le fait que $p(x_n, x_n) = p(x_{n+1}, x_{n+1})$,

$$\delta_{n+1} \leq \theta(p(x_n, x_{n+1}) - p(x_n, x_n))$$

$$\leq \kappa(p(x_n, x_{n+1}) - p(x_n, x_n)) \leq \delta_n$$

et

$$\mu_n < \kappa^{-1}(p(x_n, Tx_n) - p(x_n, x_n)) \tag{4.13}$$

$$\leq \theta\kappa^{-1}(p(x_n, x_{n-1}) - p(x_{n-1}, x_{n-1})) \leq \mu_{n-1}$$

alors (δ_n) et (μ_n) sont suites non négatives et décoissantes dans $\mathbb{R}$. Soient (δ_n) et (μ_n) convergentes vers $\bar{\delta}$ et $\bar{\mu}$ respectivement qui verifie $0 \leq \bar{\delta} \leq \bar{\mu}$. Si $\bar{\delta} > 0$ on trouve,

$$\delta_{n+1} \leq \theta(p(x_n, x_{n+1}) - p(x_n, x_n)) \leq \frac{\theta}{\kappa}\kappa(p(x_n, x_{n+1}) - p(x_n, x_n))$$

$$\leq c(p(x_n, Tx_n) - p(x_n, x_n)) \leq c\delta_n$$

la contradction $\bar{\delta} \leq c\bar{\delta} < \bar{\delta}$ depuis $c = \dfrac{\theta}{\kappa} < 1$. On obtient $\lim\limits_{n\to\infty}(p(x_n, Tx_n) - p(x_n, x_n)) = 0$ et donc le résultat suivant.

On remarque que de (4.13), $\lim\limits_{n\to\infty}(p(x_n, x_{n+1}) - p(x_n, x_n)) = 0$. ■

Le résultat suivant est consacré à lexistence de points fixes pour les contractions généralisés sur l'espace partiel.

Théorème 4.5 *Soit (X, p) un espace métrique complet partiel et Soit $T : X \rightrightarrows X$ est une mutifonction avec des valeurs non vides fermés. On* *supose que :*

(i) T est une $p-$contraction avec $0 < \theta < \kappa < 1$,

(ii) La fonction $x \to p(x,Tx) - p(x,x)$ est semi-continue inférieurement.

Alors $\mathcal{F}_T \neq \varnothing$ et pour tout $x \in X$ tel que $p(x,Tx) > p(x,x)$,

$$(\kappa - \theta)p(x, \mathcal{F}_T) \leq p(x,Tx) - (1 - (\kappa - \theta))p(x,x).$$

Démonstration. Définissons $f : X \to \mathbb{R}$ par $f(x) := (\kappa - \theta)^{-1}(p(x,Tx) - p(x,x))$ telle que est semi-continue inférieurement et non négative (par hypothèse (ii)). D'où par le théorème 4.2, f a un $p-$point noté $\bar{x}$. Sinon, pour tout $x \in X$ tel que $p(x,Tx) > p(x,x)$, il existe d'hypothèse (i), $y \in Tx$ (avec $y \neq x$ et $p(y,y) = p(x,x)$) tel que

$$\begin{cases} \kappa p(x,y) + (1-\kappa)p(x,x) \leq p(x,Tx) \\ \\ p(y,Ty) \leq \theta p(x,y) + (1-\theta)p(x,x). \end{cases}$$

Donc

$$p(y,Ty) + (\kappa - \theta)p(x,y) \leq p(x,Tx) + (\kappa - \theta)p(x,x)$$

ceci donne,

$$f(y) + p(x,y) \leq f(x) + p(x,x).$$

On déduit que pour tout x tel que $p(x,Tx) > p(x,x)$ n'est pas un $p-$point de f Ainsi $d(\bar{x}, T\bar{x}) \leq p(\bar{x}, \bar{x})$. Puisque $d(\bar{x}, \bar{x}) \leq p(\bar{x}, T\bar{x})$, on obtient $p(\bar{x}, T\bar{x}) = p(\bar{x}, \bar{x})$ et de (4.10, 4.9), $\mathcal{F}_T \neq \varnothing$. De la même manière, pour tout $p-$point y de f dans $S(x)$ où $p(x, T(x)) > p(x,x)$ tel que $y \in \mathcal{F}_T$ verifie

$$p(x,y) \leq f(y) + p(x,y) \leq f(x) + p(x,x)$$

ainsi

$$(\kappa - \theta)p(x, \mathcal{F}_T) \leq p(x,Tx) - (1 - (\kappa - \theta))p(x,x)$$

et le théorème est prouvé. ∎

Notons que l'hypothèse (ii) est satisfaite chaque fois que l'on a

$$p(x,y) \to p(x,x) \Longrightarrow e_p(Ty,Tx) \to 0$$

or

$$p(x,Tx) - p(x,x) \leq p(x,y) + p(y,Tx) - p(y,y) - p(x,x)$$

$$\leq [p(x,y) - p(x,x)] + [p(y,Ty) - p(y,y)] + e_p(Ty,Tx)$$

en utilisant le fait que

$$p(y,Tx) \leq p(y,Ty) + e_p(Ty,Tx) - \inf_{z \in Ty} p(z,z) \leq p(y,Ty) + e_p(Ty,Tx).$$

Remarque 4.1 *Notons que le théorème précédent peut être généralisée pour les multifonctions T satisfaisant la condition de contraction généralisée $p-$ suivante : pour tout $y \neq x$ et $p(y,y) = p(x,x)$ alors*

$$\begin{cases} (i)\ \kappa(p_x)p(x,y) + (1-\kappa(p_x))p(x,x) < p(x,Tx) \leq p(x,y) \\ \\ (ii)\ p(y,Ty) \leq \theta(p(x,y))p(x,y) + (1-\theta(p(x,y)))p(x,x) \end{cases}$$

ou $\kappa(\cdot) : (0,+\infty) \to [\bar{\kappa}, 1]$ avec $\bar{\kappa} \in (0,1]$ est une fonction non croissante et $\theta(\cdot) : (0,+\infty) \to [0,1)$ tel que $\theta(\cdot) < \kappa(\cdot)$ et $\limsup_{t \downarrow s} \theta(t)/\kappa(t) < 1$ pour tout $s > 0$.

Chapitre 5

Stablité de point fixe pour les multifonctions non pseudo-contractives

Dans ce chapitre on donne un résultat de stabilité de point fixe qui donne une variante du théorème de Nadler.

1 Notion de pseudo-équicontinuité

Soit $(T_n : D \rightrightarrows X)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de multifonctions à valeurs non vides définies sur $D \subset X$. Rappelons que la suite est dite équicontinue en $x_0 \in D$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0, \forall x \in D \cap B(x_0, \rho) : D(T_n x, T_n x_0) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Introduisant maintenant une notion d'équicontinuité comme suit

Définition 5.1 *On dira que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est pseudo-équicontinuité sur D relativement à un sous-ensemble $U \subset X$ si*

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0, \forall y \in D \cap B(x, \rho) : e(T_n y \cap U, T_n x) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera dite pseudo-équicontinuité en $x \in D$ s'il existe $\alpha > 0$ tel

que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0, \forall y \in D \cap B(x,\rho) : e(T_n y \cap B(x,\alpha), T_n x) < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

2 Stabilité de points fixes

Rappelons tout d'abord un résultat de stabilité dû à Nadler.

Théorème 5.1 *(Nadler) Soient (X,d) un espace métrique, $(T_n : X \rightrightarrows X)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ une famille de multifonctions contractantes à valeurs fermées bornées et non vides telle que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers T_∞. Si, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, x_n est un point fixe de T_n et si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente vers un point x_∞ alors x_∞ est un point fixe de T_∞.*

En fait, pour établir un tel résultat, il suffit de supposer que la suite (T_n) est pseudo-équicontinue et qu'une suite (x_n) de points fixes admet une sous-suite $(x_{s(n)})$ convergente vers un point x_∞ telle que $(T_{s(n)}x_\infty)$ converge vers $T_\infty x_\infty$ au sens de Hausdorf et l'ensemble $T_\infty x_\infty$ soit fermé (non vide). De façon plus générale, nous prouvons la propriété suivante

Proposition 5.1 *Soient (X,d) un espace métrique et $(T_n : X \rightrightarrows X)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ une famille de multifonctions à valeurs non vides. Supposons que, pour tout entier n, x_n est un point fixe de T_n. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(x_{s(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un point x_∞ telle que $T_\infty x_\infty$ soit fermé et telle que $e(T_{s(n)}x_\infty, T_\infty x_\infty) \to 0$. Si, de plus, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est pseudo-équicontinue en x_∞, alors x_∞ est un point fixe de T_∞.*

Démonstration. Considérons une suite (x_n) de points fixes admettant une sous-suite $(x_{s(n)})$ qui converge vers un point x_∞ tel que $T_\infty x_\infty$ soit fermé, $e(T_{s(n)}x_\infty, T_\infty x_\infty) \to 0$ et tel que la suite (T_n) soit pseudo-équicontinue en x_∞. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que la propriété (5.1) soit satisfaite. Soit $\varepsilon > 0$, d'après (5.2) il existe $\exists \rho > 0$ tel que pour tout $u \in B(x_\infty, \rho)$ et pour tout entier n on ait

$$e(T_n u \cap B(x_\infty, \alpha), T_n x_\infty) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $x_{s(n)} \to x_\infty$ alors $x_{s(n)} \in B(x_\infty, \min(\alpha, \rho, \frac{\varepsilon}{2}))$ pour n assez grand. De plus comme $x_{s(n)}$ est un point fixe de $T_{s(n)}$, $x_{s(n)} \in T_{s(n)}x_{s(n)} \cap B(x_\infty, \alpha)$. Il vient alors, grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} d(x_{s(n)}, T_\infty x_\infty) &\leq d(x_n, T_{s(n)}x_\infty) + e(T_{s(n)}x_\infty, T_\infty x_\infty) \\ &\leq e(T_{s(n)}x_{s(n)} \cap B(x_\infty, \alpha), T_{s(n)}x_\infty) + e(T_{s(n)}x_\infty, T_\infty x_\infty) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Faisant tendre n vers $+\infty$, $d(x_{(n)}, T_\infty x_\infty) \to 0$. D'où par continuité de la fonction $d(\cdot, T_\infty x_\infty)$ et sachant que $T_\infty x_\infty$ est fermé, on obtient le résultat voulu. ■

Soit maintenant $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ une famille de sous-ensembles non vides d'un espace métrique X et $(T_n : X_n \rightrightarrows X)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ une famille des multifonctions à valeurs non vides. Introduisons quelques notions d'équicontinuité et de convergence relativement à de multifonctions définies dans des domaines différents.

Définition 5.2 *(1) On dira que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est pseudo-équicontinuité en $x \in X$ s'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall u, v \in X_n \cap B(x, \rho) : e(T_n u \cap B(x, \alpha), T_n v) < \varepsilon. \tag{5.2}$$

(2) On dira que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T_∞ si

$$\forall x \in X_\infty, \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Pi_n X_n : x_n \to x \text{ et } e\left(T_n x_n, T_\infty x\right) \to 0. \tag{5.3}$$

Notons que lorsque tous les sous-ensembles X_n sont égaux à X, la notion de convergence (5.3) qui se traduit par

$$\forall x \in X_\infty, \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : x_n \to x \text{ et } e\left(T_n x_n, T_\infty x\right) \to 0, \tag{5.4}$$

est plus générale que la convergence simple au sens de Hausdorf (voir[66]).Enonçons le résultat obtenu :

Théorème 5.2 *Soient* (X,d) *un espace métrique et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ *une famille de parties non vides de* X, $(T_n : X_n \rightrightarrows X)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ *une famille de multifonctions à valeurs non vides satisfaisant la propriété (5.3). Si, pour tout entier* n, x_n *est un point fixe de* T_n *et si la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous-suite converge vers un point* $x_\infty \in X_\infty$ *tel que* $T_\infty x_\infty$ *soit fermé. Si de plus, la suite* (T_n) *est pseudo-équicontinue en* x_∞ *alors* x_∞ *est un point fixe de* T_∞.

Démonstration. Soit pour chaque entier n, x_n un point fixe de T_n tel qu'il existe une sous-suite $(x_{s(n)})$ converge vers $x_\infty \in X_\infty$. D'après (5.3), il existe $(y_n) \in \Pi_n X_n$ vérifiant $y_n \to x_\infty$ et $e(T_n y_n, T_\infty x_\infty) \to 0$. D'autre part, la suite (T_n) est pseudo-équicontinue en x_∞ alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall u, v \in X_n \cap B(x_\infty, \rho) : e(T_n u \cap B(x_\infty, \alpha), T_n v) < \varepsilon. \tag{5.5}$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\gamma := \min(\frac{\varepsilon}{3}, \alpha, \rho)$. Comme les deux sous-suites $(x_{s(n)})$ et $(y_{s(n)})$ convergent vers $x_\infty \in X_\infty$ alors à partir d'un certain rang, $x_{s(n)}, y_{s(n)} \in X_{s(n)} \cap B(x_\infty, \gamma)$.
D'où, par (5.5), $e(T_{s(n)} x_{s(n)} \cap B(x_\infty, \alpha), T_{s(n)} y_{s(n)}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout entier n assez grand
i.e.$\lim e(T_{s(n)} x_{s(n)} \cap B(x_\infty, \alpha), T_{s(n)} y_{s(n)}) = 0$.
La conclusion découle alors de l'inégalité :

$$d(x_\infty, T_\infty x_\infty) \leq d(x_\infty, x_{s(n)}) + e(T_{s(n)} x_{s(n)} \cap B(x_\infty, \alpha), T_{s(n)} y_{s(n)}) + e(T_{s(n)} y_{s(n)}, T_\infty x_\infty).$$

■

Le cas pseudo-lipschitzien avec la suite des constantes de Lipschitz bornée (en particulier, le cas pseudo-contractant) est alors une conséquence immédiate. Le résultat suivant donne une variante du théorème de Nadler.

Corollaire 5.1 *Soient* (X,d) *un espace métrique,* $(T_n : X \rightrightarrows X)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ *une famille de multifonctions à valeurs non vides satisfaisant la propriété (5.4). Si, pour tout entier* n, x_n *est un point fixe de* T_n *et si la* *suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous-suite convergente vers un point* $x_\infty \in X_\infty$ *telle que* $T_\infty x_\infty$ *soit fermé. Si de plus, chaque* T_n *est pseudo-contractante (resp.* κ_n-*pseudo-lipschitzienne avec* (κ_n) *bornée) relativement à une certaine boule* $B(x_\infty, \alpha)$ *alors* x_∞ *est un point fixe de* T_∞.

3 Convergence faible d'une suite de points fixes

Rappelons le théorème de Lami Dozo [54] sur l'existence d'un point fixe pour une multifonction non-dilatante lorsque la condition d'Opial est satisfaite, i.e. :

pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente faiblement vers un point $x \in X$ et pour tout $y \in X$ on a :

$$y \neq x \Longrightarrow \liminf \|x_n - y\| > \liminf \|x_n - x\| . \tag{5.6}$$

Théorème 5.3 *(Lami Dozo) Soient* X *un espace de Banach satisfaisant la condition d'Opial,* M *une partie convexe faiblement compacte non vide de* X *et soit* $T : M \rightrightarrows X$ *une multifonction non-dilatante à valeurs compactes non vides telle que* $T(M) \subset M$*. Alors* T *admet au moins un point fixe.*

Donnons le théorème de stabilité de Lim [56, Théorème 2].

Théorème 5.4 *(Lim) Soient* X *un espace de Banach satisfaisant la condition d'Opial,* M *une partie faiblement fermée non vide de* X*,* $T_\infty : M \rightrightarrows X$ *une multifonction à valeurs fermées non vides. Soit* $(T_n : M \rightrightarrows X)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de multifonctions non-dilatantes à valeurs compactes non vides telle que* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* T_∞*. Si, pour chaque entier* n*,* x_n *est un point fixe de* T_n *et si, de plus,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers un point* x_∞ *alors* x_∞ *est un point fixe de* T_∞.

Enonçons notre propre résultat par le :

Théorème 5.5 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ *une famille de sous-ensembles non vides d'un espace de Banach* X *satisfaisant la condition d'Opial et soit* $(T_n : X_n \rightrightarrows X)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de multifonctions à valeurs non vides* *et convergente au sens (5.3) vers une multifonction $T_\infty : X_\infty \rightrightarrows X$ à valeurs non vides. On suppose que les multifonctions T_n sont pseudo-nondilatantes relativement à une boule $B(x_0, r)$. S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Pi_n X_n$ telle que $x_n \in T_n x_n \cap B(x_0, r')$ ($r' \in (0, r)$), $x_n \rightharpoonup x_\infty \in X_\infty$ et $T_\infty x_\infty$ soit compact. Alors x_∞ est un point fixe de T_∞.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de points fixes associés à $(T_n : X_n \rightrightarrows X)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(x_n) \subset B(x_0, r')$ avec $r' \in (0, r)$ et satisfaisant les hypothèses du théorème ci-dessus. D'après la propriété (5.3), il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Pi_n X_n$ vérifiant $y_n \to x_\infty$ et $e(T_n y_n, T_\infty x_\infty) \to 0$. La suite (x_n) étant faiblement convergente vers x_∞ alors

$$\|x_\infty - x_0\| \leq \liminf_n \|x_n - x_0\| \leq r',$$

d'où par convergence forte e (y_n) vers x_∞, on a $\|y_n - x_0\| < r$ pour tout entier n assez grand. ainsi, comme T_n est pseudo-nondilatante relativement à $B(x_0, r)$, il devient :

$$d(x_n, T_n y_n) \leq e(T_n x_n \cap B(x_0, r), T_n y_n) \leq \|x_n - y_n\|.$$

Chaque sous-ensemble $T_n y_n$ est non vide ; il existe donc, pour $\varepsilon_n \to 0$, $z_n \in T_n y_n$ tel que

$$\|x_n - z_n\| \leq \|x_n - y_n\| + \varepsilon_n \tag{5.7}$$

$$\leq \|x_n - x_\infty\| + \|x_\infty - y_n\| + \varepsilon_n. \tag{5.8}$$

De plus, $T_\infty x_\infty$ est compact et non vide et donc il existe, pour chaque entier n, $u_n \in T_\infty x_\infty$ tel que $d(z_n, T_\infty x_\infty) = \|z_n - u_n\|$ et comme chaque $z_n \in T_n y_n$, on a l'inégalité suivante :

$$\|z_n - u_n\| \leq e(T_n y_n, T_\infty x_\infty). \tag{5.9}$$

La suite (u_n) admet une sous-suite $(u_{s(n)})$ convergente vers un point

$u \in T_\infty x_\infty$. D'après les inégalités (5.7) et (5.9), on a pour tout entier n,

$$\begin{aligned}\left\|x_{s(n)} - u\right\| &\leq \left\|x_{s(n)} - z_{s(n)}\right\| + \left\|z_{s(n)} - u_{s(n)}\right\| + \left\|u_{s(n)} - u\right\| \\ &\leq \left\|x_{s(n)} - x_\infty\right\| + \left\|x_\infty - y_{s(n)}\right\| + e(T_{s(n)}y_{s(n)}, T_\infty x_\infty) \\ &\quad + \left\|u_{s(n)} - u\right\| + \varepsilon_{s(n)}.\end{aligned}$$

Passant à la limite inférieure, on conclut :

$$\liminf \left\|x_{s(n)} - u\right\| \leq \liminf \left\|x_{s(n)} - x_\infty\right\|.$$

Par la condition d'Opial (5.6), $x_\infty = u \in T_\infty x_\infty$.

■

D'où la condition d'Opial peut être omise lorsque la suite de points fixes converge fortement vers un point $x_\infty \in X_\infty$ tel que $T_\infty x_\infty$ soit fermé.

References

[1] T. Abdeljawad, Fixed points for generalized weakly contractive mappings in partial metric spaces. Math. Comput. Model. 54, 2923-2927 (2011)

[2] T. Abdeljawad, K. Karapinar, K. Tas, A generalized contraction principle with control functions on partial metric spaces. Comput. Math. Appl. 63, 716-719 (2012)

[3] A. Abkar, M. Gabeleh, The existence of best proximity points for multivalued non-self-mappings. RACSAM. 107, 319325 (2013)

[4] I. Altun, A. Erduran, Fixed point theorems for monotone mappings on partial metric spaces. Fixed Point Theory Appl. 2011, Article ID 508730 (2011)

[5] I. Altun, F. Sola, H. Simsek, Generalized contractions on partial metric spaces. Topol. Appl. 157, 2778-2785 (2010)

[6] J. P. Aubin, Mathematical Methods of Game and Economic Theory. North-Holland Publishing, Amsterdam, New York, Oxford (1979).

[7] J. P. Aubin, and I. Ekeland, Applied Nonlinear Analysis Wiley, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore (1984).

[8] J. P. Aubin and H. Frankowska, Set-Valued Analysis. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin (1990).

[9] A. Auslender, and M. Teboulle, , *Asymptotic cônes and Functions in Optimization and Variational Inequalities*, Springer, New York, 2003.

[10] H. Aydi, M. Abbas and C. Vetro, Partial Hausdorff metric and Nadler's fixed point theorem on partial metric spaces, Topology and its Applications, 2012, http ://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2012.06.012.

[11] H. Aydi, M. Abbas, C. Vetro, Partial Hausdorf metric and Nadlers fixed point theorem on partial metric spaces. Topol. Appl. 159, 3234-3242 (2012)

[12] H. Aydi, C. Vetro, W. Sintunavarat, P. Kumam, Coincidence and fixed points for contractions and cyclical contractions in partial metric spaces. Fixed Point Theory Appl. 124, (2012)

[13] D. Azé, J. N. Corvellec, and R. E. Lucchetti, Variational pairs and applications to stability in nonsmooth analysis, Nonlinear Anal. 49 (2002), 643-670.

[14] D. Azé and J. N. Corvellec, Characterizations of error bounds for lower semicontinuous functions on metric spaces, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 10 (2004), 409-425.

[15] D. Azé and J. N. Corvellec, A variational method in fixed point results with inwardness conditions, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), no. 12, 3577-3583.

[16] D. Azé and J. N. Corvellec, Variational methods in classical open mapping theorems, J. Convex Anal. 13 (2006).

[17] D. Azé, and J. P. Penot , On the dependence of fixed point sets of pseudo-contractive multifunctions. Applications to differential inclusions, to appear in Nonlinear Dynamics and Systems Theory 6 vol 1. 2006, pp. 31-47.6).

[18] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fundam. Math. 3, 133-181 (1922).

[19] S. Benahmed and D. Azé, On fixed points of generalized set-valued contractions, Bulletin of the Australian Mathematical So-

ciety, (2010).

[20] J. M. Borwein and D. Preiss, A smooth variational principle with applications to subdiffferentiability and to differentiability of convex functions. Trans. Am. Math. Soc. 303, 517-527, (1987).

[21] J. M. Borwein and Q. J. Zhu, Techniques of Variational Analysis. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2005).

[22] D. W. Boyd and S. W. Wong, On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc. 20, 458-464 (1969)

[23] F. E. Browder, Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space, Proc. Nat. Acad. Sci. 54 (1965), 1041-1044. MR 32 :4574.

[24] Lj. B. Ćirić, A Generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc. 45 (2), 267-273, (1974).

[25] Lj. B. Ćirić, B. Samet, H. Aydi and C. Vetro, Common fixed points of generalized contractions on partial metric spaces and an application, Appl. Math. Comput. 218, 2398-2406, (2011).

[26] H. Covitz, and S. B. Jr. Nadler, Multi-valued contraction mappings in generalized metric spaces. Isz. J. Math. 8 (1970), 5-11.

[27] J. P. Dedieu, Cône asymptote d'un ensemble non convexe. Application à l'optimisation. C. R. Acad. Sci. Paris, 287 (1977), 501-503.

[28] M. Djedidi, A.Mansour and K. Nachi, Fixed point theorem for generalized set-valued contractions on partialmetric spaces, Tamkang Journal of Mathematics Volume 48, Number 4, 331-344, December 2017.

[29] M. Djedidi and A.Mansour, The existence of best proximity points for multivalued non-self-mappings in a partial metric space, à paraitre dans journal of mathematical extension.

[30] M. Djedidi and A.Mansour, Fixed points and best proximity points for multi-valued mappings satisfying cyclical contractive conditions on partial metric spaces soumis à inter journ math anal appl.

[31] A. L. Dontchev,and W. W. Hager, Implicit functions defined by generalized equations, in Lakshmikantham, V. (ed.), *World congress of nonlinear analysis '92. Proceedings of the first world congress, Tampa, FL, USA, August 19-26, 1992.* de Gruyter, Berlin (1996), 2289-2298.

[32] P. N. Dutta and B. S. Choudhury, A generalization of contraction principle in metric spaces, Fixed Point Theory Appl., Artcile ID 406368, 8 pages, (2008)

[33] I. Ekeland, On the variational principle. J. Math. Anal. Appl. 47, 324-353 (1974).

[34] I. Ekeland, Nonconvex minimization problems, Bull. Amer. Math. Soc. 1, 443-474 (1979).

[35] A. A. Eldred and P. Veeramani, Existence and convergence of best proximity points, J. Math. Anal. Appl. 323, 1001-1006 (2006)

[36] F. Facchinei, and J. S. Pang, Finite Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, I and II. Springer, New York, Berlin, Heidelberg (2003).

[37] Y. Feng and S. Liu, Fixed point theorems for multi-valued contractive mappings and multi-valued Caristi type mappings, J. Math. Anal. Appl. 317, no.1, 103-112, (2006).

[38] A. Fernández-León, Existence and uniqueness of best proximity points in geodesic metric spaces. Nonlinear Anal. 73, (4), 915-921 (2010)

[39] D. G. Figueiredo, Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81, Springer-Verlag, Berlin, (1989).

[40] J. R. Giles , Classes of semi-inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1967) 436-446.

[41] D. Göhde, Zum prinzip der kontraktiven abbildung, Math. Nach. 30 (1965), 251-258. MR 32 :8129.

[42] W. S. Du, On approximate coincidence point properties and their applications to fixed point theory, Journal of Applied Mathematics (2012), doi :10.1155/2012/302830.

[43] A. Göfert, Chr. Tammer, H. Riahi and C. Zălinescu, Variational Methods in Partially Ordered Spaces. Springer, New York, Berlin, Heidelberg (2003).

[44] A. Hamel, Remarks to an equivalent formulation of Ekeland's variational principle. Optimization 31(3), 233-238 (1994).

[45] A. D. Ioffe and V. M. Tihomirov, *Theory of Extremal Problems*, Studies in Mathematics and its applications # 6, North Holland, Amsterdam (1979).

[46] G. Isac and S. Z. Németh, Fixed points and positive eigenvalues for nonlinear operators, J. Math. Anal. Appl. 314 (2006) 500-512.

[47] R. Kannan, Some results on fixed points, Bull. Cal. Math. Soc 60, 71-76 (1968).

[48] E. Karapnar, Generalizations of Caristi Kirk's Theorem on Partial Metric Spaces, Fixed Point Theory Appl. 2011 : 4 (2011), DOI :10.1186/1687-1812-2011-4.

[49] E. Karapinar, A note on common fixed point theorems in partial metric spaces. J. Nonlinear Sci. Appl. 5, 74-83 (2012)

[50] E. Karapinar, U. Yuksel, Some common fixed point theorems in partial metric spaces. J. Appl. Math. Article ID 263621 (2011)

[51] W. A. Kirk, The fixed point property and mappings which are eventually nonexpansive, in Kartsatos, Athanassios G. (ed.), *Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type*. Lect. Notes Pure Appl. Math. 178, Marcel Dekker, New York (1996), 141-147.

[52] W. A. Kirk, A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, Amer. Math.Monthly 72 (1965), 1004-1006. MR 32 :6436.

[53] W. A. Kirk, P. S. Srinivasan, P. Veeramani, Fixed points for mappings satisfying cyclical contractive conditions. Fixed Point Theory 4, 79-89 (2003)

[54] E. Lami Dozo, Multivalued nonexpansive mappings and Opial's condition. Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), N2, 286-292.

[55] T. C. Lim, Fixed point theorems for mappings of nonexpansive type. Proc.Amer. Math. Soc. 66, N1,(1977) 69-74.

[56] T. C. Lim, On fixed point stability for set-valued contractive mappings with applications to generalized differential equations. J. Math. Anal. Appl. 110,(1985) 436-441.

[57] D. T. Luc , Recession maps and applications. Optimization 27 (1993), 1-15.

[58] D. T. Luc, Recessively compact sets : properties and uses. Set-Valued Anal. 10 (2002), 15-35.

[59] D. T. Luc and J.-P. Penot, Convergence of asymptotic directions, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 4095-4121.

[60] G. Lumer , Semi-inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1961) 29-43.

[61] S. G. Matthews, Partial metric topology. Research Report 212. Dept. of Computer Science. University of Warwick, (1992).

[62] S. G. Matthews, Partial metric topology, in : Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications, in : Ann. New York Acad. Sci., vol. 728, pp. 183-197, (1994).

[63] S. G. Matthews, An extensional treatment of lazy data flow deadlock. Theor. Comput. Sci. 151, 195-205 (1995).

[64] I. Meghea, Ekeland Variational Principle with Generalizations and Variants. Old City Publishing, Philadelphia (2009).

[65] N. Mizoguchi and W. Takahashi, Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces. J. Math. Anal Appl. 141, 177-188 (1989).

[66] S. B. Jr. Nadler, Multivalued contraction mappings. Pacific J. Math. 30, 475-488 (1969).

[67] K. Neammance, A. kaewkhao, Fixed points and Best Proximity Points for multivalued mapping Satisfing Cyclical Condition, Int J.Math.Sciences and Applications Vol. 1, (2011)

[68] W. Oettli and M. Théra, Equivalents of Ekeland's principle. Bull. Aust. Math. Soc. 48, 385-392 (1993).

[69] Z. Opial, Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 591-597.

[70] S. Oltra and O. Valero, Banach's fixed point theorem for partial metric spaces, R. Istit. Mat. U. Trieste 36, (1-2), 17-26 (2004)

[71] D. Paesano and P. Vetro, Suzuki's type characterizations of completeness for partial metric spaces and fixed points for partially ordered metric spaces, Topology Appl. 159, 911-920 (2012).

[72] J. A. Park, A fixed point theorem for asymptotically c-contractive

mappings, Kangweon-Kyungki Math. J. 11 (2003), N^o. 2, 111-115

[73] H. K. Pathak ,B. E. Rhoades and M. S. Khan, Common fixed point theorem for asymptotically contractive mappings without compactness.

[74] J. P. Penot, On regularity conditions in mathematical programming, Math. Prog. Study, 19 (1982), 167-199.

[75] J. P Penot , A fixed point theorem for asymptotically contractive mappings. Proc. Amer. Math. Soc. 131, N 8 (2003), 2371-2377.

[76] J. P. Penot , A metric approach to asymptotic analysis. Bulletin des Sciences Math. 127 (2003), 815-833.

[77] J. P. Penot and C. Zălinescu , Continuity of usual operations and variational convergences, Set-Valued Analysis 11 (3) (2003), 225-256.

[78] J. P. Penot, A short constructive proof of Caristi's fixed point theorem, Publ. Math. Univ. Pau, 1-3 (1976).

[79] J. P. Penot, The drop theorem, the petal theorem and Ekeland's variational principle, Nonlinear Anal. 10, 813-822 (1986).

[80] J. P. Penot, Fixed point theorems without convexity. Bull. Soc. Math. France. Mémoire 60, (1976), 129-152.

[81] S. Oltra and O. Valero, Banach's fixed point theorem for partial metric spaces, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. 36 (1-2), 17-26 (2004).

[82] S. Reich, Kannan's fixed point theorem, Boll. Un. Mat. Ital. 4, 1-11 (1971).

[83] S. Romaguera, Fixed point theorems for generalized contractions on partial metric spaces, Topology Appl. 159, 194-199 (2012).

[84] I. A. Rus, Fixed point theory in partial metric spaces, Anal. Univ. de Vest, Timisoara, Seria Matematică-Informatică. 46 (2), 141-160 (2008).

[85] S. Sadiq Basha, Best Proximity Points : Optimal Solutions. J. Optim Theory Appl 151, (1), 210-216 (2011)

[86] M. Squassina, On Ekeland's variational principle. J. Fixed Point Theor. Appl. 10, 191-195 (2011).

[87] J. E. Stoy, Denotational Semantics : The Scott-Strachey Approach to Programming Language Theory, MIT Press Cambridge, (1981).

[88] T. Suzuki, Generalized Caristi's fixed point theorems by Bae and others. J.Math. Anal. Appl. 302, 502-508 (2005).

[89] T. Suzuki, The strong Ekeland variational principle. J. Math. Anal. Appl. 320, 787-794 (2006).

[90] T. Suzuki, and W. Takahashi, Fixed point theorems and characterizations of metric completeness. Top. Meth. Nonlinear Anal. 8, 371-382 (1996).

[91] W. Takahashi, Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings. In : Baillon, J.-B., Théra, M. (eds.) Fixed Point Theory and Applications. Pitman Research Notes in Mathematics, vol. 252, pp. 397-406. Longman, Harlow (1991).

[92] W. Takahashi, Nonlinear Functional Analysis. Yokohama Publishers, Yokohama (2000).

[93] Chr. Tammer, A generalization of Ekeland's variational principle. Optimization 25, 129-141 (1992).

[94] M. A. Al-Thagafi, N. Shahzad, Best proximity pairs and equilibrium pairs for Kakutani multimaps. Nonlinear Anal. 70, (30), 1209-1216 (2009)

[95] O. Valero, On Banach fixed point theorems for partial metric spaces, Appl. General Topology 6, 229-240 (2005).

[96] L. Yongsin and S. Shuzhong, A generalization of Ekeland's ε-variational principle and its Borwein-Preiss variant. J. Math. Anal. Appl. 246, 308-319 (2000).

[97] C. Zălinescu, Recession cones and asymptotically compact sets. J. Optim. Theory Appl., 77 (1993), 209-220.

[98] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Part 1 : Fixed Point Theorems, Springer-Verlag, New York, 1986.

[99] C. K. Zhong, On Ekeland's variational principle and a minimax theorem. J. Math. Anal.Appl. 205, 239-50 (1997).

[100] C. K. Zhong, A generalization of Ekeland's variational principle and application to the study of the relation between the P.S. condition and coercivity. Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl. 29, 1421-1431 (1997).