RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider-Biskra

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la vie

Département de Mathématiques

N° d'ordre :

THÈSE

Pour l'obtension du grade de

DOCTORAT EN SCIENCES

SPECIALITÉ : MATHÉMATIQUES

Présenté par : **Lourabi Hariz Bekkar**

Intitulé

Equations d'opérateurs sous normaux de type Sylvester

devant le jury composé de :

Yahia Djabrane	Professeur	Univ Biskra	Président
Abdelouahab Mansour	Professeur	Univ El-Oued	Promoteur
Smail Bouzeneda	Professeur	Univ Tébéssa	Examinateur
Tedjani Menacer	MCA	Univ Biskra	Examinateur

Remerciements et dédicace

Mes premiers remerciements vont au directeur de cette thèse, Abdelouahab Mansour, Professeur au Département de Mathématiques, Université d'El Oued, pour sa responsabilité de diriger ce travail. Je le remercie sincérement pour ses conseils avisés à son aide, sa patience et sa disponibilité.
Je tiéns remercie infiniment Monsieur, Yahia Djabrane Professeur au Département de Mathématiques Université Mohammed Khider Biskra, qui a accepté de présider le jury de cette thèse. Je remercie Monsieur Smail Bouzenada, Professeur à l'Université de l'Arbi Tébéssi Tébéssa et Tedjani Menacer, Maître de conférence à l'Université Mohammed Khider Biskra qui ont accepté de rapporter cette thèse et de faire partie du jury.
Mes remerciements vont aussi à toute ma famile, mes parents, ma femme, mes enfants, mes frères et mes amis sur ses encouragements.

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse de donner les conditions necessaires et suffiasantes, pour qu'une équation d'opérateurs de type Sylvester généralisé $AXB - CXD = E$ admet une solution dans l'algèbre d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert complexe et séparable de dimension infinie, sous certaines conditions faibles telles que la sous normalité des opérateurs A, B, C, D et E et la propriété de Fuglède-Putnam.

Mots clés. Opérateur sous normal, équations de Sylvester, propriété de Fuglède-Putnam, extension normale.

Abstract

In this thesis, we focus to give the necessary and sufficient conditions for operators equations of generalized Sylvester type $AXB - CXD = E$ have a solution in algebra of bounded operators on a complex Hilbert space which is separable and infinite dimension, under some weak conditions as subnormality of A, B, C, D and E and Fuglede-Putnam property.

Keywords : Subnormal operator, Sylvester equation, Fugled-Putnam property, normal extension.

ملخّص

في هذه الأَطروحة نهتم بَاعطَاء الشروط اللَازمة و الكَافية لوجود الحل لمعَادلَات المؤُثرَات من صنف سيلفستر $(Sylvester)$ المعممة $AXB - CXD = E$ في جبر المؤُثرَات المحدودة علَى فضَاء هيلبرتي مركب و قَابل للفصل ذو بعد غير منته، بَاستعمَال مؤُثرَات تحت نَاظمية A, B, C, D و E و خَاصية فوجلَاد ـ بيتنَام $(Fuglede - Putnam)$.

الكلمَات المفتَاحية : مؤُثر تحت نَاظمي، معَادلة سيلفيستر، خَاصية فوجلَاد ـ بيتنَام، امتدَاد نَاظمي.

Table des matières

Introduction

Les équations d'opérateurs ont plusieur et différentes applications, telles que dans la théorie de contrôle, l'optimisation, les systèmes dynamiques et dans la mécanique quantique.

Rosenblum [37] a étudier systèmatiquement l'équation $\delta_{A,B}X = AX - XB$, où A et B sont des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert complexe séparable, il a prouvé que le spectre de $\delta_{A,B}$ est contenu dans $\sigma(A) - \sigma(B)$, où

$$\sigma(A) - \sigma(B) = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 \in \sigma(A), \lambda_2 \in \sigma(B)\}.$$

La condition $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ implique que pour chaque opérateur borné Y dans H il existe un opérateur borné unique X verifie $AX - XB = Y$.

Mais ce dernier résultat ne résoout pas complètement le problème de solvabilité´de l'équation $AX - XB = Y$. Si A est l'adjoint du shift unilèteral et $B = 0$ alors l'équation admet une solution pour chaque Y alors que $\sigma(B) \subset \sigma(A)$.

Pour voir l'importance d'équations d'opérateurs, on peut prendre par exemple les travaux de Wintner [47] si A B sont des opérateurs non bornés qui representent le moment et la position satisfaisant la relation

$$AB - BA = (\frac{-\imath h}{2\pi})I, \text{(Principe de Heisenberg)}$$

où h la constante de Planck et I l'identité.

Roth [40] a prouvé (dans le cas de dimension finie) que l'équation $AX - XB = C$ admet une solution si et seulement si $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont similaires. Schweinsberg [41] a montré que ce résultat reste vaie dans le cas de dimension infinie avec A et B normaux et bornés.

Dans cette thèse on va améliorer et introduire quelques résultats concernant les équations de type Sylvester, pour des opérateurs sous normaux combinés avec la propriété de Fuglède-Putnam dans un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie.

Cette thèse est organisée comme suit.

Le premier chapitre est consacré aux quelques définitions et des éléments basiques qui sont indispensables et utiles au long de notre travail. Plus particulièrement, on présente dans ce chapitre :

- Les opérateurs linéaires bornés et leurs propriétés, l'adjoint, l'inverse et le spectre.

- la propriété de Fuglède-Putnam.

- Quelques classes d'opérateurs bornés, normaux, quasi normaux et hyponormaux.

- Certains types d'équations d'opérateurs, équations de Sylvester, équations de type Lyapunov et équations de type Stein.

Dans le deuxième chapitre, on va présenter des notions des opérateurs sous normaux et leurs propriétés, telles que l'extension norlmale, la comparaison avec les autres types d'opérateurs et les spactres des opérateurs sous normaux. On va developper aussi quelques théorèmes qui expriment les caractrisations des opérateurs sous normaux ansi que leurs spectres et la cmparaison avec les spectres des extensions normalrs.

Dans le troisième chapitre, on va détailler nos travaux [**?**] et [23], plus précisément :

1. Le papier [**?**] contient quelques théorèmes d'existence pour les équations de type Sylvester $AX - XB = C$, où A est sous normal et B, C sont bornés seulement. Ansi quelques conséquences dans le cas où $C = a \otimes b$ le produit tensenriel des deux vecteurs de H.

2. Dans le papier [23], on a étudié les équations de type Sylvester dans le

cas des opérateurs sous normaux.

Le dernier chapitre est reservé à notre travail [24], où on va étudier des équations de type $AXB - CXD = CE$.
Premièrement, on s'intéresse à l'étude d'un cas particulier $AXB - XD = E$, en effet pour des opérateurs sous normaux A, B, D et E avec certains hypothèses de commutativité sur leurs exetensions normales ainsi que la propriété de Fuglède-Putnam, on obtient quelques résutats partiels d'existence des solutions bornées.
Le deuxième résultat obtenu concernant un théorème d'existence des solutions pour une équation plus générale, i.e., une équation de type $AXB - CXD = CE$, où A, B, C, D et E sont des opérateurs sous normaux avec la commutativité des opérateurs N_A et N_C, ainsi que N_B et N_D sont commutatives, où N_A, N_B, N_C, N_D sont des exensions de A, B, C et D.

Notations

H : Espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie.

$B(H)$: L'espace d'opérateurs linéaires bornés définies sur H.

$B_2(H)$: L'espace d'opérateurs de Hilbert Schmidt.

T^{-1} : L'inverse d'opérateur T.

T^* : L'adjoint d'opérateur T.

$Im(T)$: L'image d'opérateur T.

$Ker(T)$: Le noyon d'opérateur T.

$\sigma(T)$: Le spectre d'opérateur T.

$\sigma_p(T)$: Le spectre ponctuel d'opérateur T.

$\sigma_c(T)$: Le spectre continu d'opérateur T.

$\sigma_r(T)$: Le spectre résidual d'opérateur T.

$\sigma_a(T)$: Le spectre approché d'opérateur T.

$r(T)$: Le rayon spectral.

$(FP)_{B(H)}$: La prépriété de Fuglède-Putnam.

$a \otimes b$: Produit tensoriel de deux vecteurs a et b.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Généralités sur les opérateurs linéaires bornés

1.1.1 Définitions

Définition 1.1 *Soit S un opérateur de H dans H, S est dit linéaire si et seulement si*

1. *pour tout $x, y \in H$, $S(x+y) = S(x) + S(y)$.*
2. *pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in H$, $S(\alpha x) = \alpha S(x)$.*

Définition 1.2 *Soit S un opérateur linéaire sur H, on dit que S est borné si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que $\|S(x)\| \leq c\|x\|$, pour tout $x \in H$.*
$\|S\|$ est la norme de l'opérateur S et est définie par

$$\|S\| = \inf\{c > 0, \|Sx\| \leq c\|x\|, \text{ pour tout } x \in H\}.$$

Définition 1.3 *Un opérateur S est inférieurement borné si et seulement s'il* *existe un constant $k > 0$, tel que*

$$\|Sx\| \geq k\|x\|,$$

pour tout $x \in H$.

Théorème 1.1 *Pour tout opérateur linéeaire S sur un espace de Hilbert H, on a*

$$\|S\| = \sup\{\|Sx\|, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Preuve. On démontre les inégalités´pour les deux sens.

1. Posons $a = \sup\{\|Sx\|, x \in H, \|x\| = 1\}$, si l'opérateur S est borné, alors

$$\|Sx\| \leq \|S\|\|x\| = \|S\|, \text{pour } \ \|x\| = 1$$

   donc $a \leq \|S\|$ d'après la définition de $\|S\|$.

2. Pour tout vecteur $x \in H$, on a

$$\|Sx\| = \|S(\|x\|\frac{x}{\|x\|})\| = \|S(\frac{x}{\|x\|})\|\|x\| \leq a\|x\|,$$

   d'où $\|S\| \leq a = \sup\{\|Sx\|, x \in H, \|x\| = 1\}$.

En combinant les deux inégalités dans (i) et (ii) on obtient l'égalité désirée. ■

Théorème 1.2 *Pour tout opérateur linéaire S sur un espace de Hilbert H, les assertions suivantes sont equivalentes*

1. *S est borné.*

2. *S est continu sur l'espace H.*

3. *S est continu en un point 0 de l'espace H.*

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2)

Soit x_0 vecteur quelconque de H et (x_n) une suite dans H. Comme

$$\|Sx_n - Sx_0\| = \|S(x_n - x_0)\| \leq \|S\|\|x_n - x_0\|,$$

on a donc $Sx_n \to Sx_0$ quand $x_n \to x_0$, d'où la continuité de S.

L'implication (2) $\Rightarrow$ (3) est claire.

(3) $\Rightarrow$ (1)

Soit S un opérateur linéaire sur H, continu en $x_0 \in H$, supposons le contraire, (S soit non borné). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un vecteur non nul $x_n \in H$ tel que $\|Sx_n\| \geq n\|x_n\|$. Si on pose $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$, alors $\|y_n\| = \frac{1}{n}$.

Or $y_n \to 0$, donc $y_n + x_0 \to x_0$, mais

$$\|S(y_n + x_0) - Sx_0\| = \|Sy_n\| = \frac{\|Sx_n\|}{n\|x_n\|} > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1,$$

donc S n'est pas continu en x_0 d'où la contradiction, et par conséquent S est borné. ■

1.2 L'adjoint d'un opérateur

Définition 1.4 *Soit T un opérateur de $B(H)$, l'adjoint de T et on note T^* est défini par*

$$\langle x, T^*y\rangle = \langle y, Tx\rangle, \textit{pour tout} \quad x, y \in H.$$

Pour les opérateurs S et T dans $B(H)$, on a les propeiétés suivantes.

1. $(S + T)^* = S^* + T^*$
2. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
3. $(T^*)^* = T$.
4. Si T est invertible, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

5. $\|T^*\| = \|T\|$

6. $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

7. $(ST)^* = T^*S^*$.

Proposition 1.1 *Soit T un opérateur dans $B(H)$, T est auto-adjoint si et seulement si le produit scalaire $\langle Tx, x\rangle$ est un nombre réel pour tout $x \in H$.*

Preuve. Soit S un opérateur dans $B(H)$, alors on a

$$\langle S^*x, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$$

$$= \overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle Tx, x\rangle.$$

Ce qui implique $S^* = S$. ■

Corollaire 1.1 *Tout opérateur T dans $B(H)$ qui est positif est auto-adjoint.*

Proposition 1.2 *Si H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert et $T \in B(H_1, H_2)$, alors $\overline{R(T)} = (Ker(T^*))^\perp$ si et seulement si $ker(T^*) = (R(T))^\perp$, où $R(T)$ l'image de T et $ker(T)$ le noyeau de T.*

L'image numérique

Définition 1.5 *Soit $S \in B(H)$, on appelle l'image numérique de S l'ensemble défini par*

$$W(S) = \{\langle Tx, x\rangle, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

1.2.1 Similarité, équivalence

Définition 1.6 *[35] Deux opérateurs S et T sont dites similaire si et seulement s'il exists un opérateur invertible Q tel que $T = QSQ^{-1}$.*

Définition 1.7 *[5] Soient A, B et C des opérateurs dans $B(H)$. Les deux opérateurs $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ sont similaires si et seulement s'il existe un opérateur inversible $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ dans $B(H \oplus H)$, tel que*

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}.$$

Lemme 1.1 *Soient S et T deux opérateurs dans $B(H)$, $R_\lambda(S)$ et $R_\lambda(T)$ leurs applications resolvantes respectivement, alors $R_\lambda(S)$ et $R_\lambda(T)$ sont similaires si et seulement si S et T les sont.*

Preuve. Soient S et T deux opérateurs similaires dans $B(H)$, alors il existe un opérateur inversible Q tel que $T = QSQ^{-1}$. On a

$$R_\lambda(T) = R_\lambda(QSQ^{-1})$$

$$= (QSQ^{-1} - \lambda I)^{-1} = \left((QS - \lambda Q)^{-1}\right)^{-1}$$

$$= Q(QS - \lambda Q)^{-1} = Q(Q(S - \lambda I))^{-1}$$

$$= \left(Q(QS - \lambda Q)^{-1}\right)^{-1} = QR_\lambda(S)Q^{-1}.$$

D'où la similarite de $R_\lambda(S)$ et $R_\lambda(T)$. Pour la réciproque, on passe aux inverses dans l'égalité précédente. ■

Définition 1.8 *Deux triplets (T_1, T_2, T_3) et (S_1, S_2, S_3) d'opérateurs dans $B(H)$ sont dits équivalents si et seulement s'il existe des opérateurs inversibles U, V and W verifiant*

$$\begin{cases} UT_1 = S_1V \\ UT_2 = S_2W \\ WT_3 = S_3V \end{cases}$$

1.3 L'inverse d'un opérateur

Définition 1.9 *On dit qu'un opérateur S est inversible sur l'espace de Hilbert H, s'il existe un opérateur S^{-1} qui vérifie $SS^{-1} = S^{-1}S = I$, où I est l'opérateur identité dans $B(H)$.*

1.4 Propriété de Fuglede-Putnam

Définition 1.10 *Soient S et T des opérateurs dans $B(H)$, la paire (S,T) est dit satisfait la propriété Fuglede-Punam si et seulement pour un opérateur $X \in B(H)$ si $SX = XT$, alors $S^*X = XT^*$.*

Théorème 1.3 *Soient S et T deux opérateurs dans $B(H)$ avec T est normal. Si $ST = TS$, alors $ST^* = T^*S$.*

Lemme 1.2 *Soit S un opérateur auto-adjoint dans $B(H)$. Alors les deux opérateurs e^{iS} et e^{-iS} sont des opérateurs unitaires.*

Preuve. Supposons que S est un opérateur autoadjoint, alors il est clair que

$$(e^{iS})^* = e^{-iS^*} = e^{-iS}.$$

D'autre part on a

$$(e^{iS})^* e^{iS} = e^{-iS} e^{iS} = I$$

et

$$e^{iS}(e^{iS})^* = e^{iS} e^{-iS} = I.$$

Donc e^{iS} et e^{-iS} sont des opérateurs unitaires. ■

Théorème 1.4 *Soient S et T deux opérateurs normaux dans $B(H)$, si $SX = XT$ pour un opérateur $X \in B(H)$, alors $S^*X = XT^*$.*

Preuve. Soient S et T deux opérateurs normaux dans $B(H)$ et $X \in B(H)$, tels que $SX = XT$, alors on a

$$XT^2 = S^2X.$$

Donc on peut démontrer par recurence que pour tout $n \geq 1$; $XY^n = S^nX$. Posons $P(S) = S^n$ et $P(T) = T^n$. Alors pour chaque nombre complexe λ il existe une suite polynome (P_n) telle que

$$P_n(S) = e^{i\bar{\lambda}S}, \ \ P_n(T) = e^{i\bar{\lambda}T}.$$

Alors on a

$$Xe^{i\bar{\lambda}T} = e^{i\bar{\lambda}S}X.$$

Donc

$$X = e^{-i\bar{\lambda}S}Xe^{i\bar{\lambda}T}.$$

On définit une fonction

$$F(\lambda) = e^{i\lambda S^*}Xe^{-i\lambda T^*}.$$

Soient

$$U(\lambda)e^{i(\lambda S^* - \bar{\lambda}S)} \ \text{ et } \ V(\lambda)e^{i(\lambda T^* - \bar{\lambda}T)}.$$

On a

$$(U(\lambda))^* = e^{-i(\bar{\lambda}S - \lambda S^*)} = (U(\lambda))^{-1}.$$

Alors U est unitaire et $\|U\| = 1$, V est aussi unitaire et sa norme égale à 1. Donc

$$\|F(\lambda)\| \leq \|X\|$$

La fonction F est analytique et bornée, donc elle est constante sur $\mathbb{C}$ et sa dérivée donc nule. Pour $\lambda = 0$, on a $F'(0) = 0$ et

$$S^*X = XT^*.$$

■

Corollaire 1.2 *Si deux opérateurs normaux sont similaires, alors ils sont unitairement équivalents.*

Preuve. Soient S , T deux opérateurs normaux et M un opérateur inversible borné avec $SM = MT$, alors d'après le théorème de Fuglede-Putnam on a $S^*M = MT^*$, ce qui équivalent à

$$M^{-1}S^*M = T^*$$

Si on prend l'adjoint on trouve

$$M^*S(M^{-1})^* = T,$$

alors

$$M^*S(M^{-1})^* = M^{-1}SM,$$

ce qui donne

$$MM^*S(MM^*)^{-1} = S.$$

Par conséquent, sur $Im(S)$ MM^* est l'opérateur identité. On peut prolonger MM^* sur $ker(S)$. Par normalité de S on a $MM^* = I$.
De méme façon on trouve M^*M. Ce qui montre que M est unitaire. ∎

Corollaire 1.3 *La somme de deux opérateurs normaux commutants est un opérateur normal.*

Preuve.

On a $SM = MT$. Alors

$$(S+T)(S+T)^* = SS^* + ST^* + TS^* + TT^*$$

D'autre part

$$(S+T)^*(S+T) = S^*S + S^*T + T^*S + T^*T.$$

Utilisant la propriété de Fuglède-Putnam on trouve $S^*T = TS^*$ et $T^*S = ST^*$. Puisque S et T sont normaux, alors

$$(S+T)(S+T)^* = (S+T)^*(S+T).$$

■

1.5 Quelques classes d'opérateurs

Définition 1.11 *Soit S un opérateur dans $B(H)$, S et dit*

1. *projection orthogonale si $S^2 = S = S^*$.*
2. *unitaire si et seulement si $S^*S = SS^* = I$.*
3. *isométrie si $S^*S = I$.*
4. *compact si l'image de boule fermée d'unité et relativement compacte.*
5. *auto adjoint si $S^* = S$.*
6. *normal s'il commute avec son adjoint, i.e., $SS^* = S^*S$.*
7. *quasi normal s'il commute avec S^*S, i.e. $S(S^*S) = (S^*S)S$.*
8. *hyponormal si $S^*S \geq SS^*$, ou bien $\|Sx\| \geq \|S^*\|$.*
9. *opérateur à trace s'il existe une base $\{e_n\}$ telle que $\sum \langle |S|e_n, en\rangle < \infty$.*
10. *de Hilbert-Schmidt si $|S|^2$ est à trace.*
11. *Semi-normal, si T ou T^* est hyponormal.*
12. *k-quasihyponormal, si $T^{*k}(T^*T - TT^*)T^k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$.*

Définition 1.12 *Soient $T \in B(H)$ et M un sous-espace vectoriel fermé de H.*

- *M est dit invariant par T si $T(M) \subseteq M$.*

– *M est dit réduisant pour T si $T(M) \subseteq M$ et $T(M^{\perp}) \subseteq M^{\perp}$.*

On note $B_2(H)$ l'ensemble d'opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Proposition 1.3 *Soit $S \in B_2(H)$.*

1. $\|S\|_2 = \left(\sum_n \langle Sen, e_n\|Se_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$*, pour toute base $\{e_n\}$.*
2. $\|S^*\|_2 = \|S\|_2$.
3. $\|S\| \leq \|S\|_2$.
4. *Si $T \in B_2(H)$, alors $ST \in B_2(H)$ et $TS \in B_2(H)$. De plus ona $\|ST\|_2 \leq \|T\|\|S\|_2$ et $\|TS\|_2 \leq \|T\|\|S\|_2$.*

Corollaire 1.4 *Tout opérateur de Hilbert Schmidt est compact.*

1.5.1 Opérateurs positifs

Définition 1.13 *Un élément $T \in B(H)$ est appelé positif et on note $T \geq 0$ si pour tout $x \in H, \langle Tx, x\rangle \geq 0$.*

Théorème 1.5 *Tout opérateur positif T admet un unique opérateur positif S tel que $T = S^2$. De plus, S commute avec tout opérateur qui commute avec T. On appelle S la racine carré de T et on note par $T^{\frac{1}{2}}$.*

Définition 1.14 *Un opérateur $T \in B(H)$ est appelé isométrie partielle si*

$$\|T(x)\| = \|x\| \quad pour \quad tout \quad x \in Ker(T)^{\perp}.$$

Proposition 1.4 *Un opérateur $T \in B(H)$ est une isométrie partielle si et seulement si T^*T est une projection orthogonale.*

Preuve. Supposons que T est une isométrie partielle.

On a alors

$$(T^*T)^* = T^*T \quad et \quad (TT^*)^* = TT^*.$$

Il reste donc à prouver que

$$(T^*T)^2 = T^*T \quad et \quad (TT^*)^2 = TT^*.$$

Comme $H = Ker(T)^\perp \oplus Ker(T)$, on a pour tout $x \in H$

$$T^*Tx = T^*Tx_1 \in Ker(T)^\perp$$

où $x_1 \in Ker(T)^\perp$ vérifiant $(x - x_1) \in Ker(T)$.

Il résulte de $\|Tx_1\| = \|x_1\|$ que $\langle T^*Tx_1, x_1\rangle = \langle x_1, x_1\rangle$, puis de l'identité de polarisation $T^*Tx_1 = x_1$, On a donc $(T^*T)^2x = T^*Tx$.

Montrons la réciproque :

Comme T^*T est une projection orthogonale, on a

$$\|T^*Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2.$$

On en déduit alors que $Ker(T^*T) = Ker(T)$ et donc T^*T est une projection orthogonale sur $Ker(T)^\perp$. D'où, pour tout $x \in Ker(T)^\perp$

$$\|Tx\|^2 = \langle T^*Tx, x\rangle = \|x\|^2.$$

■

Proposition 1.5 *Soit S un opérateur borné, S est positif si et seulement si S est auto adjoint et $\sigma(S) \subset [0, +\infty)$.*

Preuve. La première implication vient directement de la propiété d'un opérateur positif.

Réciproquement, si S est auto adjoint et $\sigma(S) \subset [0,+\infty)$, alors pour tout $a > 0$, on a : $a \in \sigma(S)$, utilisant le résultat classique

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{d(\lambda, \sigma(S))}$$

pour $\lambda \in \sigma(S)$, S auto adjoint, on obtient

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{d(\lambda, \sigma(S))}$$

Donc

$$\|(S+a)u\| \geq a\|u\|.$$

Cela implique

$$a^2\|u\|^2 \leq \|(S+a)u\| \leq a\|u\| \leq \|Su\|^2 + 2a\langle Su, u\rangle + a^2\|u\|^2.$$

D'où

$$\langle Su, u\rangle \geq -(2u)^{-1}\|Su\|^2$$

qui est valable pour tout $a > 0$, donc S est positif. ■

Proposition 1.6 *[46] Si S est un opérateur normal, alors S^* et $S + \lambda I$ les sont aussi.*

Proposition 1.7 *[46] Si T est un opérateur normal et injectif sur un espace de Hilbert H, alors T^* est injectif et T^{-1} est normal.*

1.5.2 Racine carée d'un opérateur positif

Définition 1.15 *Soit $T \in B(H)$, on dit que S est une racine carrée de T si $S^2 = T$.*

Proposition 1.8 *[46] Si $T \geq 0$, alors il existe une fonction continue $\alpha \mapsto T^\alpha$ de $\mathbb{R}$ dans $B(H)$ telle que*

$$T^\alpha T^\beta = T^{\alpha+\beta},$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $T^1 = T$.

En particulier, si $\alpha = \frac{1}{2}$ *on obtient la racine carée positive de* T.

Corollaire 1.5 *Tout opérateur positif a une racine positif unique.*

1.5.3 Décomposition polaire d'un opérateur

Définition 1.16 *Soit* S *un opérateur dans* $B(H)$, *On appelle module de* S *l'opérateur* $|S|$ *défini par :*

$$|S| = (S^*S)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.6 *Soit* $S \in B(H)$, *Posons* $| S |= (S^*S)^{\frac{1}{2}}$.

Il existe une isométrie partielle U *telle que* $T = U \mid T \mid$. *En outre,* U *est unique si on impose la condition* $KerU = KerT$.

Preuve. Remarquons qu'on a

$$\| Tx \|^2 = \| \mid T \mid x \|^2, \forall x \in H \tag{1.1}$$

En particulier, on en déduit que $Ker(\mid T \mid) = Ker(T)$ et que

$$\mid T \mid x = \mid T \mid y \Longrightarrow Tx = Ty.$$

On définit alors l'application

$$V : Ran(\mid T \mid) \longrightarrow Ran(T)$$
$$\mid T \mid x \longmapsto Tx.$$

V est isométrique grâce à (1.1). Elle s'étend donc par continuité à une isométrie de $\overline{Ran(\mid T \mid)}$ vers $\overline{Ran(T)}$, qu'on note encore par V.

En posant $U = VP$ avec P la projection orthogonale sur $Ker(T)^{\perp}$, on obtient une isométrie partielle sur H vérifiant la propriété énoncée.
Unicité : Si U_1 et U_2 sont deux isométries partielles vérifiant
$U_1 \mid T \mid = U_2 \mid T \mid$ alors $U_1 = U_2$ sur $\overline{Ran(\mid T \mid)}$.
De plus comme $Ran(\mid T \mid)^{\perp} = Ker(T)$, la condition :
$Ker(U_1) = Ker(U_2) = Ker(T)$, implique que $U_1 = U_2$ sur H. ■

Lemme 1.3 *Soit U un opérateur dans $B(H)$, alors U est unitaire si et seulement si U est surjectif et isométrie.*

Théorème 1.7 *Pour tout opétateur inversible $S \in B(H)$, on peut l'écrire sous la forme $S = UR$, où U est un opérateur quelconque et R est positif.*

Preuve. Puisque S est inversible, alors S^* est aussi inversible, donc S^*S est inversible.
Comme $S^*S > 0$, alors $|S| = S(SS^*)^{\frac{1}{2}}$ existe et inversible. Posons $R = (SS^*)^{\frac{1}{2}}$ et $U = SR^{-1}$. On va montrer que U est unitaire, en effet

$$U^*U = (SR^{-1})^*(SR^{-1}) = (R^{-1})^*S^*SR^{-1}$$

$$= (R^{-1}(S^*S)R^{-1} = I.$$

Ce qui implique, U est surjectif et isométrie. Donc unitaire. ■

1.6 Spectre d'un opérateur

Soit S un opérateur dans $B(H)$.

Définition 1.17 *Le spectre de S est l'ensemble*

$$\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C}, S - \lambda I \textit{n'est pas invertible}\}.$$

L'ensemble resolvant de S est le complementaire de $\sigma(S)$ par rapport $\mathbb{C}$ et on note $\rho(S)$, i.e.,

$$\varrho(S) = \mathbb{C}/\sigma(S).$$

La fonction $\lambda \mapsto (\lambda I - S)^{-1}$ est appelée résolvante de S.

Théorème 1.8 *Soit $S \in B(H)$. L'ensemble résolvante $\rho(S)$ est ouvert. Aussi la fonction résolvante est analytique dans $\rho(S)$.*

Preuve. *Soit λ un point fixé dans $\rho(S)$ et μ est un nombre complexe avec $|\mu| < \|\lambda I - S\|^{-1}$. Montrons que $\lambda + \mu \in \rho(S)$.*
En effet, on considére la série

$$\sum_{n=0}(-\mu)^n(\lambda I - S)^{-n-1}.$$

Puisque $\|\mu(\lambda I - S)^{-1}\| < 1$, alors la série converge pour la norme de $B(H)$. Désignons sa somme par $S(\mu)$, alors

$$[(\lambda + \mu)I - S]S(\mu) = (\lambda I - S)P(\mu) = (\lambda I - S)P(\mu) + \mu P(\mu) = I$$

$$P(\mu)[(\lambda + \mu)I - S] = P(\mu)(\lambda I - S) + \mu P(\mu) = I$$

Il en résulte que $(\lambda + \mu) \in \rho(S)$ et la fonction $\mu \mapsto P(\mu) = [(\lambda + \mu)I - S]^{-1}$ est analytique au point $\mu = 0$. ■

Corollaire 1.6 *Soit $S \in B(H)$, Si $d(\lambda)$ est la distance du point λ au spectre $\sigma(S)$ alors*

$$\|(\lambda I - S)^{-1}\| \geq \frac{1}{d(\lambda)}, \quad \lambda \in \sigma(S)$$

et $\|(\lambda I - S)^{-1}\| \to \infty$ quand $d(\lambda) \to 0$, et l'ensemble résolvante est le domaine naturel d'analyticité de la résolvante.

Définition 1.18 *Le rayon spectral de S est le scalaire*

$$r(S) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(S)\} = \lim_{n\to} \|S\|^{\frac{1}{n}}.$$

Le spectre ponctuel de S est l'ensemble

$$\sigma_p(S) = \{\lambda \in \mathbb{C}, S - \lambda I \ \text{ n'est pas injectif}\}.$$

Le spectre approché de S est l'ensemble

$$\sigma_a(S) = \{\lambda \in \mathbb{C}, S - \lambda I \text{il existe } \ x_n \subset H, \|x_n\| = 1, \lim_{n\to\infty}(S - \lambda I)x_n = 0\}.$$

le spectre résiduel de S est l'ensemble

$$\sigma_r(S) = \{\lambda \in \mathbb{C}, S - \lambda I \ \text{ est injectif mais } \ \overline{(\lambda I - S)X} \neq X\}.$$

Il est clair que $\sigma_c(S), \sigma_p(S)$ et $\sigma_r(S)$ sont disjoints et $\sigma(S) = \sigma_c(S) \cup \sigma_r(p) \cup \sigma_r(S)$.

Théorème 1.9 *Le spectre de tout opérateur S dans $B(H)$ est un compact dans $\mathbb{C}$*

Preuve. *Le spetre $\sigma(S)$ est borné, car pour $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > \|S\|$, alors $S - \lambda I$ est inversible.*
En effet si $|\lambda| > \|S\|$, alors $1 > \|\lambda^{-1}S\|$, donc $I - \lambda S$ est invertible.
Maintenant, montrons $\sigma(S)$ est fermé. Définissons une fonction F de $\mathbb{C}$ dans $B(H)$, tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}, F(\lambda) = \lambda I - S$. Il est clair que S est continu et isométrie, car pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$\|F(\lambda) - F(\mu)\| = \|(\lambda - \mu)I\| = |\lambda - \mu|.$$

Soit $B_i(H)$ l'ensemble d'opérateurs invertibles.

$$\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C}, F \in B(H)/B_i(H)\}.$$

$$F^{-1}(B(H)/B_i(H))$$

Donc $\sigma(S)$ est fermé.

Montrons que $\sigma(S)$ n'est pas vide, on a

$$\frac{1}{\lambda - S} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{1-\lambda^{-1}S} = \frac{1}{\lambda}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{S}{\lambda})^n\Big)$$

Si $|\lambda| > \|S\|$, alors la série de Neumann est convergente, donc si $|\lambda| \to \infty$,$R_\lambda \to 0$. Si $\sigma(S)$ est vide, alors R_λ est une fonction bornée analytique donc d'après le théorème de Liouville $R_\lambda = 0$, ceci une contrdiction. ■

Définition 1.19 *Soit $S \in B(H)$, $S - \lambda I$ est inversible si et seulement si*

1. *$S - \lambda I$ est injectif.*
2. *$S - \lambda I$ est surjectif. item $(S - \lambda I)^{-1}$ est borné.*

Lemme 1.4 *Soit $S \in B(H)$, alors*

$$\sigma(S^*) = \{\overline{\lambda}, \lambda \in \sigma(S)\}.$$

Preuve. *Si $\lambda \in \sigma(S)$, alors $S - \lambda I$ est inversible, donc*

$$(S - \lambda I)^* = \overline{\lambda}I - S^*$$

est inversible, ce qui implique $\overline{\lambda} \in \sigma(S^*)$.'

Si on remplace S par S^*, on trouve $\overline{\lambda} \in \sigma(S^*)$ implique $\lambda \in \sigma(S)$. ■

1.6.1 Projection spectrale

Définition 1.20 *Soit $E = \oplus c_i$. Soit P_i la projection sur le sous-espace caractéristique c_i parallélement à la somme des autres sous-espaces caract ´eristiques. On appelle P_i projecteur spectral. Si un opérateur S est diagonalisable, on peut ´écrire $S = \sum_i \lambda P_i$.*

Les projecteurs P_i vérifiant

1. $P_1 + P_2 + ... = I$
2. $P_i^2 = P_i$.
3. $P_i p_j = 0$, *pour* $i \neq j$.

1.7 Commutateurs

Soit E *un espace véctoriel normé complexe de dimension finie.*

Définition 1.21 *Un élément* X *de* $B(E)$ *est appelé commutateur s'il existe deux opérateurs* A *et* B *dans* $B(E)$*, tels que* $X = AB - BA$.
Le commutant X *de* $A \in B(H)$ *est l'ensemble défini par*

$$\{A\}' = \{B \in B(E), AB = BA\}.$$

Le bicommutant de $A \in B(E)$ *est l'ensemble défini par*

$$\{A\}'' = \{C \in B(E), BC = CB, \forall B \in \{A\}'\}.$$

Dans la suite, on va citer quelques propriétés.

1. $\{A\}^{''} = \left\{\{A\}^{'}\right\}^{'}$
2. $\{A\}^{'}$ *est une sous-algèbre de* $B(E)$.
3. $\{A\}^{''}$ *est une sous-algèbre commutative de* $B(E)$.
4. *Tout polynôme de* A *appartient à* $\{A\}^{''}$

1.8 Quelques types d'équations d'opérateurs

Avant traiter quelques types d'équations d'opérateurs on va donner la définition de la dérivation et ses propriétés.

1.8.1 Dérivations

Définition 1.22 *Soit Λ une algèbre sur un corps commutatif K. Une dérivation δ sur Λ est une application linéaire continue de Λ dans Λ qui satisfait la propriété suivante*

$$\delta(XY) = \delta(X)Y + X\delta(Y) \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad X, Y \in \Lambda$$

Remarque 1.1

1. *Soit $A \in \Lambda$, l'application de Λ dans Λ qui associe á tout élément X de Λ son image*

$$\delta_A(X) = AX - XA.$$

est une dérivation sur Λ et est appelée dérivation intérieure induite par A.

2. *l'application de Λ dans Λ qui associe á tout élément X de Λ son image*

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB.$$

où A et B sont des élémnts de Λ, est aussi une dérivation sur Λ et est appelée dérivation généralisée induite par A et B.

Théorème 1.10 *Soient $A, B \in B(H)$ les trois assertions suivantes sont équivalentes*

1. $\exists X \in B(H); AX - XB = I.$
2. $\exists Y \in B(H)$, *inversible tel que* $Y \in \{A\}' \cup \{B\}'$, *et* $Y \in R(\delta_{A,B})$.
3. $R(\delta_{A,B})$ *contient l'ensemble des opérateurs inversibles dans* $B(H)$ *qui commutent avec* A *ou* B.

Preuve. $(3) \Rightarrow (2)$: *est évidente car I est inversible, $I \in \{A\}' \cup \{B\}'$ et $I \in R(\delta_{A,B})$.*

$(2) \Rightarrow (1)$ *: Soit* $Y \in B(H)$, *inversible tel que* $Y \in \{A\}^{'} \cup \{B\}^{'}$ *(supposons que* $Y \in \{A\}^{'}$ *)*

$Y \in R(\delta_{A,B}) \Rightarrow \exists X \in B(H)$, *tel que* $AX - XB = Y$.

Posons $Z = Y^{-1}X$ *(i.e* $X = YZ$ *), alors* $A(YZ) - (YZ)B = Y$. *Comme* $Y \in A^{'}$, *alors on obtient*

$$Y(AZ - ZB) = Y,$$

et par conséquent

$$AZ - ZB = I.$$

$(1) \Rightarrow (3)$ *:*

Soit $X \in B(H); AX - YB = I$, Y *est inversible dans* $B(H)$ *et commute avec* B.

Posons $Z = XY$ *(i.e.* $X = ZY^{-1}$ *, alors*

$$AX - XB = I \Rightarrow A(ZY^{-1}) - (ZY^{-1})B = I$$

$$\Rightarrow (AZ - ZB)Y^{-1} = I = YY^{-1},$$

d'oú

$$AZ - ZB = Y,$$

et par conséquent $Y \in R(\delta_{A,B})$. ■

1.8.2 Equations de type Sylvester

Définition 1.23 *Soit* A, B *et* C *des opérateurs dans* $B(H)$, *on appelle équation d'opérateurs de type Sylvester toute équation qui s'écrit sous la forme*

$$AX - XB = C. \tag{1.2}$$

En général, on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n} A_i X B_i = C.$$

L' équation (4.4) *a été étudier dans le cas de dimension fini par Roth [40], il a donné le résultat suivant.*

Théorème 1.11 *[40] Soient A, B et C des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert de dimension finie. Alrs l'équation* (4.4) *admet une solution si et seulement si* $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *sont similaires.*

Schweinsberg [41] a montré que ce résultat reste vaie dans le cas de dimension infinie avec A et B normaux et bornés.

Le cas où A, B et C sont des matrices finies a été étudier par Sylvester et plusieur auteurs ont étudié ce tpye, Jameson [25] a donné une solution dans le cas de dimension finie, par contre le cas dimension infinie a été discuté par Rosenblum [35]. Lan [27] a trouvé un critère de solvabilité de cette équations dans le ca où A, B et C sont non bornés.

*Bhatia [**?**] a donné la forme explicite de la solution de l'éqution* (4.3) *dans le théorème suivant.*

Théorème 1.12 *Si A et B sont des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert, tel que $\sigma(B) \subset \{z, |z| < \rho\}$ et $\sigma(A) \subset \{z, |z| \geq \rho\}$ où ρ est un nombre réel strictement positif. Alors pour tout opérateur C dans $B(H)$ une solution de l'équation* (4.3) *est donnée par*

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n-1} C B^n.$$

Une autre forme de la solution qui a été donné dans le théorème suivant.

Théorème 1.13 *Soient A et B deux opérateurs dans $B(H)$, tels que $\sigma(A)$ contenu dans le demi-plan ouvert droit, et $\sigma(B)$ contenu dans le demi-plan ouvert gauche, alors une solution de l'équation* (4.3) *est donnée par*

$$X = \int_0^{\infty} e^{-iA} C e^{iB} dt.$$

1.8.3 Equations de type Lyapunov

Définition 1.24 *Soient A et B deux opérateurs sur un espace de Hilbert H. On appelle équation de Lyapunov toute équation s'écrit sous la forme*

$$AX + XA^* = -B.$$

Si A est stable, alors l'équation admet une solution donnée par :

L'équation matricielle de Lyapunov peut être s'écrit aussi sous la forme

$$X = \int_0^\infty e^{At} B e^{A^* t} dt,$$

où A, B et X sont des matrices respectivement de taille $n \times n$, $n \times s$, $n \times n$ avec $s << n$.

l'équation matricielle de Lyapunov suivante

$$AX + XA^T + BB^T = 0$$

admet une solution si se seulement si $\lambda_1(A) + \lambda_j(A) \neq 0$ pour tout $i, j = 1, 2, ..., n$.

Smith [42] a montré que si l'équation de Lyapunov admet une solution alors cette solution est donnée par

$$X = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} \gamma_{i,j} A^{i-1} BB^T (A^T)^{j-1}.$$

où p est le degré du polynôme minimal de A pour la matrice $B(P(A)B = 0)$ et la matrice $\mathcal{T} = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$ est la solution d'une équation matricielle de Lyapnuov de petite taille.

1.8.4 Equations de type Stein

Définition 1.25 *On appelle équation de Stein non symétrique toute équation s'écrit sous la forme*

$$AXB - X + EF^T = 0, \tag{1.3}$$

où A et B sont des matrices carrées de taille $n \times n$ et $s \times s$, respectivement. Les matrices E et F sont de dimension $n \times r$ et $r \times s$ respectivement. Les matrices A et B sont supposées creuses de très grande taille $r << n; s$.

Les méthodes directes pour résoudre l'équation matricielle de Stein non symétrique ont été donneé dans [2, 3, 30]. Ces méthodes sont intéressantes lorsque les matrices Aet B sont de petite taille.
Lancaster et al. [29] ont prouvé le résutét suivant

Théorème 1.14 *[29] L'équation matricielle de Stein non symétrique admet une solution unique si et seulement si $\lambda_i(A)\lambda_j(B) \neq 1$ pour tout $i = 1, 2, ..., n$ et $j = 1, 2, ..., s$, où $\lambda_i(A)$ est la i-ème valeur propre de la matrice A. En particulier, si $r(A) < 1$ et $r(B) < 1$, où $r(A)$ désigne le rayon spectral de la matrice A, alors l'équation* (1.3) *admet une solution unique X. De plus, elle peut s'exprimer sous la forme d'une série matricielle suivante*

$$X = \sum_{i=0}^{\infty} A^i E F^T B^i.$$

1.8.5 Equations de type $AXB - CXD = E$

Ce type des équations est plus général et couvre plusieurs type, par exemple si $C = D = I$, on obtient l'équation de Stein et si B est inversible avec de condition sur DB^{-1} on obtient une équation de type Sylvester.
Des travaux ont été fait afin de donner les conditions necessaires et suffiasantes qui affirment l'existence et l'unicité de la solution pour ce type des équations, on trouve la technique de penceil qui a été utilisé par certains auteurs, notamment le résultat de

Théorème 1.15 *Si les pencils $A + \lambda C$, $B + \lambda D$ sont reguliers, l'équaion $AXB - CXD = E$ a une solution si et seulement s'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\begin{pmatrix} (C-\mu A)^{-1} & (C-\mu A)E(B+\mu D)^{-1} \\ 0 & -D(B+\mu D)^{-1} \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} (C-\mu A)^{-1} & 0 \\ 0 & -D(B+\mu D)^{-1} \end{pmatrix}$$

sont similaires, où $|-\mu A + C| \neq 0$ *et* $|B+\mu D| \neq 0$.

Recemment, Mansour [33] a donné quelques résultats d'existence des solutions dans le cas d' opérateurs normaux.

Théorème 1.16 *[33] Soient* A, B *et* D *des opérateurs normaux dans* $B(H)$*, tels que* $BD = DB$*. L'équation* $AXB - XD = E$ *admet une solution* X *dans* $B(H)$ *si et seulement si les deux couples*

$$\left(\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right) \; et \; \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right)$$

sont équivalentes dans $B(H \oplus H)$.

Théorème 1.17 *[33] Soient* A, B *et* D *des opérateurs normaux dans* $B(H)$*, tels que* $BD = DB$*,* $AXB - XD = E$*,* $AC = CA$*. Si* C *est injectif et* $ImA \subset ImC$*, alors l'équation* $AXB - CXD = E$ *admet une solution* X *dans* $B(H)$ *si et seulement si les deux couples*

$$\left(\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right) \; et \; \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} IC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right)$$

sont équivalentes dans $B(H \oplus H)$.

Chapitre 2

Opérateurs sous normaux, définitions et propriétés

2.1 Opérateur sous normal

Définition 2.1 *Soit S un opérateur dans $B(H)$, S est dit sous normal s'il existe un espace de Hilbert K tel que $H \subseteq K$ et une extension normale $N_S \in B(K)$, c'est à dire $N/H = S$.*

Autrement dit, S est sous normal s'il existe un space de Hilbert K tel que $H \subseteq K$ et il existe un opérateur normal $N_S \in B(K)$ qui s'écrit, selon la décomposition $K = H \oplus H^{\perp}$, sous la forme

$$N_S = \begin{pmatrix} S & S_1 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix},$$

où $S_1 : H^{\perp} \to H$ et S_2 est défini sur $H^{\perp}$.

Exemple 2.1 *(l'opérateur de Bergman)*
Soit G un ouvert borné de $\mathbb{C}$, $L^2_a(G)$ l'espace des fonctions analytiques appartenant à $L^2(G)$.

L'opérateur S défini sur $L_a^2(G)$ par $(Sf)(z) = zf(z)$, pour tout f dans $L_a^2(G)$ et $z \in G$.
Si $N : L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$, est un opérateur défini par $(Nf)(z) = zf(z)$, pour tout f dans $L^2(G)$. Alors N est normal et est une extension de S, d'où S est sous normal.

Lemme 2.1 *[45] Soit S un opérateur sous normal sur un espace de Hilbert, alors $\alpha S + \beta S^*$ est sous normal, où α, β sons des nombres complexes.*

Preuve. *Soit N_S une exetension minimale normale de S et $T = \alpha S + \beta S^*$. Alors*

$$T^*T - TT^* = (|\alpha|^2 - |\beta|^2)(N_S^* N_S - NN_S^*).$$

Donc $T = \alpha N_S + \beta N_S^*$ est une extension normale de $\alpha S + \beta S^*$. ■

Proposition 2.1 *Si S est un opérateur sous normal, tel que $T = \alpha S + \beta S^*$, pour deux nombres complexes différents α, β avec $|\alpha| \neq \beta$ est un opérateur polynôme compact, alors S est un opérateur normal.*

Preuve. *Par hypothèse, il existe un polynome $p(\lambda)$ tel que $p(T)$ est compact. Comme le spectre $\sigma(p(T))$ est presque par tout dénombrable, il devient d'après le théorème spectral que $\sigma(T)$ est presque par tout dénombrable.* ■

Théorème 2.1 *Tout opérateur sous-normal se décompose en somme directe d'un opérateur normal et un opérateur sous-normal pur.*

Proposition 2.2 *Tout opérateur quasi normal est sous bnormal.*

Preuve.
Cas 1 : supposons que $KerS = 0$ si $S = UA$ est la décomposition polaire de S alors U est ce que forcement une isométrie. Soit $E = UU^*$ alors E est la

projection sur l'espace final de U *ainsi* $E^{\perp}U = U^{*}E^{\perp} = 0$, *(ici* $E^{\perp} = I - E$*),* *si on définit des opérateurs* V *et* B *sur* $K = H \oplus H$ *par*

$$V = \begin{pmatrix} U & E^{\perp} \\ 0 & U^{*} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

et $N = VB$, *comme* $UA = AU$ *et* $U^{*}A = AU^{*}$ *il est facile de vérifier que* N *est normal. Comme*

$$N = \begin{pmatrix} S & E^{\perp}A \\ 0 & U^{*}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & E^{\perp}A \\ 0 & S^{*} \end{pmatrix}$$

il s'ensuit que N *laisse* $H = H \oplus 0$ *invariant et* $N\mid_{H} = S$.
Cas 2 : Supposons maintenant que $KerS \neq (0)$. *ici* $KerS = L \subseteq KerS^{*}$, *comme* $S^{*} = AU^{*} = U^{*}A$. *Si* $S_1 = S\mid_{L^{\perp}}$ *et* $S = S_1 \oplus 0$ *sur* $L^{\perp} \oplus L = H$, $S^{*}S = S_1^{*}S \oplus (0)$ *et il est facile de voir que* S_1 *est quasi normal. par le premier cas,* S_1 *est sous normal. Donc* S *est sous normal.* ■

Proposition 2.3 *Tout opérateur sous normal est hyponormal*

Preuve. *Soit* S *un opérateur sous normal et* N *son extension minimale normale.*
On a

$$0 = N^{*}N - NN^{*} = \begin{pmatrix} S^{*}S & S^{*}X \\ X^{*}S & X^{*}X + TT^{*} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} SS^{*} + XX^{*} & XT \\ T^{*}X^{*} & T^{*}T \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$0 = S^{*}S - SS^{*} - XX^{*}, \quad ou \quad S^{*}S - SS^{*} = XX^{*} \geq 0.$$

■

2.2 Carectrisation de sous normalité

Théorème 2.2 *[13] Si $S \in B(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *S est sous normal*
2. *S est une extension d'un opérateur quasinormal*
3. *Si $f_0, ..., f_n \in H$ alors*

$$\sum_{j,k=0}^{n} \left\langle S^j f_k, S^k f_j \right\rangle \quad \geq 0 \tag{2.1}$$

et il existe une constante $c > 0$ telle que, pour toutes fonctions $f_0, ..., f_n \in H$

$$\sum_{j,k=0}^{n} \left\langle S^{j+1} f_k, S^{k+1} f_j \right\rangle \leq c \sum_{j,k=0}^{n} \left\langle S^j f_k, S^k f_j \right\rangle \tag{2.2}$$

4. *Pour chaque $f_0, ..., f_n \in H$, (2.1) est valable.*
5. *Pour chaque $f_0, ..., f_n \in H$,*

$$\sum_{j,k=0}^{n} \left\langle S^{j+k} f_j, S^{j+k} f_k \right\rangle \quad \geq 0. \tag{2.3}$$

6. *Si $B_0, ..., B_n \in C^*$, (la $C^*(S)$ algèbre générée par S) alors*

$$\sum_{j,k=0}^{n} B_j^* S^{*k} S^j B_k \quad \geq 0. \tag{2.4}$$

Preuve.

- (1) $\Longleftrightarrow$ (2) : *(Clair).*
- (1) $\Longrightarrow$ (3) : *Soit N un opérateur normale sur K avec $H \subseteq K$ et $N|_H = S$ et P la projection de K sur H, il est facile de voir que pour f dans*

H, $S^{*n}f = PN^{*n}f$, $n \geq 1$.

Donc si $f_0, ..., f_n \in H$ alors

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=0}^{n} \left\langle S^j f_k, S^k f_j \right\rangle &= \sum_{j,k=0}^{n} \left\langle N^j f_k, N^k f_j \right\rangle \\
&= \sum_{j,k=0}^{n} \left\langle N^{*k} N^j f_k, f_j \right\rangle \\
&= \sum_{j,k=0}^{n} \left\langle N^j N^{*k} f_k, f_j \right\rangle \\
&= \sum_{j,k=0}^{n} \left\langle N^{*k} f_k, N^{*j} f_j \right\rangle \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} N^{*k} f_k \right\|^2 .
\end{aligned}$$

ainsi (2.1) est vérifiée.

En mettant $g_k = Sf_k$, et pour chaque f_k dans les équations précédentes remplacé par g_k, alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=0}^{n} \left\langle S^{j+1} f_k, S^{k+1} f_j \right\rangle &= \sum_{j,k=0}^{n} \left\langle N^j g_k, N^k g_j \right\rangle \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} N^{*k} g_k \right\|^2 \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} N^{*k} N f_k \right\|^2 \\
&= \left\| N \sum_{k=0}^{n} N^{*k} f_k \right\|^2 \leq \|N\|^2 \sum_{k=0}^{n} \left\langle S^j f_k, S^k f_j \right\rangle
\end{aligned}$$

d'où (2.2) est vérifiée avec $c = \|N\|^2$.

- (3) $\Longrightarrow$ (4) : *Clair*
- (4) $\Longrightarrow$ (5) : *Si $h_k = S^k f_k$ alors*

$$0 \leq \sum_{j,k=0}^{n} \left\langle S^j h_k, S^k h_j \right\rangle = \sum_{j,k=0}^{n} \left\langle S^{j+k} f_k, S^{j+k} f_j \right\rangle$$

alors (2.3) *est vérifiée.*

– (4) $\Longrightarrow$ (6) : *Si* $B_0, ..., B_n \in C^*(S)$ *et* $f \in H$, *soit* $f_k = B_k f$

$$0 \leq \sum_{j,k=0}^{n} \left\langle S^j B_k f, S^k B_j f \right\rangle = \left\langle \sum_{j,k=0}^{n} B_j^* S^{*k} S^j B_k f, f \right\rangle$$

alors (2.4) *est vérifiée.*

■

Théorème 2.3 *[13] Soit* $S \in B(H)$, *les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. S *est sous normal.*
2. *Il existe un opérateur unitaire* $U \in B(H)$, *tel que pour* $n = 0, 1, ...,$ $S^{*n} = P_H U^n S^n$, *où* P_H *est la projection orthogonale de* $H \oplus H$ *sur* $H \oplus 0$.
3. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, $S^{*n} = \left[\int_{\partial D} e^{int} dQ(t) \right] S^n$ *où* Q *est une mesure des opérateurs positifs définie sur le bord du disque de l'unité* ∂D.
4. *Il existe une suite d'opérateurs* $\{K_n\} n \in \mathbb{N} \in B(H)$ *satisfaisant* $S^{*n} = K_n S^n$; *pour* $n \in \mathbb{N}$

   En outre, si nous définissons

$$L_n = \begin{cases} K_n & n \geq 0 \\ K_n^* & n < 0 \end{cases}$$

   Alors pour tout ensemble fini $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *contenu dans* H

$$\sum_{j,k \geq 0} \langle L_{j-k} x_j, x_k \rangle \geq 0.$$

5. *Il existe une suite d'opérateurs* $K_n \in B(H)$ *satisfaisant* $S^{*n} = K_n S^n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$*. En outre, si nous définissons.*

$$L_n = \begin{cases} K_n & n \geq 0 \\ K_n^* & n < 0 \end{cases}$$

puis, pour chaque $x \in H$ *et chaque* $n = 0, 1, ...$ *la matrice*

$$\left[\langle L_{j-k}x, x\rangle\right]_{j,k\geq 0}^{n}$$

est définie positive.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2)

Soit N *une extension normale de* S *agissant sur* $H \oplus H$*. Comme le noyau de* N *réduit* N *on peut écrire* $N = N_1 + 0$ *agissant sur* $(kerN)^{\perp} \oplus (kerN)$ *où* N_1 *est normal et bijectif. Puisque* N_1 *est normal, si* $N_1 = U_1|N_1|$ *est une décomposition polaire de* N_1*, alors* U_1 *est unitaire. Soit* V_1 *un opérateur un unitaire dans* $B(kerN)$ *et* $U = U_1 \oplus V_1$*. Ainsi* $N = U|N|$ *où* $U \in B(H \oplus H)$ *est unitaire. Par la normalité* U_1 *commute avec* N_1 *ainsi* U *commute avec* N*. On calcule*

$$N^{*n} = (U|N|)^{*n}$$

$$= U^{*n}|N|^{n}$$

$$= U^{*n}(U|N|)^{n}$$

$=$

$$= (U^{*2})^{n} N^{n}.$$

En projectant sur $H \oplus 0$ *on voit que l'assertion(2) est vérifiée.*

(2) $\Rightarrow$ (3).

Par le théorème spectral [13]

$$U^{n} = \int_{\partial D} e^{int} dE(t), \quad n \quad \text{est} \quad \text{un} \quad \text{nombre} \quad \text{entier.}$$

Pour une mesure d'une valeur de projection E définie sur ∂D. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} T^{*n} &= P_H U^n P_H T^n \\ &= [\int_{\partial D} e^{int} dQ(t)] T^n \end{aligned}$$

où $Q(t) = P_H E(t) P_H$ est une mesure des opérateurs positifs sur ∂D. (3) $\Longrightarrow$ (4).

Par hypothèse, nous pouvons choisir

$$K_n = \int_{\partial D} e^{int} dQ(t), \quad pour \quad n \in \mathbb{N}.$$

alors

$$K_n^* = \int_{\partial D} e^{-int} dQ^*(t) = \int_{\partial D} e^{-int} dQ(t), \quad pour \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent

$$L_n = \int_{\partial D} e^{int} dQ(t), \quad pour \quad tout \quad entier \quad n$$

Pour toute partie finie $\{x_0, ..., x_M\}$ de H. Soit $\{\Delta_p\}_{p=1}^n$ une partition de ∂D et choisissons $e^{it_p} \in \Delta_p$. Alors pour tout p fixe

$$\sum_{j,k \geq 0}^{M} e^{ijt_p} e^{-ikt_p} \langle Q(\Delta_p) x_j, x_k \rangle = \left\langle Q(\Delta_p) \sum_{j=0}^{M} e^{ijt_p} x_j, \sum_{k=0}^{M} e^{ikt_p} x_k \right\rangle \geq 0.$$

En sommant sur p, nous obtenons

$$\sum_{j,k \geq 0}^{M} \sum_{p=1}^{n} e^{i(j-k)t_p} \langle Q(\Delta_p) x_j, x_k \rangle \geq 0.$$

La somme qui est à l'intérieure est une somme de Riemann, alorson peut conclure que

$$\sum_{j,k \geq 0}^{M} \langle L_{j-k} x_j, x_k \rangle = \sum_{j,k \geq 0}^{M} \int_{\partial D} e^{i(j-k)t} d \langle Q(t) x_j, x_k \rangle \geq 0.$$

$(4) \Longrightarrow (5)$.

Pour tout x *dans* H *et un sous-ensemble fini* $\{t_0, ..., t_M\}$ *des nombres complexes, on désigné* $t_j x$ *par* x_j *et on applique (4) on trouve (5).*

$(5) \Longrightarrow (4)$ *Par suite de Herglotz (voir [22]), l'hypothèse dit que* $\{\langle L_n x, x\rangle\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *est une suite de moment trigonométrique pour une mesure de Borel positif* μ_x *sur* ∂D, *dont la variation totale est*

$$\langle L_0 x, x\rangle = \|x\|^2$$

Ainsi

$$\langle L_n x, x\rangle = \int_{\partial D} e^{int} d\mu_x(t), \quad n = 0, 1, ... \tag{2.5}$$

Soit x *dans* H. *Pour chaque borélien* $\Delta \subset \partial D$, *on définit la forme positive* $Q(\Delta)$ *par*

$$\langle Q(\Delta)x, x\rangle = \int_{\Delta} 1 d\mu_x(t).$$

On peut étendre cette forme à une forme bilinéaire sur H *par polarisation. La forme bilinéaire est donc borné. l'opérateur positif* $Q(\Delta)$ *est défini dans* $B(H)$. *Par polarisation et* (2.5), *nous avons*

$$\langle L_n x, y\rangle = \int_{\partial D} e^{int} d\,\langle Q(t)x, y\rangle$$

pour x, y *dans* H. *Ainsi*

$$\langle T^{*n} x, y\rangle = \langle L_n T^n x, y\rangle = \int_{\partial D} e^{int} d\,\langle Q(t)T^n x, y\rangle\,.$$

Ainsi (3) est verifiée et ainsi (4) doit.

$(4) \Longrightarrow (1)$ *Soit* $\{x_0, ..., x_n\}$ *un sous-ensemble fini de* H. *Par* (4)

$$\sum_{j,k\geq 0}^{n} \left\langle L_{j-k} T^j x_j, T^k x_k\right\rangle \geq 0.$$

Maintenant si $k - j \geq 0$

$$\begin{aligned}\left\langle L_{j-k}T^j x_j, T^k x_k \right\rangle &= \left\langle T^j x_j, K_{k-j}T^{k-j}T^j x_k \right\rangle \\ &= \left\langle T^j x_j, T^{*k-j}T^j x_k \right\rangle \\ &= \left\langle T^k x_j, T^j x_k \right\rangle .\end{aligned}$$

On obtient un résultat similaire lorsque $k - j < 0$. *Ainsi*

$$0 \leq \sum_{j,k\geq 0}^{n} \left\langle L_{j-k}T^j x_j, T^k x_k \right\rangle = \sum_{j,k\geq 0}^{n} \left\langle T^k x_j, T^j x_k \right\rangle .$$

Il en résulte de ce critère (Bram-Halmos) que T *est sous normal [7].* ■

Corollaire 2.1 *L'opérateur* S *est sous normal si et seulement si pour tout* x *dans une variété linéaire dense dans* H, *la restriction de* S *à* H_x *est sous normal*

Preuve. *La nécessité de la condition est triviale.*

Si D *dénote la variété linéaire dense dans* H *donnée dans les hypothèses et* $S|_{H_x}$ *dénote la restriction de* S *à* H_x.

Si $S|_{H_x}$ *est sous normal pour tout* $x \in D$, *il en est de même* $(\lambda - S)|_{H_x}$.

Ainsi, sans perte de généralité, nous supposons que S *est inversible et*

$$(S|_{H_x})^{-1} = S^{-1}|_{H_x}.$$

Fixons x *dans* D, *comme* $S|_{H_x}$ *est sous normal, il existe des contractions* B_n *dans* $B(H_x)$ *de telles sorte que*

$$P_{H_x}S^{*n}|_{H_x} = B_n S^n|_{H_x}, \quad n = 0, 1, ...$$

Alors

$$P_{H_x}S^{*n}S^{-n}|_{H_x} = B_n, \quad n = 0, 1, ...$$

Par (5) du théorème 2.1 appliqué à x et B_n, nous obtenons

$$\left[\left\langle S^{*j-k}S^{k-j}x,x\right\rangle\right]_{j,k\geq 0}^{n} \quad est \quad dfinie \quad positive$$

pour $n\in\mathbb{N}$, Mais $\quad S^{*n}=(S^{*n}S^{-n})S^{n}$, *donc (5) du théorème 2.1 montre que S est sous normal.* ■

2.3 Extension normale d'un opérateur sous normal

Lemme 2.2 *[34] Soit S un opérateur sous normal dans $B(H)$, l'extension normale N_S peut étre s'écrire sous la forme*

$$N_S=\begin{pmatrix} S & (S^*S-SS^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & Q^*S(Q^*)^{-1}, \end{pmatrix}$$

où $Q=(S^*S-SS^*)^{\frac{1}{2}}$.

Preuve. *Soit $S\in B(H)$ un opérateur sous normal et N_S sa extension normale, puisque l'opérateur N_S est normal, alors il commute avec son adjoint, c'est à dire*

$$N_SN_S^*=N_S^*N_S.$$

D'autre part,

$$N_S=\begin{pmatrix} S & Q \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad N_S^*=\begin{pmatrix} S^* & 0 \\ Q^* & T^* \end{pmatrix}.$$

On a

$$N_SN_S^*=\begin{pmatrix} S & Q \\ 0 & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S^* & 0 \\ Q^* & T^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} SS^*+QQ^* & QT^* \\ TQ^* & TT^* \end{pmatrix}.$$

$$N_S^* N_S = \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ Q^* & T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & Q \\ 0 & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^*S & S^*Q \\ Q^*S & Q^*Q + T^*T \end{pmatrix}.$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} QQ^* = S^*S - SS^* \\ S^*Q = QT^* \\ Q^*Q + T^*T = TT^* \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} |Q^*| = S^*S - SS^* \\ S^*Q = QT^* \\ Q^*Q = TT^* - T^*T \end{cases},$$

où $|Q^*| = (Q^*Q)^{\frac{1}{2}}$.

Si on écrit Q *sous sa décomposition polaire,* $Q^* = U|Q^*|$, *où* U *est un opérateur unitaire, alors on obtient*

$$Q^* = U(|S^*S - SS^*|)^{\frac{1}{2}}$$

On peut choisir $U = I$ *(l'identité), on obtient* $Q^* = (|S^*S - SS^*|)^{\frac{1}{2}}$.

Passant à l'ajoint, on trouve

$$Q = (S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}}.$$

Par ailleurs, on en déduit que

$$T = Q^*S(Q^*)^{-1}.$$

Par conséquent

$$N_S = \begin{pmatrix} S & (S^*S - SS^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & Q^*S(Q^*)^{-1} \end{pmatrix}.$$

■

Définition 2.2 *Soit $S \in B(H)$ un opérateur sous-normal dextension normale $N_S \in B(K)$. On dit que N_S est une extension normale minimale de S si $K = Vect f N^{*k} x; x \in H, k \in \mathbb{N}$.*

L'unicité de l'extension normale minimale d'un opérateur sous-normal est assurée par le théorème suivant.

Théorème 2.4 *Soient $S_1 \in B(K_1)$ et $S_2 \in B(K_2)$ deux extensions normales minimales d'un opérateur sous-normal $S \in B(H)$, alors il existe une application unitaire $U : K_1 \to K_2$ telle que $S_1 = U^{-1} S_2 U$.*

Preuve. *Soient S, T deux opérateurs sous normaux dans $B(H_1)$ et $B(H_2)$ (resp) et $U \in B(H_1, H_2)$ un opérateur unitaire tel que $US = TU$. Supposons que $N_S \in B(K_1)$ et $N_T \in B(K_2)$ soient les extensions normales minimales de S et T resp. Posons pour chaque $i = 1, 2, M_i = Vect\{N_i^{*k} h_i, h_i \in H_i, k \in \mathbb{N}\}$. Considérons l'application f définie par $f(N^{*k} h_1) = N_2^{*k} U h_2$. Il est bien clair que $f/H_1 = U$. De plus, on a*

$$\| \sum_{k=1}^{m} f(N_1^{*n_k} h_k \|^2 = \| \sum_{k=1}^{m} N_2^{*n_k} U h_k \|^2$$

$$= \sum_{kj} \langle N_2^{*n_k} U h_k, N_2^{*n_j} U h_j \rangle$$

$$= \sum_{kj} \langle N_2^{n_j} U h_k, N_2^{n_k} U h_j \rangle$$

$$= \sum_{kj} \langle S_2^{n_j} U h_k, S_2^{n_k} U h_j \rangle$$

$$= \sum_{kj} \langle U S_1^{n_j} h_k, U S_1^{n_k} h_j \rangle$$

$$= \sum_{kj} \langle S_1^{n_j} h_k, S_1^{n_k} h_j \rangle$$

$$= \sum_{kj} \langle N_1^{*n_k} h_k, N_1^{*n_j} h_j \rangle$$

$$= \sum \|N_1^{*n_k} h_k\|^2.$$

Ceci montre que f est une application linéaire isométrique de M_1 dans M_2. Le fait que M_1 et M_2 sont denses, respectivement, dans K_1 et K_2 entraîne que l'application f se prolonge en un isomorphisme U de K_1 dans K_2 vérifiant $N_1 = U^{-1} N\prime_1 U$. ■

Proposition 2.4 *si S est sous normal sur H et N est l'extension normale sur K alors N est une extension minimale normale de S si et seulement si*

$$K = \{N^{*i} x : x \in H \quad et \quad i \geq 0\}$$

Preuve. *Si $L = \{N^{*i} x : x \in H \quad et \quad i \geq 0\}$. alors L réduit N et $H \subseteq L$. si N est une extension minimale normale de S et $K = L$. Aussi, si M est un sous espace de réduction pour N qui contient H, alors $N^{*n} x \in M$ pour chaque $x \in H$ et $n \geq 0$ c'est-à- $L \subseteq M$ si $L = K, N$ est une extension minimale normale de S.* ■

Proposition 2.5 *Pour $k = 1, 2$, soit S_k un opérateur sous normal sur H_k et N_k une extension normale minimale de S_k sur l'espace de Hilbert K_k.*
Si $U : H_1 \to H_2$ est un isomorphisme de telle sorte que $US_1U^* = S_2$, alors il est un isomorphisme $V : K_1 \to K_2$ tel que

$$V|_{H_1} = U \quad et \quad VN_1V^* = N_2.$$

Preuve. *L'idée ici est de définir V sur K_1 par*

$$VN_1^{*n} f_1 = N_2^{*n} U f_1, \quad f_1 \in H_1, \quad et \quad n \geq 0.$$

Il doit être démontré que célà définit en effet un opérateur qui est un isomorphisme.

Si $f_1, f_2, ..., f_m \in H_1$ *et* $n_1, n_2, ..., n_m \geq 0$ *alors*

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{m} N_2^{*n_k} U f_k\right\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^{m} N_2^{*n_k} U f_k, \sum_{j=1}^{m} N_2^{*n_j} U f_j \right\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{m} \left\langle N_2^{*n_k} U f_k, N_2^{*n_j} U f_j \right\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{m} \left\langle N_2^{n_j} U f_k, N_2^{n_k} U f_j \right\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{m} \left\langle U N_1^{n_j} f_k, U N_1^{n_k} f_j \right\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{m} \left\langle N_1^{n_j} f_k, N_1^{n_k} f_j \right\rangle \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{m} N_1^{*n_k} f_k\right\|^2 .
\end{aligned}$$

Ceci démontre en même temps que

$$V\left(\sum_{k=1}^{m} N_1^{*n_k} f_k\right) = \sum_{k=1}^{m} N_2^{*n_k} U f_k \tag{2.6}$$

est un opérateur bien défini et une isométrie de quelque variétés linéairs de K_1 *en* K_2.

Par la proposition (2.4) et le fait que N_1 *et* N_2 *sont les extensions minimales normales de* S_1 *et* S_2, V *est donc bien défini et s'étend à un isomorphisme* $V : K_1 \to K_2$.

Il s'en suit facilement de (2.6) que

$$V|_{H_1} = U \quad et \quad V N_1 V^* = N_2.$$

■

2.4 Spectre d'un opérateur sous normal

Proposition 2.6 *[12] Soit S est sous normal et N_S est une extension normale de S, alors*

$$\sigma(N_S) \subset \sigma(S) \;\; et \;\; \sigma_a(S) \subset \sigma(N_S).$$

Preuve.

1. *On va voir si S est inversible, alors N_S est inversible*

   En effet, si $N_S = \int z dE(z)$ la décmposition spectrale de N_S, soit $\varepsilon > 0$ et $M = E(B(0,\varepsilon))K$, alors montrons que

   $$\|N_S^k f\| \leq \varepsilon^k \|f\| : \;\; pour \;\; k = 1,2,3... \;\; et f \in M$$

   Posons $\triangle ;= B(0,\varepsilon)$. Alors on a

   $$NE(\triangle) = \int z\chi_{\triangle}(z)dE(z) = \phi(N_S),$$

   où $\phi = z\chi_{\triangle}$.

   Donc on a

   $$\|NE(\triangle)\| = \|\phi(N_S)\| \leq \|\phi\| = \sup|\phi(z)| = \{\sup|z|, z \in \triangle\} \leq \varepsilon$$

   D'où si $f \in M$ et $h \in H$, on a

   $$|\langle f,h\rangle| = |\langle f, S^k S^{-k}h\rangle| = |\langle f, N_S^k S^{-k}h\rangle|$$

   $$= |\langle f, N_S^{*k} S^{-k}h\rangle| \leq \|N_S^{*k} f\|\|S^{-k}h\| \leq \varepsilon^k\|f\|\|S^{-k}\| \leq \varepsilon^k\|S^{-1}\|^k\|f\|\|h\|.$$

   Passant à la limite $k \to \infty$, on obtient

   $$\varepsilon < \|\frac{1}{S}\|,$$

   ce qui implique

   $$\langle f,h\rangle = 0,$$

d'où $H \subseteq M^{\perp}$. *Puisque est espace induit de* N_S, *alors* $N/M^{\perp}$ *est normal. Comme* N_S *est minimale, alors* $M^{\perp} = \{0\}$ *et donc* N_S *est inversible, car* $N_S = N_{\varphi}$ *et* $|\varphi(x)| \geq \varepsilon$.

2. *Remarquons que* $\lambda \in \sigma_{ap}(S)$, *implique qu'il existe des vecteurs unitaires* $h_n \in H$, *tels que*

$$\|(\lambda - S)h_n\| \to 0.$$

Mais

$$(\lambda - S)h_n = (\lambda - N_S)h_n$$

D'où

$$\sigma_a(S) \subseteq \sigma_{ap}(N_S) = \sigma(N_S) = \sigma_n(S).$$

$\lambda \in \partial\sigma(S)$ *implique* $\lambda \in \sigma_{ap}(S)$, *donc* $\lambda \in \sigma_n(S)$, *d'où* $\lambda \in int\sigma_n(S)$, *donc* $\lambda \in \partial\sigma_n(S)$.

3. *Soit* F *une composante bornée de* $(\sigma_n(S))^c$, *posons*

$$F_+ = F/\sigma_n(S) \ \text{ et } \ F_- = F \cap \sigma_n(S).$$

Donc

$$F = F_+ \cup F_-$$

et

$$F_+ \cap F_- = \emptyset$$

et F_+ *est ouvert.*

D'après (2), $F_- = F \cap int(\sigma_n(S))$, *d'où* F_- *est ouvert. Puisque* F *est connexe, alors* $F_+ = \emptyset$ *ou* $F_- = \emptyset$.

■

Corollaire 2.2 *Si* S *est un opérateur sous normal son extension minimal normale est* N_S, *alors*

$$r(S) = \|S\| = \|N_S = r(N_S).$$

Preuve. *Comme $r(S) \leq \|S\| \leq \|N_S\| = r(N_S)$, alors l'inégalté est un résultat direct de la proposition précédente.* ■

Proposition 2.7 *[12] Si S un opérateur sous normal, alors les propriétés suivantes sont verifiées :*

1. $\sigma_n(S) \subseteq \sigma(S)$ *(Helmos 1952).*
2. $\sigma_{ap}(S) \subseteq \sigma_n(S)$ *et* $\partial\sigma(A) \subseteq \partial\sigma_n(S)$.
3. *Si F est une partie bornée de $\mathbb{C}/\sigma_n$, alors $F \cap \sigma(S) = \emptyset$, ou $F \subseteq \sigma(S)$.*

2.5 Théorème de Fuglède-Putnam généralisé

Théorème 2.5 *[20] Soient S et T^* des opérateurs sous normaux et X un opérateur quelconque tels que $AX = XB$, alors $S^*X = XT^*$.*

Preuve. *Soit N_S l'extension normal de S dans K, alors on a*

$$N_S = \begin{pmatrix} S & S_{11} \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}.$$

L'extension normal de T^* dans un espace de Hilbert K_* est donnée par

$$N_{T^*} = \begin{pmatrix} T^* & T_{11} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Cosidérons l'opérateur sur $(K^* \ominus H) \oplus H$

$$L = \begin{pmatrix} T_{22}^* & T_{12}^* \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Puisque N_{T^*} est normal, alors L est normal aussi. Considérons $\widetilde{X}, \widetilde{S}$ qui sont *définis sur* $H \oplus (K \ominus H) \oplus (K_* \ominus H) \oplus H$ *comme suit.*

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} S & S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{22} & T_{12} \\ 0 & 0 & 0 & T \end{pmatrix}, \quad \widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

il est clair que $\widetilde{S}$ *est normal et* $\widetilde{S}\widetilde{X} = \widetilde{X}\widetilde{S}$ *par l'hypothèse* $SX = XT$*, alors* $\widetilde{S}^*\widetilde{X} = \widetilde{X}\widetilde{S}^*X$*. Donc on a* $S^*X = TX^*$*,* $S_{12}^*X = 0$ *et* $XT_{12}) = 0$*.* ■

Remarque 2.1 *Comme l'adjoint de tout opérateur sous normal est sous normal, on peut déduire le résultat suivant.*
Si S *et* T *sont des opérateurs sous normaux dans* $B(H)$*, tels que pour tout* $X \in B(H)$ *on a* $AX = XB$*, alors* $S^*X = XT^*$*..*

Lemme 2.3 *[20] Soient* S, T^*, R *et* Q *des opérateurs sous normaux, tels que* N_S *commute avec* N_Q *et* N_Q* *commute avec* N_{T^*}*,où* N_S, N_Q, N_{T^*} *et* N_{T^*} *denotent les extensions minimales de* S, R, Q^* *et* B^* *respectivement. Si pour un opérateur* $X \in B(H)$ $SXQ = RXT$*, alors* $S^*XQ^* = R^*XT^*$*.*

Chapitre 3

Equations de type Sylvester $AX - XB = C$

*Dans ce chapitre on va détailler nos travaux [**?**] et [23] concernant :*

1. *Quelques théorèmes d'existence des solutions pour l'équation de Sylvester sous différentes conditions et comme une conséquence on a présenté un résultat pour les opérateurs sous normaux.*
2. *Certains résultats d'existence des solutions pour l'équation de Sylvester, dans le cas des opérateurs sous normaux.*

3.1 Solution explicite de l'équation de Sylvester

Théorème 3.1 *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, et soit A et B deux opérateurs dans $B(H)$ tel que A est invensible. Supposons qu'il existe une suite (a_n) dans $\mathbb{R}_+^*$, si pour tout $x \in H$ la série de la terme générale $a_n \|A^{*(-n-1)}x\|^2$ et $a_n^{-1}\|B^*x\|^2$ sont convergentes faiblement. Alors pour tout $y \in B(H)$ la série $\sum_0^\infty a^{-n-1}YB^n$ est convergente faiblement dans $B(H)$, de plus la limite est une solution de l'équation de Sylvester $AX - XB = Y$.*

Preuve. *Pour $x, y \in H$, on a*

$$\|\langle\sum_{m_1}^{m_2} A^{-n-1}YB^n y, x\rangle\| \leq \sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a^n \langle A^{*(-n-1)}x, x\rangle}\sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n^{-1}\langle B^{*n}Y^*YB^n y, y\rangle}$$

$$= \sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n \langle A^{*(-n-1)}Y^*YB^n x, A^{*(-n-1)}x\rangle}\sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n^{-1}\langle YB^n y, YB^n y\rangle}$$

$$\leq \|Y\|\sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n \|A^{*(-n-1)}x\|^2}\sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n^{-1}\|B^n y\|^2}.$$

Alors la série $\sum_{k=0}^{\infty}\langle a^{-k-1}YB^k x, y\rangle$ *est de de Cauchy, donc elle est convergente. Posons*

$$\langle Xx, y\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\langle A^{-k-1}YB^k x, y\rangle.$$

D'après le théorème de Banach-Steinhauss, on obtient

$$\sup \|\sum_{0}^{n} A^{-k-1}YB^k\| < \infty.$$

Donc $\sum_0^n A^{-n-1}YB^k$ *est convergente par rapport à la topologie faible* $*$ *de* $B(H)$. ■

Théorème 3.2 *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, et soit A et B des opérateurs dans $B(H)$. Supposons qu'il existe une fonction mesurable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, telle que les deux intégrales $\int_0^\infty \|e^{-tA}x\|^2 f(t)dt$ et $\int_0^\infty \|e^{tB}x\|^2 f(t)dt$ sont convergentes, pour tout $x \in H$. Alors pour tout $Y \in B(H)$, l'opérateur $X = \int_0^\infty e^{-tA}Ye^{tB}dt$ est bien définie, et est une solution de l'équation de Sylvester.*

Preuve.

$$\|\int_0^\infty e^{-tA}Ye^{tB}dt\| \leq \sqrt{\|\int_0^\infty f(t)e^{-tA}e^{-tA^*}dt\|}\sqrt{\|\int_0^\infty (f(t))^{-1}e^{tB^*}Y^*Ye^{tB}dt\|}$$

$$\leq \|Y\|\sqrt{\int_0^\infty f(t)\|e^{-tA}x\|^2dt}\sqrt{\int_0^\infty (f(t))^{-1}\|e^{tB}Y\|^2dt}.$$

Puisque $\int_0^\infty \|e^{-tA}x\|^2 f(t)dt$ *et* $\int_0^\infty \|e^{tB}x\|^2 \times f(t)dt$ *sont convergentes pour tout* $x \in H$. *Alors l'intégrale* $\int_0^\infty e^{-tA}Ye^{tB}dt$ *est bien définie pour tout* $x \in H$.

Maintenant, on verifie que cette intégrale est une solution de l'équation $AX - XB = Y$. *On a*

$$\begin{aligned} AX - XB = A\int_0^\infty e^{-tA}Ye^{tB}dt - (\int_0^\infty e^{-tA}Ye^{tB}dt)B = \\ = \int_0^\infty (Ae^{-tA}Ye^{tB}dt - e^{-tA}Ye^{tB}B)dt \\ = \int_0^\infty (-e^{-tA}Ye^{tB})'dt \\ = [-e^{-tA}Ye^{tB}]_0^\infty = Y. \end{aligned}$$

Donc X *est une solution de l'équation* $AX - XB = Y$. ■

Théorème 3.3 *Soient* A *et* B *deux opérateurs normaux et* $A = A_1 + iA_2$, $B = B_1 + iB_2$, *où* A_1 *et* A_2 *sont commutants et auto adjoints la même chose pour* B_1, B_2. *Soient* $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ *et* $\widetilde{f}$ *sa transforme de Fourier a les propriétés suivantes.*

$$\widetilde{f}(s_1, s_2) = \frac{1}{s_1 + is_2},$$

$s_1 + is_2 \in \sigma(A) - \sigma(B)$.

Donc la solution de l'équation $AX - XB = Y$ *est donnée par :.*

$$X = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t_1A_1+t_2A_2)}Ye^{i(t_1B_1+t_2B_2)}f(t_1, t_2)dt_1dt_2$$

Preuve. *On a* $A = A_i + iA_2$, *alors*

$$A^* = A_1^* - iA_2^* = A_1 - iA_2.$$

$Au = \alpha u$, *donc*

$$A^*u = \overline{\alpha}u = (\alpha_1 - i\alpha_2)u$$

et $Bv = \lambda v$ *d'où*

$$B^*v = (\lambda_1 - i\alpha_2)v.$$

Par ailleurs, on a

$$\alpha - \lambda = (\alpha_1 - \lambda_1) - i(\alpha_2 - \lambda_2),$$

où

$$\widetilde{f}(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-its} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

$$\langle u, Ae^{-i(t_1A_2+t_2A_2)}Ye^{i(t_1B_1+t_2B_2)}v\rangle = \langle e^{i(t_{11}A_1+t_2A_2)}A^*u, Ye^{i(t_{11}B_1+t_2B_2)}v\rangle$$

$$= e^{(t_1A_1+t_2A_2-t_1B_1-t_2B_2)}(\alpha_1 + i\alpha_2)\langle u, yv\rangle$$

$$\langle u, e^{-i(t_1A_1+t_2A_2)}Ye^{i(t_1B_1+t_2B_2)}Bv\rangle = e^{(t_1A_1+t_2A_2-t_1B_1-t_2B_2)}(\lambda_1 + i\lambda_2)\langle u, yv\rangle$$

$$\langle u, (AX-XB)v\rangle = [(\alpha_1+i\alpha_2)-(\lambda_1+i\lambda_2)]\langle u, yv\rangle \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-its} f(t_1, t_2dt_1dt_2$$

$$= \langle(\alpha_1 - \lambda_1) + i(\alpha_2 - \lambda_2)\langle u, Yv\rangle \widetilde{f}(s_1, s_2) = \langle(\alpha_1 - \lambda_1) + i(alpha_2 - \lambda_2)\langle u, Yv\rangle$$

$$\langle u, Yv\rangle.$$

Donc $AX - XB = Y$. ■

Corollaire 3.1 *Si* Y *un opérateur de rang 1, i,e.,* $Y = u \otimes v$*, alors la solution de l'équation* $AX - XB = Y$ *est donnée par :*

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1}u \otimes (B^n)^*v.$$

Dans le cas $Y = a \otimes b$*,* A *et* B *sont normaux, on aura le résultat suivant*

Théorème 3.4 *Soient* A *et* B *deux opérateurs normaux dans* $B(H)$ *tels que la paire* (B, A) *satisfait la propriété de Fuglède-Putnam. Supposons*

$$A = \sum_{\alpha_i \in \sigma(A)} \alpha_i P_i, \quad B = \sum_{\beta_i \in \sigma(B)} \beta_j Q_j.$$

Alors l'équation

$$AX - XB = a \otimes b, \tag{3.1}$$

admet une solution dans $B(H)$ *si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites.*

1. $P_\lambda a = 0$ *ou* $Q_\lambda b = 0$, *si* $\lambda \in \sigma(A) \cap \sigma(B)$.

2. *La matrice*

$$M = \Big(\frac{\|P_{\alpha i}a\|\|Q_{\beta_j}b\|}{\alpha_i - \beta_j}\Big)_{(\alpha_i,\beta_j)\in\Delta_1\times\Delta_2} \in B(l^2(\Delta_2), l^2(\Delta_1),$$

où $\Delta_1 = \{\alpha \in \sigma_p(A), P_\alpha \neq 0\}$ *et* $\Delta_2 = \{\beta \in \sigma_p(B), Q_\beta \neq 0\}$.

De plus la solution est donnée par :

$$X = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i - \beta_j} P_i a \otimes Q_j^* b$$

Preuve. *Supposons (1) et (2) sont satisfaites et considérons* $Y_a = [Y_{\alpha,\beta})$, *tel que* $(\alpha, \beta) \in \sigma_p(A) \times \sigma_p(B)$ *la matrice de block de* Y *par rapport la décomposition*

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i P_{\alpha_i}, \quad et \quad B = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j Q_{\beta_j}.$$

Donc on a

$$Y_{\alpha,\beta} \in B\Big(\sum_{\alpha_i\in\sigma_p(A)} \alpha_i P_i(H), \sum_{\beta_i\in\sigma_p(B)} \beta_j Q_j(H)\Big) = B(H),$$

où $Y_{\alpha_i,\beta_j} = 0$ *si* $\alpha_i = B_i \in \sigma_p(A) \cap \sigma_p(B)$.

Alors Y_{α_i,β_j} *peut être écrire sous la forme*

$$Y_{\alpha,\beta} = P_{\alpha_i} Y Q_{\beta_j} = \frac{1}{\alpha_i - \beta_i} P_{\alpha_i(a)} Q_{\beta_i}(b).$$

On va démontrer Y *est borné. Supposons que* x, y *sont des vecteurs dans* H, *Alors on a*

$$\langle Yx, z\rangle) = \sum_{\alpha_i\in\sigma_p(A)}\sum_{\beta_i\in\sigma_p(B)} \langle P_{\alpha_i} Y Q_{\beta_i} x, z\rangle$$

$$= \sum_{\alpha_i\in\Delta_1}\sum_{\beta_i\in\Delta_2} \frac{1}{\alpha_i - \beta_i} \langle P_{\alpha_i}(a) \otimes Q_{\beta_j}(b)x, z\rangle$$

$$= \sum_{\alpha_i \in \Delta_1} \sum_{\beta_i \in \Delta_2} \frac{1}{\alpha_i - \beta_i} \langle x, Q_{\beta_i}(b) \rangle \langle P_{\alpha_i}(a), z \rangle$$

$$= \sum_{\alpha_i \in \Delta_1} \sum_{\beta_i \in \Delta_2} \frac{1}{\alpha_{\|P_\alpha a\| \|Q_\beta b\|} - \beta_i} \langle x, v_\beta \rangle \langle z, u_{\alpha_i} \rangle.$$

D'où

$$|\langle Yx, z \rangle| \leq \|M\| (|\langle \|(z, u_{\alpha_i} \rangle)_{\alpha_i \in \Delta_1} \| \|(x, v_{\beta_j} \rangle)_{\alpha_i \in \Delta_2} \| = \|M\| \|z\| \|x\|.$$

Puisque l'ensemble de vecteurs est dense dans H*, ce qui implique* Y *est borné.*

D'autre part, on a

$$P_{\alpha_i} AYQ_{\beta_i} - P_{\alpha_i} ABQ_{\beta_i} = (\alpha_i - \beta i) P_{\alpha_i} YQ_{\beta_i}$$

$$= \begin{cases} 0, & \alpha_i = \beta_i \\ P_{\alpha i}(a) \otimes Q_{\beta_i}(b), & \alpha_i \neq \beta_i \end{cases}$$

D'après la condition (1), on déduit $AY - YB = a \otimes b$.

Maintenant, on a

$$AX - XB = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i P_{\alpha_i} \Big) \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P_i X Q_j \Big) \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P_i X Q_j \Big) \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_j Q_{\beta_j} \Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\alpha_i - \beta_j \Big) P_{\alpha_i} X Q_{\beta_j}.$$

Donc on peut écrire l'équation $AX - XB = C$ *sous la forme*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\alpha_i - \beta_j \Big) P_{\alpha_i} X Q_{\beta_j} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\alpha_i - \beta_j \Big) P_{\alpha_i} C Q_{\beta_j},$$

ce qui implique que

$$(\alpha_i - \beta_j) P_{\alpha_i} X Q_{\beta_j} = P_{\alpha_i} C Q_{\beta_j}.$$

D'où

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} P_{\alpha_i} X Q_{\beta_j} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i - \beta_j} P_{\alpha_i} C Q_{\beta_j}$$

■

Corollaire 3.2 *Soit A une matrice diagonalizable, $(P_\alpha)_{\alpha\in\sigma_p(A)}$ l'ensemble des projections spectrales de A et a, b deux vecteurs dans H. Alors l'équation $AX - XA = a \otimes b$ admet une solution dans $B(H)$ si et seulement si $P_\alpha a = 0$ or $P_\alpha^* a = 0$, for $\alpha \in \sigma(A)$.*

Exemple 3.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc $a \otimes b = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

grâce la normalité de A on a

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors A est normal.

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1 - i$, $\lambda_2 = 1 + i$, d'où $\sigma(A) = \{1 - i, 1 + i\}$.

Les projecteurs spectraux satisfaisant

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = I_2, \\ (1-i)P_1 + (1+i)P_2 = A, \end{cases}$$

ce qui implique

$$\left.\begin{cases} P_1 = \frac{1+i}{2i} I_2 - \frac{1}{2ß} A, \\ P_2 = \frac{-1+i}{2i} I_2 + \frac{1}{2ß} A, \end{cases}\right)$$

Pour $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *on a $P_1 a = 0$, d'après le corollaire 3.2 l'équation $AX - XA = a \otimes b$ admet une solution bornée. De plus* $X = \begin{pmatrix} i & 2i \\ i & 2i \end{pmatrix}$ *est solution de l'équation $AX - XA = a \otimes b$.*

3.1.1 Conséquences aux opérateurs sous normaux

Soient A, B et C des opérateurs dans $B(H)$, sachant que A est sous normal. Si $K = H \oplus H^{\perp}$, il est clair que $H \subseteq K$ et pour $X \in B(H)$, on peut écrire

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B(K),$$

i,e, pour $X \in H$, on a $\widetilde{X} = X \oplus 0 \in K$,

Similairement pour B et C dans $B(H)$, on obtient

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B(K)$$

et

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B(K).$$

D'après le lemme 2.2 l'extension de A sur K peut être écrire sous la sorme

$$N_A = \begin{pmatrix} A & (A^*A - AA^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & Q^*A(Q^*)^{-1} \end{pmatrix},$$

où $Q = (A^*A - AA^*)^{\frac{1}{2}}$.

Considérons les deux équations :

$$AX - XB = C, \tag{3.2}$$

et

$$N_A\widetilde{X} - \widetilde{X}\widetilde{B} = \widetilde{C}, \tag{3.3}$$

où $\widetilde{B}, \widetilde{C} \in B(K)$.

Lemme 3.1 *Un élément $X \in B(H)$ est une solution de l'équation* (3.2) *si et seulement si $\widetilde{X}$ est une solution de* (3.3).

Preuve. *Si* $\widetilde{X}$ *est une solution de* (3.2), *alors on a*

$$N_A\widetilde{X} - \widetilde{X}\widetilde{B} = \widetilde{C},$$

ce qui implique

$$\begin{pmatrix} A & (A^*A - AA^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & Q^*A(Q^*)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $AX - XB = C$.

Réciproquement, si X *est une solution de l'équation* (3.2), *alors on a*

$$AX - XB = C,$$

Par ailleurs, en utilisant la décomposition de A, *on obtient*

$$N_A\widetilde{X} = \begin{pmatrix} A & (A^*A - AA^*)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & Q^*A(Q^*)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{B}\widetilde{X} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$N_A\widetilde{X} - \widetilde{B}\widetilde{X} = \begin{pmatrix} AX - XB & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{C}.$$

■

En combinant le Lemme 3.1 et le théorème 2.1 dans [34], on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.5 *Soit* A *un opérateur sous normal,* B *et* C *dans* $B(H)$. *Supposons la paire* $(N_A, \widetilde{B})$ *satisfait la propriété de Fuglède-Putnam, alors l'équation* (3.2) *a une solution dans* $B(H)$ *si et seulement si* $\begin{pmatrix} N_A & 0 \\ 0 & \widetilde{B} \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} N_A & \widetilde{C} \\ 0 & \widetilde{B} \end{pmatrix}$ *sont similaires.*

Preuve. *Puisque l'opérateur* N_A *est normal, alors la paire* $(\widetilde{B}, N_A)$ *satisfait la propriété de Fuglède-Putnam et* $\begin{pmatrix} N_A & 0 \\ 0 & \widetilde{B} \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} N_A & \widetilde{C} \\ 0 & \widetilde{B} \end{pmatrix}$ *sont similaires, alors toutes les hypothèses du théorème verifiés. Donc l'équation* (4.7) *admet une solution unique* $\widetilde{X}$ *dans* $B(K)$ *donnée par :*

$$\widetilde{X} = (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T),$$

où

$$\begin{pmatrix} N_A & 0 \\ 0 & \widetilde{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_A & \widetilde{C} \\ 0 & \widetilde{B} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent et d'après le Lemme 3.1, l'équation (4.7) *admet une solution* X *dans* $B(H)$ *donné par :*

$$X \oplus 0 = (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T).$$

■

Applications aux systèmes dynamiques

Considérons le système linéaire continu et invariant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{3.4}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ *es le vecteur d'état,* $y \in \mathbb{R}^p$ *est le vecteur d'entré (la commande) et* $u \in \mathbb{R}^m$ *le vecteur de sortie. Les matrices de temps invariant sont* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *et* $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

Définition 3.1 *Un observeur d'état est une fonction* $z : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ *satifaisant pour une telle matrice régulière* $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $e(t) := z(t) - Xx(t)$*, on a* $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$.

Définition 3.2 *La paire* (A, B) *(dans* (3.4)*) est dite controlable si pour tout état initial* $x(0) = x_0$ *et tout état final* x_1*, il existe un entré qui transfère* x_0 *à* x_1 *dans temps fini.*
La paire (A, B) *est un observable si la paire* (A^T, B^T) *est controlable.*

Luenberger [31] a donné une méthode pour construire un obseveur état qui a basée à trouver un autre système dynamique

$$\dot{z}(t) = Hz(t) + Fy(t) + Gu(t), \tag{3.5}$$

If (A, C) *is observable et* (H, F) *est controllable, alors une solution d'éqution de Sylvester d'unique rang complet et un observeur d'équation*

$$HX - XA + FC = 0$$

existe et avec $G := XB$*, la solution* $z(t)$ *de* (3.5) *est un observeur pour chacun valeurs unitiales* $x_0, z(0)$*, et chaque fonction d'entré* $u(t)$*.*

Théorème 3.6 *Le système* (3.5) *est un observeur d'état du système* (3.4) *si la matrice* F *est stable et* X *une solution de l'équation* $FX - XA = -GC$*, avec* $G = XB$*.*

Remarque 3.1 *Pour résoudre l'équation* $FX - XA = -GC$*, on applique le théorème 3.4.*

3.2 Cas des opérateurs sous normaux

*Dans cette section on va détailler nos résultats [**?**] qui concernent quelques théorèmes d'existence des solutions pour l'équation* $AX - XB = C$ *dans le cas où* A *un opéateur sous normal et* B *et* C *sont desopéaeurs quelconques.*

Soit A, B *et* C *des opérateurs dans* $B(H)$*, tels que* A *est sous normal. On considére l'équation.*

$$AX - XB = C, \tag{3.6}$$

Théorème 3.7 *Soient* A *un operateur sous normal et* B, C *sont des opérateurs dans* $B(H)$*. Supposons que la paire* (A, B) *satisfait la propriété de Fuglède-Putnam, alors l'équation* (3.6) *admet une solution dans* $B(H)$ *si et seulement si* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *sont similaires.*

Preuve. *Si* X *est une solution de* (3.6)*, alors on a*

$$\begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX - XB \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

Ce qui implique que $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *sont similaires.*

Réciproquement, si les deux opérateurs $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *sont similaires, alors il existe un opérateur inversible* $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ *tel que*

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} AQ & AR \\ BS & BT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QA & QC + RB \\ SA & SC + TB \end{pmatrix}.$$

Donc on obtient $AQ = QA$*.*

Puisque A *est sous normal, d'après le Lemme 2.1* A^* *est sous normal et le* *théorème 2.5, nous donne*

$$A^*Q = QA^*.$$

On a aussi

$$AR - RB = QC,$$

$$BS = SA$$

et

$$BT - TB = SC.$$

Comme la paire (B, A) *satisfait la propriété de Fuglède-Putnam et* $SA = BS$*, alors* $B^*S = SA^*$.

Puisque A *commute avec* Q *et* Q^**, alors il commute avec* Q^*Q.

Par ailleurs, si on passe à l'adjoint dans

$$B^*S = SA^*,$$

on obtient

$$S^*B = AS^*.$$

Comme $BS = SA$*, alors*

$$S^*BS = S^*SA,$$

mais $S^*B = AS^*$*, d'où*

$$AS^*S = S^*SA,$$

ce qui implique A *commute avec* S^*S*, donc il commute avec la somme* $S^*S + SS^*$.

Donc on a

$$(S^*S + Q^*Q)C = S^*SC + Q^*QC$$

$$= S^*B(BT - TB) + Q^*(AR - RB)$$

$$= Q^*(AR - RB) + S^*(BT - TB)$$

$$= Q^*AR - Q^*RB + S^*BT - S^*TB.$$

Comme $AQ^* = Q^*A$ *et* $S^*B = AS^*$, *on obtient*

$$(S^*S + Q^*Q)C = AQ^*R - Q^*RB + AS^*T - S^*TB$$

$$= A(Q^*SR + S^*T) - (Q^*SR + S^*T)B,$$

Puisque $S^*S + Q^*Q$ *est inversible (d'après le lemme 2.1), alors*

$$C = A(S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T) - (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T)B$$

Par conséquent, la solution de l'équation (3.6) *est donnée par*

$$X = (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T).$$

■

Remarque 3.2 *Comme tout opérateur normal est sous normal, alors le théorème 1 dans [41] devient un corollaire ici.*

Corollaire 3.3 *Soit* A *et* B *deux opérateurs sous normaaux dans* $B(H)$ *et* $C \in B(H)$. *Alors l'équation* (3.6) *a une solution dans* $B(H)$ *si et seulement si* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *est similaire à* $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Preuve. *Il suffit de voir que si* A *et* B *sont sous normaux (d'après le théorème 2.5), alors la paire* (B, A) *satisfait la propriété de Fuglède-Putnam.* ■

Corollaire 3.4 *Soit* A *un opérateur sous normal et borné sur un espace de Hilbert complexe* H *et* $B, C \in B(H)$, *supposons que la paire* (B^*, A^*) *satisfait le théorème de Fuglède-Putnam. Alors l'équation* $B^*X - XA^* = C$ *admet une solution dans* $B(H)$ *si et seulement si* $\begin{pmatrix} B^* & C \\ 0 & A^* \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} B^* & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix}$ *sont similaires.*

Preuve. *Si* $\begin{pmatrix} B^* & C \\ 0 & A^* \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} B^* & 0 \\ 0 & A^* \end{pmatrix}$ *sont similaires, alors leurs adjoints sont similaires, i.e.,* $\begin{pmatrix} A & C^* \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ *sont similaires, ce qui implique*

$$\begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & AX - XB \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C^* \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Donc $AX - XB = C^*$*, passant l'adjoint, on oobtient*

$$X^*A^* - B^*X^* = C$$

d'où

$$B^*(-X^*) - (X^*)A^* = C.$$

■

Corollaire 3.5 *Soit* A *un opérateur borné sous normal sur un espace de Hilbert complexe* H *et* $B, C \in B(H)$*. Supposons que la paire* (B^*, A^*) *satisfait la propriété de Fuglède-Putnam. Alors l'équation* $A^{-1}X - XB^{-1} = C$ *admet une solution dans* $B(H)$ *si et seulement si* $\begin{pmatrix} A^{-1} & C \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ *sont similaires.*

Preuve. *Si* $\begin{pmatrix} A^{-1} & C \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ *sont similaires, alors leurs inverses sont similaires, i.e.,* $\begin{pmatrix} A & -ABC \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *sont similaires, ce qui implique*

$$\begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-1}X - XB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & C \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

Donc $A^{-1}X - XB^{-1} = C$. ■

Si $A = B$, *on obtient le résultat suivant.*

Théorème 3.8 *Soit* A *un opérateur sous normal dans* $B(H)$ *et soit* C *un opérateur dans* $B(H)$. *Les matrices* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & A \end{pmatrix}$ *sont similaires si et seulement si* C *est inclu dans l'image de la dérivation* δ_A ($\delta_A = AX - XA$).

Pour le cas d'opérateurs de rang 1, i.e., $C = a \otimes b$, *où* a *et* b *sont deux vecteurs dans* H.

Théorème 3.9 *Soit* A *un opérateur sous normal borné et soit* B, C *deux opérateurs dans* $B(H)$ *tels que* (A, B) *satisfaisant la propriété de Fuglède-Ptnam. Alors l'équation* $AX - XB = a \otimes b$ *admet une solution si et seulement si* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ *est similaire à* $\begin{pmatrix} A & a \otimes b \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Chapitre 4

Equations $AXB - CXD = E$

Dans ce chapitre on va donner certains théorèmes d'existence d'une solution pour l'équations $AXB - XD = E$ et l'équation $AXB - CXD = CE$, où A, B, C et D sont des opérateurs sous normaux, en utilisant la propriété de Fuglède-Putnam et sous certaines conditions.

4.1 Equation $AXB - XD = E$

Dans cette section on va étudier l'équation générale $AXB - CXD = E$ dans le cas où $C = I$ (l'identité). Donc on va présenter un théorème d'existence de la solution pour l'équation $AXB - XD = E$, où les opérateurs A, B, C et E sont sous normaux, en appliquant aussi la propriété de Fuglède-Putnam.
D'abord, on présente la proposition suivante :

Proposition 4.1 *Soient S et T des opérateurs sous normaux dans $B(H)$ et N_S, N_T leurs extensions minimales (resp). Si N_S commute avec N_T, alors S et T commutent*

Preuve. *Les extensions* N_S *et* N_T *peuvent être s'écrivent sous les formes :*

$$N_S = \begin{pmatrix} S & S_1 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}, \quad N_B = \begin{pmatrix} T & T_1 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}.$$

$N_S N_T = N_T N_S$, *implique*

$$\begin{pmatrix} ST & ST_1 + S_1T_2 \\ 0 & S_2T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} TS & TS_1 + T_1S_2 \\ 0 & T_2S_2 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne $ST = TS$. ∎

Théorème 4.1 *Soient* A, B, D *et* E *des opérateurs sous normaux dans* $B(H)$ *tels que* N_B *commute avec* N_D, *où* N_B *est* N_D *l'extensions normales minimales de* B *et* D *respectivement. alors l'équation*

$$AXB - XD = E, \tag{4.1}$$

admet une solution dans $B(H)$ *si et seulement si*
$\left(\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right)$ *est equivalent avec* $\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right)$.

Preuve. *Posons*

$$U = \begin{pmatrix} I & CX \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

.

Puisque U *et* V *sont inversibles, alors*

$$\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & E + XD \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AXB \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

ce qui implique que X *est une solution de l'équation*

$$AXB - XD = E$$

.

Réciproquement, supposons que $\left(\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right)$ *et* $\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right)$ *sont equivalents.*

Posons $U = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix}$*, donc on obtient*

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix}.$$

D'où

$$AQ' = QA, \quad QE + RD = AR' \;\; et \;\; SA = DS'$$

$$SE + TD = DT', \quad Q = Q' et \;\; RB = R'$$

$$S = BS' \;\; et` \quad TB = BT'.$$

Puisque $Q = Q'$ *et* $QA = AQ'$*, d'après le Lemme 2.1 et le théoreéme 2.5 (la propriété de Fuglède-Putnam généralisée), on a*

$$QA^* = A^*Q$$

En passant à l'adjoint on obtient

$$AQ^* = Q^*A.$$

en suite

$$Q^*QE = Q^*AR' - Q^*RD$$

$$= Q^*ARB = Q^*RD,$$

qui donne

$$Q^*QE = A(Q^*R)B - (Q^*R)D, \tag{4.2}$$

alors il résulte

$$S^*SE = S^*DT' - S^*TD, \tag{4.3}$$

mais

$$BSA = BDS' = DBS' = DS,$$

puisque $N_B N_D = N_D N_B$*, d'après la proposition 4.1 on a* $BD = DB$ *et ainsi en utilisant le lemme 2.1, on obtient*

$$B^*SA^* = D^*S.$$

Passant à l'adjoint on obtient

$$AS^*B = S^*D.$$

d'après (4.3)*, il devient*

$$S^*SE = AS^*BT' - S^*TD = A(S^*T)B - (S^*T)D$$

(4.2) *et* (4.3) *donnent*

$$(Q^*Q + S^*S)E = A(Q^*R + S^*T)B - (Q^*R + S^*T).D$$

puisque $(Q^*Q + S^*S)$ *est inversible, alors il commute avec* A*, il s'ensuit*

$$E = A(Q^*Q + S^*)S^{-1}(Q^*R + S^*T)B - (Q^*Q + S^*)S^{-1}(Q^*R + S^*T)D.$$

alors

$$X = (Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T).$$

■

4.2 Equation $AXB - CXD = CE$

Le contenu de cette section concerne une généralisation du résultat donné dans la section précédente, où on va prouver l'existence d'une solution pour l'équation $AXB - CXD = CE$*, avec* A, B, D *et* E *sont de opérateurs sous normaux et des certaines conditions de commutativité sur leurs extensions normales.*

Théorème 4.2 *Soient* A, B, C, D *et* E *des opérateurs sous normaux dans* $B(H)$*. Supposons que*

1. N_A *commute avec* N_C*.*
2. N_B *commute avec* N_D*,*

où N_A, N_B, N_C *et* N_D *sont les extensions normales minimales de* A, B, C *et* D *respectivement. Alors l'équation*

$$AXB - CXD = CE, \tag{4.4}$$

admet une solution dans $B(H)$ *si et seulement si* $\left(\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right)$ *est equivalent à* $\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right)$.

Preuve. *En mettant*

$$U = \begin{pmatrix} C & CX \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} C & XB \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Puisque U, V *et* W *sont inversibles, alors*

$$\begin{pmatrix} C & CX \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & CE + CXD \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & XB \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AXB \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & CX \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

ce qui implique

$$AXB - CXD = CE$$

.

Réciproquement, supposons que $\left(\begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right)$
et $\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right)$

sont equivalentes.

Soient

$$U = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix}$$

et

$$W = \begin{pmatrix} Q'' & R'' \\ S'' & T'' \end{pmatrix},$$

il s'ensuit que

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q'' & R'' \\ S'' & T'' \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} Q'' & R'' \\ S'' & T'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix},$$

ce qui implique que

$$\begin{pmatrix} QA & QE + RD \\ SA & SE + TD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AQ' & AR' \\ DS' & DT' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} QC & R \\ SC & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CQ'' & CR'' \\ S'' & T'' \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} Q'' & R''B \\ S'' & T''B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q' & R' \\ BS' & BT' \end{pmatrix}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$AQ' = QA, \quad QE + RD = AR'$$

$$SA = DS', \quad SE + TD = DT'$$

$$QC = CQ'', \quad R = CR''$$

$$SC = S'', \quad T = T''$$

$$Q'' = Q', \quad R''B = R'$$

$$S'' = BS', \quad T''B = BT'.$$

On a alors

$$QE + RD = AR',$$

d'où

$$QE = AR' - RD,$$

multiplier par Q^**, il devient*

$$Q^*QE = Q^*AR' - Q^*RD, . \tag{4.5}$$

Par ailleurs on a

$$QA = AQ'.$$

En multipliant par C*, il devient*

$$CQA = CAQ'.$$

puisque N_A *commute avec* N_C*, d'après la proposition 4.1, on a* $AC = CA$ *et par conséquent*

$$CQA = ACQ' = AQC.$$

Du lemme 2.1 et le théorème 2.5 (propriété de Fuglède-Putnam generalisée), on trouve

$$C^*QA^* = A^*QC^*.$$

En prenant l'adjoint on obtient

$$AQ^*C = CQ^*A.$$

Retournons à (4.5), *on a*

$$Q^*QE = Q^*AR' - Q^*RD$$

$$CQ^*QE = CQ^*AR' - CQ^*RD$$

$$= AQ^*CR' - CQ^*RD.$$

puisque $CR' = RB$, *il vient*

$$CQ^*QE = A(Q^*R)B - C(Q^*R)D,. \tag{4.6}$$

puisque $SA = DS'$ *et* $BD = DB$ *(proposition 4.1 et hypothèse (2)), on a*

$$BSA = BDS' = DBS' = DS'' = DSC$$

.

D'après le lemme 2.1 et le théorème 2.5 (propriété de Fuglède-Putnam generalisée), on obtient

$$B^*SA^* = D^*SC^*.$$

En prenant l'adjoint, on obtient

$$AS^*B = CS^*D.$$

On a

$$SE = DT' - TD.$$

En multipliant par CS^*, *il devient*

$$CS^*SE = CS^*DT' - CS^*TD$$

$$= AS^*BT' - CS^*TD.$$

D'autre part

$$T''B = BT' = TB.$$

Par conséquent

$$CS^*SE = A(S^*T)B - C(S^*T)D,. \tag{4.7}$$

D'après (4.6) *et* (4.7), *on obtient*

$$C(Q^*Q + S^*S)E = A(Q^*R + S^*T)B - C(Q^*R + S^*T)D$$

puisque $(Q^*Q + S^*S)$ *est inversible et commute avec* A *et* C, *on obtient*

$$CE = A(Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T)B - C(Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T)D,$$

Ce implique

$$X = (Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T).$$

■

Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail nous avons étudié les équations d'opérateurs du type Sylvester généralisé

$$AXB - CXD = E$$

et nous avons validé des résultats, sur la sous normalité d'opérateurs qui vérifient la propriété de Fuglède-Putnam, et avons démontré l'existence de la solution d'équation

$$AXB - CXD = E$$

ce type d'opérateurs est intégré pour la première fois aux solution des équations d'opérateurs. Et nous avons developpé un article envers ce sujet dont on parle qui peut pousser la recherche scientifique.

Ce travail donne des perspectives en termes d'améliorations et d'approfondissements.

1. *Si l'opérateur* A *est* (n, k) *normal hyponormal, paranormal et la pair* (A, B) *vérifie la propriété de* $(FP)_{B(H)}$*, quelles sont l es conditions pour que l'équation* $AX - XD = E$ *admet une solution ?.*
2. *Peut-on généraliser sur l'équation* $AXB - CXD = E$.
3. *On considère que les opérateurs* A *et* C *sont auto-adjoint, l'équation* $AX + XA^* = C$ *admet une solution* $X = X^*$*. Quelles seront les conditions pour que la solution soit normal, sous normal ou hyponormal c'est parole sur l'équation de type* $AXB - CXD = E$.

Bibliographie

[1] A. Bachir and A. Sagres, A generalized Fuglede-Putnam theorem and orthogonality. *Aust. J. Math. Anal. Appl. 1 (2004), n°1, art. 12, 5 pp(electronic).*

[2] A. Y. Barraud, A numerical algorithm to solve ATXA - X = Q, *IEEE Trans. Autom. Contr., AC-22(1977), 883885.*

[3] R.H. Bartels, G.W. Stewart, Solution of the equation $AX + XB = C$, *Comm. ACM. 15 (9) (1972), 820-826.*

[4] D. J. Bender, Lyapunov-like equations and reachability/observability gramians for descriptor systems, *IEEE Trans. Auto. Control, 32 (1987), 343348.*

[5] R. Bhatia, Matrix Analysis, *springer-Verlag, newyork, (1997), Graduate texts in mathematics.*

[6] R. Bhatia, P. Rosental, How and why to solve the operator equation $AX - XB = Y$, *Bull. london. Math. Soc. 29 (1997), 1-21.*

[7] J. Bram, Subnormal operators, Duke Math. J., (1955), 75-94.

[8] S. Brown, Some invariant subspaces for subnormal operators, *Integral Equations and Operator Theory 1 (1978), 310-333.*

[9] *G. Cassier,* Generalized Toeplitz operators, restriction to invariant subspaces and similarity problems, *Journal of Operator theory , 53 :01 (2005), 49-89.*

[10] *K. E. Chu,* Exclusion theorems for the generalized eigenvalue problem, *Numerical Analysis Rpt. NA/11/85, Dept of Mathematics, Univ. of Reading, 1985.*

[11] *K. E. Chu,* The Solution of the Matrix Equations $AXB-CXD=E$ and $(YA-DZ,YC-BZ)=(E,F)$, *Numerical Analysis Rpt. NA/10/85, Dept. of Mathematics, Univ. of Reading, 1985.*

[12] *J. B. Conway,* subnormal operators, *Research Notes in Math. Vol. 51, Pitman Advanced Pub. Program, Boston, 1981.*

[13] *. B. Conway,* The theory of subnormal operators, *Math. Surveys and Mongraphs, Vol.36, Amer.Math. Soc. providence, 1991.*

[14] *J. B. Conway. A course in operator theory, volume 21 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.*

[15] *J.B. Conway et R.F. Olin ,* Funcionnal calculus of subnormal operator, AMS Providence, *Rhode Island 1991.*

[16] *J.B. Conway,* The splitting of A(T1 T2) and related questions, *Indiana univ. Math. J 26 (1977) 41-56.*

[17] *G.R. Duan,* The solution to the matrix equation $AV+BW=EV+R$, *Appl. Math. Lett. 17 (2004) 1197-1202.*

[18] *M. A. Epton,* Methods for the solution of $AXB-CXD=E$ and its application in the numerical solution of implicit ordinary differential equations, *BIT 20 : (1980), 341-345.*

[19] *H. Flanders and H. K. Wimmer,* On the matrix equation $AX-XB=C$ and $AX-YB=C$, *SIAM.J.Appl.Math.,32 (1977), 707-710.*

[20] T. Furuta, On relaxation of normality in the Fuglede-Putnam theorem, *Proc.Amer.Math. Soc. 3, 77 (1979).*

[21] J. D. Gardiner, A. L. Laub, J. J. Amato, and C. B. Moler, Solution of the Sylvester matrix equation $AXB + CXD = E$, *ACM Transactions on Mathematical Software, 18(2)(1982), 223- 231.*

[22] P. R. Halmos, A Hilbert Space Problem Book, *D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jerse, (1967).*

[23] L. Hariz Bekkar and A. Mansour, Solvability of sylvester operator equation with bounded subnormal operators in Hilbert spaces, *Korea. J. Math. 27(2019), 513-521.*

[24] L. Hariz Bekkar, A.Mansour and S.Beloul, On operator equation $AXB - CXD = CE$ via subnormality in Hilbert spaces, *accepted in TWMS (2019).*

[25] A. Jameson, Solutions of equation $AX - XB = C$ by inversion of $M \times M$ or $N \times N$ matricex *;SIM J. Appl. Math.16(1968), 1020-1023.*

[26] P. Kirrinnis, Fast algorithms for the Sylvester equation $AX + XB^t = C$, *Theoretical Computer Science 259 (2001), 623-638.*

[27] N.Lan, On operator Equation $AX - XB = C$ with unbounded operators A, B and C, *Abstr. Appl. Maths. (2001), 317-328.*

[28] P. Lancaster and M. Tismenetsky, The Theory of Matrices, *Academic Press, Orlando,* 2^{nd} *edition, 1985.*

[29] P. Lancaster and L. Rodman, Algebraic Riccati Equations, *Clarendon Press, Oxford, (1995).*

[30] A. J. Laub, A Schur method for solving algebraic Riccati equations, *IEEE Trans. Automat. Control, 24 (1979), 913-921.*

[31] G. Luenberger, Observing the state of a linear system*, IEEE Trans. Mil. Electron., MIL-8 :74-80, 1964.*

[32] A. Mansour, L.Hariz and H. Gaaya, A priori estimate for the solution of sylvester equation*, J. Adv. Maths, Vol.10, No.7(2015), 3633-3638.*

[33] A. Mansour, Solvability of $AXB - CXD = E$ in the operator algebra $B(H)$*, Lobachevskii journal of mathematics, vol.31, N°3 (2010), 257- 261.*

[34] A. Mansour, S.Bouznzda, On Norm Estimate of Comutator between Subnormal Operators*, Int. Journal of Math. Analysis, Vol.4, 2010, no. 13, 601-606.*

[35] M. Rosenblum, On the operator equation $AX - XB = Q$*, Duke.Math. J. 23, 263 (1956).*

[36] M. Rosenblum, On a theorem of Fuglede and Putnam*, J.Lond. Math.Soc. 33,(1958), 376-377.*

[37] M. Rosenblum, On the operator equation $AX - XB = Q$ with self-adjoint A and B*, Proc. Amer. Math. Soc. 20, 115 (1969).*

[38] P. Rosa, Lineare Matrizenglei chungen und Kroneckersche Produkte*,Z.Angew. ath. Mech. (1978), 395-397.*

*[39] P. Rosa,*Linear matrix equations and Kronecker products*, in Proceedings of the* 4^{th} *Symposium Basic Problems of Numerical Mathematics. Plzen, (1978),153-162.*

[40] W.E. Roth, The equation $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952) 392-396.*

[41] A. Schweinsberg, The operator equation $AX - XB = C$ with normal A and B*, Pacific Journal of Mathematics Vol. 102, No. 2. 1982.*

[42] R.A. Smith, Matrix calculations for Liapunov quadratic forms, *J. Different. Eqs. 2(1966), 208-217.*

[43] T. T. Trent, New conditions for subnormality, *Pacific Journal of Mathematics, Vol. 93, No. 2, April, 1981*

[44] Y. Yuan, Solvability for a class of matrix equation and its applications, *J. Nanjing Univ. (Math. Biquart.) 18 (2001) 221-227.*

[45] M.S.Lee, A note on the subnormal operators *Comm.Korean Math. Soc. 3 No 1 (1988), 51-58.*

[46] J. Weidmann, Linear Operators in Hilbert Spaces, *Springer-Verlag, N.Y., 1980.*

[47] A. Wintner, The unboundedness of quantum mechanical matrices, *Phys. Rev. 71 (1947), 738-739.*