

N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohamed Khider-Biskra



FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SNV

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme

DOCTORAT EN SCIENCES

En : Mathématiques

SPÉCIALITÉ : ANALYSE Equations aux Dérivées Partielles

Par : KOUADRI Ghada

Thème

**Etude de quelques problème inverses paraboliques
dans des domaines non réguliers.**

Soutenue le 16 /12 / 2019

Devant le jury composé de :

T.	MENACER,	MCA	Université Mohamed Khider-Biskra	Président
M.S.	SAID,	MCA	Université Kasdi Merbah- Ouargla	Directeur de thèse
M.	BERBICHE,	MCA	Université Mohamed Khider-Biskra	Examineur
A.	BEN SAYAH,	MCA	Université Kasdi Merbah- Ouargla	Examineur
M.	MEFLAH,	MCA	Université Kasdi Merbah- Ouargla	Examineur

N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohamed Khider-Biskra



FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SNV

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme

DOCTORAT EN SCIENCES

En : Mathématiques

SPÉCIALITÉ : ANALYSE Equations aux Dérivées Partielles

Par : KOUADRI Ghada

Thème

~~Contribution à l'analyse mathématique des équations
paraboliques périodiques avec données non régulières
et applications au problèmes inverses~~

Soutenue le 16/12/ 2019

Devant le jury composé de :

T.	MENACER,	MCA	Université Mohamed Khider-Biskra	Président
M.S.	SAID,	MCA	Université Kasdi Merbah- Ouargla	Directeur de thèse
M.	BERBICHE,	MCA	Université Mohamed Khider-Biskra	Examineur
A.	BENSAYAH,	MCA	Université Kasdi Merbah- Ouargla	Examineur
M.	MEFLAH,	MCA	Université Kasdi Merbah- Ouargla	Examineur

Remerciement

Je tiens d'abord à remercier mon encadreur : Dr . Said Mohamed Said maître de conférence A à l'université Kasdi Merbah Ouargla de m'avoir attribué ce sujet de recherche, d'avoir accepté de m'encadrer et de m'orienter durant la réalisation de ce travail.

Je tiens aussi à remercier le président du jury Monsieur T. Menacer et les membres de jury Monsieur M. Berbiche, A. Bensayah et M. Meflah d'avoir accepté de juger et de valoriser ce modeste thèse. Mes remerciements sont également adressés : Au Département des mathématiques et informatique à l'université Kasdi Merbah Ouargla, et sans oublier Monsieur N. ALAA professeur à l'université Kady AYAD Merrakeche Maroc et Monsieur A. Cherkaoui doctorant à l'université Kady AYAD.

Enfin je ne pourrais pas terminer sans rendre hommage à ma famille pour m'avoir toujours soutenu.

Table des matières

Remerciement	i
Introduction générale	iv
Organisation de la thèse	vi
1 Modélisation des réactions chimiques	1
1.1 Quelques principes généraux en modélisation des milieux continus	1
1.1.1 Lois de comportement	4
1.1.2 Modélisation de l'évolution des réactions	5
1.2 Modélisation mathématique du phénomène des trempes	14
1.2.1 Modèle mathématique	15
1.2.2 Problème initial de la conduction thermique	16
1.2.3 Reformulation en termes d'énergie	17
2 Existence locale, globale, unicité et positivité pour les systèmes de Réaction-Diffusion	19
2.1 Existence locale et unicité pour des systèmes de réaction-diffusion	19
2.1.1 Positivité de la solution	22
2.1.2 Existence globale pour les systèmes de réaction-diffusion triangulaire	25
2.1.3 Applications	27
2.1.4 Étapes de la démonstration du résultat principal	28
3 Existence de solution périodique faible pour le modèle des trempes	38
3.1 Résultat principal	39
3.1.1 Hypothèses	39
3.1.2 Existence d'une sur-solution faible périodique	40
3.1.3 Existence d'une solution périodique faible	46
3.2 Annexe	53
4 Résultats d'existence des solutions périodiques faibles pour certaines équations paraboliques quasi-linéaire avec donnée L^1	55
4.1 Introduction	55
4.2 Résultat principal	56
4.2.1 Hypothèses	56

4.3	Preuve du résultat principal	57
4.4	Résultat d'existence pour une équation quasi-linéaire avec donnée L^1	60
4.4.1	Hypothèses	60
5	Quelques résultats d'existence des solutions périodiques faibles pour des systèmes quasi-linéaires avec donnée L^1	68
5.1	Résultat principal	69
5.1.1	Hypothèses	70
5.1.2	Preuve du résultat principal	72
5.2	Application à une classe des systèmes de réaction-diffusion	74
5.2.1	Hypothèses	75
6	Application au problème inverse de source avec des conditions périodiques par rapport au temps	84
6.1	Introduction	84
6.2	Position du problème	85
6.3	Existence d'une solution optimale	88
6.4	Dérivation de la fonctionnelle coût	91
	Conclusion générale	93
	Annexe	94
	Bibliographie	98

Introduction générale

Les mathématiques ont toujours le bénéfice de participer au développement de plusieurs domaines scientifiques : la physique, la biologie, la biomédicale, l'ingénierie... Pour le mathématicien, ces domaines offrent de nouvelles et passionnantes branches de recherches, pendant que pour le spécialiste, le modelage mathématique offre un autre outil de la recherche proportionnée avec de nouvelles techniques du laboratoire.

Rappelons que la modélisation des réactions chimiques conduit à des systèmes dits de réaction-diffusion. Il faut noter que durant ces dernières décennies, l'intérêt porté à l'étude de ce type de systèmes n'a cessé de croître et une abondante littérature a été développée sur ce sujet, notamment sur les problèmes d'existences locales, globales ou d'explosion en temps fini, de comportement asymptotique...

Dans le second chapitre, nous nous intéressons à l'analyse mathématique des systèmes de réaction-diffusion de type :

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial t} - A_r v = f_r(x, t, v) & \text{pour } 1 \leq r \leq m \text{ dans } \Omega \times (0, T) \\ (1 - \lambda_r)v_r + \lambda_r \partial_\nu^r v_r = \alpha_r, & \text{pour } 1 \leq r \leq m \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ v_r(x, 0) = v_{0,r}(x) & \text{pour } 1 \leq r \leq m \text{ pour } x \in \Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, de frontière régulière $\partial\Omega$, $v = (v_1, \dots, v_m)$, $T > 0$, A_r désigne un opérateur de dérivation défini par

$$A_r(\varphi) = \sum_{i,j=1}^m \partial_{x_i}(a_{i,j}^r(x) \partial_{x_j} \varphi) + \sum_{i=1}^m \partial_{x_i}(b_i^r(x) \varphi) + c^r(x) \varphi$$

et où les conditions au bord sont définies à l'aide des dérivées conormales associées :

$$\partial_\nu^r \varphi(\sigma) = \sum_{i,j=1}^m a_{i,j}^r(\sigma) \partial_{x_j} \varphi(\sigma) n_i(\sigma) \quad \text{pour } \sigma \in \partial\Omega$$

les fonctions $f_r : \Omega \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ sont des applications non-linéaires, et pour tout r , $0 \leq \lambda_r \leq 1$, $a_{i,j}^r, b_i^r \in C^1(\Omega)$, $c^r \in C^0(\Omega)$ et $\alpha_r \in C^2(\bar{\Omega})$.

Nous étudions ce système sous les deux propriétés caractéristiques suivantes :

- (H_1) la positivité des solutions est préservée au cours du temps,
- (H_2) le contrôle de masse ou loi de balance.

Cette dernière hypothèse s'exprime par le fait que $\sum_{r=1}^{r=m} h_r(f_r) \leq L(t) \sum_{r=1}^{r=m} v_r + M(t)$ (où les h_r sont des fonctions convexes positives et L, M sont des fonctions continues). La combinaison de ces propriétés, en plus des bonnes conditions aux bords que nous considérons

permettent d'établir une estimation L^1 uniforme de $\sum_{r=1}^{r=m} h_r(v_r)$, ceci justifie la terminologie de contrôle de masse. Malheureusement, cette estimation est en général insuffisante pour garantir l'existence globale des solutions. Ainsi d'autres hypothèses s'imposent.

La question que nous nous posons alors est de savoir sous quelles conditions sur les données du problème et sur la dépendance des termes non-linéaires ce genre de système admet des solutions globales.

Notons ici que ce genre de problème a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs et de nombreux travaux ont été faits dans ce sens. Remarquons aussi que la classe des systèmes que nous avons obtenus dans la partie modélisation (chapitre 1) est un cas particulier de cette forme générale (P). Ces systèmes vérifient bien $(H_1) - (H_2)$ (voir plus loin), mais l'existence locale n'en est pas moins difficile à établir. En effet, on sait que lorsque $v_0 \in (L^\infty(\Omega))^m$, l'existence locale sur $[0, T_{max})$ s'obtient de manière classique (par application du point fixe de Schauder dans des espaces judicieux, voir par exemple [38]) ; de plus T_{max} est caractérisé par : si $T_{max} < \infty$ alors $\lim_{t \rightarrow T_{max}} (\sum_{r=1}^{r=m} \|v_r(t)\|_{L^\infty(\Omega)}) = +\infty$.

Pour l'existence globale, les premiers résultats dans le cas des systèmes 2×2 ($m = 2$) ont été obtenus par Alikakos [7] et Masuda [52], ensuite par Hollis-Martin-Pierre [38]. Ces derniers ont introduit une nouvelle méthode permettant de traiter une très large classe de systèmes à structure triangulaire. En effet, en plus de $(H_1) - (H_2)$ et de l'hypothèse $(H_3) : f_1 \leq 0$ ou raisonnablement majorée, cette méthode ne nécessite que deux hypothèses supplémentaires portant sur la croissance des termes non-linéaires et sur la nature des conditions aux bords. Une autre approche du problème a été introduite par Pierre [62], elle permet de traiter des systèmes triangulaires dont les termes non-linéaires admettent des croissances quelconques. Cette méthode, dite "méthode L^1 ", ne fournit cependant que des solutions faibles. Une autre approche récente a été développée par [5] qui permet d'obtenir l'existence globale des solutions faibles en utilisant une technique de troncature.

Nous avons choisi d'exposer dans cette thèse les différents techniques développées par Morgan [55], Hollis-Martin-Pierre [38], Alaa, Mounir [6]. Les résultats que nous obtenons ici améliorent ces derniers dans le sens où les conditions au bord que nous traitons sont plus générales. En plus des hypothèses $(H_1) - (H_2)$, et sous de bonnes conditions au bord, nous obtenons une estimation dans L^∞ de $\sum_{i=1}^m h_i(v_i)$. Ceci permet d'obtenir une estimation dans $L^p, \forall 1 \leq p < \infty$, des $h_i(v_i)$. C'est en moyennant ces deux résultats fondamentaux que nous démontrons l'existence globale.

Organisation de la thèse

Premier chapitre : Modélisation des réactions chimiques

Ce chapitre comporte quelques principes des milieux continus : lois de conservation, conservation de la masse, le 1^{er} et 2^e principe de la thermodynamique, quelques lois de comportement ainsi qu'une modélisation de l'évolution des réactions chimiques et se termine par une modélisation mathématique du phénomène de trempes.

Second chapitre : Existence locale, globale, unicité et positivité pour les systèmes de Réaction-Diffusion

Dans ce chapitre, Nous considérons le système d'équations de réaction-diffusion suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - D\Delta v(x, t) = f(v(x, t)) & x \in \Omega, t > 0 \\ (1 - \lambda_r)v_r + \lambda_r \frac{\partial v_r}{\partial \nu} = \alpha_r, \text{ pour } 1 \leq r \leq m & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

où :

- * $v = (v_1, \dots, v_m)$, $v_r : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, pour $1 \leq r \leq m$,
- * $\frac{\partial v}{\partial t}$ désigne le dérivée par rapport au temps de v ,
- * Δ désigne l'opérateur Laplacien : $\Delta v_r(x, t) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j^2}(x, t)$ pour $1 \leq r \leq m$,
- * D matrice diagonale carrée d'ordre m dont les coefficients d_r sont strictement positifs,
- * f fonction mesurable de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^m et localement lipschitzienne

$$|f(p) - f(\hat{p})| \leq K(r) |p - \hat{p}|, \forall p, \hat{p} \in \mathbb{R}^m \text{ avec } |p|, |\hat{p}| \leq r \quad (2)$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^m ,

* la condition initiale est définie par

$$v_0 = (v_{0i})_{1 \leq i \leq m} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})^m, \quad (3)$$

* $\frac{\partial v_r}{\partial \nu} = \nabla v_r \cdot \vec{n} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_r}{\partial x_j} \cdot n_j$ désigne la dérivée normale de v_r , $\vec{n} = (n_j)_{1 \leq j \leq m}$ est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$,

* pour tout $1 \leq r \leq m$, λ_r et α_r vérifient

$$0 \leq \lambda_r \leq 1, \alpha_r \in C^2(\bar{\Omega}). \quad (4)$$

Nous énonçons des conditions suffisantes assurant l'existence locale et l'unicité de la solution classique de (1). Puis nous rappelons le résultat suivant :

Théorème 0.1 (Hollis-Martin-Pierre)

Sous les hypothèses (2) et (4), le système (1) admet une unique solution locale et classique v sur $[0, T_{\max}[$, telle que pour chaque $1 \leq r \leq m$, il existe $N_r : [0, T_{\max}[\rightarrow [0, \infty)$ continue avec

$$0 \leq v_r(t, x) \leq N_r(t), \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T_{\max}[\quad (5)$$

De plus, le temps maximal d'existence T_{\max} est caractérisé par

$$\text{si } T_{\max} < \infty, \text{ alors } \lim_{t \rightarrow T_{\max}} \sum_{r=1}^m \|v_r(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty \quad (6)$$

Troisième chapitre : Existence de solutions périodiques faibles pour le modèle des trempes

Ce chapitre est la version française d'un article publié à Journal of Advanced Mathematical Studies [42].

Le but de ce chapitre est de présenter une analyse mathématique du modèle des trempes modélisé par le problème parabolique suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \operatorname{div}(a(u)\nabla u) + G(t, x, u, \nabla u) = F(t, x, u) & \text{dans } Q_T \\ u(0, \cdot) = u(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \quad (7)$$

Où Ω est un ouvert borné régulier ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, avec bord régulier $\partial\Omega$, $T > 0$ est la période, $Q_T =]0, T[\times \Omega$, $\Sigma_T =]0, T[\times \partial\Omega$ et $a : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ est continue, G et F sont des fonctions carathéodory. Nous supposons tout au long de ce chapitre

$$\begin{cases} a : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[\text{ une fonction carathéodory} \\ 0 < a_0 \leq a(s) \leq a_1 \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} F : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[\text{ une fonction carathéodory} \\ t \rightarrow F(t, x, u) \text{ une fonction périodique} \\ u \rightarrow F(\cdot, \cdot, u) \text{ fonction croissante} \\ F(t, x, s) \leq \alpha(t, x) + \beta |s| \text{ où } \alpha \in L^2(Q_T) \text{ et } \beta \geq 0 \\ \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \sup \frac{F(t, x, s)}{s} = 0. \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[\text{ une fonction carathéodory} \\ G(t, x, s, 0) = \min\{G(t, x, s, r), r \in \mathbb{R}^N\} = 0 \\ G(t, x, s, r) \leq c(|s|)(H(t, x) + \|r\|^2) \\ \text{où } c : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\text{ est croissante et } H \in L^1(Q_T). \end{array} \right.$$

L'existence d'une solution faible à ce dernier modèle est prouvée par la méthode des sous- et sur-solution, nous construisons une sur solution faible du problème considéré, puis en passant à l'utilisation de la méthode des troncatures pour montrer l'existence d'une solution faible.

Quatrième chapitre : Résultats d'existence des solutions périodiques faibles pour certaines équations paraboliques quasi-linéaire avec donné L^1

Ce chapitre est l'objet d'une publication aux Annals of the University of Craiova Mathematics and Computer Science Series [24]

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'analyse mathématique de l'existence d'une solution périodique faible pour l'équation parabolique suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u + G(t, x, \nabla u) = f & \text{dans } Q_T \\ u(0, \cdot) = u(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{array} \right. \quad (8)$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, de frontière assez régulière $\partial\Omega$, $T > 0$ est la période, $Q_T =]0, T[\times \Omega$, $\Sigma_T =]0, T[\times \partial\Omega$, $-\Delta$ désigne l'opérateur de Laplace sur $L^1(\Omega)$ avec des conditions aux limites de Dirichlet, G est une fonction Carathéodory et f est une fonction mesurable positive appartient à $L^1(Q_T)$. Nous introduisons les hypothèses nécessaires qui garantit l'existence d'une solution faible du problème (8).

Hypothèses

Nous supposons que

$$f \in L^1(Q_T), f \geq 0,$$

$$G(t, x, r) \in L^1(Q_T) \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}^N \text{ et p.p. } (t, x) \in \mathbb{R}^N,$$

$$G : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[\text{ est une fonction Caratheodory ,}$$

$$G(t, x, 0) = \min\{G(t, x, r), r \in \mathbb{R}^N\} = 0,$$

$$G(t, x, r) \leq K(t, x) + d \|r\|^p ,$$

pour tout $p \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$, $r \in \mathbb{R}^N$ et p.p. $(t, x) \in Q_T$, avec $K \in L^1(Q_T)$ et $d > 0$.

Le résultat principal de cette section se résume dans le Théorème suivant

Théorème 0.2

Supposons qu'elle existe w une sur-solution faible de (8). Alors le problème (8) admet une solution périodique faible satisfaisante $0 \leq u \leq w$ dans Q_T .

Après, nous appliquons le résultat du théorème 0.2 pour prouver l'existence d'une solution périodique faible pour le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u + G(t, x, \nabla u) = F(t, x, u) + \mu & \text{dans } Q_T \\ u(0, \cdot) = u(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T \end{cases} \quad (9)$$

les fonctions non-linéaires G et F sont supposées des fonctions carathéodory et μ est une fonction mesurable positive appartenant à $L^1(Q_T)$.

Hypothèses

Concernant le problème (9), nous supposons que

$$\mu \in L^1(Q_T), \mu \geq 0,$$

$F : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction Caratheodory ,

$F(t, x, s) \in L^1(Q_T)$, F est croissante par rapport à s ,

$G : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction Caratheodory ,

$G(t, x, r) \leq H(t, x) + d \|r\|^2$, pour tout $r \in \mathbb{R}^N$ et $p.p.(t, x) \in Q_T$,

Grâce aux hypothèses précédentes on démontre le théorème suivant

Théorème 0.3

Supposons qu'il existe $\hat{w} \in L^1(0, T; W_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^1(\Omega))$ une solution faible du problème suivant

$$\begin{cases} \hat{w} \in L^1(0, T; W_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^1(\Omega)), \\ F(t, x, \hat{w}) \in L^1(Q_T) \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} - \Delta \hat{w} = F(t, x, \hat{w}) + \mu & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T), \\ \hat{w}(0, \cdot) = \hat{w}(T, \cdot) & \text{dans } L^1(\Omega). \end{cases}$$

Alors le problème (9) admet une solution périodique faible u telle que $0 \leq u \leq \hat{w}$.

Cinquième chapitre : Quelques résultats d'existence des solutions périodiques faibles pour des systèmes paraboliques quasi-linéaires avec donnée L^1

Ce chapitre est la version française d'un article accepté pour publication dans Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática [25]

Ce chapitre traite des résultats d'existence des solutions périodique faible pour le système parabolique de réaction-diffusion suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial t} - d_j \Delta u_j + G_j(t, x, \nabla u) = f_j & \text{dans } Q_T, \\ u_j(0, \cdot) = u_j(T, \cdot) & \text{dans } \Omega, \text{ pour } j = 1, \dots, M \\ u_j(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \quad (10)$$

où $u = (u_1, \dots, u_M)$, $\nabla u = (\nabla u_1, \dots, \nabla u_M)$, $f = (f_1, \dots, f_M)$, $M \geq 2$ et Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, de frontière assez régulière $\partial\Omega$, $T > 0$ est la période, $Q_T =]0, T[\times \Omega$, $\Sigma_T =]0, T[\times \partial\Omega$, $-\Delta$ est l'opérateur de Laplace sur $L^1(\Omega)$ avec des conditions aux limites de Dirichlet, d_j sont des constantes positifs, G_j est une fonction Carathéodory et f_j est une fonction mesurable positive appartient à $L^1(Q_T)$. Nous supposons tout au long de cette section. Pour tout $j = 1, \dots, M$,

$$f_j \in L^1(Q_T), f_j \geq 0. \quad (11)$$

$$G_j(t, x, r) \in L^1(Q_T) \text{ pour tout } r \in (\mathbb{R}^N)^M \text{ et p.p. } (t, x) \in Q_T, \quad (12)$$

$$G_j : Q_T \times \Omega \times (\mathbb{R}^N)^M \rightarrow [0, +\infty[\text{ est une fonction carathéodory, } \quad (13)$$

$$G_j(t, x, 0) = \min\{G_j(t, x, r), r \in (\mathbb{R}^N)^M\} = 0. \quad (14)$$

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

Théorème 0.4

Supposons que (11)-(14) sont vérifiés, et que pour tous $j = 1, \dots, M$

$$|G_j(t, x, r_1, \dots, r_M)| \leq K_j(t, x) + \sum_{j=1}^M C_j \|r_j\|^p,$$

pour tout $p \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$, $r_j \in \mathbb{R}^N$, avec $K_j \in L^1(Q_T)$ et $C_j > 0$.

Alors (10) a une solution faible périodique u_j qui satisfait pour tout $j = 1, \dots, M$

$$0 \leq u_j \leq \hat{w}_j \text{ dans } Q_T,$$

avec \hat{w}_j est solution du système suivant

$$\begin{cases} \hat{w}_j \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)), \\ \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial t} - d_j \Delta \hat{w}_j = f_j \text{ dans } \mathcal{D}'(Q_T), \\ \hat{w}_j(0, \cdot) = \hat{w}_j(T, \cdot) \text{ dans } L^1(\Omega). \end{cases}$$

Sixième chapitre : Application aux problèmes inverses de source avec des conditions périodiques par rapport au temps

L'objet de ce chapitre est de présenter une liaison entre l'existence des solutions faibles périodiques que nous avons déjà étudiés dans les chapitres précédents avec les problèmes inverses de sources. Considérons le problème périodique suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + a(t, x)u + G(t, x, \nabla u) = f & \text{dans } Q_T \\ u(0, \cdot) = u(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \quad (15)$$

Où Ω est un ouvert borné régulier ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, avec bord régulier $\partial\Omega$, $T > 0$ est la période, $Q_T =]0, T[\times \Omega$, $\Sigma_T =]0, T[\times \partial\Omega$ et $a : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ est continue, G est une fonction carathéodory et F est une fonction mesurable. Le problème inverse que nous traitons consiste à déterminer le terme source f à partir d'une observation qu'on note u_{obs} , ceci à l'aide de la minimisation de la fonctionnelle coût suivante

$$J(f) = \frac{1}{2} \int_{Q_T} |u_f - u_{obs}|^2 dxdt$$

où u_f solution du problème (15)

$$\begin{cases} \frac{\partial u_f}{\partial t} - \Delta u_f + a(t, x)u_f + G(t, x, \nabla u_f) = f & \text{dans } Q_T \\ u_f(0, \cdot) = u_f(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ u_f(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases}$$

On cherche à déterminer f^* tel que

$$J(f^*) = \min_{f \in \mathcal{U}_{ad}} J(f) \quad (16)$$

où \mathcal{U}_{ad} désigne l'ensemble des fonctions admissibles qu'on suppose qu'il est donné par

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ f \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^*), \right. \\ \left. \|f\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^*)} \leq C \right\}.$$

Dans ce chapitre nous prouvons l'existence d'une solution optimale du problème de minimisation (16) puis nous calculons la dérivée de la fonctionnelle coût J par rapport à f par utilisations de la méthode de l'état adjoint.

Chapitre 1

Modélisation des réactions chimiques

L'objectif de ce chapitre est de modéliser les réactions chimiques. Nous commençons par rappeler les lois fondamentales de la physique (lois de conservations) et certaines lois de comportement. La quantité clé de la modélisation ici est celle de la vitesse des réactions, en plus des lois fondamentales de la physique. Nous arrivons à modéliser l'évolution des réactions chimiques sous forme de systèmes différentiels. C'est en tenant compte de la dépendance des concentrations de la variable espace que nous obtenons des systèmes de réaction-diffusion. On peut consulter les références [65, 68, 72].

1.1 Quelques principes généraux en modélisation des milieux continus

On désigne par *milieu continu* tout liquide, gaz ou solide déformable considéré d'un point de vue *macroscopique*. On peut l'assimiler à un système de particules dont l'évolution ou l'équilibre peut-être décrit à l'aide des lois universelles de la physique, à savoir : la loi de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment de cette quantité de mouvement par rapport à un point et de l'énergie.

Toutes les équations de la physique et des sciences voisines sont obtenues d'une part à partir de ces lois fondamentales, d'autre part à partir des lois de comportements qui sont spécifiques du milieu considéré : elles ont généralement un caractère plus empirique et des domaines de validité plus ou moins limités. La dérivation de ces lois de comportement est une science difficile ; il est indispensable de s'appuyer sur les connaissances et l'expérience des experts du domaine d'application envisagé.

Lois de conservation

Elles sont universelles, contrairement aux lois de comportement, et s'appliquent à tout système matériel, indépendamment de sa nature : liquide, gazeuse ou autre.

Rappelons qu'un milieu continu est intuitivement un "système de particules" en mouvement. On le modélise à chaque instant par l'ensemble des points d'un ouvert $\Omega(t)$ de \mathbb{R}^3 : On imagine que chaque point est une particule qui se déplace et que l'ensemble des particules occupe le domaine $\Omega(t)$ à chaque instant. On suppose, de plus, l'existence d'une famille de bijections $S(s, t)_{s, t > 0}$ de $\Omega(s)$ dans $\Omega(t)$ dépendant régulièrement de $s, t > 0$ et permettant de suivre chacun des points du domaine initial dans sa trajectoire au cours du temps, soit

$$t \mapsto S(0, t)X_0 = x(X_0, t)$$

On associe à ce milieu les quantités suivantes :

* $\vec{V}(X_0, t)$ la vitesse *Lagrangienne* définie par

$$\vec{V}(X_0, t) = \frac{\partial}{\partial t} x(X_0, t)$$

et $\vec{v}(X_0, t) = \vec{v}(x(X_0, t), t)$ la vitesse *Eulérienne*.

* $\rho(x, t)$ = la densité du milieu à l'instant t , c'est-à-dire la masse par unité de volume dans $\Omega(t)$, ainsi la masse $m(w)$ de tout sous-ensemble mesurable w de $\Omega(t)$ est donnée par

$$m(w) = \int_w \rho(x, t) dx$$

Afin de traduire mathématiquement les lois de conservation, nous utiliserons le lemme suivant qui permet d'exprimer la dérivée par rapport au temps d'une intégrale du type

$$K(t) = \int_{w(t)} k(x, t) dx,$$

où $w(t) = S(0, t)(w_0)$ avec w_0 un sous-ensemble mesurable quelconque de $\Omega(0)$ et où $k(., .)$ est une fonction définie sur $\Omega(t)$. Cette dérivée est parfois appelée dérivée particulière par référence au fait qu'on dérive selon les trajectoires des particules.

Un lemme de dérivation par rapport au domaine

Sous les hypothèses de régularité

$$K'(t) = \int_{w(t)} \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \text{div}(k\vec{v}) \right) dx,$$

ou encore

$$K'(t) = \int_{w(t)} \frac{\partial k}{\partial t} dx + \int_{\partial w(t)} k \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

où \vec{n} est la normale extérieur unitaire à $\partial w(t)$.

Pour une démonstration et des précisions sur la régularité requise, voir par exemple [26].

Conservation de la masse

Loi qui exprime l'invariance par rapport au temps t de la masse de tout sous-système matériel $w(t) = S(0, t)(w_0)$ que l'on suit au cours du temps, où w_0 est un sous-ensemble mesurable quelconque de $\Omega(0)$. Cette masse est donnée par

$$m(w) = \int_{w(t)} \varrho(x, t) dx$$

on a donc

$$\frac{d}{dt} m(w(t)) = 0$$

D'après le lemme appliqué à $k = \varrho$, on a pour tout sous-ensemble w_0 de $\Omega(0)$

$$\int_{w(t)} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}(\varrho \vec{v}) \right) dx = 0$$

et puisque w_0 et donc $w(t)$ sont arbitraires dans $\Omega(t)$, on en déduit l'équation de conservation de la masse, dite parfois équation de continuité

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \text{div}(\varrho \vec{v}) = 0$$

Conservation de l'énergie (1^{er} principe de la thermodynamique)

Elle s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{w(t)} \varrho \left(\frac{\|\vec{v}\|^2}{2} + e \right) dx = \int_{w(t)} (\varrho \vec{f} \cdot \vec{v} + \varrho w) dx + \int_{\partial w(t)} (\vec{F} \cdot \vec{v} - \vec{q} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

où

- * ϱw : Les apports volumiques de quantités de chaleur par unité de temps,
- * \vec{q} : le vecteur-flux de chaleur,
- * $\varrho \vec{f}$: la densité volumique des forces appliquées,
- * \vec{F} : la densité surfacique de force s'appliquant sur chaque éléments de surface.

Conservation de la quantité de mouvement et de son moment en O

Ces lois s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{w(t)} \varrho \vec{v} \right) dx = \int_{w(t)} \varrho \vec{f} dx + \int_{\partial w(t)} \vec{F} d\sigma \text{ pour la quantité de mouvement}$$

et

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{w(t)} \vec{OM} \wedge \varrho \vec{v} \right) dx = \int_{w(t)} \vec{OM} \wedge \varrho \vec{f} dx + \int_{\partial w(t)} \vec{OM} \wedge \vec{F} d\sigma \text{ pour le moment}$$

2^{ème} principe de la thermodynamique :

Il s'exprime par

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{w(t)} \varrho s dx \right) \geq \int_{w(t)} \varrho \frac{w}{T} - \int_{\partial w(t)} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} d\sigma$$

où s est l'entropie et T la température absolue.

1.1.1 Lois de comportement

Nous donnons ici deux exemples des lois de comportement :

Loi de diffusion de Fick

Cette loi exprime qualitativement que les particules se déplacent vers les régions à plus faible densité. Quantitativement, ce mouvement est tel que le flux de diffusion ($\vec{J} = \varrho \vec{v}$) à travers chaque surface soit proportionnel au gradient de densité ; ce qui peut s'écrire

$$\vec{v} = -d \left(\frac{\nabla \varrho}{\varrho} \right).$$

La loi de continuité devient alors

$$\varrho_t - \text{div}(d \nabla \varrho) = 0,$$

soit encore, en utilisant d est une fonction de x uniquement

$$\varrho_t - \text{div}(d(x) \nabla \varrho) = 0.$$

La densité ϱ , dans ce cas, satisfait alors une loi linéaire de diffusion : C'est l'équation linéaire de la chaleur. Notons que pour les situations stationnaires, c'est-à-dire lorsque $\varrho(x, t) = \varrho(x)$, et le coefficient de diffusion constant, la densité satisfait à l'équation de Laplace $\Delta \varrho = 0$.

Remarquons qu'il existe d'autres lois de diffusion comme par exemple, la loi de Darcy, qui s'applique à la diffusion de certains fluides dans les milieux poreux et qui, couplée avec d'autres lois de comportement, exprime que la vitesse \vec{v} est proportionnelle au gradient de densité, soit

$$\vec{v} = -d \nabla \varrho$$

ceci conduit à l'équation

$$\varrho_t - \frac{d}{2} \Delta(\varrho^2) = 0$$

qui est une équation de diffusion non-linéaire pour la densité, connue sous le nom d'équation des milieux poreux.

Loi de Fourier pour la conduction de la chaleur

On considère un milieu continu au repos, c'est-à-dire $\vec{v} = 0$. Dans ce cas l'équation de conservation de la chaleur prend la forme

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{w(t)} \rho e \right) = \int_{w(t)} \rho w - \int_{w(t)} \operatorname{div} \vec{q} \quad (1.1)$$

l'équation de continuité elle aussi se simplifie pour exprimer que $\rho(x, t)$ est indépendante de t. Ainsi, (1.1) donne

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \rho w - \operatorname{div} \vec{q}.$$

On ajoute les deux lois de comportement suivantes :

* $e = cT$: concernant l'énergie interne

* $\vec{q} = -k \nabla T$, $k > 0$: la loi de Fourier qui est une loi analogue à la loi de Fick, mais appliquée au flux de chaleur et non au flux de matière. On obtient ainsi

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - k \Delta T = 0$$

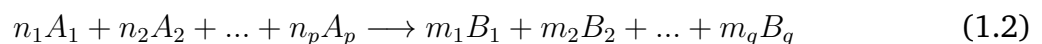
qui est la célèbre équation linéaire de la chaleur.

1.1.2 Modélisation de l'évolution des réactions

Vitesse d'une réaction, conservation de la matière

On convient de noter $[A]$ la concentration d'un constituant A dans un système donné, c'est-à-dire par définition, la quantité de ce constituant par unité de volume. On utilise généralement la mole par litre comme unité de concentration. Rappelons que la mole est l'unité standard du Système International (SI) pour la quantité de matière : elle correspond à la quantité de matière d'un constituant contenant autant de particules élémentaires qu'il y a d'atomes dans 12 grammes de carbone 12. Noter pour l'ordre de grandeur que cela correspond à environ 6×10^{23} particules.

Considérons d'une manière générale l'équation en équilibre suivante



où p et q sont des entiers ≥ 1 , ainsi que $n_i, i = 1, \dots, p, m_j, j = 1, \dots, q$. Cette équation d'équilibre contient en soi la conservation de la quantité de matière. Ainsi, en supposant le système clos, c'est-à-dire, sans aucun apport extérieur ni perte de matière, on obtient

$$v = \frac{1}{m_j} \frac{d[B_j]}{dt} = -\frac{1}{n_i} \frac{d[A_i]}{dt}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q.$$

le nombre ci-dessus est appelé *vitesse instantanée* de la réaction (1.2). On appelle réactifs

les constituants A_i , et produits les constituants B_j .

En général, une réaction d'équilibre n'est pas seulement constituée d'une réaction élémentaire, mais de plusieurs réactions parallèles ou successives, par exemple du type suivant



ou encore



ou encore



Par simplicité, nous convenons de noter dans la suite, $a = [A]$, $b = [B]$, etc ... Dans ces équations, la loi de conservation de la matière s'exprime par

$$b'(t) = -a'(t) - c'(t), \text{ ie, } a(t) + b(t) + c(t) = \text{cste, pour (1.3)}$$

$$a'(t) + b'(t) = 0 \text{ pour (1.4)}$$

$$x'(t) = 2(-a'(t) - c'(t)), a'(t) = b'(t), c'(t) = d'(t) \text{ pour (1.5)}$$

quand aux vitesses de réactions, elles s'écrivent

$$v_1 = -a'(t), v_2 = c'(t) \text{ pour les réactions de l'équation (1.3)}$$

$$v = -a'(t) = -b'(t) \text{ pour (1.4)}$$

$$v_1 = -a'(t) = -b'(t), v_2 = c'(t) = d'(t) \text{ pour (1.5).}$$

Il s'agit maintenant de décrire les lois de comportement de ces vitesses. Notons que dans les systèmes précédents, on a toujours moins d'équations que d'inconnues. Les lois de comportements vont permettre de "clore" ces systèmes.

Lois de comportement

On va supposer que, dans les réactions dites "élémentaires", la vitesse de réaction est supposée proportionnelle au produit des concentrations des réactifs. Pour des réactions plus complexes, elle est généralement proportionnelle à des puissances de ces concentrations. Cependant, on verra que la vitesse peut aussi être une fonction homographe des concentrations, voire des combinaisons plus complexes de ces comportements. Ces lois sont déduites des connaissances approfondies des étapes intermédiaires de la réaction considérée.

Réactions élémentaires

On va supposer que les réactions élémentaires satisfont à la loi d'action de masse.

Loi d'ordre un : On considère la réaction la plus simple



Si cette réaction est élémentaire, on considère qu'à température constante, la vitesse de réaction est proportionnelle à la concentration $[A]$, soit

$$a'(t) = -ka(t) = -b'(t)$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{da}{a} = -kdt.$$

Cette équation différentielle s'intègre immédiatement en

$$a(t) = a_0 e^{-kt}$$

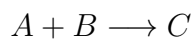
où : $a_0 = a(0)$ est la valeur initiale de a . Beaucoup de réactions suivent en fait cette loi, par exemple la décomposition radioactive de certains éléments chimiques. La constante k est appelée *constante de vitesse*. Sa valeur n'est pas toujours très bien connue : on peut la déterminer à l'aide de mesures expérimentales.

Loi d'Arrhénius : La loi précédente correspond à une réaction se déroulant à température constante. On s'attend à ce que la valeur de cette constante varie avec la température. C'est l'objet de la loi d'Arrhénius qui s'écrit

$$k = Ae^{-E_a/RT}$$

où T est la température absolue, R la constante des gaz parfaits ($= 8,314 \text{ J/K}$), E_a l'énergie d'activation et A une constante à préciser dans chaque cas.

Loi d'ordre deux : On considère la réaction supposée "élémentaire"



On considère qu'à température constante la vitesse de réaction est de la forme

$$c'(t) = ka(t)b(t)$$

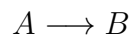
On dit alors qu'il s'agit d'une loi d'ordre deux par rapport à l'ensemble des réactifs, on obtient

$$\begin{aligned} \text{si } a_0 \neq b_0, \quad \frac{a}{a - a_0 + b_0} &= \frac{a_0}{b_0} e^{-k(b_0 - a_0)t} \\ \text{sinon } a(t) &= \frac{a_0}{1 + a_0 kt} \end{aligned}$$

A partir de ces deux lois élémentaires, on peut écrire les lois de comportement des vitesses pour des réactions plus complexes, mais décomposables en réactions élémentaires du type ci-dessus.

Quelques exemples

Exemple 1



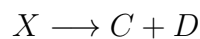
Le bilan matière s'écrit alors

$$b'(t) = -a'(t) - c'(t)$$

Pour la loi de comportement, on peut supposer que chaque réaction est élémentaire et d'ordre un, ce qui donne

$$\begin{cases} a' = -k_1 a \\ b' = k_1 a - k_2 b \\ c' = k_2 b \end{cases} \quad (1.6)$$

Exemple 2

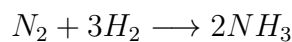


Le système d'équations s'écrit

$$\begin{cases} a' = -k_1 ab + k_{-1} x = b' \\ x' = k_1 ab - k_{-1} x - k_2 x \\ c' = k_2 x = d' \end{cases} \quad (1.7)$$

Exemple 3

On considère l'exemple de l'ammoniac



dont le mécanisme peut être expliqué par l'introduction d'un état intermédiaire X



Si on suppose élémentaires les deux réactions, le système d'équations s'écrit (en supposant

$$k_1 = k_2 = 1)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[N_2] = -[N_2][H_2]^3 + k_{-1}[X] = \frac{1}{3} \frac{d}{dt}[H_2] \\ \frac{d}{dt}[X] = [N_2][H_2]^3 - k_{-1}[X] - k_{-2}[X] + [NH_3]^2 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt}[NH_3] = k_{-2}[X] - [NH_3]^2 \end{cases} \quad (1.9)$$

Exemple 4

On va étudier l'exemple important de la catalyse enzymatique qui s'écrit :



où les molécules de substrat S réagissent avec l'enzyme E pour donner un produit P via la formation d'un complexe intermédiaire ES . On obtient alors

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[E] = -k_1[E][S] + k_{-1}[ES] + k_2[ES] \\ \frac{d}{dt}[S] = -k_1[E][S] + k_{-1}[ES] \\ \frac{d}{dt}[ES] = k_1[E][S] - k_{-1}[ES] - k_2[ES] \\ \frac{d}{dt}[P] = k_2[ES] \end{cases} \quad (1.11)$$

Formation de complexe intermédiaire et principe des états stationnaires

Nous venons de donner quelques exemples d'équations apparemment simples mais dont la compréhension du vrai mécanisme nécessite l'introduction d'une succession d'équations intermédiaires et aussi de composants intermédiaires. Souvent, ceux-ci sont très réactifs et ne sont pas vraiment détectables dans le mélange. Leur concentration reste en tous cas négligeable devant celle des vrais réactifs ou produits. C'est le principe dit des états stationnaires (P.E.S) que nous expliquerons sur l'exemple 2.

On y considère donc que le complexe intermédiaire X est très réactif et qu'il arrive très vite à l'équilibre. Le P.E.S consiste à considérer brutalement que $x'(t) = 0$ dans le système (1.7), ce qui donne

$$k_1 ab = (k_{-1} + k_2)x$$

soit

$$x = \frac{k_1}{k_{-1} + k_2} ab$$

ainsi, le système devient

$$\begin{cases} a' = -\frac{k_{-1}k_2}{k_{-1} + k_2} ab \\ b = a + b_0 - a_0 \\ c' = \frac{k_1k_2}{k_{-1} + k_2} ab = d' \end{cases}$$

Ainsi, on peut considérer qu'en fait, la réaction $A + B \longrightarrow C + D$ est d'ordre 2. Par ailleurs, on peut intégrer directement les deux premières équations pour obtenir a, b , puis en déduire c, d .

Autres exemples

Exemple 5

On applique le P.E.S à l'exemple 3 en considérant que le complexe intermédiaire X est très réactif, soit $\frac{d}{dt}[X] = 0$, d'où

$$[X] = \frac{k_1}{k_{-1} + k_2} [N_2][H_2]^3$$

et donc

$$\frac{d}{dt}[N_2] = -k_1[N_2][H_2]^3 + \frac{k_1 k_{-1}}{k_{-1} + k_2} [N_2][H_2]^3$$

d'où

$$\frac{d}{dt}[N_2] = \frac{-k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2][H_2]^3 = \frac{1}{3} \frac{d}{dt}[H_2]$$

d'autre part

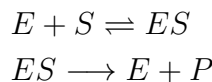
$$\frac{d}{dt}[NH_3] = 2k_2[X]$$

ainsi

$$\frac{d}{dt}[NH_3] = \frac{2k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2][H_2]^3$$

Exemple 6

Considérons de manière analogue la réaction de l'exemple 4



En considérant que $\frac{d}{dt}[ES] = 0$, on obtient

$$k_1[E][S] = (k_2 + k_{-1})[ES]$$

et donc

$$\frac{d}{dt}[P] = k_2[ES] = \frac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [E][S]$$

En utilisant le fait que $[E] + [ES] = [E]_0$, on a alors

$$[E]_0 = [E] \left(\frac{k_{-1} + k_2 + k_1[S]}{k_{-1} + k_2} \right)$$

ainsi

$$\frac{d}{dt}[P] = \frac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2 + k_1[S]} [E]_0 [S]$$

en posant $K_M = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$, appelée constante de Michaelis, on obtient

$$\frac{d}{dt}[P] = \frac{k_2}{K_M + [S]}[E]_0[S]$$

Exemple 7

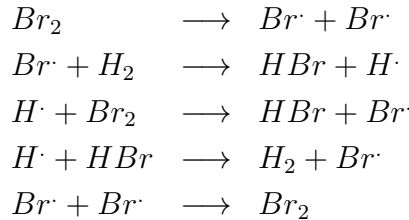
Il a été proposé en 1906 pour la vitesse de réaction de l'Hydrogène et du Brome



la loi empirique suivante

$$\frac{d}{dt}[HBr] = \frac{2L[H_2][Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m[HBr]/[Br_2]}$$

Cette loi établie empiriquement a finalement obtenue une explication par le mécanisme de réactions en chaîne suivant (voir [49])



En effet, le système d'équations obtenues est le suivant

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}[Br_2] &= -k_1[Br_2] - k_3[H\cdot][Br_2] + k_5[Br\cdot]^2 \\ \frac{d}{dt}[Br\cdot] &= 2k_1[Br_2] - k_2[Br\cdot][H_2] + k_3[H\cdot][Br_2] + k_4[H\cdot][HBr] - 2k_5[Br\cdot]^2 \\ \frac{d}{dt}[H_2] &= -k_2[Br\cdot][H_2] + k_4[H\cdot][HBr] \\ \frac{d}{dt}[H\cdot] &= k_2[Br\cdot][H_2] - k_3[H\cdot][Br_2] - k_4[H\cdot][HBr] \\ \frac{d}{dt}[HBr] &= k_2[Br\cdot][H_2] - k_4[H\cdot][HBr] + k_3[H\cdot][Br_2] \end{aligned} \right.$$

En appliquant le P.E.S, il vient que

$$[H\cdot] = \frac{k_2[Br\cdot][H_2]}{k_3[Br_2] + k_4[HBr]} \text{ et } [Br\cdot]^2 = \frac{k_1}{k_5}[Br_2]$$

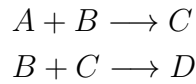
ainsi

$$\frac{d}{dt}[HBr] = \frac{2L[H_2] \cdot [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m[HBr]/[Br_2]}$$

$$\text{où } L = k_2 \sqrt{\frac{k_1}{k_5}} \text{ et } m = \frac{k_4}{k_3}.$$

Système de réaction-diffusion

Nous nous plaçons maintenant dans une situation plus réaliste où les réactions ont lieu dans un milieu ambiant où les concentrations dépendent aussi de la variable d'espace. Prenons par exemple la réaction suivante



en supposant que chacune des réactions est élémentaire et suit une loi d'ordre 2, nous aurions

$$\begin{cases} a' = -k_1 ab \\ b' = -k_1 ab - k_2 bc \\ c' = k_1 ab - k_2 bc \\ d' = k_2 bc \end{cases}$$

et la conservation de la matière s'exprime par

$$c' = -a' - d', b' = a' - d'$$

Pour tenir compte de la dépendance des concentrations de la variable d'espace x , nous pouvons assimiler chaque constituant à un milieu continu animé d'une vitesse eulérienne $\vec{v}(x, t)$. La quantité du constituant A contenu dans le volume $w(t)$ est donnée par : $m_a(w(t)) = \int_{w(t)} a(x, t) dx$, et de même pour les autres constituants. D'après les résultats déjà obtenus, on a

$$\frac{d}{dt} m_a(w(t)) = \int_{w(t)} \frac{\partial a}{\partial t} + \text{div}(a(x, t) \vec{v}) dx$$

ainsi, la variation instantanée de quantité de matière est donnée par

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \text{div}(a(x, t) \vec{v}).$$

Supposer que la vitesse des réactions ci-dessus suit une loi d'ordre 2 consiste à écrire que cette variation instantanée est proportionnelle au produit des concentrations de A et B. Ainsi, la première équation devient

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \text{div}(a(x, t) \vec{v}) = -k_1 ab$$

que nous écrivons le plus souvent

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \text{div}(J_a) = S_a$$

et les lois de conservation de matière deviennent

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m_c(w(t)) &= -\frac{d}{dt}m_a(w(t)) - \frac{d}{dt}m_d(w(t)) \\ \frac{d}{dt}m_b(w(t)) &= \frac{d}{dt}m_a(w(t)) - \frac{d}{dt}m_d(w(t))\end{aligned}$$

Pour compléter le système, il faut ajouter une loi de comportement pour la vitesse des particules ou le flux de matière de chaque constituant. La loi la plus simple et de domaine de validité relativement large pour ce type d'application est la loi de Fick, soit

$$J_a = a\vec{v} = -d_a\nabla a$$

où d_a est la fonction de diffusivité du constituant A. On introduit la même loi pour les autres constituants avec pour chacun sa propre constante de diffusivité d_b , d_c , d_d . On obtient comme modèle le système suivant d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial t} - \operatorname{div}(d_a\nabla a) = -k_1ab \\ \frac{\partial b}{\partial t} - \operatorname{div}(d_b\nabla b) = -k_1ab - k_2bc \\ \frac{\partial c}{\partial t} - \operatorname{div}(d_c\nabla c) = k_1ab - k_2bc \\ \frac{\partial d}{\partial t} - \operatorname{div}(d_d\nabla d) = k_2bc \end{cases}$$

Ici, il s'agit d'un système de réaction-diffusion, terminologie qui fait référence aux deux phénomènes apparaissant dans l'équation diffusion de chaque constituant avec sa propre vitesse de diffusion (régie par la constante de diffusivité) et interaction non linéaire entre les différents constituants.

La variable x varie dans un domaine de \mathbb{R}^3 . On peut supposer ici que ce domaine est indépendant du temps si la réaction a lieu dans un milieu "fixe"; on le note Ω .

Pour "fermer" le système, il est indispensable d'ajouter des conditions au bord de Ω qui doivent traduire les éventuels échanges de matière avec le milieu extérieur. Par exemple :

1- Si la réaction se produit dans un milieu isolé, on écrit que le flux de matière à la frontière est nul, soit $a\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, ou selon la loi de Fick, $d_a\nabla a\cdot\vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, ce qui peut encore s'écrire si d_a est une constante positive $\frac{\partial}{\partial n}a(x, t) = 0$ pour $x \in \partial\Omega, t > 0$.

2- Si le flux de matière, à travers la frontière est une fonction affine de la concentration, on aura dans ce cas

$$\lambda\nabla a\cdot\vec{n} = -(1 - \lambda)a + \alpha \text{ sur } \partial\Omega \times (0, \infty)$$

ou encore

$$\lambda\frac{\partial a}{\partial n} + (1 - \lambda)a = \alpha \text{ sur } \partial\Omega \times (0, \infty)$$

où $\lambda \in [0, 1]$.

Ainsi, en appliquant ces résultats aux exemples précédents, nous obtenons :

* pour la réaction de l'amoniac (1.8), le système de réaction-diffusion associé est

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial [N_2]}{\partial t} - d_1 \Delta [N_2] = -\frac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [H_2]}{\partial t} - d_2 \Delta [H_2] = -\frac{3k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [NH_3]}{\partial t} - d_3 \Delta [NH_3] = \frac{2k_1 k_2}{k_{-1} + k_2} [N_2] [H_2]^3 \quad \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [N_2]}{\partial \nu} = \frac{\partial [H_2]}{\partial \nu} = \frac{\partial [NH_3]}{\partial \nu} = 0 \quad \text{pour } (x, t) \in \partial \Omega \times [0, \infty) \\ [N_2](x, 0) = n_0, [H_2](x, 0) = h_0, [NH_3](x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right. \quad (1.13)$$

* pour la réaction enzymatique (1.10), nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial [E]}{\partial t} - d_1 \Delta [E] = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [S]}{\partial t} - d_2 \Delta [S] = \frac{-k_2}{K_M + [S]} [E]_0 [S] \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [P]}{\partial t} - d_3 \Delta [P] = \frac{k_2}{K_M + [S]} [E]_0 [S] \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [E]}{\partial \nu} = \frac{\partial [S]}{\partial \nu} = \frac{\partial [P]}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega \times [0, \infty) \\ [E](x, 0) = E_0, [S](x, 0) = S_0, [P](x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right. \quad (1.14)$$

* quant à la réaction de l'Hydrogène et du Brome (1.12), elle entraîne le système de réaction-diffusion suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial [Br_2]}{\partial t} - d_1 \Delta [Br_2] = \frac{-L[H_2] \cdot [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m[HBr]/[Br_2]} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [H_2]}{\partial t} - d_2 \Delta [H_2] = \frac{-L[H_2] \cdot [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m[HBr]/[Br_2]} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [HBr]}{\partial t} - d_3 \Delta [HBr] = \frac{2L[H_2] \cdot [Br_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + m[HBr]/[Br_2]} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [Br_2]}{\partial \nu} = \frac{\partial [H_2]}{\partial \nu} = \frac{\partial [HBr]}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega \times [0, \infty) \\ [Br_2](x, 0) = n_0, [H_2](x, 0) = h_0, [HBr](x, 0) = 0 \quad \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right. \quad (1.15)$$

1.2 Modélisation mathématique du phénomène des trempes

Dans cette partie, nous présentons deux modèles mathématiques du processus des trempes. La première est basée sur l'équation de la conduction thermique avec une température variable. Dans le deuxième modèle, le problème est formulé en considérant l'énergie interne comme une variable. On obtient une équation parabolique périodique avec une non-linéarité par rapport au gradient de cette énergie.

Introduction

La martensite est formée par un refroidissement rapide (trempe) de l'austénite qui piège les atomes de carbone qui n'ont pas le temps de se diffuser hors de la structure du cristal. Cette réaction martensitique commence lors du refroidissement lorsque l'austénite atteint la température de départ de la martensite (M_s) et le parent l'austénite devient mécaniquement instable. À une température constante inférieure à M_s , une fraction de l'austénite mère se transforme rapidement, alors la transformation se produira pas plus loin. Lorsque la température diminue, l'austénite a une grande chance de transformer en martensite. Enfin, quand la martensite est terminée la température (M_f) est atteinte et la transformation est terminée. Martensite peut également former par application de stress (cette propriété est fréquemment utilisée dans céramique trempée comme zircone stabilisée à l'oxyde d'yttrium et aciers spéciaux comme les aciers TRIP (c'est-à-dire les aciers à plasticité induite par transformation)). Ainsi La martensite peut être induite thermiquement ou induite par le stress.

Les matériaux métalliques, comme l'acier et les alliages chrome-nickel, présentent un comportement complexe au cours des processus de traitement thermique. En trempant, un échantillon d'acier est chauffé au-dessus de 900°C et suivi d'un refroidissement. Soudain, ce traitement induit un changement de phase pour générer de la martensite à la surface de l'échantillon, afin d'augmenter sa résistance.

Le changement de phase austénite-martensite se produit dans une certaine plage de température et modifie les propriétés physiques du matériau. Les mesures de la chaleur spécifique et de la conductivité thermique indiquent une dépendance non linéaire de ces paramètres par rapport à la température pendant le changement de phase.

Maintenant nous présentons deux modèles mathématiques du processus de trempe. Pour le premier modèle, on utilise l'équation de la conduction thermique pour obtenir une formulation du problème avec température variable. un nouveau problème est reformulé dans le deuxième modèle, dont la variable est l'énergie interne, enfin nous proposons un problème mathématique plus général, en ajoutant une condition dans le temps et ce dernier problème nous ont étudié dans le chapitre 4 en détail.

1.2.1 Modèle mathématique

Dans cette section, nous considérons la formulation mathématique du problème. La Section 1.2.2 présente les équations de thermodynamique et la formulation du problème. Dans la Section 1.2.3, nous présentons les reformulations du problème de la chaleur en termes d'énergie interne E , l'équation résultante sera utilisée dans le chapitre 3 pour l'analyse mathématique du modèle.

1.2.2 Problème initial de la conduction thermique

Soit $\theta(t, x)$ le champ de la température. L'équation de la conservation de l'énergie est donnée par

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} q = f \quad (1.16)$$

où $\rho = \rho(\theta) > 0$ est la densité de masse présenter en fonction de la température ceci qui donne la possibilité de changer la structure du matériau et E est l'énergie. Nous supposons que le flux de la chaleur q est donné par la loi Fourier

$$q = -k(\theta) \nabla \theta, \quad k = k(\theta) > 0. \quad (1.17)$$

De plus, on suppose que l'énergie interne $E = E(\theta)$ dépend de la température et que la chaleur spécifique c est positive,

$$c(\theta) = \frac{\partial E}{\partial \theta} > 0, \quad (1.18)$$

alors $\theta(t, x)$ vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \operatorname{div}(k \nabla \theta) = f & \text{dans } (0, T) \times \Omega \\ \theta = g & \text{sur } (0, T) \times \Gamma \\ \theta(0, x) = \theta(T, x) & \text{pour } x \in \Omega \end{cases} \quad (1.19)$$

où g est une fonction prescrite de $(0, T) \times \Gamma$, et Ω est considéré comme le réacteur, qui est supposé un ouverte borné régulière de \mathbb{R}^N avec bord $\Gamma = \partial \Omega$.

Les propriétés thermiques doivent satisfaire à la règle du mélange. La chaleur spécifique et la conductivité thermique sont données par

$$c = \xi_A c_A + \xi_M c_M \quad \text{and} \quad k = \xi_A k_A + \xi_M k_M,$$

avec $\xi_A + \xi_M = 1$, où ξ_A est la fraction de volume de austénite et ξ_M est la fraction volumique de martensite. les sous-indices «A» et «M» désignent respectivement les propriétés appartenant à la phases austénitique et martensitique. Lorsque la structure de certains matériaux est définie par une température connue, il vient que la vitesse température du stress est hors champ, ceci produira une transformation de phase dont le processus, ce qui est souvent connue par un changement brusque. Nous prenons le signe ξ comme une certaine phase de fraction volumique de la composition et nous adaptons la formule suivante pour calculer la quantité de transformation de phase :

$$\xi = 1 - \exp(1 - b_n t^{a_n}),$$

Dans cette formule, $b_n(\theta)$ et $a_n(\theta)$ sont deux paramètres corrélés avec la température, et ils concernent également la composent de l'acier et le conditionnement austénitique. La quantité de transformation de l'austénite à la martensite est calculé par la formule sui-

vante :

$$\xi_M(\theta) = 1 - \exp[-\lambda(M_s - \theta)], \quad (1.20)$$

où $\lambda = 0.011$ et M_s est la température au début de la transformation de la martensite. De plus, le principe de l'additivité donne l'expression de la fraction volumique de l'austénite restreinte.

De plus, la fonction f correspond à la génération interne de la chaleur au changement de phase est donné par

$$f = L_M \frac{\partial \xi_M}{\partial t} + \mu, \quad (1.21)$$

où la chaleur latente L_M est supposée positive en raison de la transformation de la matrice austénitique dans la martensite, et μ est une fonction mesurable périodique par rapport au temps.

De (1.20) et (1.21), la fonction génératrice de la chaleur f est donné par

$$f = -L(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mu, \quad L(\theta) = \lambda L_M \exp[-\lambda(M_s - \theta)] > 0. \quad (1.22)$$

1.2.3 Reformulation en termes d'énergie

Le but est d'établir les résultats d'existence de solution et des estimations dans les espaces de sobolev, ceci peut être achevé par une reformulation du problème (1.19) en termes d'énergie interne E . A partir de (1.18), la température peut être donnée en fonction de l'énergie, $\theta = \theta(E)$. Donc la loi de Fourier (1.17) peut être écrit comme

$$q = -k(\theta) \nabla \theta = -\alpha(E) \nabla E,$$

puisque,

$$\nabla E = \frac{\partial E}{\partial \theta} \nabla \theta = c(\theta) \nabla \theta,$$

la conductivité thermique $k(\theta) = c(\theta)\alpha(E)$, ce qui implique $\alpha = \alpha(E) > 0$. De plus (1.22),

la fonction f devient

$$f = -\frac{L(\theta)}{c(\theta)} \frac{\partial E}{\partial t} + \mu,$$

En considérant $u = E(\theta)$, et en substituant dans l'équation (1.16) nous obtenons

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial E}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha(E) \nabla E) &= -\frac{L(\theta)}{c(\theta)} \frac{\partial E}{\partial t} + \mu, \\ \left(\rho + \frac{L(\theta)}{c(\theta)}\right) \frac{\partial E}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha(E) \nabla E) &= \mu. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Alors

$$\hat{\rho}(u) \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha(u) \nabla u) = \mu \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\operatorname{div}(\alpha(u) \nabla u)}{\hat{\rho}(u)} = \mu \frac{1}{\hat{\rho}(u)}$$

avec

$$\hat{\rho} = \rho + \frac{L}{c} > 0 \quad (1.25)$$

Comme $\hat{\rho}(u) > 0$, nous pouvons diviser l'équation ci-dessus pour $\hat{\rho}$, et en utilisant la relation

$$\operatorname{div}\left(\frac{\alpha(u) \nabla u}{\hat{\rho}(u)}\right) = \frac{1}{\hat{\rho}(u)} \operatorname{div}(\alpha(u) \nabla u) + \left(\nabla \frac{1}{\hat{\rho}(u)}\right) \cdot (\alpha(u) \nabla u) \quad (1.26)$$

on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{\alpha(u) \nabla u}{\hat{\rho}(u)}\right) + \left(\nabla \frac{1}{\hat{\rho}(u)}\right) \cdot (\alpha(u) \nabla u) = \mu \frac{1}{\hat{\rho}(u)} \quad (1.27)$$

or

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\left(\frac{\alpha(u) \nabla u}{\hat{\rho}(u)}\right) - \left(\frac{1}{\hat{\rho}(u)^2} \frac{d\hat{\rho}(u)}{du} \nabla u\right) \cdot (\alpha(u) \nabla u) = \mu \frac{1}{\hat{\rho}(u)} \quad (1.28)$$

qui peut être écrit comme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(a(u) \nabla u) + b(u) |\nabla u|^2 = F(u) \quad (1.29)$$

Où

$$a(u) = \frac{\alpha(u)}{\hat{\rho}(u)} > 0 \quad (1.30)$$

$$b(u) = -\frac{\alpha(u)}{\hat{\rho}(u)^2} \frac{d\hat{\rho}(u)}{du} \quad (1.31)$$

$$F(u) = \mu \frac{1}{\hat{\rho}(u)} \quad (1.32)$$

Finalement, nous obtenons un problème quasi-linéaire périodique par rapport au temps

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \operatorname{div}(a(u) \nabla u) + b(u) |\nabla u|^2 = F(t, x, u) & \text{dans } Q_T \\ u(0, \cdot) = u(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T \end{cases} \quad (1.33)$$

Chapitre 2

Existence locale, globale, unicité et positivité pour les systèmes de Réaction-Diffusion

Introduction

Durant ces dernières décennies, l'intérêt porté à l'étude des systèmes de réaction-diffusion n'a cessé de croître et une abondante littérature a été développée sur ce sujet, notamment sur les problèmes d'existences locales, globales ou d'explosion en temps fini, de comportement asymptotique...

Cette thèse s'inscrit dans ce même contexte, nous nous intéressons en particulier à l'étude des systèmes de réaction-diffusion de type (P). Nous commençons par rappeler un résultat d'existence locale pour ce type de problèmes ainsi qu'une caractérisation du temps maximal d'existence de la solution de laquelle nous déduisons un critère d'existence globale.

Puis, dans un deuxième temps, nous introduisons les deux propriétés caractéristiques de la classe des systèmes de réaction-diffusion pour laquelle nous allons étudier l'existence globale des solutions à savoir (H1) et (H2).

2.1 Existence locale et unicité pour des systèmes de réaction-diffusion

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , de frontière régulière $\partial\Omega$. Nous considérons le système d'équations de réaction-diffusion suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - D\Delta v(x, t) = f(v(x, t)) & x \in \Omega, t > 0 \\ (1 - \lambda_r)v_r + \lambda_r \frac{\partial v_r}{\partial \nu} = \alpha_r, \text{ pour } 1 \leq r \leq m & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

* $v = (v_1, \dots, v_m)$, $v_r : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, pour $1 \leq r \leq m$,

* $\frac{\partial v}{\partial t}$ désigne le dérivée par rapport au temps de v ,

2.1. EXISTENCE LOCALE ET UNICITÉ POUR DES SYSTÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION

* Δ désigne l'opérateur Laplacien : $\Delta v_r(x, t) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 v_r}{\partial x_j^2}(x, t)$ pour $1 \leq r \leq m$,

* D matrice diagonale carrée d'ordre m dont les coefficients d_r sont strictement positifs,

* f fonction mesurable de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^m et localement lipschitzienne

$$|f(p) - f(\hat{p})| \leq K(r) |p - \hat{p}|, \forall p, \hat{p} \in \mathbb{R}^m \text{ avec } |p|, |\hat{p}| \leq r \quad (2.2)$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^m ,

* la condition initiale est définie par

$$v_0 = (v_{0i})_{1 \leq i \leq m} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})^m, \quad (2.3)$$

* $\frac{\partial v_r}{\partial \nu} = \nabla v_r \cdot \vec{n} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial v_r}{\partial x_j} \cdot n_j$ désigne la dérivée normale de v_r , $\vec{n} = (n_j)_{1 \leq j \leq m}$ est le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$,

* pour tout $1 \leq r \leq m$, λ_r et α_r vérifient

$$0 \leq \lambda_r \leq 1, \alpha_r \in C^2(\bar{\Omega}). \quad (2.4)$$

La définition suivante précise ce que nous désignons par une solution au sens classique.

Définition 2.1 (Solution classique)

Par solution classique, nous entendons une solution v appartenant à $C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, T_{\max}))^m$ et vérifiant (2.1) au sens usuel.

Nous énonçons maintenant des conditions suffisantes assurant l'existence locale et l'unicité de la solution classique de (2.1). Nous avons donc le résultat suivant :

Théorème 2.1 (Hollis-Martin-Pierre)

Sous les hypothèses (2.2) et (2.4), le système (2.1) admet une unique solution locale et classique v sur $[0, T_{\max}[$, telle que pour chaque $1 \leq r \leq m$, il existe $N_r : [0, T_{\max}[\rightarrow [0, \infty)$ continue avec

$$0 \leq v_r(t, x) \leq N_r(t), \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T_{\max}[\quad (2.5)$$

De plus, le temps maximal d'existence T_{\max} est caractérisé par

$$\text{si } T_{\max} < \infty, \text{ alors } \lim_{t \rightarrow T_{\max}} \sum_{r=1}^m \|v_r(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty \quad (2.6)$$

Voir [38] pour une démonstration de ce résultat.

Remarque 2.1

Pour étudier l'existence globale de la solution du système (2.1), c'est-à-dire déterminer si $T_{\max} = +\infty$, nous utilisons la contraposée de la caractérisation (2.6) du temps maximal

de l'existence

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{S'il existe une fonction } N : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \text{ telle que pour} \\ \text{tout } t \in [0, T_{\max}[: \sum_{r=1}^m \|v_r(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq N(t), \text{ alors } T_{\max} = +\infty \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Par conséquent, pour montrer l'existence globale des solutions classiques, il suffit de montrer que celles-ci restent uniformément bornées sur leur temps d'existence.

Remarque 2.2

Notons que sous les hypothèses (2.11) et (2.12), et si de plus on a une hypothèse de "contrôle de masse" sur f (condition dite de Lyapunov) : $\exists H : \mathbb{R}^m \rightarrow (0, \infty)$ régulière satisfaisant :

- i) $|H(z)| \rightarrow \infty$ quand $|z| \rightarrow \infty$
- ii) $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que : $\langle \nabla H(z), f(z) \rangle \leq MH(z), \forall z \in \mathbb{R}^m$

alors, l'existence globale pour le système différentiel ordinaire associé est assurée, soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = f(y) \quad t > 0 \\ y(0) = v_0 \quad t = 0 \end{array} \right.$$

Rappelons que l'existence globale pour une équation différentielle ordinaire implique toujours l'existence globale pour l'équation de réaction-diffusion associée (c'est une application du principe de maximum), mais ce résultat est en général faux pour les systèmes. Pour s'en convaincre, nous proposons le contre-exemple suivant.

Soit le système

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + 2aN & x \in \Omega, t > -1 \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + 2(N-t)^+v^2 - 8|1-u|v^3 & x \in \Omega, t > -1 \\ u = 0, v = (1+t^2)^{-1} & x \in \partial\Omega, t > -1 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où Ω est la boule unité de \mathbb{R}^N , et r^+ est définie par

$$r^+ = \begin{cases} r, & \text{si } r \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Le système différentiel ordinaire associé est

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = 2aN \quad t \geq 0 \\ y_2' = 2(N-t)^+y_2^2 - 8|1-y_1|y_2^3 \quad t \geq 0 \\ y_1(-1) = \xi_1, y_2(-1) = \xi_2 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

alors, si $a > \frac{(N+1)^2}{4N}$, la solution de (2.9) existe dans $[-1, \infty)$, $\forall \xi_1, \xi_2 \geq 0$. De plus

$$u(r, t) = 1 - r^2, v(r, t) = (t^2 + r^2)^{-1}$$

est une solution positive de (2.8) dans $\bar{\Omega} \times (-1, \infty)$ qui explose dans $L^\infty(\Omega)$ quand $t \rightarrow 0$ (voir [50]).

Remarque 2.3

Nous présentons ici un contre-exemple qui reflète l'importance de la condition $d_r > 0$, pour $1 \leq i \leq m$.

Nous considérons pour cela le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = -uv^\beta & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = uv^\beta & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u = u_0, v = v_0 & x \in \Omega, t = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Nous pouvons montrer que si $d_2 = 0, d_1 > 0$ et $\beta > 1$, alors il n'existe pas d'estimations dans L^∞ de la solution de (2.10) en terme de $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ et $\|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ pour t large. Plus précisément, si pour $a, b > 0$ et u_0, v_0 tels que

$$0 \leq u_0 \leq a, 0 \leq v_0 \leq b$$

il existe une solution de (2.10) dans $[0, T]$ telle que pour tout $t \in [0, T]$

$$\|v(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c(T, a, b)$$

alors

$$T \leq [(\beta - 1)b^{\beta-1}a]^{-1}.$$

Pour plus de détails voir [38].

2.1.1 Positivité de la solution

Nous énonçons maintenant les hypothèses assurant que la positivité de la solution du système (2.1) est préservée au cours du temps. Nous supposons donc que :

* la condition initiale est positive, c'est-à-dire

$$v_{0i}(x) \geq 0, \forall 1 \leq i \leq m, \text{ et pour tout } x \text{ dans } \bar{\Omega}, \quad (2.11)$$

* f est quasi-positif, c'est-à-dire

$$\forall p_1, \dots, p_m \geq 0, \text{ si } \hat{p}_r = (p_1, \dots, p_{r-1}, 0, p_{r+1}, \dots, p_m), \text{ alors } f_r(\hat{p}_r) \geq 0, \quad (2.12)$$

* pour tout $1 \leq r \leq m$

$$\alpha_r \geq 0 \quad (2.13)$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème concernant la positivité de la solution du système de réaction-diffusion (2.1).

Théorème 2.2

Sous les hypothèses (2.2) - (2.13), la positivité de la solution classique v de (2.1) est préservée au cours du temps, c'est-à-dire $v(x, t) \geq 0$, pour $(x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T_{\max}]$.

Preuve

Nous définissons \hat{f} sur \mathbb{R}^m par

$$\hat{f}(v) = \hat{f}(v_1, \dots, v_m) = \begin{cases} f(v_1, \dots, v_m), & \text{si } v_r \geq 0, \forall 1 \leq r \leq m \\ f(v_1, \dots, v_{i_0-1}, 0, v_{i_0+1}, \dots, v_m), & \text{si } v_{i_0} \leq 0 \end{cases}$$

Nous considérons alors le système suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t}(x, t) = D\Delta \hat{v}(x, t) + \hat{f}(\hat{v}(x, t)), & x \in \Omega, t > 0 \\ (1 - \lambda_r)\hat{v}_r + \lambda_r \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \nu} = \alpha_r, \text{ pour } 1 \leq r \leq m, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \hat{v}(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.14)$$

Notre objectif est de montrer que \hat{v} reste positive au cours du temps, ce qui termine la démonstration du théorème 9. En effet, dans ce cas, \hat{f} coïncide avec f , et par conséquent \hat{v} serait une solution positive de (2.1)

Nous introduisons, pour cela, la fonction $sign^-$ définie par

$$sign^- r = \begin{cases} -1, & \text{si } r < 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $sign^-$ est croissante, nous pouvons considérer la fonction ε , convexe, deux fois dérivable, et telle que

$$\varepsilon'(r) \rightarrow sign^- r \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Pour tout $1 \leq r \leq m$, nous multiplions la $r^{\text{ème}}$ équation de (2.14) par $j'_\varepsilon(\hat{v}_r)$, nous avons alors après intégration sur Ω

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial t} j'_\varepsilon(\hat{v}_r) = d_r \int_{\Omega} (\Delta \hat{v}_r) j'_\varepsilon(\hat{v}_r) + \int_{\Omega} \hat{f}_r(\hat{v}) j'_\varepsilon(\hat{v}_r). \quad (2.15)$$

Nous notons par I_1 et I_2 les intégrales du membre de droite de (2.15). Nous obtenons, en utilisant la formule de Green

$$I_1 = -d_r \int_{\Omega} \nabla \hat{v}_r \nabla (j'_\varepsilon(\hat{v}_r)) dx + d_r \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \nu} j'_\varepsilon(\hat{v}_r) d\sigma.$$

Utilisant le fait que j_ε est convexe, nous aurons

$$-d_r \int_{\Omega} \nabla \hat{v}_r \nabla (j'_\varepsilon(\hat{v}_r)) dx = -d_r \int_{\Omega} j''_\varepsilon(\hat{v}_r) |\nabla \hat{v}_r|^2 dx \leq 0.$$

Pour le terme sur le bord, nous avons deux cas à étudier :

1^{er} cas : si $0 < \lambda_r \leq 1$, nous avons d'après (2.1)

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \nu} j'_\varepsilon(\hat{v}_r) d\sigma = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\alpha_r}{\lambda_r} - \frac{1 - \lambda_r}{\lambda_r} \hat{v}_r \right) j'_\varepsilon(\hat{v}_r) d\sigma$$

par passage à la limite, et en utilisant le théorème de Lebesgue, nous obtenons

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \nu} j'_\varepsilon(\hat{v}_r) d\sigma &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\alpha_r}{\lambda_r} - \frac{1 - \lambda_r}{\lambda_r} \hat{v}_r \right) \text{sign}^-(\hat{v}_r) d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega \cap [\hat{v}_r \geq 0]} \left(\frac{\alpha_r}{\lambda_r} - \frac{1 - \lambda_r}{\lambda_r} \hat{v}_r \right) \text{sign}^-(\hat{v}_r) d\sigma \\ &\quad + \int_{\partial\Omega \cap [\hat{v}_r < 0]} \left(\frac{\alpha_r}{\lambda_r} - \frac{1 - \lambda_r}{\lambda_r} \hat{v}_r \right) \text{sign}^-(\hat{v}_r) d\sigma \end{aligned}$$

utilisant la définition de sign^- , (2.4) et (2.13), il vient que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \nu} j'_\varepsilon(\hat{v}_r) d\sigma \leq 0.$$

2^{ème} cas : si $\lambda_r = 0$, dans ce cas $\hat{v}_r = \alpha_r \geq 0$ sur $\partial\Omega$ et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} j'_\varepsilon(\hat{v}_r) = \text{sign}^-(\alpha_r) = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

par suite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \nu} j'_\varepsilon(\hat{v}_r) d\sigma = 0$$

ainsi, dans les deux cas

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \hat{v}_r}{\partial \nu} j'_\varepsilon(\hat{v}_r) d\sigma \leq 0$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 \leq 0.$$

Traçons maintenant I_2 , nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[\hat{v}_r \geq 0]} \hat{f}_r(\hat{v}) j'_\varepsilon(\hat{v}_r) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[\hat{v}_r < 0]} \hat{f}_r(\hat{v}) j'_\varepsilon(\hat{v}_r) \\ &= - \int_{[\hat{v}_r < 0]} \hat{f}_r(\hat{v}) \\ &= - \int_{[\hat{v}_r < 0]} f_r(\dots, \hat{v}_{i-1}, 0, \hat{v}_{i+1}, \dots) \end{aligned}$$

utilisant (2.12), nous trouvons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2 \leq 0.$$

Ainsi, par passage à la limite dans (2.15), nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \hat{v}_r}{\partial t} \right) j'_\varepsilon(\hat{v}_r) dx ds \right) \leq 0$$

ce qui implique que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (j_\varepsilon(\hat{v}_r)) dx ds \leq 0$$

par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} j_\varepsilon(\hat{v}_r)(t) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} j_\varepsilon(\hat{v}_r)(0) dx$$

d'après (2.11), nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} j_\varepsilon(\hat{v}_r)(t) \leq 0$$

ainsi

$$\int_{\Omega} \hat{v}_i^-(t) dx \leq 0$$

d'où $\hat{v}_i^- = 0$ et donc $\hat{v}_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, m$.

Remarque 2.4

La preuve donnée ici marche aussi si nous avons considéré une notion de solution plus générale, à savoir les solutions dites faibles : $v \in C([0, T]; L^2(\Omega))^m \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))^m$, pour plus de détails, voir [6].

2.1.2 Existence globale pour les systèmes de réaction-diffusion triangulaire

Nous allons maintenant aborder le problème de l'existence globale de la solution $v = (v_r)_{1 \leq r \leq m}$ de (2.1). Pour cela, nous supposons qu'il existe une fonction $H \in C^2(\mathbb{R}_+^m, \mathbb{R})$ et $h_r \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ pour tout $r = 1, \dots, m$ telles que $H(z) = \sum_{r=1}^m h_r(z_r)$ pour tout $z_r \geq 0$ et

vérifiant

$$h_r(0) = 0, \forall 1 \leq r \leq m, \quad (2.16)$$

$$h_r(z_r), h_r''(z_r) \geq 0, \text{ pour tout } z_r \geq 0, r = 1, \dots, m, \quad (2.17)$$

$$H(z) \rightarrow +\infty, \text{ si et seulement si } |z| \rightarrow +\infty, \quad (2.18)$$

il existe $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ qui satisfait $a_{ij} \geq 0, a_{ii} > 0, \forall 1 \leq i, j \leq m$ tels que pour tout $j = 1, \dots, m$, il existe $K_1, K_2 \geq 0$ indépendamment de j tels que

$$\sum_{i=1}^j a_{ji} h_i'(z_i) f_i(z) \leq K_1 H(z) + K_2, \forall z \geq 0, \quad (2.19)$$

il existe $q_1, K_3, K_4 \geq 0$ tels que pour tout $i = 1, \dots, m$, on a

$$h_i'(z_i) f_i(z) \leq K_3 (H(z))^{q_1} + K_4, \text{ pour tout } z \geq 0, \quad (2.20)$$

il existe $K_5, K_6 \geq 0$ tels que

$$\langle \nabla H(z), f(z) \rangle \leq K_5 H(z) + K_6, \text{ pour tout } z \geq 0, \quad (2.21)$$

Pour les conditions au bord, nous supposons que

$$\begin{aligned} & * \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m, \lambda_i > 0, \\ & * \text{ si } \exists i_0 \text{ tel que } \lambda_{i_0} = 0, \text{ alors on a :} \\ & \quad \bullet \forall j \neq i_0, \lambda_j = 0, \\ & \quad \bullet \exists j \neq i_0, \lambda_j > 0, \text{ dans ce cas, } \alpha_{i_0} = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Remarque 2.5

- i) Les hypothèses (2.17) et (2.18) assurent respectivement la convexité et la coercivité de H de $[0, \infty)$ dans $[0, \infty)$.
- ii) L'hypothèse (2.19) implique que le système (2.1) admet une structure triangulaire.
- iii) L'hypothèse (2.20) est une condition de croissance polynômiale sur f . Le résultat est indépendant de l'ordre de q_1 .
- iv) Quant à (2.21), elle impose au système (2.1) d'être un système avec contrôle de masse. En particulier, si $H = I$, alors (2.21) implique $\sum_{r=1}^m f_r \leq K_5 \sum_{r=1}^m u_r + K_6$ c'est la conservation de la masse.

Nous allons énoncer maintenant le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.3 (Existence globale)

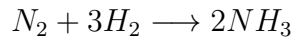
Sous les hypothèses (2.2)-(2.13), et (2.16)-(2.22), le système de réaction-diffusion (2.1) admet une unique solution globale classique et positive.

2.1.3 Applications

Nous allons utiliser ce théorème pour montrer que les systèmes de réaction-diffusion obtenus dans le 1^{er} chapitre (modélisation) admettent une solution globale.

Exemple 8

La réaction de l'amoniac



donne le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial [N_2]}{\partial t} - d_1 \Delta [N_2] = -\alpha [N_2] [H_2]^3 & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [H_2]}{\partial t} - d_1 \Delta [H_2] = -3\alpha [N_2] [H_2]^3 & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [NH_3]}{\partial t} - d_3 \Delta [NH_3] = 2\alpha [N_2] [H_2]^3 & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [N_2]}{\partial \nu} = \frac{\partial [H_2]}{\partial \nu} = \frac{\partial [NH_3]}{\partial \nu} = 0 & \text{pour } (x, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty) \\ [N_2](x, 0) = n_0, [H_2](x, 0) = h_0, [NH_3](x, 0) = 0 & \text{pour } x \in \Omega \end{array} \right.$$

où nous avons posé $\alpha = \frac{k_1 k_2}{k_{-1} + k_2}$.

Ce système admet une solution globale, puisque les hypothèses du Théorème 2.3 sont satisfaites avec

$$\begin{aligned} H(z_1, z_2, z_3) &= z_1 + z_2 + z_3, \quad f_1(z) = -\alpha z_1 z_2^3, \quad f_2(z) = -3\alpha z_1 z_2^3, \quad f_3(z) = 2\alpha z_1 z_2^3, \quad A = \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ K_1 &= K_2 = K_4 = K_5 = K_6 = 0, \quad K_3 = \alpha, \quad q_1 = 4. \end{aligned}$$

Exemple 9

La réaction enzymatique conduit, après modélisation, au système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial [E]}{\partial t} - d_1 \Delta [E] = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [S]}{\partial t} - d_2 \Delta [S] = \frac{-k}{K_M + [S]} [E]_0 [S] & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [P]}{\partial t} - d_3 \Delta [P] = \frac{k}{K_M + [S]} [E]_0 [S] & \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial [E]}{\partial \nu} = \frac{\partial [S]}{\partial \nu} = \frac{\partial [P]}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty) \\ [E](x, 0) = E_0, [S](x, 0) = S_0, [P](x, 0) = 0 & \text{pour } x \in \Omega, \end{array} \right.$$

si nous avons posé $k = k_2$.

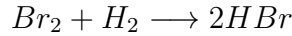
Les hypothèses du théorème 2.3 sont vérifiées avec

$$H(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 + z_3, \quad f_1(z) = 0, \quad f_3(z) = -f_2(z) = \frac{k z_2}{K_M + z_2}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = K_2 = K_4 = K_5 = K_6 = 0, K_3 = \alpha, q_1 = 0.$$

Exemple 10

La réaction du l'Hydrogène et du Brome



conduit au système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_1}{\partial t} - d_1 \Delta v_1 = \frac{-Lv_2 v_1^{\frac{3}{2}}}{v_1 + mv_3} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} - d_2 \Delta v_2 = \frac{-Lv_2 v_1^{\frac{3}{2}}}{v_1 + mv_3} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial v_3}{\partial t} - d_3 \Delta v_3 = \frac{2Lv_2 v_1^{\frac{3}{2}}}{v_1 + mv_3} \quad \text{dans } \Omega \times [0, \infty) \\ \frac{\partial v_1}{\partial \nu} = \frac{\partial v_2}{\partial \nu} = \frac{\partial v_3}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty) \\ v_{1,0}, v_{2,0}, v_{3,0} \geq 0 \end{array} \right.$$

où nous avons posé $v_1 = [Br_2]$, $v_2 = [H_2]$ et $v_3 = [HBr]$.

Les conditions du théorème 2.3 sont satisfaites avec

$$H(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 + z_3, f_1(z) = f_2(z) = \frac{-Lz_2 z_1^{\frac{3}{2}}}{z_1 + mz_3}, f_3(z) = \frac{2Lz_2 z_1^{\frac{3}{2}}}{z_1 + mz_3}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = K_5 = K_6 = 0, K_4 = \alpha, q_1 = 2.$$

2.1.4 Étapes de la démonstration du résultat principal

Une estimation fondamentale

Nous allons énoncer un résultat donnant une estimation fondamentale vérifiée par la solution de (2.1). Cette estimation serait importante pour la démonstration de l'existence globale.

Théorème 2.4 (Estimation fondamentale)

Supposons que (2.2)-(2.13), (2.16)-(2.18), (2.21) et (2.22) sont satisfaites, alors il existe $g \in C([0, \infty))$ telle que : $\left\| \int_0^t H(v(\cdot, s)) ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq g(t), \forall 0 < t < T_{\max}.$

Un lemme fondamental

Le lemme technique suivant serait lui-aussi d'une grande importance dans la démonstration du Théorème 2.3.

Lemme 2.1

Sous les conditions (2.2)-(2.13), (2.17), (2.19) et (2.21), et pour tout $j = 1, \dots, m$, il existe $\xi \geq 1$ tels que pour tout $\xi \leq p < \infty$, il existe $0 < \delta_p < 1$ et $K_{1p}, K_{2p} \in C([0, \infty))$ tels que

$\forall 0 \leq \tau < T < T_{\max}$, nous avons

$$\|h_j(v_j)\|_{L^p(Q(\tau,T))} \leq K_{1p}(T - \tau) + K_{2p}(T - \tau) \|H(v)\|_{L^p(Q(\tau,T))}^{\delta_p}. \quad (2.23)$$

Nous passons maintenant à la démonstration du théorème concernant l'existence globale de la solution de (2.1).

Démonstration du Théorème 2.3

Notre objectif est de montrer que sous les hypothèses du Théorème 2.3, et pour tout $j = 1, \dots, m$, la norme de $h_j(v_j)$ dans $L^\infty(\Omega)$ reste majorée par une fonction de t . Ainsi, et d'après la coercivité de H (hypothèse (2.18)), $\|v_j\|_{L^\infty(\Omega)}$ reste majorée par une fonction de t . La caractérisation (2.7) entraîne alors l'existence globale de la solution de (2.1).

En effet, (2.23) entraîne que pour tout $1 \leq p < \infty$, il existe $M_p, N_p > 0$ et $0 < \delta_p < 1$ tels que

$$\|H(v)\|_{L^p(Q(\tau,T))} \leq M_p + N_p(T - \tau) \|H(v)\|_{L^p(Q(\tau,T))}^{\delta_p}$$

et comme $H(v) \geq 0$ et $0 < \delta_p < 1$, nous avons

$$\|H(v)\|_{L^p(Q(\tau,T))} \leq C(T - \tau, p), \text{ pour tout } 1 \leq p < \infty$$

ainsi

$$\|K_3(H(z))^{q_1} + K_4\|_{L^p(Q(\tau,T))} \leq C(T - \tau, p), \text{ pour tout } 1 \leq p < \infty.$$

Nous considérons alors, pour tout $j = 1, \dots, m$, Z_j solution du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial Z_j}{\partial t} - d_j \Delta Z_j = K_3(H(z))^{q_1} + K_4 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ (1 - \lambda_j)Z_j + \lambda_j \frac{\partial Z_j}{\partial \nu} = \beta_j & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ Z_j(x, 0) = \|h_j(v_j(x, 0))\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.24)$$

où $T < T_{\max}$ et

$$\beta_j = \max(\|h_j(\alpha_j)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}, \|\alpha_j h'_j(N_j)\|_{L^\infty(\partial\Omega)}). \quad (2.25)$$

D'après le lemme linéaire (voir annexe), Z_j existe, $\forall j = 1, \dots, m$. De plus, nous avons

$$\|Z_j(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_j(t), \quad \forall t \in]0, T[\quad (2.26)$$

or l'hypothèse (2.17) entraîne que pour tout $j = 1, \dots, m$

$$\frac{\partial(h_j(v_j))}{\partial t} - d_j \Delta(h_j(v_j)) \leq h'_j(v_j) \cdot f_j(v)$$

d'après (2.20), nous aurons

$$\frac{\partial(h_j(v_j))}{\partial t} - d_j \Delta(h_j(v_j)) \leq K_3(H(v))^{q_1} + K_4$$

et comme Z_j vérifie (2.24), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t}(Z_j - h_j(v_j)) - d_j \Delta(Z_j - h_j(v_j)) \geq 0, \text{ dans } \Omega \times]0, T[.$$

D'autre part

$$(Z_j - h_j(v_j))(x, 0) \geq 0, \text{ pour tout } x \in \Omega$$

Il reste à comparer Z_j et $h_j(v_j)$ sur le bord de $\Omega \times]0, T[$, nous distinguons alors deux cas

1^{er} cas : $\lambda_j = 0$, dans ce cas, $Z_j = \beta_j$ et $v_j = \alpha_j$ sur $\partial\Omega$, nous avons, en utilisant (2.25)

$$Z_j - h_j(v_j) = \beta_j - h_j(\alpha_j) \geq 0,$$

2^{ème} cas : $\lambda_j > 0$, dans ce cas, et d'après (2.1), nous avons

$$\frac{\partial(h_j(v_j))}{\partial \nu} = h'_j(v_j) \left(\frac{\alpha_j}{\lambda_j} - \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} v_j \right) \text{ sur } \partial\Omega$$

utilisant (2.16) et (2.17), nous obtenons

$$\frac{\partial(h_j(v_j))}{\partial \nu} \leq h'_j(v_j) \frac{\alpha_j}{\lambda_j} - \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_j(v_j) \text{ sur } \partial\Omega$$

et d'après (2.4), (2.13), (2.8) et (2.17), nous avons

$$\lambda_j \frac{\partial(h_j(v_j))}{\partial \nu} + (1 - \lambda_j) h_j(v_j) \leq h'_j(N_j) \alpha_j \text{ sur } \partial\Omega$$

ainsi la relation (2.25) entraîne que

$$\lambda_j \frac{\partial}{\partial \nu}(Z_j - h_j(v_j)) + (1 - \lambda_j)(Z_j - h_j(v_j)) \geq \beta_j - \alpha_j h'_j(N_j) \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

et d'après le théorème 9

$$0 \leq h_j(v_j) \leq Z_j \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \text{ pour tout } j = 1, \dots, m$$

et utilisant (2.26), il vient que

$$\|h_j(v_j)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|Z_j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_j(t), \forall t \in]0, T[$$

finalement, (2.18) entraîne que

$$\|v_j(x, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq N_j(t), \forall j = 1, \dots, m, \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[$$

par conséquent, $T_{\max} = +\infty$.

Démonstration du théorème 2.4

Nous démontrons ici que, sous les conditions (2.2)-(2.13), (2.16)-(2.18), (2.21) et (2.22), il existe $g \in C([0, \infty))$ telle que

$$\left\| \int_0^t H(v(x, s)) ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq g(t), \quad \forall 0 < t < T_{\max}.$$

Pour cela, nous posons

$$Z(x, t) = \int_\tau^t \sum_{i=1}^m d_i h_i(v_i(x, s)) ds, \quad 0 \leq \tau < t < T_{\max}.$$

Nous avons d'une part

$$\frac{\partial}{\partial t} Z(x, t) = \sum_{i=1}^m d_i h_i(v_i(x, t))$$

D'autre part

$$\Delta h_i(v_i) = h_i''(v_i) |\nabla v_i|^2 + h_i'(v_i) \Delta v_i$$

d'où

$$\Delta Z = \int_\tau^t \sum_{i=1}^m d_i [h_i''(v_i) |\nabla v_i|^2 + h_i'(v_i) \Delta v_i] ds$$

utilisant maintenant l'hypothèse (2.17), nous obtenons

$$-\Delta Z \leq - \int_\tau^t \sum_{i=1}^m d_i h_i'(v_i) \Delta v_i$$

d'après (2.1), il vient que

$$\begin{aligned} -\Delta Z &\leq \int_\tau^t \nabla H(v) \left(f(v) - \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ &= \int_\tau^t \langle \nabla H(v), f(v) \rangle - \int_\tau^t \langle \nabla H(v), \frac{\partial v}{\partial t} \rangle \end{aligned}$$

utilisons l'hypothèse (2.21) nous obtenons

$$-\Delta Z \leq K_5 \int_\tau^t (H(v) + K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau))) - H(v(x, t))$$

d'où

$$H(v(x, t)) - \Delta Z \leq K_5 \int_\tau^t (H(v) + K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau))).$$

D'autre part, si l'on pose

$$d_M = \max_{1 \leq i \leq m} d_i, \quad d_m = \min_{1 \leq i \leq m} d_i$$

il vient que

$$\frac{1}{d_M} \sum_{i=1}^m d_i h_i(v_i) \leq H(v) \leq \frac{1}{d_m} \sum_{i=1}^m d_i h_i(v_i)$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_M} \frac{\partial Z}{\partial t} - \Delta Z &\leq K_5 \int_{\tau}^t \frac{1}{d_m} \frac{\partial}{\partial t} Z(x, s) ds + K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau)) \\ &\leq \frac{K_5}{d_m} Z(x, t) + K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau)) \end{aligned}$$

ainsi

$$-\frac{K_5}{d_m} Z(x, t) + \frac{1}{d_M} \frac{\partial}{\partial t} Z(x, t) - \Delta Z(x, t) \leq K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau))$$

Nous posons

$$w(x, t) = e^{\alpha t} Z(x, t) \quad \text{où } \alpha = -K_5 \frac{d_M}{d_m}$$

nous avons alors

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (\alpha Z + \frac{\partial Z}{\partial t}) e^{\alpha t}$$

ainsi w vérifie pour tout $(x, t) \in Q(\tau, t)$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - d_M \Delta w \leq d_M (K_6(t - \tau) + H(v(x, \tau))) e^{\alpha t} = \lambda(x, t)$$

de plus

$$w(x, t) = Z(x, \tau) e^{\alpha t} = 0$$

quant aux conditions sur le bord concernant w , nous avons à traiter trois cas :

1^{er} cas : si pour tout $i = 1, \dots, m$, $\lambda_i > 0$, dans ce cas

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \nu} &= \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h'_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \nu} \\ &= \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h'_i(v_i) \left(\frac{\alpha_i}{\lambda_i} - \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} v_i \right) \\ &= \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h'_i(v_i) \frac{\alpha_i}{\lambda_i} - \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} v_i h'_i(v_i) \end{aligned}$$

d'après (2.16), (2.17) et (2.8), il vient que

$$\frac{\partial Z}{\partial \nu} \leq \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i \frac{\alpha_i}{\lambda_i} h'_i(N_i) - \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} h_i(v_i)$$

2.1. EXISTENCE LOCALE ET UNICITÉ POUR DES SYSTÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION

et en considérant $\lambda^* = \min_{1 \leq i \leq m} \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i}$, nous obtenons

$$\lambda^* Z + \frac{\partial Z}{\partial \nu} \leq \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i \frac{\alpha_i}{\lambda_i} h'_i(N_i) = C_{(T-\tau)}, \text{ pour } x \in \partial\Omega, t \in]0, T_{\max}[$$

2^e cas : si $\forall i = 1, \dots, m, \lambda_i = 0$, dans ce cas $v_i = \alpha_i$ sur $\partial\Omega$ et donc

$$Z(x, t) = \int_{\tau}^t \sum_{i=1}^m d_i h_i(\alpha_i)$$

d'après (2.4), $\alpha_i \in C^2(\bar{\Omega})$ et donc

$$Z(x, t) \leq C(T - \tau), \text{ pour } x \in \partial\Omega, t \in]0, T_{\max}[$$

3^e cas : si $\exists I \subset \{1, \dots, m\}, I \neq \emptyset$ tel que $\forall i \in I, \lambda_i = 0$ et $\forall j \notin I, \lambda_j > 0$. Dans ce cas, et d'après (2.22), $\alpha_i = 0$ et donc $v_i = 0, \forall i \in I$.

Nous avons alors

$$\frac{\partial Z}{\partial \nu} = \int_{\tau}^t \sum_{i \in I} d_i h'_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial \nu} + \int_{\tau}^t \sum_{j \notin I} d_j h'_j(v_j) \left(\frac{\alpha_j}{\lambda_j} - \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} v_j \right) \quad (2.27)$$

utilisant (2.16) et le fait que $\frac{\partial v_i}{\partial \nu} < 0$, pour tout $i \in I$, nous obtenons

$$\frac{\partial Z}{\partial \nu} \leq \int_{\tau}^t \sum_{j \notin I} d_j \frac{\alpha_j}{\lambda_j} h'_j(v_j) - \int_{\tau}^t \sum_{j \notin I} d_j \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_j(v_j)$$

(2.27) entraîne que

$$\lambda^* Z + \frac{\partial Z}{\partial \nu} \leq \int_{\tau}^t \sum_{j \notin I} d_j \frac{\alpha_j}{\lambda_j} h'_j(N_j) + \lambda^* \int_{\tau}^t \sum_{i \in I} d_i h_i(v_i)$$

or, $\forall i \in I, h_i(v_i) = h_i(0) = 0$, ainsi

$$\lambda^* Z + \frac{\partial Z}{\partial \nu} \leq C(T - \tau).$$

Finalement, w vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - d_M \Delta w \leq \lambda(x, t) & \text{dans } \Omega \times]0, T_{\max}[\\ \lambda^* w + \frac{\partial w}{\partial \nu} \leq C(T - \tau) & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T_{\max}[\\ w(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

D'après le lemme linéaire (voir annexe), nous avons

$$\|w(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq N(t), \forall 0 < \tau < t < T_{\max}$$

d'où le résultat.

Démonstration du lemme 2.1

Notre objectif est de montrer que sous les conditions du lemme 2.1, (2.23) est satisfaite, $\forall j = 1, \dots, m$. Pour cela, nous considérons, pour tout $1 < p < \infty$ et $0 < \tau < t < T$, une fonction $\Theta \in L^p(\Omega \times [\tau, t])$ telle que $\|\Theta\|_{L^p(Q(\tau, t))} = 1$, $\Theta \geq 0$, et pour tout $j = 1, \dots, m$, Ψ_j solution de

$$\begin{cases} -\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - d_j \Delta \Psi_j(x, t) = \Theta(x, t) & \text{dans } \Omega \times [\tau, t] \\ (1 - \lambda_j) \Psi_j + \lambda_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial \Omega \times [\tau, t] \\ \Psi_j(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.28)$$

Notons que si $W_j(x, t) = \Psi_j(x, T - t)$, pour $(x, t) \in \Omega \times [0, T - \tau]$, alors W_j vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial W_j}{\partial t} - d_j \Delta W_j(x, t) = \Theta(x, T - t) & \text{dans } \Omega \times [0, T - \tau] \\ (1 - \lambda_j) W_j + \lambda_j \frac{\partial W_j}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial \Omega \times [0, T - \tau] \\ W_j(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

D'après le lemme linéaire (voir annexe), $\forall j = 1, \dots, m$, W_j existe donc Ψ_j aussi. De plus, $\Psi_j \geq 0$ (par application directe du théorème 9, W_j et donc Ψ_j sont positifs).

Pour $i = 1, \dots, m$, nous posons $u_i = h_i(v_i)$, $F_i = h'_i(v_i) f_i(v)$. Démontrons alors la relation (2.23) par récurrence sur i .

Pour $i = 1$, nous avons d'après (2.28)

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_1 \Theta = \int_0^T \int_{\Omega} u_1 \left(-\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - d_1 \Delta \Psi_1 \right) dx ds$$

utilisant la formule de Green, il vient que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u_1 \Theta &= \int_0^T \int_{\Omega} -u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + d_1 \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla \Psi_1 - d_1 \int_0^T \int_{\Omega} u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial \nu} \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} -u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - \int_0^T \int_{\Omega} d_1 \Delta u_1 \cdot \Psi_1 + d_1 \int_0^T \int_{\partial \Omega} (\Psi_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial \nu} u_1) \end{aligned}$$

d'après le lemme A.2 (voir annexe), nous avons

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_1 \Theta \leq - \int_0^T \int_{\Omega} u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 \cdot d_1 \Delta u_1 + C_{p,T}. \quad (2.29)$$

Utilisant (2.1) et (2.17), et après intégration par partie, nous avons

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 \cdot d_1 \Delta u_1 dx ds &\leq \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 (F_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t}) dx ds \\ &\leq \int_0^T \int_{\Omega} (\Psi_1 F_1 + u_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t}) dx ds + \int_{\Omega} \Psi_1(x, 0) u_{10}(x) dx \end{aligned}$$

ainsi, (2.29) devient

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_1 \Theta \leq \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 F_1 dx ds + \int_{\Omega} \Psi_1(x, 0) u_{10}(x) dx + C_{p,T}. \quad (2.30)$$

En multipliant (2.30) par a_{11} , et utilisant (2.3) et le lemmeA.2 (annexe)

$$\int_0^T \int_{\Omega} a_{11} u_1 \Theta dx ds \leq \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 a_{11} F_1 dx ds + C_{p,T} \quad (2.31)$$

d'après (2.19) nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} a_{11} u_1 \Theta dx ds &\leq a_{11} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 (K_1 H(v) + K_2) dx ds + C_{p,T} \\ &\leq a_{11} K_2 \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 dx ds + a_{11} K_1 \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 H(v) dx ds + C_{p,T} \\ &\leq a_{11} K_1 \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 H(v) dx ds + C_{p,T} \end{aligned}$$

utilisant l'injection de Sobolev, $\exists L_{p,T} > 0$ tel que

$$\|\Psi_1(x, \cdot)\|_{L^\infty(0,T)} \leq L_{p,T} \|\Psi_1(x, \cdot)\|_{L^p(0,T)}, \forall x \in \Omega,$$

le lemmeA.2 (annexe) entraîne alors

$$\left\| \|\Psi_1(x, \cdot)\|_{L^\infty(0,T)} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{p,T}$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité de Hölder et le lemmeA.2 (voir annexe), il vient que

$$\int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 H(v) \leq L_{p,T} C_{p,T} \|H(v)\|_{L^1(0,T,L^\infty(\Omega))}$$

et d'après le théorème2.4, nous avons

$$\int_0^T \int_{\Omega} \Psi_1 H(v) \leq L_{p,T} C_{p,T} g(T)$$

ainsi, nous obtenons

$$a_{11} \int_0^T \int_{\Omega} u_1 \Theta dx ds \leq C_{p,T}$$

d'où

$$\|u_1\|_{L^q(Q_T)} \leq C_1(T) + C_2 \|H(v)\|_{L^q(0,T,\Omega)}^{\delta_q} \text{ avec } 0 < \delta_q < 1.$$

Supposons alors que (2.23) est vrais jusqu'à $i - 1$, et montrons ce résultat pour i .

En effet, et comme nous avons fait dans le cas $i = 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} u_i \Theta &= \int_0^T \int_{\Omega} u_i \left(-\frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - d_j \Delta \Psi_j \right) \\ &\leq - \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - d_j \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j \Delta u_i + C_{p,T} \\ &\leq - \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - \frac{d_j}{d_i} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j d_i \Delta u_i + C_{p,T} \\ &\leq - \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} - \frac{d_j}{d_i} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j \left(F_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) + C_{p,T} \\ &\leq - \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \frac{d_j}{d_i} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \frac{d_j}{d_i} \Psi_j F_i + \frac{d_j}{d_i} \Psi_j(0) u_{i0} + C_{p,T} \Psi_j d_i \Delta u_i + C_{p,T} \\ &\leq \left(\frac{d_j}{d_i} - 1 \right) \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \frac{d_j}{d_i} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j F_i + C_{p,T} \end{aligned}$$

multiplions par $\frac{d_i}{d_j} a_{ji}$ et sommons de $i = 1, \dots, j$, nous avons, d'après (2.19)

$$\int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^j \frac{d_i}{d_j} a_{ji} u_i \Theta \leq \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} \left(1 - \frac{d_i}{d_j} \right) \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} + \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j (K_1 H(v) + K_2) + C_{p,T} \quad (2.32)$$

or, d'après l'hypothèse de récurrence, Hölder et le lemme A.2 (annexe)

$$\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} \left(1 - \frac{d_i}{d_j} \right) \int_0^T \int_{\Omega} u_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} \leq \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} \left| 1 - \frac{d_i}{d_j} \right| C_{p,T} (K_{1q}(T) + K_{2q}(T) \|H(v)\|_{L^q(Q(\tau,T))}^{\delta_q})$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

D'autre part, en appliquant toujours Hölder, il vient que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j H(v) dx ds &\leq \int_{\Omega} \|\Psi_j\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^T H(v) dx ds \\ &\leq \left\| \|\Psi_j\|_{L^\infty(0,T)} \right\|_{L^p(\Omega)} \left\| \int_0^T H(v) \right\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq L_{p,T} C_{p,T} \left\| \int_0^T H(v) \right\|_{L^q(\Omega)} \end{aligned}$$

le Théorème 2.4 entraîne alors

$$\int_0^T \int_{\Omega} \Psi_j H(v) dx ds \leq L_{p,T} C_{p,T} |\Omega|^{\frac{1}{q}} g(T)$$

et donc (2.32) devient

$$\int_0^T \int_{\Omega} \sum_{i=1}^j \frac{d_i}{d_j} a_{ji} u_i \Theta \leq C_{1q}(T) + C_{2q}(T) \|H(v)\|_{L^q(Q(\tau,T))}^{\delta_q}.$$

Comme $\Theta \in L^p(\Omega \times [\tau, t])$ et que : $\|\Theta\|_{L^p(Q(\tau,t))} = 1$ pour tout $1 < p < \infty$, (2.23) est vérifiée.

Chapitre 3

Existence de solution périodique faible pour le modèle des trempes

Ce chapitre expose l'analyse mathématique du modèle des trempes qui a été présentée dans la Section 1.2. Pour prouver l'existence d'une solution faible à ce dernier modèle, nous construisons une sur solution faible du problème considéré, puis en passant à l'utilisation de la technique des sous et sur solution pour montrer l'existence d'une solution faible. Nous rappelons que le modèle des trempes est modélisé par le problème parabolique suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \operatorname{div}(a(u)\nabla u) + G(t, x, u, \nabla u) = F(t, x, u) & \text{dans } Q_T \\ u(0, \cdot) = u(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \quad (3.1)$$

Où Ω est un ouvert borné régulier ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, avec bord régulier $\partial\Omega$, $T > 0$ est la période, $Q_T =]0, T[\times \Omega$, $\Sigma_T =]0, T[\times \partial\Omega$ et $a : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ est continue, G et F sont des fonctions carathéodory. Pour localiser notre problème, nous citons quelques travaux récents concernant les problèmes périodiques.

1) H. Amann [10] a considéré le problème (3.1) dans le cas où $F \in C^2(Q_T)$ indépendant de u , $a(u)$ est bornée ($|a(r)| \leq M < \infty$) et G est sous quadratique c'est à dire

$$|G(t, x, u, r)| \leq c(|u|)(1 + |r|^2).$$

Grâce au théorème de point fixe de Schauder, il a montré l'existence d'une solution classique périodique $u \in C^1(Q_T)$.

2) T. Cardinali et N. S. Papageorgiou [23] ont été considérés le problème quand $F \in L^2(Q_T)$ indépendant de u , la fonction $a(u)$ est bornée ($|a(r)| \leq M < \infty$) et G satisfait l'inégalité suivante

$$|G(t, x, u, \nabla u)| \leq \eta(t, x) + C(|u| + |\nabla u|)$$

avec $\eta \in L^2(Q_T)$ and $C > 0$.

Ils sont basés sur la méthode des sous- et sur-solution pour montrer l'existence d'une solution faible périodique $u \in C([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$, telle que $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$, où $\underline{u}, \bar{u} \in L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega))$ sont respectivement les sous- et sur-solutions du problème.

3.1 Résultat principal

Avant d'exposer nos résultats principaux, nous commençons par les hypothèses nécessaires que nous supposons tout au long de ce chapitre.

3.1.1 Hypothèses

Nous considérons que

$$\left\{ \begin{array}{l} a : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[\text{ une fonction carathéodory} \\ 0 < a_0 \leq a(s) \leq a_1 \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[\text{ une fonction carathéodory} \\ t \rightarrow F(t, x, u) \text{ une fonction périodique} \\ u \rightarrow F(., ., u) \text{ fonction croissante} \\ F(t, x, s) \leq \alpha(t, x) + \beta |s| \text{ où } \alpha \in L^2(Q_T) \text{ et } \beta \geq 0 \\ \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \sup \frac{F(t, x, s)}{s} = 0. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[\text{ une fonction carathéodory} \\ G(t, x, s, 0) = \min\{G(t, x, s, r), r \in \mathbb{R}^N\} = 0 \\ G(t, x, s, r) \leq c(|s|)(H(t, x) + \|r\|^2) \\ \text{où } c : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[\text{ est croissante et } H \in L^1(Q_T). \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Remarque 3.1

$G : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[$ est une fonction carathéodory, cela signifie :

- $(t, x) \mapsto G(t, x, s, r)$ est mesurable pour presque tous les (s, r) ,
- $(s, r) \mapsto G(t, x, s, r)$ est continu pour presque tous les (t, x) .

Nous devons préciser dans quel sens nous voulons résoudre le problème (3.1). Pour cela, nous introduisons la notion de solution faible, sous- et sur-solution faible.

Définition 3.1

Une fonction u est dite solution faible périodique du problème (3.1) si

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega)), \\ G(t, x, u, \nabla u), F(t, x, u) \in L^1(Q_T) \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(a(u)\nabla u) + G(t, x, u, \nabla u) = F(t, x, u) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T) \\ u(0, \cdot) = u(T, \cdot) \quad \text{dans } L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Définition 3.2

Nous appelons sur-solution faible périodique (resp. sous-solution) de (3.1) tout fonction u satisfaisant (3.5) avec " = " remplacée par " \geq " (resp. " \leq ").

Dans la section suivante nous montrons l'existence d'une sur-solution périodique faible de (3.1) afin de prouver l'existence de la solution faible.

3.1.2 Existence d'une sur-solution faible périodique

La positivité de la non-linéarité G implique que la solution w du problème suivant est une sur-solution du (3.2)

$$\begin{cases} \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} - \operatorname{div}(a(w)\nabla w) = F(t, x, w) & \text{dans } Q_T \\ w(0, \cdot) = w(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ w(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T \end{cases} \quad (3.6)$$

Avant de montrer l'existence de w nous définissons la notion de solution faible du problème (3.6).

Définition 3.3

Une fonction w est dite solution périodique faible du problème (3.6) si

$$w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), w(0) = w(T) \text{ dans } L^2(Q_T)$$

et pour tout $\phi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, on a

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, \phi \right\rangle + \int_{Q_T} a(w)\nabla w \nabla \phi = \int_{Q_T} F(t, x, w)\phi. \quad (3.7)$$

Où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit de la dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$.

Théorème 3.1

Supposons que (3.2) et (3.3) sont satisfaits. Alors (3.6) admet une solution faible périodique.

Pour prouver l'existence d'une sur-solution faible périodique, nous utilisons la théorie de degré topologique, tout d'abord considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial w(t, x)}{\partial t} - \operatorname{div}(a(v)\nabla w) + w = F(t, x, v) + v & \text{dans } Q_T \\ w(0, \cdot) = w(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ w(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \quad (3.8)$$

où $v \in L^2(Q_T)$.

Remarque 3.2

Une fonction w est appelée solution périodique faible de (3.8) si

$$w \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), w(0) = w(T) \text{ dans } L^2(Q_T)$$

et pour tout $\phi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, on a

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, \phi \right\rangle + \int_{Q_T} a(v)\nabla w \nabla \phi + \int_{Q_T} w\phi = \int_{Q_T} F(t, x, v)\phi + \int_{Q_T} v\phi. \quad (3.9)$$

Lemme 3.1

Si $v \in L^2_+(Q_T)$, alors (3.8) admet une unique solution faible périodique de plus la solution est positive.

Preuve

Concernant l'existence et l'unicité de w nous renvoyons le lecteur aux [47], Chapitre 2, p.236.

Pour montrer la positivité de w , nous définissons la fonction $sign^-$ par

$$sign^-(r) = \begin{cases} -1 & \text{si } r < 0 \\ 0 & \text{si } r \geq 0 \end{cases}$$

et nous introduisons la fonction convexe $j_\epsilon \in C^2(\mathbb{R})$, telle que j'_ϵ est bornée et pour tout $r \in \mathbb{R}$ on a

$$j'_\epsilon(r) \rightarrow sign^-(r) \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0.$$

On prend $\phi = j'_\epsilon(w)$ dans (3.9), on obtient

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, j'_\epsilon(w) \right\rangle + \int_{Q_T} a(v) \nabla w \nabla j'_\epsilon(w) + \int_{Q_T} w j'_\epsilon(w) = \int_{Q_T} F(t, x, v) j'_\epsilon(w) + \int_{Q_T} v j'_\epsilon(w).$$

$$\int_{\Omega} [j_\epsilon(w(T)) - j_\epsilon(w(0))] + a_0 \int_{Q_T} |\nabla w|^2 j''_\epsilon(w) + \int_{Q_T} w j'_\epsilon(w) \leq \int_{Q_T} F(t, x, v) j'_\epsilon(w) + \int_{Q_T} v j'_\epsilon(w).$$

le fait que w est périodique et j_ϵ est convexe, implique que

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} w j'_\epsilon(w) &\leq \int_{Q_T} F(t, x, v) j'_\epsilon(w) + \int_{Q_T} v j'_\epsilon(w) \\ &\leq \int_{[w < 0]} F(t, x, v) j'_\epsilon(w) + \int_{[w \geq 0]} F(t, x, v) j'_\epsilon(w) + \int_{[w < 0]} v j'_\epsilon(w) \\ &\quad + \int_{[w \geq 0]} v j'_\epsilon(w). \end{aligned}$$

Puisque $j'_\epsilon(w) = 0$ sur l'ensemble $w \geq 0$, on aura

$$\int_{Q_T} w j'_\epsilon(w) \leq \int_{[w < 0]} F(t, x, v) j'_\epsilon(w) + \int_{[w < 0]} v j'_\epsilon(w).$$

Tendant ϵ vers 0, on obtient

$$\int_{Q_T} w \cdot sign^-(w) \leq - \int_{[w < 0]} F(t, x, v) - \int_{[w < 0]} v.$$

Utilisons (3.3) et le fait que $v \in L_+^2(Q_T)$, on a

$$\int_{Q_T} (w)^- \leq 0.$$

Ce qui signifie que $w \geq 0$ dans Q_T .

Proposition 3.1

L'opérateur de solution \mathcal{S} définit par

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : L_+^2(Q_T) &\longrightarrow L_+^2(Q_T) \\ v &\longmapsto w, \end{aligned}$$

où w est l'unique solution de (3.8), est compact.

Preuve

Étape 1

Nous montrons que \mathcal{S} est continu, soit (v_n) une suite dans $L_+^2(Q_T)$, telle que v_n converge fortement vers v dans $L_+^2(Q_T)$, posons $w_n = \mathcal{S}(v_n)$ et on prend $\phi = w_n$ dans (3.9), on obtient

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial w_n}{\partial t}, w_n \right\rangle + \int_{Q_T} a(v_n) |\nabla w_n|^2 + \int_{Q_T} |w_n|^2 = \int_{Q_T} F(t, x, v_n) w_n + \int_{Q_T} v_n w_n,$$

d'après le Lemme 3.7 de l'Annexe, on a

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial w_n}{\partial t}, w_n \right\rangle = 0$$

grâce aux hypothèses (3.2), (3.3) et par application de l'inégalité de Hölder on trouve

$$a_0 \int_{Q_T} |\nabla w_n|^2 + \int_{Q_T} |w_n|^2 \leq \left(\|\alpha\|_{L^2(Q_T)} + (1 + \beta) \|v_n\|_{L^2(Q_T)} \right) \|w_n\|_{L^2(Q_T)}.$$

on peut appliqué l'inégalité de Young pour obtenir

$$\|w_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C \left(\|\alpha\|_{L^2(Q_T)} + (1 + \beta) \|v_n\|_{L^2(Q_T)} \right). \quad (3.10)$$

Puisque $v_n \rightarrow v$ fortement dans $L_+^2(Q_T)$, alors

$$\|w_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C, \quad (3.11)$$

avec C est une constante positive indépendante de n . Nous rappelons que w_n satisfait

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} = \operatorname{div}(a(v_n)\nabla w_n) - w_n + F(t, x, v_n) + v_n,$$

observons que $(\operatorname{div}(a(v_n)\nabla w_n) - w_n)$ est bornée dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et l'hypothèse (5.17)

affirme que la suite $(F(t, x, v_n) + v_n)$ est bornée dans $L^2(Q_T)$, ce qui implique

$$\left\| \frac{\partial w_n}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C. \quad (3.12)$$

Grâce aux estimations (3.11), (3.12) et par application de lemme de compacité d'Aubin, nous pouvons extraire de (w_n) une sous-suite notée par (w_n) telle que

$$\begin{aligned} w_n &\rightarrow w \text{ fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p dans } Q_T, \\ w_n &\rightharpoonup w \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ \frac{\partial w_n}{\partial t} &\rightharpoonup \frac{\partial w}{\partial t} \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ v_n &\rightarrow v \text{ fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p dans } Q_T, \\ F(t, x, v_n) &\rightarrow F(t, x, v) \text{ fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p dans } Q_T. \end{aligned}$$

Par passage à la limite dans (3.9), on obtient $w = \mathcal{S}(v)$, ce qui implique que \mathcal{S} est continu.

Étape 2

Pour montrer la compacité de \mathcal{S} , on prend (v_n) une suite bornée dans $L_+^2(Q_T)$ et soit $w_n = \mathcal{S}(v_n)$, par le même raisonnement, on a les estimations (3.11), (3.12), ensuite le lemme d'Aubin, implique que la suite (w_n) est relativement compacte dans $L^2(Q_T)$, cela termine la preuve.

Maintenant, nous introduisons l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : [0, 1] \times L_+^2(Q_T) &\rightarrow L_+^2(Q_T) \\ (\lambda, v) &\mapsto \mathcal{S}(\lambda v), \end{aligned}$$

il est clair que \mathcal{H} est compact. Il reste à montrer l'existence de $R_0 > 0$ pour lequel le degré topologique est bien définie.

Lemme 3.2

Supposons que $w = \mathcal{H}(\lambda, w)$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$. Alors il existe $R_0 > 0$, telle que

$$\| w \|_{L^2(Q_T)} < R_0.$$

Preuve

Supposons que $w_n = \mathcal{H}(\lambda_n, w_n)$ et $\| w_n \|_{L^2(Q_T)} \geq n$.

Posons

$$u_n = \frac{w_n}{\| w_n \|_{L^2(Q_T)}},$$

on prend $\phi = w_n$ dans (3.9), on obtient

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial w_n}{\partial t}, w_n \right\rangle + \int_{Q_T} a(\lambda_n w_n) |\nabla w_n|^2 = \int_{Q_T} F(t, x, \lambda_n w_n) w_n.$$

D'après le Lemme 3.7 de l'Annexe, on a

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial w_n}{\partial t}, w_n \right\rangle = 0$$

l'hypothèse (3.2) implique que

$$a_0 \int_{Q_T} |\nabla w_n|^2 \leq \int_{Q_T} |F(t, x, \lambda_n w_n) w_n|.$$

Alors

$$a_0 \int_{Q_T} |\nabla u_n|^2 \leq \int_{Q_T} \left| \frac{F(t, x, \lambda_n w_n)}{\|w_n\|_{L^2(Q_T)}} u_n \right|. \quad (3.13)$$

Utilisons l'inégalité de Hölder et (3.3) on obtient

$$\|u_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C.$$

de plus,

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \operatorname{div}(a(\lambda_n w_n) \nabla u_n) + \frac{F(t, x, \lambda w_n)}{\|w_n\|_{L^2(Q_T)}},$$

D'après (3.2), (3.3) le dernier terme est borné dans $L^2(Q_T)$, ce qui implique que

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq C.$$

Et par suite, on peut extraire de la suite (u_n) une sous-suite notée encore (u_n) , telle que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p dans } Q_T, \\ |u_n| &\leq \eta, \quad \text{avec } \eta \in L^2(Q_T). \end{aligned}$$

par conséquent, $\|u\|_{L^2(Q_T)} = 1$, ce qui implique que $u \neq 0$. Pour avoir une contradiction, il suffit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} \left| \frac{F(t, x, \lambda_n w_n)}{\|w_n\|_{L^2(Q_T)}} u_n \right| = 0.$$

Pour cela, nous pouvons appliquer le théorème de la convergence dominée, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(t, x, \lambda_n w_n)}{\|w_n\|_{L^2(Q_T)}} u_n \right| &\leq \left[\alpha(t, x) + \lambda_n \beta \frac{|w_n|}{\|w_n\|_{L^2(Q_T)}} \right] |u_n| \\ &\leq \left[\alpha(t, x) + \beta |u_n| \right] \eta \\ &\leq \left[\alpha(t, x) + \beta \eta \right] \eta \in L^1(Q_T). \end{aligned}$$

il reste à montrer que

$$\frac{F(t, x, \lambda_n w_n)}{\|w_n\|_{L^2(Q_T)}} u_n \rightarrow 0 \text{ p.p dans } Q_T,$$

Soit $(t, x) \in Q_T$, tel que $u_n(t, x)$ converge vers $u(t, x)$, nous avons trois cas à discuter

Cas 1 : $u(t, x) > 0$.

$w_n(t, x) = u_n(t, x) \parallel w_n \parallel_{L^2(Q_T)}$, alors $w_n(t, x)$ converge vers $+\infty$.

$$\begin{aligned} \frac{F(t, x, \lambda_n w_n)}{\parallel w_n \parallel_{L^2(Q_T)}} u_n &= \frac{F(t, x, \lambda_n w_n)}{\lambda_n w_n(t, x)} \frac{\lambda_n w_n(t, x)}{\parallel w_n \parallel_{L^2(Q_T)}} u_n(t, x) \\ &= \frac{F(t, x, \lambda_n w_n)}{\lambda_n w_n(t, x)} (u_n(t, x))^2, \end{aligned}$$

utilisons (3.3) et le fait que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F(t, x, s)}{s} = 0,$$

on obtient

$$\frac{F(t, x, \lambda_n w_n)}{\parallel w_n \parallel_{L^2(Q_T)}} u_n \rightarrow 0.$$

Cas 2 : $u(t, x) < 0$.

Ce cas est similaire au premier, on a $w_n(t, x) = u_n(t, x) \parallel w_n \parallel_{L^2(Q_T)}$, alors $w_n(t, x)$ converge vers $-\infty$, et d'après

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{F(t, x, s)}{s} = 0,$$

on obtient,

$$\frac{F(t, x, \lambda_n w_n)}{\parallel w_n \parallel_{L^2(Q_T)}} u_n \rightarrow 0.$$

Cas 3 : $u(t, x) = 0$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(t, x, \lambda_n w_n)}{\parallel w_n \parallel_{L^2(Q_T)}} u_n \right| &\leq \left[\alpha(t, x) + \lambda_n \beta \frac{|w_n(t, x)|}{\parallel w_n \parallel_{L^2(Q_T)}} \right] |u_n(t, x)| \\ &\leq \left[\alpha(t, x) + \beta |u_n(t, x)| \right] |u_n(t, x)| \end{aligned}$$

Passons à la limite et utilisons le fait que $u(t, x) = 0$, on a

$$\frac{F(t, x, \lambda_n w_n)}{\parallel w_n \parallel_{L^2(Q_T)}} u_n \rightarrow 0.$$

d'après (3.13)

$$a_0 \int_{Q_T} |\nabla u_n|^2 \leq \int_{Q_T} \left| \frac{F(t, x, \lambda_n w_n)}{\parallel w_n \parallel_{L^2(Q_T)}} u_n \right|,$$

ce qui implique

$$a_0 \parallel u_n \parallel_{L^2(Q_T)}^2 \leq C_\Omega \int_{Q_T} \left| \frac{F(t, x, \lambda_n w_n)}{\parallel w_n \parallel_{L^2(Q_T)}} u_n \right|,$$

où C_Ω est la constante de Poincaré, si on passe à la limite, on obtient $a_0 \leq 0$, ce qui est impossible, ceci termine la preuve.

Preuve du Théorème 3.1

D'après le Lemme 3.2 la degré topologique est bien définie, alors

$$\deg(\text{Id} - \mathcal{H}(1, \cdot), B(0, R_0), 0) = \deg(\text{Id} - \mathcal{H}(0, \cdot), B(0, R_0), 0).$$

Pour montrer que (3.6) admet une solution faible périodique, il suffit de prouver que

$$\deg(\text{Id} - \mathcal{H}(0, \cdot), B(0, R_0), 0) = 1,$$

cela peut être assuré si

$$\|\psi\|_{L^2(Q_T)} \leq R_0,$$

où $\psi = \mathcal{H}(0, \psi)$. on prend ψ comme fonction de test dans (3.9), on obtient

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}, \psi \right\rangle + \int_{Q_T} a(0) |\nabla \psi|^2 = \int_{Q_T} F(t, x, 0) \psi.$$

d'après (3.2), (3.3) et la périodicité, il vient que

$$\begin{aligned} a_0 \int_{Q_T} |\nabla \psi|^2 &\leq \int_{Q_T} |\alpha(t, x) \psi|. \\ &\leq \|\alpha\|_{L^2(Q_T)} \|\psi\|_{L^2(Q_T)}. \end{aligned}$$

L'inégalité de Young nous donne,

$$\|\psi\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C(a_0) \|\alpha\|_{L^2(Q_T)},$$

alors, on aura l'estimation suivante

$$\|\psi\|_{L^2(Q_T)} \leq C_\Omega C(a_0) \|\alpha\|_{L^2(Q_T)} := R_1,$$

où C_Ω est la constante de Poincaré et $C(a_0)$ est une constante positive qui dépend seulement de a_0 .

Enfin, en choisissant $\tilde{R} = \max(R_0, R_1)$, on a

$$\deg(\text{Id} - \mathcal{H}(1, \cdot), B(0, \tilde{R}), 0) = \deg(\text{Id} - \mathcal{H}(0, \cdot), B(0, \tilde{R}), 0) = 1.$$

3.1.3 Existence d'une solution périodique faible

Théorème 3.2

Supposons que (3.2), (3.3) et (3.4) sont satisfaits. Alors le problème (3.1) admet une solution faible périodique telle que $0 \leq u \leq w$ dans Q_T , où w est la solution du problème (3.6).

La preuve de ce théorème est divisée en plusieurs étapes.

Étape 1. Problème approché

Pour $n \geq 1$, nous approchons G comme suit :

$$G_n(t, x, s, r) = \frac{G(t, x, s, r)}{1 + \frac{1}{n} |G(t, x, s, r)|},$$

il est facile de vérifier que G_n satisfait

$$0 \leq G_n \leq G_{n+1} \leq G, \quad \text{and} \quad |G_n| \leq n.$$

Nous considérons la suite définie par $u_0 = w$ et pour $n \geq 1$, u_n est la solution du problème

$$(P_n) \begin{cases} u_n \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega)) \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} - \operatorname{div}(a(u_n)\nabla u_n) + G_n(t, x, u_n, \nabla u_n) = F(t, x, u_{n-1}) & \text{dans } D'(Q_T) \\ u_n(0) = u_n(T) & \text{dans } L^2(\Omega), \end{cases} \quad (3.14)$$

Un argument d'induction peut être appliqué pour prouver que (3.14) a une solution telle que

$$0 \leq u_n \leq u_{n-1} \leq w.$$

Pour $n = 1$, $u_0 = w$ alors $0 \leq u_0 \leq w$ et $F(t, x, u_0) = F(t, x, w)$, puisque w est une solution faible de (3.6), alors le résultat classique de [23] peut être appliqué pour prouver l'existence de u_1 solution de (P_1) (3.14) telle que $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq w$.

Supposons maintenant que le résultat est vrai jusqu'au n nous allons prouver que le résultat est vrai pour $n + 1$, alors on suppose que $0 \leq u_n \leq u_{n-1} \leq w$ et

$$(P_n) \begin{cases} u_n \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega)) \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} - \operatorname{div}(a(u_n)\nabla u_n) + G_n(t, x, u_n, \nabla u_n) = F(t, x, u_{n-1}) & \text{dans } D'(Q_T) \\ u_n(0) = u_n(T) & \text{dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

Puisque G_n et F sont des fonctions croissantes, on a

$$\begin{cases} u_n \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega)) \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} - \operatorname{div}(a(u_n)\nabla u_n) + G_{n+1}(t, x, u_n, \nabla u_n) \geq F(t, x, u_n) & \text{dans } D'(Q_T) \\ u_n(0) = u_n(T) & \text{dans } L^2(\Omega) \end{cases}$$

alors u_n est une sur-solution de (P_{n+1}) , d'après le résultat de [23] le problème (P_{n+1}) admet une solution u_{n+1} telle que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Ensuite, nous avons prouvé par induction que pour tout $n \geq 1$, le problème (3.14) a une solution telle que

$$0 \leq u_n \leq u_{n-1} \leq w.$$

De plus, il existe une fonction mesurable $u : Q_T \rightarrow [0, +\infty[$ telle que $u_n \rightarrow u$ p.p. dans Q_T et $0 \leq u \leq u_n \leq w$, grâce au théorème de convergence dominé, nous obtenons

$$u_n \rightarrow u \text{ fortement dans } L^2(Q_T), \quad (3.15)$$

$$F(t, x, u_{n-1}) \rightarrow F(t, x, u) \text{ fortement dans } L^2(Q_T). \quad (3.16)$$

Étape 2. Estimations a priori

Nous proposons de passer à la limite en (3.14), ceci peut être assuré en prouvant les lemmes suivants.

Lemme 3.3

Si u_n est une solution de (3.14), alors il existe une constante C_1 qui dépend de $\beta, T, |\Omega|, \|\alpha\|, \|w\|$ telle que

$$\int_{Q_T} |G_n(t, x, u_n, \nabla u_n)| \, dxdt \leq C_1.$$

Preuve

Intégrant l'équation satisfaite par u_n sur Q_T , on a

$$\int_{Q_T} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \int_{Q_T} \operatorname{div}(a(u_n) \nabla u_n) + \int_{Q_T} G_n(t, x, u_n, \nabla u_n) = \int_{Q_T} F(t, x, u_{n-1})$$

Puisque $u_n(0, \cdot) = u_n(T, \cdot)$ et d'après l'hypothèse (3.3), on obtient

$$\int_{Q_T} |G_n(t, x, u_n, \nabla u_n)| \, dxdt \leq \int_{Q_T} (\alpha(t, x) + \beta |w|) \, dxdt,$$

L'inégalité de Hölder nous donne,

$$\int_{Q_T} |G_n(t, x, u_n, \nabla u_n)| \, dxdt \leq (T |\Omega|)^{\frac{1}{2}} (\|\alpha\|_{L^2(Q_T)} + \beta \|w\|_{L^2(Q_T)}).$$

Lemme 3.4

Soit u_n solution de (3.14), alors il existe une constante C_2 qui dépend de $a_0, \beta, T, |\Omega|, \|\alpha\|, \|w\|$ telle que

$$\|u_n\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C_2.$$

Preuve

Multiplions le problème (P_n) par u_n et intégrons sur Q_T , on obtient

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u_n \right\rangle + \int_{Q_T} a(u_n) |\nabla u_n|^2 + \int_{Q_T} G_n(t, x, u_n, \nabla u_n) u_n = \int_{Q_T} F(t, x, u_{n-1}) u_n.$$

Par le Lemme 5.1 de l'Annexe on conclut que

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u_n \right\rangle = 0,$$

en utilisant (3.2), (3.3) et (3.4), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} a(u_n) |\nabla u_n|^2 &\leq \int_{Q_T} F(t, x, w) w \\ a_0 \int_{Q_T} |\nabla u_n|^2 &\leq \int_{Q_T} (\alpha(t, x) + \beta |w|) |w| \end{aligned}$$

par application de l'inégalité de Hôlder, on a

$$\int_{Q_T} |\nabla u_n|^2 \leq C(\|\alpha\|_{L^2(Q_T)} + \beta \|w\|_{L^2(Q_T)}) \|w\|_{L^2(Q_T)}$$

Lemme 3.5

Soit u_n une solution de (P_n) , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} a(u_n) \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) \leq 0.$$

Preuve

On sait que $0 \leq u \leq u_n \leq w$, choisissons $(u_n - u)$ une fonction de test, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u_n - u \right\rangle + \int_{Q_T} a(u_n) \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) + \int_{Q_T} G_n(t, x, u_n, \nabla u_n) (u_n - u) \\ = \int_{Q_T} F(t, x, u_{n-1}) (u_n - u). \end{aligned}$$

Remarquons que,

$$\int_{Q_T} G_n(t, x, u_n, \nabla u_n) (u_n - u) \geq 0,$$

et l'hypothèse (3.3) nous donne

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u_n - u \right\rangle + \int_{Q_T} a(u_n) \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) &\leq \int_{Q_T} (\alpha(t, x) + \beta |w|) (u_n - u) \\ &\leq (\|\alpha\|_{L^2(Q_T)} + \beta \|w\|_{L^2(Q_T)}) \|u_n - u\|_{L^2(Q_T)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

De plus,

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u_n - u \right\rangle = \int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u_n \right\rangle - \int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u \right\rangle,$$

par le Lemme 5.1 de l'Annexe, on a

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u_n \right\rangle = 0,$$

alors

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u_n - u \right\rangle = - \int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u \right\rangle.$$

Pour traiter la dernière intégrale, nous définissons la régularisation de Lebesgue-Steklov u^h de u , pour $h > 0$ par

$$u^h(t, x) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s, x) ds.$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u \right\rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \int_0^{T-h} u^h \frac{\partial u_n^h}{\partial t}.$$

On sait que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, ce qui implique que $u_n^h \rightharpoonup u^h$ faiblement dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u \right\rangle &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_0^{T-h} u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} (u^h)^2(T-h) - (u^h)^2(0) = 0. \end{aligned}$$

Puisque $u_n \rightarrow u$ fortement dans $L^2(Q_T)$ et selon (3.17) on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} a(u_n) \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) \leq 0.$$

D'où le lemme est prouvé.

Lemme 3.6

Soit u_n solution du problème (P_n) telle que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ fortement de } L^2(Q_T) \text{ et p.p dans } Q_T, \\ u_n &\rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \end{aligned}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} a(u_n) \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) \leq 0.$$

Alors

$$u_n \rightarrow u \text{ fortement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Preuve

Le fait que u_n converge vers u fortement dans $L^2(Q_T)$ et p.p dans Q_T et par application du théorème de la convergence dominée, on obtient

$$a(u_n) \nabla u \rightarrow a(u) \nabla u \text{ fortement dans } L^2(Q_T).$$

Puisque

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

on aura

$$\int_{Q_T} a(u_n) \nabla u (\nabla u_n - \nabla u) \rightarrow 0.$$

Remarquons que,

$$\int_{Q_T} a(u_n) |\nabla u_n - \nabla u|^2 = \int_{Q_T} a(u_n) \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) - \int_{Q_T} a(u_n) \nabla u (\nabla u_n - \nabla u)$$

ce qui implique que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} a(u_n) |\nabla u_n - \nabla u|^2 \leq 0$$

d'autre part, on a

$$0 \leq a_0 \int_{Q_T} |\nabla u_n - \nabla u|^2 \leq \int_{Q_T} a(u_n) |\nabla u_n - \nabla u|^2.$$

En passant à la limite dans la dernière inégalité, nous concluons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} |\nabla u_n - \nabla u|^2 = 0.$$

Étape 3. Passage à la limite

Le but de cette section est de prouver que la limite u de la suite u_n est une solution périodique faible de (3.1) au sens de la définition 3.1. D'après (3.16) et le lemme 3.4 on conclut l'existence d'une sous-suite, toujours notée u_n pour la simplicité, telle que

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u \text{ fortement dans } L^2(Q_T) \text{ and p.p. in } Q_T \\ u_n &\rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \end{aligned}$$

et grâce aux résultats de 3.5 et 3.6 on a

$$u_n \rightarrow u \text{ fortement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

il rest à montrer que

$$G_n(t, x, u_n, \nabla u_n) \rightarrow G(t, x, u, \nabla u) \text{ dans } L^1(Q_T). \quad (3.18)$$

En utilisant le lemme 3.3 et la convergence forte de u_n dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ on a

$$G_n(t, x, u_n, \nabla u_n) \rightarrow G(t, x, u, \nabla u) \text{ p.p dans } Q_T.$$

Pour montrer (3.18) il suffit de prouver que $G_n(t, x, u_n, \nabla u_n)$ est équi-intégrable dans $L^1(Q_T)$ c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall K \subset Q_T, \text{ if } |K| < \delta \text{ alors } \int_K G_n(t, x, u_n, \nabla u_n) dx dt \leq \varepsilon.$$

Soit K un sous ensemble mesurable de Q_T , $\varepsilon > 0$, et $h > 0$. On a

$$\int_K G_n(t, x, u_n, \nabla u_n) dx dt = I_1 + I_2.$$

Où

$$I_1 = \int_{K \cap [u_n > h]} G_n(t, x, u_n, \nabla u_n) dx dt,$$

et

$$I_2 = \int_{K \cap [u_n \leq h]} G_n(t, x, u_n, \nabla u_n) dx dt.$$

La première intégrale I_1 vérifie l'inégalité suivante

$$I_1 \leq \frac{1}{h} \int_K u_n G_n(t, x, u_n, \nabla u_n) dx dt,$$

en utilisant l'équation satisfaite par u_n dans (3.14), l'hypothèse (3.2) et (3.3), on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{1}{h} \int_{Q_T} (a(u_n) |\nabla u_n|^2 + F(t, x, u_{n-1}) u_n) dx dt \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{Q_T} (a_1 |\nabla u_n|^2 + F(t, x, w) w) dx dt. \end{aligned}$$

d'après le résultat du lemme 3.4, il existe une constante $C'_2 > 0$, telle que

$$I_1 \leq \frac{C'_1}{h}.$$

Alors il existe $h^* > 0$, telle que, pour tout $h \geq h^*$, on a

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour I_2 on utilise l'hypothèse (3.4), on obtient pour tout $h \geq h^*$

$$I_2 \leq c(h) \int_{K \cap [u_n \leq h]} (H(t, x) + |\nabla u_n|^2) dx dt$$

Puisque $H \in L^1(Q_T)$ alors H est équi-intégrable dans $L^1(Q_T)$, d'où il existe $\delta_1 > 0$, telle que, si $|K| \leq \delta_1$, alors

$$c(h) \int_{K \cap [u_n \leq h]} H(t, x) dx dt \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a aussi d'après le lemme 3.6 la suite $(|\nabla u_n|^2)_n$ est équi-intégrable dans $L^1(Q_T)$, ceci

implique l'existence de $\delta_2 > 0$, telle que, si $|K| \leq \delta_2$, on a

$$c(h) \int_{K \cap [u_n \leq h]} |\nabla u_n|^2 dx dt \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Finalement, on choisit $\delta^* = \inf(\delta_1, \delta_2)$, si $|K| \leq \delta^*$, on obtient

$$\int_K G_n(t, x, u_n, \nabla u_n) dx dt \leq \epsilon,$$

ce qui termine la preuve du théorème 3.2.

3.2 Annexe

Lemme 3.7

Soit $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne continue et croissante avec $\psi(0) = 0$, posons

$$\mathbb{V} = \left\{ v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \right\}.$$

Alors pour tout $v \in \mathbb{V}$, telle que $v(0, \cdot) = v(T, \cdot)$ p.p dans Ω , on a $\int_0^T \langle \frac{\partial v}{\partial t}, \psi(v) \rangle = 0$.

Preuve

Soit $v \in \mathbb{V}$ telle que $v(0, \cdot) = v(T, \cdot)$ p.p dans Ω , on définit la régularisation de Lebesgue-Steklov v^h de v pour tout $h > 0$, par

$$v^h(t, x) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(s, x) ds.$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes (pour plus de détails, voir [44])

$$v^h \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial v^h}{\partial t} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

et $v^h \rightarrow v$ fortement dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ lorsque h tend vers 0.

On a

$$\int_0^T \langle \frac{\partial v}{\partial t}, \psi(v) \rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{T-h} \int_{\Omega} \psi(v^h) \frac{\partial v^h}{\partial t},$$

soit $\Psi(v) = \int_0^v \psi(s)ds$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{T-h} \int_{\Omega} \psi(v^h) \frac{\partial v^h}{\partial t} &= \int_0^{T-h} \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi(v^h)}{\partial t} \\ &= \int_{\Omega} \Psi(v^h(T-h)) - \Psi(v^h(0)). \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{V} \hookrightarrow C([0, T]; L^2(\Omega))$ et $v(0, \cdot) = v(T, \cdot)$ p.p dans Ω , on a

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial v}{\partial t}, \psi(v) \right\rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} \Psi(v^h(T-h)) - \Psi(v^h(0)) = 0.$$

Résultats d'existence des solutions périodiques faibles pour certaines équations paraboliques quasi-linéaire avec donnée L^1

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence d'une solution périodique faible pour une équation parabolique quasi-linéaire avec croissance arbitraire en gradient et condition aux limites de type Dirichlet. L'existence sera prouvé par la technique des sous- et sur-solutions combinée avec la méthode des troncature.

4.1 Introduction

Dans le même temps, le comportement asymptotique des solutions des problèmes périodiques a suscité un vif intérêt de la part des scientifiques et plusieurs articles ont été publiés. Cependant, la plupart des travaux se sont concentrés sur différentes notions de solutions (classique, faible, renormalisé, entropique) des problèmes quasi-linéaires et de nombreux résultats ont été rapportés ([2, 10, 12, 13, 23, 29, 48]) et dans les références qu'ils contiennent. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'existence d'une solution périodique faible pour le problème quasi-linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u + G(t, x, \nabla u) = f & \text{dans } Q_T \\ u(0, \cdot) = u(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \quad (4.1)$$

où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, de frontière assez régulière $\partial\Omega$, $T > 0$ est la période, $Q_T =]0, T[\times \Omega$, $\Sigma_T =]0, T[\times \partial\Omega$, $-\Delta$ désigne l'opérateur de Laplace sur $L^1(\Omega)$ avec des conditions aux limites de Dirichlet, G est une fonction Carathéodory et f est une fonction mesurable positive appartenant à $L^1(Q_T)$. Dans [10], Amann a résolu le problème (4.1) lorsque f est assez régulier et que G a une croissance sous-quadratique par rapport au gradient, c'est à dire

$$|G(t, x, u, \nabla u)| \leq c(|u|)(|\nabla u|^2 + 1).$$

Il a utilisé la technique des sous- et super-solutions et le théorème de point fixe dans les espaces de Banach appropriés.

Le travail [29] de Hess et Deuel était préoccupé par le problème (4.1) avec f appartenant à $L^2(Q_T)$ et la linéarité de G a une croissance sous-linéaire par rapport au gradient, à savoir

$$|G(t, x, u, \nabla u)| \leq k(t, x) + c |\nabla u|.$$

En utilisant la méthode de la sous- et sur-solution, ils ont obtenu l'existence d'une solution périodique faible dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega))$.

Alaa et Iguernane [2] ont présenté le résultat d'existence d'une solution périodique faible de (4.1) dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega))$ lorsque les non-linéarités sont négatives, ils ont obtenu l'existence par la technique de troncature associée à la méthode des sous- et sur-solutions.

Nous présentons le résultat principal de ce chapitre de la manière suivante. Dans la section 4.2, nous commençons par les hypothèses nécessaires et nous définissons la notion de solution périodique faible de (4.1) afin d'énoncer le théorème principal de notre travail. La section 4.3 est consacrée à la démonstration du théorème principal présenté dans la section 4.2. Enfin, dans la section 4.4, nous généralisons le résultat de la section 4.2 à une classe des problème périodique quasi-linéaire avec donnée non régulière.

4.2 Résultat principal

Dans cette section, nous établissons notre résultat principal, tout d'abord, nous introduisons les hypothèses nécessaires que nous supposons tout au long de cette section.

4.2.1 Hypothèses

Nous supposons que

$$f \in L^1(Q_T), f \geq 0, \quad (4.2)$$

$$G(t, x, r) \in L^1(Q_T) \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}^N \text{ et p.p. } (t, x) \in \mathbb{R}^N, \quad (4.3)$$

$$G : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[\text{ est une fonction, } \quad (4.4)$$

$$G(t, x, 0) = \min\{G(t, x, r), r \in \mathbb{R}^N\} = 0, \quad (4.5)$$

$$G(t, x, s, r) \leq K(t, x) + d \|r\|^p, \quad (4.6)$$

pour tout $p \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$, $r \in \mathbb{R}^N$ et p.p. $(t, x) \in Q_T$, avec $K \in L^1(Q_T)$ et $d > 0$. Nous devons préciser dans quel sens nous voulons résoudre le problème (4.1), pour lequel nous introduisons la notion de la solution périodique faible.

Définition 4.1

Une fonction u est dite solution périodique faible du problème (4.1), si elle satisfait

$$\begin{cases} u \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)), \\ G(t, x, \nabla u) \in L^1(Q_T) \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + G(t, x, \nabla u) = f & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T) \\ u(0, \cdot) = u(T, \cdot) & \text{dans } L^1(\Omega) \end{cases} \quad (4.7)$$

Définition 4.2

Nous appelons sur-solution périodique faible (resp. sous-solution) de (4.1) une fonction u satisfaisante (4.7) avec " = " remplacée par " \geq " (resp. " \leq ").

Maintenant, nous énonçons le résultat principal de cette section.

Théorème 4.1

Supposons (4.2)-(4.6) et qu'elle existe w une sur-solution faible de (4.1). Alors le problème (4.1) admet une solution périodique faible satisfaisante $0 \leq u \leq w$ dans Q_T .

4.3 Preuve du résultat principal

La preuve est du Théorème 4.1 est divisée en plusieurs étapes. Au début, on pose $X_T = L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, avec $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$.

Étape 1. Problème approximatif

pour tout $n \geq 1$, nous approximons G comme suit

$$G_n(t, x, r) = \frac{G(t, x, r)}{1 + \frac{1}{n} |G(t, x, r)|} 1_{[w \leq n]},$$

Nous remarquons que G_n satisfait les propriétés suivantes

$$0 \leq G_n \leq G, \quad \text{and} \quad |G_n| \leq n.$$

pour f nous construisons une suite $h_n \in C_0^2(Q_T)$

$$h_n \geq 0, \quad \|h_n\|_{L^1(Q_T)} \leq \|f\|_{L^1(Q_T)},$$

et h_n converge vers f dans $L^1(Q_T)^+$, on note

$$f_n = h_n 1_{[w \leq n]}, \quad w_n = \min(w, n).$$

Maintenant, nous définissons le problème approché associé à (4.1) par

$$\begin{cases} u_n \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega)), \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n + G_n(t, x, \nabla u_n) = f_n & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T) \\ u_n(0, \cdot) = u_n(T, \cdot) & \text{dans } L^2(\Omega) \end{cases} \quad (4.8)$$

puisque G_n est bornée par n et $f_n \in L^\infty(Q_T)$, on peut appliquer le résultat de [29] pour déduire l'existence de $u_n \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T)$ solution faible périodique de (4.8) telle que

$$0 \leq u_n \leq w_n \leq w.$$

Notre idée est de passer à la limite dans (4.8), pour ceci, nous devons prouver le lemme dans l'étape suivante.

Étape 2. Estimations à priori

Lemme 4.1

i) Il existe une constante C qui dépend de $\|f\|_{L^1(Q_T)}$ telle que

$$\int_{Q_T} |G_n(t, x, \nabla u_n)| \leq C.$$

ii) Il existe une constante C qui dépend de p, T, Ω telle que

$$\|u_n\|_{X_T} \leq C \left[2 \|f\|_{L^1(Q_T)} + \|w(0)\|_{L^1(\Omega)} \right].$$

Preuve

i) En intégrant l'équation satisfaite par u_n sur Q_T , on a

$$\int_{Q_T} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \int_{Q_T} \Delta u_n + \int_{Q_T} G_n(t, x, \nabla u_n) = \int_{Q_T} f_n(t, x),$$

remarquons que $u_n(0, \cdot) = u_n(T, \cdot)$ dans Ω et $G_n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |G_n(t, x, \nabla u_n)| \, dx dt &\leq \int_{Q_T} f_n(t, x) \, dx dt, \\ &\leq \|f\|_{L^1(Q_T)}. \end{aligned}$$

ii) De plus, par [16] on aura

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{X_T} &\leq C(p, \Omega) \left[\|f_n\|_{L^1(Q_T)} + \|G_n(\nabla u_n)\|_{L^1(Q_T)} + \|u_n(T)\|_{L^1(\Omega)} \right] \\ &\leq C(p, \Omega) \left[2 \|f\|_{L^1(Q_T)} + \|w(0)\|_{L^1(\Omega)} \right]. \end{aligned}$$

Étape 3. Passage à la limite

Selon le résultat classique de [15], l'application $(u_n(0), \xi_n) \mapsto u_n$ est compacte de $L^1(\Omega) \times L^1(Q_T)$ dans $L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega))$, où $\xi_n(t, x) = f_n(t, x) - G_n(t, x, \nabla u_n)$. Alors, on peut extraire une sous-suite de u_n , dénotée par u_n pour la simplicité, telle que

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u \text{ dans } L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \\ (u_n, \nabla u_n) &\longrightarrow (u, \nabla u) \text{ p.p. dans } Q_T. \end{aligned}$$

Il reste à s'assurer que u est une solution du problème (4.1), pour ceci nous devons montrer que u_n converge fortement dans X_T .

Nous écrivons pour $m, n \geq 1$ et $0 < \gamma < 1$,

$$\int_{Q_T} |\nabla u_n - \nabla u_m|^p dxdt \leq \left(\int_{Q_T} |\nabla u_n - \nabla u_m| \right)^\gamma \left(\int_{Q_T} |\nabla u_n - \nabla u_m|^{\frac{p-\gamma}{1-\gamma}} \right)^{1-\gamma}. \quad (4.9)$$

Choisissons γ telle que $\frac{p-\gamma}{1-\gamma} = q \in [1, \frac{N+2}{N+1}[$, puis appliquons (4.9) pour conclure le résultat. Grâce à l'hypothèse (4.6), on en déduit que

$$G_n(t, x, \nabla u_n) \longrightarrow G(t, x, \nabla u) \text{ dans } L^1(Q_T).$$

D'autre part,

$$u_n(T) = S(T)u_n(0) + \int_0^T S(T-s)\xi_n(s, \cdot)ds,$$

avec $S(t)$ est le semi-groupe des contractions dans $L^1(\Omega)$ généré par l'opérateur $-\Delta$ avec condition aux limite de Dirichlet sur $\partial\Omega$. Puisque $u_n(0, \cdot) = u_n(T, \cdot)$ dans $L^1(\Omega)$, on a pour tout $\phi \in L^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_n(0, x)\phi(x)dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} S(T)u_n(0, x)\phi(x)dx \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \int_0^T S(T-s)\xi_n(s, x)\phi(x)dsdx, \end{aligned}$$

Puisque $S(t)$ est continu dans $L^1(\Omega)$ et $\xi_n \rightarrow \xi$ fortement dans $L^1(Q_T)$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(0, x)\phi(x)dx &= \int_{\Omega} S(T)u(0, x)\phi(x)dx + \int_{\Omega} \int_0^T S(T-s)\xi(s, x)\phi(x)dsdx, \\ &= \int_{\Omega} u(T, x)\phi(x)dx. \end{aligned}$$

Alors $u(0, \cdot) = u(T, \cdot)$ dans $L^1(\Omega)$.

4.4 Résultat d'existence pour une équation quasi-linéaire avec donnée L^1

Dans ce paragraphe, nous appliquons les résultats de la première partie et nous prouvons l'existence d'une solution périodique faible pour le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \Delta u + G(t, x, \nabla u) = F(t, x, u) + \mu & \text{dans } Q_T \\ u(0, \cdot) = u(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases} \quad (4.10)$$

Les non-linéarités G et F sont supposées des fonctions carathéodory et μ est une fonction mesurable positive appartenant à $L^1(Q_T)$.

4.4.1 Hypothèses

Dans ce paragraphe nous supposons que

$$\mu \in L^1(Q_T), \mu \geq 0, \quad (4.11)$$

$$F : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[\text{ est une fonction Caratheodory ,} \quad (4.12)$$

$$F(t, x, s) \in L^1(Q_T), F \text{ est croissante par rapport à } s, \quad (4.13)$$

$$G : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[\text{ est une fonction Caratheodory ,} \quad (4.14)$$

$$G(t, x, r) \leq H(t, x) + d \|r\|^2, \text{ for all } r \in \mathbb{R}^N \text{ et } p.p.(t, x) \in Q_T, \quad (4.15)$$

où $H \in L^1(Q_T)$ et $d > 0$.

Définition 4.3

On appelle solution faible périodique de (4.10) toute fonction u vérifiant

$$\begin{cases} u \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \cap C([0, T], L^1(\Omega)), \\ G(t, x, \nabla u), F(t, x, u) \in L^1(Q_T) \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + G(t, x, \nabla u) = F(t, x, u) + \mu & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T) \\ u(0, \cdot) = u(T, \cdot) & \text{dans } L^1(\Omega) \end{cases} \quad (4.16)$$

Définition 4.4

On appelle sur-solution faible périodique (resp. sous-solution) de (4.10) toute fonction u vérifiant (4.16) avec " = " remplacée par " \geq " (resp. " \leq ").

Sous certaines hypothèses nécessaires et grâce au résultat du théorème 4.1, on montre le théorème suivant.

Théorème 4.2

Nous supposons que (4.11)-(4.15) sont vérifiés et qu'il existe une fonction \widehat{w} telle que,

$$\begin{cases} \widehat{w} \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)), \\ F(t, x, \widehat{w}) \in L^1(Q_T) \\ \frac{\partial \widehat{w}}{\partial t} - \Delta \widehat{w} = F(t, x, \widehat{w}) + \mu & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T), \\ \widehat{w}(0, \cdot) = \widehat{w}(T, \cdot) & \text{dans } L^1(\Omega). \end{cases}$$

Alors (4.10) a une solution périodique faible u telle que $0 \leq u \leq \widehat{w}$.

Preuve.

La preuve de ce théorème se réalise en plusieurs étapes.

Étape 1. Définition du problème approché

Considérons la suite définie par $u_0 = \widehat{w}$ et pour tout $n \geq 1$ u_n solution du problème auxiliaire suivant

$$\begin{cases} u_n \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)), \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n + G_n(t, x, \nabla u_n) = F(t, x, u_{n-1}) + \mu & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T) \\ u_n(0, \cdot) = u_n(T, \cdot) & \text{dans } L^1(\Omega) \end{cases} \quad (4.17)$$

avec

$$G_n(t, x, r) = \frac{G(t, x, r)}{1 + \frac{1}{n} |G(t, x, r)|}$$

En utilisant le résultat du Théorème 4.1 associé à un raisonnement par récurrence sur n , nous prouvons l'existence d'une solution faible u_n du problème (4.17) telle que

$$0 \leq u_n \leq u_{n-1} \leq \widehat{w}. \quad (4.18)$$

Étape 2. Estimations a priori

Tout d'abord nous définissons la fonction de troncature $T_k(s) = \max\{-k, \min\{k, s\}\}$ et on note

$$S_k(v) = \int_0^v T_k(s) ds.$$

Lemme 4.2

i) Il existe une constante C qui dépend de $\|\mu\|_{L^1(Q_T)}$ et $\|F(\widehat{w})\|_{L^1(Q_T)}$, telle que

$$\int_{Q_T} |G_n(t, x, \nabla u_n)| dxdt \leq C.$$

ii)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_n \int_{[u_n > k]} |G_n(t, x, \nabla u_n)| \, dx dt = 0.$$

Preuve

i) Intégrons l'équation satisfaite par u_n sur Q_T ,

$$\int_{Q_T} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \int_{Q_T} \Delta u_n + \int_{Q_T} G_n(t, x, \nabla u_n) = \int_{Q_T} F(t, x, u_{n-1}) + \int_{Q_T} \mu,$$

on sait que $u_n(0, \cdot) = u_n(T, \cdot)$ dans $L^1(\Omega)$, utilisons les hypothèses sur F , il vient que

$$\int_{Q_T} |G_n(t, x, \nabla u_n)| \leq \int_{Q_T} F(t, x, \hat{w}) + \int_{Q_T} \mu.$$

ii) Multipliant l'équation satisfaite par u_n par la fonction de troncature $T_k(u_n)$ puis intégrons sur Q_T , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \frac{\partial S_k(u_n)}{\partial t} + \int_{Q_T} |\nabla T_k(u_n)|^2 + \int_{Q_T} G_n(t, x, \nabla u_n) T_k(u_n) &= \int_{Q_T} F(t, x, u_{n-1}) T_k(u_n) \\ &+ \int_{Q_T} \mu T_k(u_n), \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses sur F et le fait que u_n est périodique par rapport au temps, nous concluons que

$$\int_{Q_T} G_n(t, x, \nabla u_n) T_k(u_n) \leq \int_{Q_T} F(t, x, \hat{w}) T_k(u_n) + \int_{Q_T} \mu T_k(u_n),$$

alors pour tout $0 < M < k$, on a

$$\begin{aligned} k \int_{[u_n > k]} G_n(t, x, \nabla u_n) &\leq k \int_{Q_T \cap [u_n > M]} \left(F(t, x, \hat{w}) + \mu \right) \\ &+ M \int_{Q_T \cap [u_n \leq M]} \left(F(t, x, \hat{w}) + \mu \right), \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\int_{[u_n > k]} G_n(t, x, \nabla u_n) \leq \int_{Q_T} \left(F(t, x, \hat{w}) + \mu \right) \chi_{[u_n > M]} + \frac{M}{k} \int_{Q_T} \left(F(t, x, \hat{w}) + \mu \right).$$

Pour conclure le résultat souhaité, il suffit de montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_n \int_{Q_T} \left(F(t, x, \hat{w}) + \mu \right) \chi_{[u_n > M]} = 0,$$

On a,

$$|[u_n > M]| \leq \frac{1}{M} \|u_n\|_{L^1(Q_T)} \leq \frac{1}{M} \|\widehat{w}\|_{L^1(Q_T)}$$

ce qui nous donne

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \sup_n |[u_n > M]| = 0.$$

Puisque $(F(t, x, \widehat{w}) + \mu) \in L^1(Q_T)$, pour chaque $\epsilon > 0$ il existe δ tels que pour tout mesurable $E \subset Q_T$

$$|E| < \delta, \quad \int_E (F(t, x, \widehat{w}) + \mu) \leq \frac{\epsilon}{2},$$

Grâce aux résultats précédents, on obtient que pour chaque $\epsilon > 0$, il existe M_ϵ telle que pour tout $M \geq M_\epsilon$

$$\sup_n \left(\int_{Q_T} (F(t, x, \widehat{w}) + \mu) \chi_{[u_n > M]} \right) \leq \frac{\epsilon}{2},$$

On choisit $M = M_\epsilon$ et tendant k vers $+\infty$, on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_n \left(\int_{[u_n > k]} G_n(t, x, \nabla u_n) \right) = 0.$$

Lemme 4.3

Soit u_n solution du problème approché (4.17). Alors

i) u_n converge vers u fortement dans $L^1(0, T; W_0^{1,1}(Q_T))$.

ii) $\|T_k(u_n)\|_{L^2(0, T; H_0^1)} \leq k \left[\|F(\widehat{w})\|_{L^1(Q_T)} + \|\mu\|_{L^1(Q_T)} \right]$

Preuve

(i) Posons

$$\eta_n = F(t, x, u_{n-1}) + \mu - G_n(t, x, \nabla u_n)$$

En utilisant le résultat (i) du Lemme 4.3, (4.13) and (4.17) on aura η_n bornée dans $L^1(Q_T)$ et d'après [15], l'application

$$\begin{aligned} L^1(\Omega) \times L^1(Q_T) &\longrightarrow L^1(0, T; W_0^{1,1}(Q_T)) \\ (u_n(0), \eta_n) &\longmapsto u_n \end{aligned}$$

est compacte. Alors, on peut extraire de u_n une sous-suite notée encore u_n pour la simplicité, telle que

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u \text{ in } L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \\ (u_n, \nabla u_n) &\longrightarrow (u, \nabla u) \text{ p.p. dans } Q_T \end{aligned}$$

(ii) Multipliant par $T_k(u_n)$ l'équation satisfaite par u_n , on obtient

$$\int_{Q_T} \frac{\partial S_k(u_n)}{\partial t} + \int_{Q_T} |\nabla T_k(u_n)|^2 + \int_{Q_T} G_n(t, x, \nabla u_n) T_k(u_n) = \int_{Q_T} F(t, x, u_{n-1}) T_k(u_n) + \int_{Q_T} \mu T_k(u_n),$$

puisque u_n est périodique, il vient que

$$\int_{Q_T} \frac{\partial S_k(u_n)}{\partial t} = 0.$$

En utilisant (4.14) et (4.18), on déduit que

$$\int_{Q_T} G_n(t, x, \nabla u_n) T_k(u_n) \geq 0,$$

et d'après (4.13), (4.18) on a

$$\int_{Q_T} |\nabla T_k(u_n)|^2 \leq k \left[\int_{Q_T} F(t, x, \hat{w}) + \int_{Q_T} \mu \right].$$

Lemme 4.4

Soit u_n la suite définie ci-dessus. On a

$$T_k(u_n) \text{ converge vers } T_k(u) \text{ fortement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Preuve

Considérons $v_{n,k} = T_k(\hat{w} - u_n)$, $v_k = T_k(\hat{w} - u)$ and $v_{n,k,h} = (T_k(\hat{w} - u_n))_h$, où σ_h désigne la régularisation de steklov définie par

$$\sigma_h(t, x) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \sigma(s, x) ds.$$

D'après (4.18), on a

$$0 \leq v_{n,k,h} \leq v_{k,h},$$

Pour montrer que $T_k(u_n)$ converge fortement vers $T_k(u)$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, il suffit de s'assurer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} \|\nabla v_{n,k}\|^2 dx dt \leq \int_{Q_T} \|\nabla v_k\|^2 dx dt.$$

Pour $h > 0$, on a

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} \|\nabla v_{n,k}\|^2 dxdt &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_{T-h}} \|\nabla v_{n,k,h}\|^2 dxdt \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{T-h} \langle v_{n,k,h}, -\Delta v_{n,k,h} \rangle dxdt \\
 &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{T-h} \langle v_{n,k,h}, \frac{\partial v_{n,k,h}}{\partial t} - \Delta v_{n,k,h} \rangle dxdt,
 \end{aligned}$$

Remarquons que,

$$\frac{\partial v_{n,k,h}}{\partial t} - \Delta v_{n,k,h} \geq 0,$$

alors

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} \|\nabla v_{n,k}\|^2 dxdt &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{T-h} \langle v_{k,h}, \frac{\partial v_{n,k,h}}{\partial t} - \Delta v_{n,k,h} \rangle dxdt, \\
 &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_0^{T-h} \langle v_{k,h}, \frac{\partial v_{n,k,h}}{\partial t} \rangle dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_{Q_{T-h}} \nabla v_{n,k,h} \nabla v_{k,h} dxdt \right].
 \end{aligned}$$

On sait que $v_{n,k}$ converge vers v_k faiblement dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, alors $v_{n,k,h}$ converge vers $v_{k,h}$ faiblement dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} \|\nabla v_{n,k}\|^2 dxdt &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_0^{T-h} \langle v_{k,h}, \frac{\partial v_{k,h}}{\partial t} \rangle dt + \int_{Q_{T-h}} \|\nabla v_{k,h}\|^2 dxdt \right], \\
 &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} [v_{k,h}^2]_0^{T-h} dx + \int_{Q_{T-h}} \|\nabla v_{k,h}\|^2 dxdt \right], \\
 &\leq \int_{Q_T} \|\nabla v_k\|^2 dxdt.
 \end{aligned}$$

Étape 3. Passage à la limite

Selon le lemme 4.3 il existe une fonction mesurable $u \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega))$ et une sous-suite de (u_n) notée toujours u_n pour la simplicité, telle que

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u \text{ dans } L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \\ (u_n, \nabla u_n) &\longrightarrow (u, \nabla u) \text{ p.p. dans } Q_T \end{aligned}$$

alors,

$$F(t, x, u_{n-1}) \longrightarrow F(t, x, u) \text{ p.p. dans } Q_T,$$

On applique le Théorème de Lebesgue, il vient que

$$F(t, x, u_{n-1}) \longrightarrow F(t, x, u) \text{ dans } L^1(Q_T).$$

Par les résultats précédents des lemmes 4.2 et 4.3, on conclut que

$$G_n(t, x, \nabla u_n) \longrightarrow G(t, x, \nabla u) \text{ p.p. dans } Q_T, \quad (4.19)$$

il reste à montrer que

$$G_n(t, x, u_n, \nabla u_n) \rightarrow G(t, x, u, \nabla u) \text{ dans } L^1(Q_T),$$

Utilisons (4.19) il suffit de prouver que $G_n(t, x, \nabla u_n)$ est équi-intégrable dans $L^1(Q_T)$ c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall E \subset Q_T, \text{ si } |E| < \delta \text{ alors } \int_E G_n(t, x, \nabla u_n) dx dt \leq \varepsilon.$$

Soit E un sous-ensemble mesurable de Q_T , $\varepsilon > 0$, et $k > 0$. On a

$$\int_E G_n(t, x, \nabla u_n) dx dt = I_1 + I_2$$

avec

$$I_1 = \int_{E \cap [u_n > k]} G_n(t, x, \nabla u_n) dx dt,$$

et

$$I_2 = \int_{E \cap [u_n \leq k]} G_n(t, x, \nabla u_n) dx dt.$$

Pour I_1 on a le résultat suivant

$$I_1 \leq \int_{[u_n > k]} G_n(t, x, \nabla u_n) dx dt,$$

4.4. RÉSULTAT D'EXISTENCE POUR UNE ÉQUATION QUASI-LINÉAIRE AVEC DONNÉE L^1

et d'après le lemme 4.2 on déduit l'existence de $k^* > 0$, telle que, pour tout $k \geq k^*$, on a

$$I_1 \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Pour traiter I_2 on utilise l'hypothèse (4.15), nous obtenons pour $k \geq k^*$

$$I_2 \leq \int_E (H(t, x) + d |\nabla T_k(u_n)|^2) dx dt.$$

puisque $H \in L^1(Q_T)$, alors H est équi-intégrable dans $L^1(Q_T)$, alors il existe $\delta_1 > 0$, telle que, si $|E| \leq \delta_1$, on a

$$\int_E H(t, x) dx dt \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Et grâce au Lemme 4.4 la suite $(|\nabla T_k(u_n)|^2)_n$ est équi-intégrable dans $L^1(Q_T)$, ceci implique l'existence de $\delta_2 > 0$, telle que, si $|E| \leq \delta_2$, alors

$$d \int_E |\nabla T_k(u_n)|^2 dx dt \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Finalement, on choisit $\delta^* = \inf(\delta_1, \delta_2)$, alors si $|E| \leq \delta^*$, on obtient

$$\int_E G_n(t, x, \nabla u_n) dx dt \leq \epsilon.$$

D'autre part,

$$u_n(T) = S(T)u_n(0) + \int_0^T S(T-s)\eta_n(s, \cdot)ds,$$

où

$$\eta_n(t, x) = F(t, x, u_{n-1}) + \mu(t, x) - G_n(t, x, \nabla u_n).$$

puisque $u_n(0, \cdot) = u_n(T, \cdot)$ dans $L^1(\Omega)$, on a pour tout $\phi \in L^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\Omega u_n(0, x)\phi(x)dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\Omega S(T)u_n(0, x)\phi(x)dx \\ &+ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\Omega \int_0^T S(T-s)\eta_n(s, x)\phi(x)dsdx, \end{aligned}$$

on sait que $S(t)$ est continu dans $L^1(\Omega)$ et $\eta_n \rightarrow \eta$ fortement dans $L^1(Q_T)$, alors

$$\begin{aligned} \int_\Omega u(0, x)\phi(x)dx &= \int_\Omega S(T)u(0, x)\phi(x)dx + \int_\Omega \int_0^T S(T-s)\eta(s, x)dsdx, \\ &= \int_\Omega u(T, x)\phi(x)dx. \end{aligned}$$

D'où $u(0, \cdot) = u(T, \cdot)$ dans $L^1(\Omega)$. Ce qui termine la preuve.

Chapitre 5

Quelques résultats d'existence des solutions périodiques faibles pour des systèmes quasi-linéaires avec donnée L^1

Le comportement périodique des solutions de systèmes paraboliques quasi-linéaires intervient dans la modélisation mathématique d'une grande variété de phénomènes, non seulement dans la biologie, mais aussi dans les sciences naturelles, la chimie, l'ingénierie et l'écologie, telles que la dynamique des gaz, les processus de fusion, certains modèles biologiques, les processus cellulaires et la propagation de maladies. La littérature sur les solutions périodiques en temps pour les équations différentielles fonctionnelles ordinaires présente un grand développement. Plusieurs résultats ont été publiés, non seulement dans des revues purement mathématiques, mais également dans celles de l'application et de la modélisation. La plupart des études sont consacrées à l'étude d'existence des solutions globales, à leurs propriétés de comportement périodique et de régularité, particulièrement en ce qui concerne les systèmes dégénérés et singuliers.

Dans le même temps, la périodicité des solutions aux problèmes quasi-linéaires paraboliques a également suscité l'intérêt des scientifiques et de nombreux résultats ont été rapportés sous conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann ([10, 14, 36, 23, 58, 57]) tous ces articles sont consacrés aux études des solutions classiques. Ces dernières années, l'attention a été portée sur la notion des solutions faibles pour des systèmes elliptiques pour des conditions limites linéaires, ([2, 12, 13, 20, 29, 48]) ces travaux utilisaient différentes méthodes, la théorie de degré topologique, le théorème de point fixe de Schauder, la théorie de la bifurcation, la méthode des sous et sur solutions, etc.

Ce chapitre traite des résultats d'existence des solutions périodiques faibles pour le système parabolique de réaction-diffusion suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial t} - d_j \Delta u_j + G_j(t, x, \nabla u) = f_j & \text{dans } Q_T, \\ u_j(0, \cdot) = u_j(T, \cdot) & \text{dans } \Omega, \text{ pour } j = 1, \dots, M \\ u_j(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \quad (5.1)$$

où $u = (u_1, \dots, u_M)$, $\nabla u = (\nabla u_1, \dots, \nabla u_M)$, $f = (f_1, \dots, f_M)$, $M \geq 2$ et Ω est un ouvert

borné de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, de frontière assez régulière $\partial\Omega$, $T > 0$ est la période, $Q_T =]0, T[\times \Omega$, $\Sigma_T =]0, T[\times \partial\Omega$, $-\Delta$ est l'opérateur de Laplace sur $L^1(\Omega)$ avec des conditions aux limites de Dirichlet, d_j sont des constantes positive, G_j est une fonction Carathéodory et f_j est une fonction mesurable positive appartient à $L^1(Q_T)$. les résultats de cette étude peuvent être appliqués au modèle suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u + \alpha_1 |\nabla u|^{\delta_1} + \beta_1 |\nabla v|^{\lambda_1} = f_1 & \text{dans } Q_T, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v + \alpha_2 |\nabla u|^{\delta_2} + \beta_2 |\nabla v|^{\lambda_2} = f_2 & \text{dans } Q_T, \\ u(0, \cdot) = u(T, \cdot) & \text{dans } \Omega, \\ v(0, \cdot) = v(T, \cdot) & \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \quad (5.2)$$

où d_i, α_i, β_i sont des constantes positives pour $i = 1, 2$, pour bien comprendre la situation, nous mentionnons quelques travaux récents concernant les systèmes paraboliques et les problèmes périodiques .

Dans [10] Amann a été intéressé par le problème (5.2) lorsque (f_1, f_2) est assez régulière et $1 \leq \delta_i, \lambda_i \leq 2$, il montre l'existence d'une solution classique dans $C^{1,2}(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ par application des techniques de sous et sur-solution et a travers le théorème du point fixe de Schauder, nous renvoyons le lecteur à [14], [36], [58] pour plus de détails.

Alaa et M. Iguernane [2] considérés le problème lorsque les données (f_1, f_2) appartiennent à $L^2(Q_T) \times L^2(Q_T)$ et $1 \leq \delta_i, \lambda_i \leq 2$, ils montrent l'existence d'une solution périodique faible dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega))$.

Le but de ce chapitre est d'examiner le cas où les données sont irrégulières et que la non-linéarité a une croissance critique par rapport au gradient. Nous avons organisé ce chapitre de la manière suivante. Dans la section 2, nous commençons par définition de la notion de la solution périodique faible de (5.1). Sous certaines hypothèses, nous prouvons l'existence de la solution périodique faible de (5.1). La section 3 est consacrée à l'application de nos résultats à une classe des systèmes périodiques de réaction-diffusion finalement la section 4 présente un théorème d'existence d'une sur solution périodique faible de (5.1).

5.1 Résultat principal

Cette section présente deux résultats d'existence pour des systèmes périodiques paraboliques quasi-linéaires. Le premier résultat prouve l'existence lorsque les non-linéarités sont dominées par une fonction L^1 . Le deuxième résultat concerne des systèmes périodiques avec une non-linéarité avec la croissance critique par rapport au gradient. Maintenant nous introduisons les hypothèses que nous supposons tout au long de cette section.

5.1.1 Hypothèses

Pour tout $j = 1, \dots, M$, nous supposons que

$$f_j \in L^1(Q_T), f_j \geq 0. \quad (5.3)$$

$$G_j(t, x, r) \in L^1(Q_T) \text{ pour tout } r \in (\mathbb{R}^N)^M \text{ et p.p. } (t, x) \in Q_T, \quad (5.4)$$

$$G_j : Q_T \times \Omega \times (\mathbb{R}^N)^M \rightarrow [0, +\infty[\text{ est une fonction carathéodory, } \quad (5.5)$$

$$G_j(t, x, 0) = \min\{G_j(t, x, r), r \in (\mathbb{R}^N)^M\} = 0. \quad (5.6)$$

Avant de montrer le résultat principal, nous introduisons la notion de solution périodique faible pour préciser dans quel sens nous voulons résoudre le système (5.1).

Définition 5.1

Une fonction $u = (u_1, \dots, u_M)$ est dite solution faible périodique du système (5.1), si elle est satisfaite pour tout $j = 1, \dots, M$

$$\begin{cases} u_j \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)), \\ G_j(t, x, \nabla u) \in L^1(Q_T), \\ \frac{\partial u_j}{\partial t} - d_j \Delta u_j + G_j(t, x, \nabla u) = f_j & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T), \\ u_j(0, \cdot) = u_j(T, \cdot) & \text{dans } L^1(\Omega). \end{cases} \quad (5.7)$$

Définition 5.2

Nous appelons sur-solution faible périodique (resp. sous-solution) de (5.1) une fonction u satisfaisant (5.7) avec " = " remplacée par " \geq " (resp. " \leq ").

Remarque 5.1

Dans (5.7) $u_j(0, \cdot) = u_j(T, \cdot)$ dans $L^1(\Omega)$ signifie que pour tous $\phi \in L^\infty(\Omega)$,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{Q_T} (u_j(T - s, x) - u_j(s, x)) \phi(x) dx = 0.$$

Théorème 5.1

Sous hypothèses (5.3)-(5.6), nous supposons qu'il existe $w = (w_1, \dots, w_M)$ une sur-solution faible périodique de (5.1) et qu'il existe une fonction θ dans $L^1(Q_T)$ telle que

$$\begin{cases} |G_j(t, x, r)| \leq \theta(t, x) \text{ p.p. } (t, x) \in Q_T. \\ \forall r \in (\mathbb{R}^N)^M, \forall j = 1, \dots, M. \end{cases} \quad (5.8)$$

Alors le système (5.1) admet une solution faible périodique qui satisfait pour tout $j = 1, \dots, M$

$$0 \leq u_j \leq w_j \text{ dans } Q_T.$$

Preuve

Pour tout $j = 1, \dots, M$, nous approximons f_j comme suit, soit $h_j^n \in C_0^2(Q_T)$, tel que

$$h_j^n \geq 0, \quad \|h_j^n\|_{L^1(Q_T)} \leq \|f_j\|_{L^1(Q_T)}, \quad (5.9)$$

et h_j^n converge vers f_j dans $L^1(Q_T)^+$, notons

$$f_j^n = h_j^n 1_{\{w_j \leq n\}}, \quad w_j^n = \min(w_j, n).$$

Nous définissons le système approximatif de (5.1) par

$$\begin{cases} u_j^n \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T], L^2(\Omega)), \\ \frac{\partial u_j^n}{\partial t} - d_j \Delta u_j^n + G_j(t, x, \nabla u_1^{n-1}, \dots, \nabla u_j^{n-1}, \dots, \nabla u_M^{n-1}) = f_j^n & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T), \\ u_j^n(0, \cdot) = u_j^n(T, \cdot) & \text{dans } L^2(\Omega). \end{cases} \quad (5.10)$$

Puisque G_j est bornée et $f_j^n \in L^\infty(Q_T)$, le problème (5.10) admet une solution u_j^n (voir [29]) tel que

$$0 \leq u_j^n \leq w_j^n \leq w_j. \quad (5.11)$$

Nous appliquons le résultat de [16], pour obtenir

$$\begin{aligned} \|u_j^n\|_{L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega))} &\leq C \left[\|f_j^n\|_{L^1(Q_T)} + \|G_j\|_{L^1(Q_T)} + \|u_j^n(0)\|_{L^1(\Omega)} \right] \\ &\leq C \left[\|f_j\|_{L^1(Q_T)} + \|\theta\|_{L^1(Q_T)} + \|w_j(0)\|_{L^1(\Omega)} \right]. \end{aligned}$$

Le dernier passage est obtenu en utilisant (5.8), (5.9) et (5.11). D'après le résultat classique de [15], l'application $(u_j^n(0), \xi_j^n) \mapsto u_j^n$ est compacte de $L^1(\Omega) \times L^1(Q_T)$ vers $L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega))$, avec

$$\xi_j^n(t, x) = f_j^n(t, x) - G_j(t, x, \nabla u_1^{n-1}, \dots, \nabla u_j^{n-1}, \dots, \nabla u_M^{n-1}).$$

Ensuite, nous pouvons extraire une sous-suite de u_j^n , notée u_j^n par souci de simplicité, telle que

$$\begin{aligned} u_j^n &\longrightarrow u_j \text{ in } L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \\ (u_j^n, \nabla u_j^n) &\longrightarrow (u_j, \nabla u_j) \text{ a.e. in } Q_T. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée, il s'ensuit que

$$G_j(t, x, \nabla u_1^{n-1}, \dots, \nabla u_j^n, \dots, \nabla u_M^{n-1}) \longrightarrow G_j(t, x, \nabla u) \text{ dans } L^1(Q_T).$$

Pour assurer que u_j est une solution de (5.1), nous montrons que u_j est périodique par rapport au temps. Pour ceci, nous avons

$$u_j^n(T) = S_{d_j}(T)u_j^n(0) + \int_0^T S(T-s)\xi_j^n(s, \cdot)ds,$$

où S_{d_j} est le semi-groupe des contractions dans $L^1(\Omega)$ généré par l'opérateur $-d_j\Delta$ avec condition de Dirichlet sur le bord $\partial\Omega$. Puisque $u_j^n(0, \cdot) = u_j^n(T, \cdot)$ dans $L^1(\Omega)$, on a pour tout $\phi \in L^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_j^n(0, x) \phi(x) dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} S_{d_j}(T) u_j^n(0, x) \phi(x) dx \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \int_0^T S_{d_j}(T-s) \xi_j^n(s, x) \phi(x) ds dx, \end{aligned}$$

On sait que $S_{d_j}(t)$ est continu dans $L^1(\Omega)$ et $\xi_j^n \rightarrow \xi_j$ fortement dans $L^1(Q_T)$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_j(0, x) \phi(x) dx &= \int_{\Omega} S_{d_j}(T) u_j(0, x) \phi(x) dx + \int_{\Omega} \int_0^T S_{d_j}(T-s) \xi_j(s, x) ds dx, \\ &= \int_{\Omega} u_j(T, x) \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Alors $u_j(0, \cdot) = u_j(T, \cdot)$ dans $L^1(\Omega)$.

Théorème 5.2

Supposons que (5.3)-(5.6) sont vérifiés, et en supposant que pour tous $j = 1, \dots, M$

$$|G_j(t, x, r_1, \dots, r_M)| \leq K_j(t, x) + \sum_{j=1}^M C_j \|r_j\|^p, \quad (5.12)$$

pour tout $p \in [1, \frac{N+2}{N+1}]$, $r_j \in \mathbb{R}^N$, avec $K_j \in L^1(Q_T)$ et $C_j > 0$.

Alors (5.1) a une solution faible périodique u_j qui satisfait pour tout $j = 1, \dots, M$

$$0 \leq u_j \leq \hat{w}_j \text{ dans } Q_T,$$

avec \hat{w}_j est solution du système suivant

$$\begin{cases} \hat{w}_j \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)), \\ \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial t} - d_j \Delta \hat{w}_j = f_j \text{ dans } \mathcal{D}'(Q_T), \\ \hat{w}_j(0, \cdot) = \hat{w}_j(T, \cdot) \text{ dans } L^1(\Omega). \end{cases}$$

Remarque 5.2

Grâce à la positivité des non-linéarités G , nous pouvons vérifier facilement que $\hat{w} = (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_M)$ est une sur solution faible périodique de (5.1). L'existence de \hat{w} sera prouvée par l'utilisation du théorème de points fixe de Schauder dans l'annexe à la fin de ce chapitre.

5.1.2 Preuve du résultat principal

Pour tout $j = 1, \dots, M$, nous approchons G_j comme suit

$$G_j^n(t, x, r) = \frac{G_j(t, x, r)}{1 + \frac{1}{n} |G_j(t, x, r)|} 1_{[\hat{w}_j \leq n]},$$

Posons

$$f_j^n = f_j 1_{[\widehat{w}_j \leq n]}, \quad \widehat{w}_j^n = \min(\widehat{w}_j, n).$$

Nous définissons le système approximatif de (5.1) par

$$\begin{cases} u_j^n \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega)), \\ \frac{\partial u_j^n}{\partial t} - d_j \Delta u_j^n + G_j^n(t, x, \nabla u^n) = f_j^n & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T), \\ u_j^n(0, \cdot) = u_j^n(T, \cdot) & \text{dans } L^2(\Omega). \end{cases} \quad (5.13)$$

\widehat{w}_j^n est une sur-solution faible périodique de (5.13) et G_j^n est bornée par n , alors en appliquant le résultat de Théorème 5.1, le problème (5.13) a une solution u_j^n telle que

$$0 \leq u_j^n \leq \widehat{w}_j^n \leq \widehat{w}_j, \quad \text{pour tout } j = 1 \dots M. \quad (5.14)$$

Nous voulons passer à la limite dans le système approximatif (5.13). Pour cela, nous devons prouver les lemmes suivants.

Posons $X_T = L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, avec $1 \leq p < \frac{N+2}{N+1}$.

Lemme 5.1

Pour tout $j = 1, \dots, M$.

i) Il existe une constante C qui dépend de $\|f_j\|_{L^1(Q_T)}$ tel que

$$\int_{Q_T} |G_j^n(t, x, \nabla u^n)| \leq C.$$

ii) Il existe une constante C dépendant de p, T, Ω telle que

$$\|u_j^n\|_{X_T} \leq C \left[2 \|f_j\|_{L^1(Q_T)} + \|\widehat{w}_j(0)\|_{L^1(\Omega)} \right].$$

Preuve

i) Intégrons l'équation satisfaite par u_j^n sur Q_T , on obtient pour tout $j = 1, \dots, M$.

$$\int_{Q_T} \frac{\partial u_j^n}{\partial t} - \int_{Q_T} d_j \Delta u_j^n + \int_{Q_T} G_j^n(t, x, \nabla u^n) = \int_{Q_T} f_j^n(t, x),$$

puisque $u_j^n(0, \cdot) = u_j^n(T, \cdot)$ dans Ω et $G_j^n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |G_j^n(t, x, \nabla u^n)| \, dxdt &\leq \int_{Q_T} f_j^n(t, x) \, dxdt, \\ &\leq \|f_j\|_{L^1(Q_T)}. \end{aligned}$$

ii) De plus, par [16] nous avons

$$\begin{aligned} \|u_j^n\|_{X_T} &\leq C(p, \Omega) \left[\|f_j^n\|_{L^1(Q_T)} + \|G_j^n(\nabla u^n)\|_{L^1(Q_T)} + \|u_j^n(0)\|_{L^1(\Omega)} \right] \\ &\leq C(p, \Omega) \left[2 \|f_j\|_{L^1(Q_T)} + \|w_j(0)\|_{L^1(\Omega)} \right]. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est obtenue en utilisant (i) et (5.14).

D'après le lemme 5.2, nous avons $f_j^n(t, x) - G_j^n(t, x, \nabla u^n)$ bornée dans $L^1(Q_T)$, nous pouvons alors appliquer le résultat de la compacité de [15] pour extraire une sous-suite de u_j^n notée u_j^n , tel que

$$\begin{aligned} u_j^n &\longrightarrow u_j \text{ dans } L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \\ (u_j^n, \nabla u_j^n) &\longrightarrow (u_j, \nabla u_j) \text{ p.p. dans } Q_T. \end{aligned}$$

Pour s'assurer que u_j est une solution du problème (5.1), il reste à montrer que u_j^n converge fortement vers u_j dans X_T . Pour cela, nous écrivons pour $m, n \geq 1$ et $0 < \gamma < 1$,

$$\int_{Q_T} |\nabla u_j^n - \nabla u_j^m|^p \leq \left(\int_{Q_T} |\nabla u_j^n - \nabla u_j^m| \right)^\gamma \left(\int_{Q_T} |\nabla u_j^n - \nabla u_j^m|^{\frac{p-\gamma}{1-\gamma}} \right)^{1-\gamma}. \quad (5.15)$$

Choisissons γ tel que $\frac{p-\gamma}{1-\gamma} = q \in [1, \frac{N+2}{N+1}]$, l'utilisation de (5.15) nous permet d'obtenir le résultat souhaité.

Grâce à l'hypothèse (5.12), on en déduit

$$G_j^n(t, x, \nabla u^n) \longrightarrow G_j(t, x, \nabla u) \text{ dans } L^1(Q_T)$$

ce qui montre que les fonctions non-linéaires convergent fortement dans $L^1(Q_T)$. La périodicité de u_j peut être obtenue par le même raisonnement de la première preuve.

5.2 Application à une classe des systèmes de réaction-diffusion

Dans ce paragraphe, nous appliquons le résultat de la première partie pour prouver l'existence d'une solution faible périodique pour le système quasi-linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial t} - d_j \Delta u_j + G_j(t, x, \nabla u) = F_j(t, x, u) + \mu_j & \text{dans } Q_T, \\ u_j(0, \cdot) = u_j(T, \cdot) & \text{dans } \Omega, \\ u_j(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T. \end{cases} \quad (5.16)$$

où $u = (u_1, \dots, u_M)$, $\nabla u = (\nabla u_1, \dots, \nabla u_M)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_M)$, $F(\cdot, u) = (F_1(\cdot, u), \dots, F_M(\cdot, u))$ avec $M \geq 2$, On suppose que les fonctions non-linéaires G_j et F_j sont des fonctions cara-

théodory et μ_j est une fonction mesurable positive appartenant à $L^1(Q_T)$. Afin de démontrer l'existence d'une solution périodique faible de (5.16) nous allons construire une suite décroissante de solution approchée de (5.16), cette monotonie nous permet de surmonter la difficulté présentée par la convergence forte du gradient.

5.2.1 Hypothèses

Pour tout $j = 1, \dots, M$, nous supposons que

$$\mu_j \in L^1(Q_T), \mu_j \geq 0. \quad (5.17)$$

$$F_j : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^M \rightarrow [0, +\infty[\text{ est une fonction carathéodory, } \quad (5.18)$$

$$F_j(t, x, s) \in L^1(Q_T), F_j(\cdot, s) \text{ est quasi-monotone croissante.} \quad (5.19)$$

$$G_j : [0, T] \times \Omega \times (\mathbb{R}^N)^M \rightarrow [0, +\infty[\text{ est une fonction carathéodory,} \quad (5.20)$$

$$G_j(t, x, r) \leq H_j(t, x) + \sum_{j=1}^M C_j \|r_j\|^2. \quad (5.21)$$

avec $H_j \in L^1(Q_T)$ et $C_j > 0$. Pour (5.19), nous rappelons qu'une fonction $F_j(\cdot, u)$ est dite quasi-monotone croissante si $F_j(\cdot, u)$ est croissante pour toutes les composantes u_j de u . La notion de solution périodique faible est présentée ici pour préciser dans quel sens nous voulons résoudre le système (5.16).

Définition 5.3

Une fonction $u = (u_1, \dots, u_M)$ est appelée solution faible périodique du système (5.16), si pour tout $j = 1, \dots, M$, on a

$$\begin{cases} u_j \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)), \\ G_j(t, x, \nabla u), F_j(t, x, u) \in L^1(Q_T), \\ \frac{\partial u_j}{\partial t} - d_j \Delta u_j + G_j(t, x, \nabla u) = F_j(t, x, u) + \mu_j & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T), \\ u_j(0, \cdot) = u_j(T, \cdot) & \text{dans } L^1(\Omega). \end{cases} \quad (5.22)$$

En se basant sur le résultat de la première section, nous prouvons que (5.16) admet une solution faible périodique, c'est le résultat principal du théorème suivant.

Théorème 5.3

Sous les hypothèses (5.17)-(5.21), on suppose qu'il existe $v = (v_1, \dots, v_M)$ tel que, pour tout $j = 1, \dots, M$

$$\begin{cases} v_j \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)), \\ F_j(t, x, v) \in L^1(Q_T) \\ \frac{\partial v_j}{\partial t} - d_j \Delta v_j = F_j(t, x, v) + \mu_j & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T), \\ v_j(0, \cdot) = v_j(T, \cdot) & \text{dans } L^1(\Omega). \end{cases}$$

Alors (5.16) a une solution faible périodique $u = (u_1, \dots, u_M)$ telle que pour $j = 1, \dots, M$, on a

$$0 \leq u_j \leq v_j.$$

Preuve.

La preuve de ce théorème est divisée en plusieurs étapes.

Étape 1. Problème approché

Pour $j = 1, \dots, M$, on considère la suite définie par $u_j^0 = v_j$ et pour $n \geq 1$, u_j^n est la solution du système suivant

$$\begin{cases} u_j^n \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)), \\ \frac{\partial u_j^n}{\partial t} - d_j \Delta u_j^n + G_j^n(t, x, \nabla u^n) = F_j(t, x, u^{n-1}) + \mu_j & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T), \\ u_j^n(0, \cdot) = u_j^n(T, \cdot) & \text{dans } L^1(\Omega). \end{cases} \quad (5.23)$$

avec

$$G_j^n(t, x, r) = \frac{G_j(t, x, r)}{1 + \frac{1}{n} |G_j(t, x, r)|}$$

En utilisant le résultat du théorème 5.1 combiné avec un argument d'induction, nous prouvons l'existence de u_j^n solution faible du système approximatif (5.23) telle que

$$0 \leq u_j^n \leq u_j^{n-1} \leq v_j. \quad (5.24)$$

Étape 2. Estimations a priori

Avant de donner les lemmes qui seront utilisés pour la preuve du Théorème 5.3, nous définissons la fonction de troncature $T_k \in C^2$ pour tout nombre réel positif k par,

$$\begin{aligned} T_k(s) &= s \text{ si } 0 \leq s \leq k, \\ T_k(s) &\leq k + 1 \text{ si } s \geq k, \\ 0 \leq T_k'(s) &\leq 1 \text{ si } s \geq 0, \\ T_k'(s) &= 0 \text{ si } s \geq k + 1, \\ 0 \leq -T_k''(s) &\leq C(k). \end{aligned}$$

Par exemple, la fonction T_k peut être définie comme suit

$$\begin{aligned} T_k(s) &= s \text{ dans } [0, k], \\ T_k(s) &= \frac{1}{2}(s - k)^4 - (s - k)^3 + s \text{ dans } [k, k + 1], \\ T_k(s) &= \frac{1}{2}(k + 1) \text{ pour } s > k + 1. \end{aligned}$$

Posons

$$S_k(v) = \int_0^v T_k(s) ds.$$

Lemme 5.2

For $j = 1, \dots, M$.

i) Il existe une constante C dépendante de $\|\mu_j\|_{L^1(Q_T)}$ et $\|F_j(v)\|_{L^1(Q_T)}$, telle que

$$\int_{Q_T} |G_j^n(t, x, \nabla u^n)| dxdt \leq C.$$

ii)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_n \int_{[u_j^n > k]} |G_j^n(t, x, \nabla u^n)| dxdt = 0.$$

Preuve

i) Intégrons l'équation satisfaite par u_j^n sur Q_T ,

$$\int_{Q_T} \frac{\partial u_j^n}{\partial t} - \int_{Q_T} d_j \Delta u_j^n + \int_{Q_T} G_j^n(t, x, \nabla u^n) = \int_{Q_T} F_j(t, x, u^{n-1}) + \int_{Q_T} \mu_j,$$

puisque $u_j^n(0, \cdot) = u_j^n(T, \cdot)$ dans $L^1(\Omega)$ et en utilisant les hypothèses (5.18), (5.19) et (5.24) nous obtenons

$$\int_{Q_T} |G_j^n(t, x, \nabla u^n)| \leq \int_{Q_T} F_j(t, x, v) + \int_{Q_T} \mu_j.$$

ii) En multipliant l'équation satisfaite par u_j^n par la fonction de troncature $T_k(u_j^n)$ et intégrant sur Q_T , il vient que

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \frac{\partial S_k(u_j^n)}{\partial t} + d_j \int_{Q_T} |\nabla T_k(u_j^n)|^2 + \int_{Q_T} G_j^n(t, x, \nabla u^n) T_k(u_j^n) \\ = \int_{Q_T} F_j(t, x, u^{n-1}) T_k(u_j^n) + \int_{Q_T} \mu_j T_k(u_j^n), \end{aligned}$$

l'hypothèse sur F_j et la périodicité de u_j^n , donne

$$\int_{Q_T} G_j^n(t, x, \nabla u^n) T_k(u_j^n) \leq \int_{Q_T} F_j(t, x, v) T_k(u_j^n) + \int_{Q_T} \mu_j T_k(u_j^n),$$

alors pour chaque $0 < A < k$, nous avons

$$\begin{aligned} k \int_{[u_j^n > k]} G_j^n(t, x, \nabla u^n) &\leq k \int_{Q_T \cap [u_j^n > A]} \left(F_j(t, x, v) + \mu_j \right) \\ &\quad + A \int_{Q_T \cap [u_j^n \leq A]} \left(F_j(t, x, v) + \mu_j \right), \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{[u_j^n > k]} G_j^n(t, x, \nabla u^n) &\leq \int_{Q_T} \left(F_j(t, x, v) + \mu_j \right) \chi_{[u_j^n > A]} \\ &\quad + \frac{A}{k} \int_{Q_T} \left(F_j(t, x, v) + \mu_j \right). \end{aligned}$$

Pour conclure le résultat souhaité, il suffit de montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_n \int_{Q_T} \left(F_j(t, x, v) + \mu_j \right) \chi_{[u_j^n > A]} = 0,$$

nous remarquons que

$$|[u_j^n > A]| \leq \frac{1}{A} \|u_j^n\|_{L^1(Q_T)} \leq \frac{1}{A} \|v_j\|_{L^1(Q_T)},$$

ce qui implique

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_n |[u_j^n > A]| = 0.$$

Puisque $(F_j(t, x, v) + \mu_j) \in L^1(Q_T)$, pour chaque $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout mesurable $E \subset Q_T$,

$$|E| < \delta, \quad \int_E \left(F_j(t, x, v) + \mu_j \right) \leq \frac{\epsilon}{2},$$

d'après le résultat précédent, nous obtenons pour chaque $\epsilon > 0$, l'existence de A_ϵ tel que $A \geq A_\epsilon$

$$\sup_n \left(\int_{Q_T} \left(F_j(t, x, v) + \mu_j \right) \chi_{[u_j^n > A]} \right) \leq \frac{\epsilon}{2},$$

choisissons $A = A_\epsilon$ et tendons k vers l'infinie, nous avons

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_n \left(\int_{[u_j^n > k]} G_j^n(t, x, \nabla u^n) \right) = 0.$$

Lemme 5.3

Soit u_j^n la suite définie ci-dessus. Alors pour $j = 1, \dots, M$, on a

i) u_j^n converge faiblement vers u_j dans $L^1(0, T; W_0^{1,1}(Q_T))$,

ii) $\|T_k(u_j^n)\|_{L^2(0,T;H_0^1)} \leq C \left[\|F_j(v)\|_{L^1(Q_T)} + \|\mu_j\|_{L^1(Q_T)} \right]$.

Preuve

(i) Posons

$$\eta_j^n = F_j(t, x, u^{n-1}) + \mu_j - G_j^n(t, x, \nabla u^n),$$

d'après le résultat (i) du Lemme 5.2, (5.19) et (5.24), il vient que η_j^n est bornée dans $L^1(Q_T)$ et grâce au résultat de [15], l'application

$$\begin{aligned} L^1(\Omega) \times L^1(Q_T) &\longrightarrow L^1(0, T; W_0^{1,1}(Q_T)) \\ (u_j^n(0), \eta_j^n) &\longmapsto u_j^n \end{aligned}$$

est compacte. Alors, nous pouvons extraire une sous-suite de u_j^n , notée encore par u_j^n pour la simplicité, telle que

$$\begin{aligned} u_j^n &\longrightarrow u_j \text{ in } L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \\ (u_j^n, \nabla u_j^n) &\longrightarrow (u_j, \nabla u_j) \text{ a.e. in } Q_T \end{aligned}$$

(ii) En multipliant par $T_k(u_j^n)$ l'équation que vérifie u_j^n , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \frac{\partial S_k(u_j^n)}{\partial t} + d_j \int_{Q_T} |\nabla T_k(u_j^n)|^2 + \int_{Q_T} G_j^n(t, x, \nabla u^n) T_k(u_j^n) \\ = \int_{Q_T} F_j(t, x, u^{n-1}) T_k(u_j^n) + \int_{Q_T} \mu_j T_k(u_j^n), \end{aligned}$$

la périodicité implique,

$$\int_{Q_T} \frac{\partial S_k(u_j^n)}{\partial t} = 0.$$

Utilisons (5.20) et (5.24), pour obtenir

$$\int_{Q_T} G_j^n(t, x, \nabla u^n) T_k(u_j^n) \geq 0,$$

enfin par application de (5.19) et (5.24) on a,

$$\int_{Q_T} |\nabla T_k(u_j^n)|^2 \leq C \left[\int_{Q_T} F_j(t, x, v) + \int_{Q_T} \mu_j \right].$$

Lemme 5.4

Soit u_j^n la suite définie ci-dessus. Alors pour tous $j = 1, \dots, M$, on a

$$T_k(u_j^n) \text{ converge vers } T_k(u_j) \text{ fortement dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Preuve

Pour prouver ce lemme, nous considérons pour tous $j = 1, \dots, M$,

$$\begin{aligned} z_j^{n,k} &= T_k(v_j - u_j^n), \\ z_j^k &= T_k(v_j - u_j), \\ z_j^{n,k,h} &= (T_k(v_j - u_j^n))^h, \end{aligned}$$

avec σ^h désigne la régularisation de Lebesgue steklov définie par

$$\sigma^h(t, x) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \sigma(s, x) ds.$$

Pour montrer que $T_k(u_j^n)$ converge fortement vers $T_k(u_j)$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, il suffit de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{Q_T} \left\| \nabla z_j^{n,k} \right\|^2 dxdt \leq \int_{Q_T} \left\| \nabla z_j^k \right\|^2 dxdt.$$

Pour $h > 0$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} d_j \int_{Q_T} \left\| \nabla z_j^{n,k} \right\|^2 dxdt &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} d_j \int_{Q_{T-h}} \left\| \nabla z_j^{n,k,h} \right\|^2 dxdt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{T-h} \langle z_j^{n,k,h}, -d_j \Delta z_j^{n,k,h} \rangle dxdt \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{T-h} \langle z_j^{n,k,h}, \frac{\partial z_j^{n,k,h}}{\partial t} - d_j \Delta z_j^{n,k,h} \rangle dxdt, \end{aligned}$$

remarquons que,

$$\frac{\partial z_j^{n,k,h}}{\partial t} - d_j \Delta z_j^{n,k,h} \geq 0,$$

et d'après (5.24), on a $0 \leq z_j^{n,k,h} \leq z_j^{k,h}$, alors

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} d_j \int_{Q_T} \left\| \nabla z_j^{n,k} \right\|^2 dxdt \\ & \leq \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{T-h} \left\langle z_j^{k,h}, \frac{\partial z_j^{n,k,h}}{\partial t} - d_j \Delta z_j^{n,k,h} \right\rangle dxdt, \\ & \leq \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_0^{T-h} \left\langle z_j^{k,h}, \frac{\partial z_j^{n,k,h}}{\partial t} \right\rangle dt + d_j \int_{Q_{T-h}} \nabla z_j^{n,k,h} \nabla z_j^{k,h} dxdt \right]. \end{aligned}$$

Puisque $z_j^{n,k}$ converge faiblement vers z_j^k dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, alors $z_j^{n,k,h}$ converge faiblement vers $z_j^{k,h}$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} d_j \int_{Q_T} \left\| \nabla z_j^{n,k} \right\|^2 dxdt \\ & \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left[\int_0^{T-h} \left\langle z_j^{k,h}, \frac{\partial z_j^{k,h}}{\partial t} \right\rangle dt + d_j \int_{Q_{T-h}} \left\| \nabla z_j^{k,h} \right\|^2 dxdt \right], \\ & \leq \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} [(z_j^{k,h})^2]_0^{T-h} dx + d_j \int_{Q_{T-h}} \left\| \nabla z_j^{k,h} \right\|^2 dxdt \right], \\ & \leq d_j \int_{Q_T} \left\| \nabla z_j^k \right\|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Étape 3. Passage à la limite

Selon le lemme (5.3), il existe une fonction mesurable $u_j \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega))$ et une sous-suite notée toujours (u_j^n) pour simplicité, telle que

$$\begin{aligned} u_j^n & \longrightarrow u_j \text{ dans } L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)), \\ (u_j^n, \nabla u_j^n) & \longrightarrow (u_j, \nabla u_j) \text{ p.p. dans } Q_T, \end{aligned}$$

alors,

$$F_j(t, x, u^{n-1}) \longrightarrow F_j(t, x, u) \text{ p.p. dans } Q_T,$$

grâce au théorème de Lebesgue, nous avons

$$F_j(t, x, u^{n-1}) \longrightarrow F_j(t, x, u) \text{ dans } L^1(Q_T).$$

Par les résultat des Lemmes précédents (5.2) et (5.3), on a

$$G_j^n(t, x, \nabla u^n) \longrightarrow G_j(t, x, \nabla u) \text{ p.p. in } Q_T, \quad (5.25)$$

Il reste à montrer que

$$G_j^n(t, x, \nabla u^n) \rightarrow G_j(t, x, \nabla u) \quad \text{dans } L^1(Q_T),$$

En utilisant (5.25) il suffit de prouver que $G_j^n(t, x, \nabla u^n)$ est équi-intégrable dans $L^1(Q_T)$ c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall E \subset Q_T, \text{ si } |E| < \delta \text{ alors } \int_E G_j^n(t, x, \nabla u^n) dx dt \leq \varepsilon.$$

Soit E un ensemble mesurable de Q_T , $\varepsilon > 0$ et $k > 0$. On a pour tout $j = 1, \dots, M$,

$$\int_E G_j^n(t, x, \nabla u^n) dx dt = I_{j,1} + I_{j,2}.$$

Avec

$$I_{j,1} = \int_{E \cap [u_j^n > k]} G_j^n(t, x, \nabla u^n) dx dt,$$

et

$$I_{j,2} = \int_{E \cap [u_j^n \leq k]} G_j^n(t, x, \nabla u^n) dx dt.$$

La première intégrale $I_{j,1}$ vérifie l'inégalité suivante

$$I_{j,1} \leq \int_{[u_j^n > k]} G_j^n(t, x, \nabla u^n) dx dt,$$

d'après le Lemme (5.2) nous obtenons l'existence de $k^* > 0$, tel que, pour tout $k \geq k^*$, on a

$$I_{j,1} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Concernant $I_{j,2}$ nous utilisons l'hypothèse (5.21), on a pour tout $k \geq k^*$

$$I_{j,2} \leq \int_E \left(H_j(t, x) + \sum_{j=1}^M C_j |\nabla T_k(u_j^n)|^2 \right) dx dt.$$

Puisque $H_j \in L^1(Q_T)$, alors H_j est équi-intégrable dans $L^1(Q_T)$, il existe $\delta_1 > 0$, tel que, si $|E| \leq \delta_1$, alors

$$\int_E H_j(t, x) dx dt \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

de plus d'après (5.4) la suite $(|\nabla T_k(u_j^n)|^2)_n$ est équi-intégrable dans $L^1(Q_T)$, ce qui im-

plique l'existence de $\delta_2 > 0$, tel que, si $|E| \leq \delta_2$, on a

$$\sum_{j=1}^M C_j \int_E |\nabla T_k(u_j^n)|^2 dx dt \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Enfin, en choisissant $\delta^* = \inf(\delta_1, \delta_2)$, if $|E| \leq \delta^*$, on obtient

$$\int_E G_j^n(t, x, \nabla u^n) dx dt \leq \epsilon.$$

D'autre part,

$$u_j^n(T) = S_{d_j}(T)u_j^n(0) + \int_0^T S(T-s)\eta_j^n(s, \cdot)ds,$$

avec,

$$\eta_j^n(t, x) = F_j(t, x, u^{n-1}) + \mu_j(t, x) - G_j^n(t, x, \nabla u^n).$$

Puisque $u_j^n(0, \cdot) = u_j^n(T, \cdot)$ dans $L^1(\Omega)$, on a pour tout $\phi \in L^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\Omega u_j^n(0, x)\phi(x)dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\Omega S_{d_j}(T)u_j^n(0, x)\phi(x)dx \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\Omega \int_0^T S_{d_j}(T-s)\eta_j^n(s, x)\phi(x)dsdx. \end{aligned}$$

On sait que $S_{d_j}(t)$ est continu dans $L^1(\Omega)$ et $\eta_j^n \rightarrow \eta_j$ converge fortement dans $L^1(Q_T)$, alors

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_j(0, x)\phi(x)dx &= \int_\Omega S_{d_j}(T)u(0, x)\phi(x)dx + \int_\Omega \int_0^T S_{d_j}(T-s)\eta_j(s, x)dsdx, \\ &= \int_\Omega u_j(T, x)\phi(x)dx. \end{aligned}$$

Alors $u_j(0, \cdot) = u_j(T, \cdot)$ dans $L^1(\Omega)$.

Chapitre 6

Application au problème inverse de source avec des conditions périodiques par rapport au temps

Ce chapitre présente une liaison entre l'existence des solutions faibles périodique que nous avons déjà étudiés dans les chapitres précédents avec les problèmes inverses de sources.

6.1 Introduction

L'objectif principal des problèmes inverses est de déterminer la cause d'un phénomène à travers des observations expérimentales, plus précisément des problèmes qui consistent à déterminer les causes connaissant les effets, ces problèmes s'opposent aux problèmes directs qui visent à décrire les effets connaissant les causes. Parmi les applications des problèmes inverses on trouve l'électromagnétisme, la détection des tumeurs, la géophysique, les méthodes de prospection, l'imagerie médicale, la mécanique des structures, le contrôle non destructif des structures, la tomographie, la complétion des données. Notons que la difficulté qui se pose c'est que moins évident qu'un effet soit la conséquence d'une unique cause, c'est une question souvent poser au niveau de l'unicité de la solution d'un problème inverse, cette difficulté a été introduit par Hadamard dans [35] il a caractérisé la notion de problème bien posé dans les trois points suivants :

- la solution existe,
- elle est unique,
- elle dépend continûment des données.

Un problème qui est dit "mal posé" s'il se pose au sens de la définition ci-dessus. Pour se débarrasser de cette difficulté Tikhonov a proposé dans [71] une méthode de régularisation qui consiste à approcher le problème mal posé par une suite de problèmes bien posés dépendant d'un paramètre dit de régularisation. Nous obtenons une solution approchée stable, en modifiant l'opérateur ceci en ajoutant des informations à priori sur la solution du problème mal posé.

6.2 Position du problème

Considérons le problème périodique suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + a(t, x)u + G(t, x, \nabla u) = f & \text{dans } Q_T \\ u(0, \cdot) = u(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ u(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \quad (6.1)$$

Où Ω est un ouvert borné régulier ouvert de \mathbb{R}^N , $N \geq 1$, avec bord régulier $\partial\Omega$, $T > 0$ est la période, $Q_T =]0, T[\times \Omega$, $\Sigma_T =]0, T[\times \partial\Omega$ et $a : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ est continue, G est une fonction carathéodory et F est une fonction mesurable.

Problème direct

Le problème direct consiste à prouver l'existence d'une solution u de (6.1) connaissant le terme source d'énergie f , puisque l'objectif de ce chapitre est d'étudier les problèmes inverses on se place dans un cadre variationnel simple, on suppose que

$$f \in L^2(Q_T), f \geq 0 \quad (6.2)$$

$$a : Q_T \rightarrow [0, +\infty[\text{ est une fonction mesurable telle que ,} \quad (6.3)$$

$$0 < a_0 \leq a(t, x) \leq a_1 \text{ p.p } (t, x) \in Q_T \quad (6.4)$$

$$G : Q_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[\text{ est une fonction carathéodory ,} \quad (6.5)$$

$$G(t, x, 0) = \min\{G(t, x, r), r \in \mathbb{R}^N\} = 0, \quad (6.6)$$

$$r \mapsto G(t, x, r) \text{ est une fonction convexe} \quad (6.7)$$

$$D_r G(t, x, r) \in L^\infty(Q_T) \quad (6.8)$$

$$|G(t, x, r)| \leq \alpha(t, x) + \beta |r| \quad (6.9)$$

où $D_r G$ désigne le sous différentiel de G , $\alpha \in L^2(Q_T)$ et $\beta > 0$.

On utilise la définition suivante pour définir la notion de solution périodique faible pour (6.1).

Définition 6.1

Une fonction u est dite solution périodique faible de (6.1), si

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad G(t, x, \nabla u) \in L^1(Q_T)$$

$$u(0, \cdot) = u(T, \cdot) \text{ dans } L^2(\Omega)$$

Pour tout $\phi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T)$

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \phi \right\rangle + \int_{Q_T} \nabla u \nabla \phi + \int_{Q_T} a(t, x)u\phi + \int_{Q_T} G(t, x, \nabla u)\phi = \int_{Q_T} f\phi \quad (6.10)$$

Définition 6.2

Nous appelons sur-solution faible périodique (resp. sous-solution) de (6.1) une fonction u satisfaisant (6.10) avec " $=$ " remplacée par " \geq " (resp. " \leq ").

Nous renvoyons le lecteur au chapitre 2 pour l'existence de u solution faible périodique de (6.1), l'existence est démontrée à l'aide de la méthode des sous- et sur-solutions, de plus la solution u satisfait

$$0 \leq u \leq \widehat{w} \quad (6.11)$$

où \widehat{w} est la solution du problème semi-linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{w}}{\partial t} - \Delta \widehat{w} + a(t, x)\widehat{w} = f & \text{dans } Q_T \\ \widehat{w}(0, \cdot) = \widehat{w}(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ \widehat{w}(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

Concernant l'unicité de u , on prend u et v deux solutions de (6.1), posons $w = u - v$, on a pour tout $\phi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, \phi \right\rangle + \int_{Q_T} \nabla w \nabla \phi + \int_{Q_T} a(t, x)w\phi = \int_{Q_T} \left(G(t, x, \nabla v) - G(t, x, \nabla u) \right) \phi \quad (6.12)$$

Maintenant, on choisit $\phi = (w^+)^\delta$ dans (6.12), où δ est un nombre positif qui sera fixé à la fin.

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, (w^+)^\delta \right\rangle + \int_{Q_T} \nabla w \nabla (w^+)^\delta + \int_{Q_T} a(t, x)w(w^+)^\delta = \int_{Q_T} \left(G(t, x, \nabla v) - G(t, x, \nabla u) \right) (w^+)^\delta$$

il vient de [29] lemme 2 que

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, (w^+)^\delta \right\rangle \geq 0$$

puis on utilise (6.4)

$$\delta \int_{Q_T} (w^+)^{\delta-1} |\nabla w^+|^2 + a_0 \int_{Q_T} (w^+)^{\delta+1} \leq \int_{Q_T} |G(t, x, \nabla v) - G(t, x, \nabla u)| (w^+)^\delta$$

Puisque G est convexe par rapport à r , on aura

$$G(t, x, \nabla u) - G(t, x, \nabla v) \geq D_r G(t, x, \nabla v) \cdot \nabla w$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \left(G(t, x, \nabla v) - G(t, x, \nabla u) \right) (w^+)^{\delta} &\leq \int_{Q_T} |D_r G(t, x, \nabla v) \cdot \nabla w| (w^+)^{\delta} \\ &\leq \|D_r G(t, x, \nabla v)\|_{\infty} \int_{Q_T} |\nabla w^+| (w^+)^{\delta} \end{aligned}$$

D'où

$$\delta \int_{Q_T} (w^+)^{\delta-1} |\nabla w^+|^2 + a_0 \int_{Q_T} (w^+)^{\delta+1} \leq \|D_r G(t, x, \nabla v)\|_{\infty} \int_{Q_T} |\nabla w| (w^+)^{\delta}$$

Maintenant, on utilise l'inégalité de Young

$$\|D_r G(t, x, \nabla v)\|_{\infty} \int_{Q_T} |\nabla w^+| (w^+)^{\delta} \leq \epsilon \|D_r G(t, x, \nabla v)\|_{\infty} \int_{Q_T} (w^+)^{\delta+1} + \frac{1}{\epsilon} \int_{Q_T} (w^+)^{\delta-1} |\nabla w^+|^2$$

On conclut que

$$\delta \int_{Q_T} (w^+)^{\delta-1} |\nabla w^+|^2 + a_0 \int_{Q_T} (w^+)^{\delta+1} \leq \epsilon \|D_r G(t, x, \nabla v)\|_{\infty} \int_{Q_T} (w^+)^{\delta+1} + \frac{1}{\epsilon} \int_{Q_T} (w^+)^{\delta-1} |\nabla w^+|^2$$

Choisissons $\epsilon = \frac{a_0}{2\|D_r G(t, x, \nabla v)\|_{\infty}}$, il vient que

$$\delta \int_{Q_T} (w^+)^{\delta-1} |\nabla w^+|^2 + \frac{a_0}{2} \int_{Q_T} (w^+)^{\delta+1} \leq \frac{2\|D_r G(t, x, \nabla v)\|_{\infty}}{a_0} \int_{Q_T} (w^+)^{\delta-1} |\nabla w^+|^2$$

Maintenant, on choisit $\delta \geq \frac{2\|D_r G(t, x, \nabla v)\|_{\infty}}{a_0}$, on obtient

$$\int_{Q_T} (w^+)^{\delta+1} \leq 0$$

ce qui implique que $w^+ \leq 0$ dans Q_T , ceci entraîne $u \leq v$. Par la même démarche on montre que $v \leq u$, ce qui démontre l'unicité de la solution du problème (6.1).

Problème inverse

Le problème inverse que nous traitons consiste à déterminer le terme source f à partir d'une observation qu'on note u_{obs} , ceci a l'aide de la minimisation de la fonctionnelle coût suivante

$$J(f) = \frac{1}{2} \int_{Q_T} |u_f - u_{obs}|^2 dxdt$$

où u_f solution du problème (6.1)

$$\begin{cases} \frac{\partial u_f}{\partial t} - \Delta u_f + a(t, x)u_f + G(t, x, \nabla u_f) = f & \text{dans } Q_T \\ u_f(0, \cdot) = u_f(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ u_f(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

On cherche à déterminer f^* tel que

$$J(f^*) = \min_{f \in \mathcal{U}_{ad}} J(f) \quad (6.13)$$

où \mathcal{U}_{ad} désigne l'ensemble des fonctions admissibles qu'on suppose qu'il est donné par

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ f \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)^*), \right. \\ \left. \| f \|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^*)} \leq C \right\}$$

on munit \mathcal{U}_{ad} par la norme de convergence suivante, (f_n) converge vers f dans \mathcal{U}_{ad} si et seulement si (f_n) converge fortement vers f dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et $\left(\frac{\partial f_n}{\partial t}\right)$ converge fortement vers $\frac{\partial f}{\partial t}$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega)^*)$.

Posons

$$\mathcal{V} = \left\{ u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), u(0, \cdot) = u(T, \cdot) \text{ dans } L^2(\Omega) \right\}$$

On munit \mathcal{V} par la norme suivante

$$\| u \|_{\mathcal{V}} := \left(\int_{Q_T} |\nabla u(t, x)|^2 dt dx + \int_{Q_T} |u(t, x)|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

6.3 Existence d'une solution optimale

Théorème 6.1

Problème de minimisation (6.13) admet au moins une solution dans \mathcal{U}_{ad} .

Preuve

Tout d'abord notre fonctionnelle J est minorée par 0 et l'ensemble des fonctions admissibles \mathcal{U}_{ad} est non vide, donc $\lambda = \inf_{f \in \mathcal{U}_{ad}} J(f)$ en utilisant la définition de la borne inférieure on déduit qu'il existe une suite minimisante (f_n) telle que

$$\lambda \leq J(f_n) \leq \lambda + \frac{1}{n} \quad (6.14)$$

Or (f_n) est une suite dans \mathcal{U}_{ad} alors

$$\| f_n \|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} + \left\| \frac{\partial f_n}{\partial t} \right\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega)^*)} \leq C,$$

grâce au lemme de compacité d'Aubin voir [47], on peut extraire de (f_n) une sous-suite notée encore (f_n) , telle que

$$f_n \rightarrow f^* \text{ fortement dans } L^2(Q_T)$$

pour conclure il suffit de montrer que $J(f_n)$ converge vers $J(f^*)$ dans \mathbb{R} , posons $u_n = u_{f_n}$ solution du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta u_n + a(t, x)u_n + G(t, x, \nabla u_n) = f_n & \text{dans } Q_T \\ u_n(0, \cdot) = u_n(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ u_n(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \quad (6.15)$$

En multipliant (6.15) par u_n et en intégrant sur Q_T , on obtient

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u_n \right\rangle + \int_{Q_T} |\nabla u_n|^2 + \int_{Q_T} a(t, x) |u_n|^2 + \int_{Q_T} G(t, x, \nabla u_n) u_n = \int_{Q_T} f_n u_n$$

puisque u_n est périodique alors

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u_n \right\rangle = 0$$

d'après (6.5) et (6.11), on a

$$\int_{Q_T} G(t, x, \nabla u_n) u_n \geq 0$$

d'autre part, on applique l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |\nabla u_n|^2 + \int_{Q_T} a(t, x) |u_n|^2 &\leq \int_{Q_T} |f_n u_n| \\ \int_{Q_T} |\nabla u_n|^2 + a_0 \int_{Q_T} |u_n|^2 &\leq \|f_n\|_{L^2(Q_T)} \|u_n\|_{L^2(Q_T)} \\ \min(1, a_0) \|u_n\|_{\mathcal{V}}^2 &\leq C_\Omega \|f_n\|_{L^2(Q_T)} \|u_n\|_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

où C_Ω est la constante de Poincaré, on sait que (f_n) converge dans $L^2(Q_T)$, donc elle est bornée dans $L^2(Q_T)$, puis en utilisant l'inégalité de Young nous avons

$$\|u_n\|_{\mathcal{V}}^2 \leq C$$

Ce qui entraîne que (u_n) est bornée dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ et d'après (6.9) on conclut que $G(t, x, \nabla u_n)$ est bornée dans $L^2(Q_T)$, et comme

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \Delta u_n - G(t, x, \nabla u_n) - a(t, x)u_n + f_n$$

nous aurons $\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)$ bornée dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, utilisant maintenant le lemme de compacité d'Aubin [47], donc on peut extraire une sous-suite de (u_n) notée encore (u_n) , telle que $u_n \rightarrow u^*$ fortement dans $L^2(Q_T)$. Pour passer à la limite dans (6.15) il faut montrer que $u_n \rightarrow u^*$ fortement dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, pour cela, on remarque que

$$\int_{Q_T} |\nabla u_n - \nabla u|^2 = \int_{Q_T} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) - \int_{Q_T} \nabla u (\nabla u_n - \nabla u)$$

En utilisant la convergence faible de (u_n) dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} \nabla u (\nabla u_n - \nabla u) = 0.$$

D'autre part, en multipliant (6.15) par $u_n - u$ et en intégrant sur Q_T , nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u_n - u \right\rangle + \int_{Q_T} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) + \int_{Q_T} G(t, x, \nabla u_n) (u_n - u) \\ + \int_{Q_T} a(t, x) u_n (u_n - u) = \int_{Q_T} f_n (u_n - u) \end{aligned}$$

puisque u_n est périodique alors

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u_n - u \right\rangle = - \int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u \right\rangle$$

Or $\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)$ converge faiblement dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u_n - u \right\rangle = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, u \right\rangle = - \int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, u \right\rangle = 0.$$

en utilisant la convergence forte de u_n et f_n dans $L^2(Q_T)$, il vient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} f_n (u_n - u) = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} a(t, x) u_n (u_n - u) = 0$$

Ce qui implique que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} |G(t, x, \nabla u_n) (u_n - u)|$$

par application de l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |G(t, x, \nabla u_n)(u_n - u)| &\leq \|G(t, x, \nabla u_n)\|_{L^2(Q_T)} \|u_n - u\|_{L^2(Q_T)} \\ &\leq C \|u_n - u\|_{L^2(Q_T)} \end{aligned}$$

par passage à la limite, nous aurons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{Q_T} \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) \leq 0.$$

Ce qui entraîne que (u_n) converge fortement vers u^* dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Maintenant on peut passer à la limite dans (6.15), il vient d'après l'unicité de la solution du problème (6.1) que u^* satisfait le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t} - \Delta u^* + a(t, x)u^* + G(t, x, \nabla u^*) = f^* & \text{dans } Q_T \\ u^*(0, \cdot) = u^*(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ u^*(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

Finalement, on conclut que $J(f_n)$ converge vers $J(f^*)$ dans \mathbb{R} et par passage à la limite dans (6.14), on obtient

$$\lambda = J(f^*) = \inf_{f \in \mathcal{U}_{ad}} J(f)$$

6.4 Dérivation de la fonctionnelle coût

Dans cette section nous proposons de calculer la dérivée de la fonctionnelle coût J par rapport à f . Pour cela, nous utilisons la méthode de l'état adjoint [40], cette méthode consiste à introduire un Lagrangien en supposant que u et f sont indépendantes.

Le Lagrangien associé à la fonctionnelle J est définie pour tout $(f, u, p) \in \mathcal{U}_{ad} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ par la forme suivante

$$\mathcal{L}(f, u, p) = \frac{1}{2} \int_{Q_T} |u - u_{obs}|^2 + \int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, p \right\rangle + \int_{Q_T} \nabla u \nabla p + \int_{Q_T} G(t, x, \nabla u) p + \int_{Q_T} a(t, x) u p - \int_{Q_T} f p \quad (6.16)$$

Maintenant les trois variables f, u et p sont indépendantes, on dérive le Lagrangien par rapport à u pour obtenir l'équation de l'état adjoint, soit $\phi \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(f, u, p)}{\partial u}, \phi \right\rangle = & \int_{Q_T} \phi(u - u_{obs}) + \int_0^T \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t}, p \right\rangle + \int_{Q_T} \nabla \phi \nabla p \\ & + \int_{Q_T} a(t, x) p \phi + \int_{Q_T} \nabla_r G(t, x, u, \nabla u) \nabla \phi p \end{aligned}$$

lorsqu'elle s'annule nous donne l'équation de l'état adjoint

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \Delta p + \operatorname{div} \left(\nabla_r G(t, x, u, \nabla u) p \right) - a(t, x) p = u - u_{obs} & \text{dans } Q_T \\ p(0, \cdot) = p(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ p(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \quad (6.17)$$

Soit $h \in \mathcal{U}_{ad}$, on dérive le Lagrangien par rapport à f on obtient

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(f, u, p)}{\partial f}, h \right\rangle = - \int_{Q_T} h p$$

Maintenant si on prend $u = u_f$ on a

$$\mathcal{L}(f, u_f, p) = J(f) \quad \forall p \in \mathcal{V}$$

alors

$$\left\langle \frac{\partial J(f)}{\partial f}, h \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(f, u_f, p)}{\partial f}, h \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(f, u_f, p)}{\partial u}, \left\langle \frac{\partial u_f}{\partial f}, h \right\rangle \right\rangle$$

Si on prend p solution de l'état adjoint (6.17) on aura

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(f, u_f, p)}{\partial u}, \left\langle \frac{\partial u_f}{\partial f}, h \right\rangle \right\rangle = 0.$$

Ce qui implique que la dérivée de J par rapport à f est donnée par

$$J'(f).h = - \int_{Q_T} h p$$

avec p solution de l'état adjoint

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \Delta p + \operatorname{div} \left(\nabla_r G(t, x, u, \nabla u) p \right) - a(t, x) p = u - u_{obs} & \text{dans } Q_T \\ p(0, \cdot) = p(T, \cdot) & \text{dans } \Omega \\ p(t, x) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

Conclusion générale

Cette étude concerne l'existence des solutions périodiques faibles pour des problèmes quasi-linéaires paraboliques présentant deux principales propriétés : la positivité du terme source et la croissance critiques par rapport aux gradients. Naturellement, ces conditions apparaissent dans de nombreux systèmes issus de la modélisation mathématique. La nouveauté ici c'est qu'on a appliqué les résultats d'existence des solutions périodiques faibles obtenues pour la résolution des problèmes inverse de source avec conditions périodiques en temps. L'originalité ici c'est que les non-linéarités dépendent du gradient et que la positivités des solutions et préservées. Plusieurs travaux partiels d'existence des solutions périodiques faibles pour cette classe d'équations ont été obtenus avec des hypothèses supplémentaires. Essentiellement celles-ci nécessitent que le terme source soit uniformément borné, la croissance par rapport aux gradients et sous linéaire et que les sur- et sous-solutions soient régulières, ce qui est assuré en général par une structure variationnelle classique. Ce travail est principalement consacré à l'étude de l'existence globale des solutions périodiques faibles dans le cas des termes source et des sous- et sur solutions sont non réguliers et les croissances des non-linéarités sont critiques. Nous développons des méthodes originales pour surmonter de telles difficultés et nous obtenons des théorèmes d'existence pour ce type de systèmes.

Perspectives

Dans un avenir proche nous allons aborder les questions intéressantes suivantes :

- Unicité : en s'intéressant à la notion des solutions entropiques et renormalisés.
- Existence des solutions périodiques pour des problèmes parabolique avec des opérateurs du type Leray-Lions.
- Problèmes périodiques avec des conditions non linéaires sur le bord.
- L'application des méthodes numérique de minimisation pour la résolution des problèmes inverses périodiques.
- Simulation numérique.

Annexe

Lemme A.1 (lemme linéaire)

Soit le problème parabolique linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta u = g & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ (1 - \lambda)u + \lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} = \alpha & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

et si nous désignons par z la solution du problème elliptique suivant

$$\begin{cases} z - d\Delta z = 0, & \text{dans } \Omega \\ (1 - \lambda)z + \lambda \frac{\partial z}{\partial \nu} = \alpha & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors nous avons si $g \in L^p([0, T]; L^q(\Omega))$, avec $1 < p, q < \infty$, $\alpha \in C^1(\bar{\Omega})$ et $u_0 \in L^q(\Omega)$, le problème (A.1) admet une solution unique u telle que $\frac{\partial u}{\partial t}$ et Δu appartiennent à $L^p([0, T]; L^q(\Omega))$ et

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p([0, T]; L^q(\Omega))} + \|\Delta u\|_{L^p([0, T]; L^q(\Omega))} \leq C_{p,q} (\|g\|_{L^p([0, T]; L^q(\Omega))} + \|\alpha\|_{C^1(\partial\Omega)} + \|u_0\|_{L^q(\Omega)})$$

de plus u satisfait à

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0 - z\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + c \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{n}{2p}}} \|g(s) + z\|_{L^p(\Omega)} ds$$

pour tout $p > \frac{N}{2}$.

Pour une preuve, voir par exemple [8], [45], [59].

Lemme A.2

$\forall 1 < p < \infty$, $\forall 1 \leq i, j \leq m$, il existe $C_p(T - \tau) > 0$ indépendante de Θ , telle que Ψ_j solution de (2.28) vérifie

$$i) \|\Psi_j(\cdot, \tau)\|_{L^p(\Omega)}, \|\Psi_j\|_{L^p(Q(\tau, t))}, \|\Delta \Psi_j\|_{L^p(Q(\tau, t))} \leq C_p(T - \tau), \text{ où}$$

$$P\Psi_j(\cdot, t) = \begin{cases} \Psi_j(\cdot, t) & \text{si } \lambda_j > 0 \\ \Psi_j(\cdot, t) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \Psi_j(x, t) dx & \text{si } \lambda_j = 0 \end{cases}$$

$$\text{ii) } \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial\nu} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial\nu}] \leq C_p(T - \tau),$$

et si $1 < p < \frac{n+2}{2}$, $q = \frac{p(n+2)}{n+2-2p}$, alors il existe $K_q(T - \tau)$ telle que

$$\text{iii) } \|\Psi_j\|_{L^q(Q(\tau,t))} \leq K_q(T - \tau).$$

Preuve du résultat : i) et iii) se déduisent immédiatement de la définition de Ψ_j, W_j et de [45] et [38].

Pour l'estimation ii), nous avons à traiter les cas suivants :

1^{er} cas : $\lambda_i > 0$ et $\lambda_j > 0$, dans ce cas, et d'après (2.1), nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial\nu} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial\nu}] &= \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \Psi_j [\frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial\nu} + \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_i(v_i)] \\ &= \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \Psi_j [h'_i(v_i) (\frac{\alpha_i}{\lambda_i} - \frac{1 - \lambda_i}{\lambda_i} v_i) + \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_i(v_i)] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

d'après (2.16) et (2.17), il vient que $h'_i(v_i) \geq 0$, et comme $v_i \geq 0$, nous avons

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial\nu} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial\nu}] \leq \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \Psi_j [h'_i(v_i) \frac{\alpha_i}{\lambda_i} + \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_i(v_i)]$$

d'après (2.8) et (2.17)

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial\nu} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial\nu}] \leq \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \Psi_j [h'_i(N_i) \frac{\alpha_i}{\lambda_i} + \frac{1 - \lambda_j}{\lambda_j} h_i(N_i)]$$

utilisant Hölder puis i), nous obtenons

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial\nu} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial\nu}] \leq C_p(T - \tau).$$

2^e cas : $\lambda_i = \lambda_j = 0$, dans ce cas : $v_i = \alpha_i$ et $\Psi_j = 0$, et donc

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial\nu} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial\nu}] = \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} h_i(\alpha_i) (-\frac{\partial\Psi_j}{\partial\nu})$$

utilisant Hölder, le théorème de trace et i), nous obtenons ii).

3^e cas : $\lambda_i = 0$, $\lambda_j > 0$, dans ce cas, (2.22) entraîne que $\alpha_i = 0$, ainsi, et d'après (2.16), il vient que

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial\nu} - h_i(v_i) \frac{\partial\Psi_j}{\partial\nu}] = \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} \Psi_j h'_i(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial\nu}$$

comme $\Psi_j \geq 0$, $h'_i(v_i) \geq 0$ et $\frac{\partial v}{\partial \nu} < 0$, nous avons

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial \nu} - h_i(v_i) \frac{\partial \Psi_j}{\partial \nu}] \leq 0.$$

4^e cas : $\lambda_j = 0$ et $\lambda_i > 0$, dans ce cas : $\Psi_j = 0$ et d'après (2.8) et le fait que $\frac{\partial \Psi_j}{\partial \nu} < 0$, nous avons

$$\int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} [\Psi_j \frac{\partial(h_i(v_i))}{\partial \nu} - h_i(v_i) \frac{\partial \Psi_j}{\partial \nu}] = \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} h_i(\alpha_i) (-\frac{\partial \Psi_j}{\partial \nu}) \leq \int_{\tau}^T \int_{\partial\Omega} h_i(N_i) (-\frac{\partial \Psi_j}{\partial \nu})$$

on suit les mêmes démarches que dans le 2^{ème} cas pour aboutir au résultat.

Théorème A.1

Soit $f = (f_1, \dots, f_M)$ une fonction positive qui appartient à $[L^1(Q_T)]^M$. Alors il existe $\hat{w} = (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_M)$ une solution faible périodique positive du système suivant

$$\begin{cases} \hat{w}_j \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)), \\ \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial t} - d_j \Delta \hat{w}_j = f_j \text{ dans } \mathcal{D}'(Q_T), \text{ pour } j = 1, \dots, M \\ \hat{w}_j(0, \cdot) = \hat{w}_j(T, \cdot) \text{ dans } L^1(\Omega). \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Remarque A.1

Comme on le sait bien, (A.3) est linéaire et le second membre $f = (f_1, \dots, f_M)$ ne dépend pas des composantes de la solution $\hat{w} = (\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_M)$, il suffit donc de prouver le résultat du théorème A.1 pour une seule équation.

Preuve

Tout d'abord, nous définissons l'opérateur suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : L^1(\Omega) &\rightarrow L^1(\Omega) \\ v &\mapsto \hat{w}(T, \cdot), \end{aligned}$$

où \hat{w} est l'unique solution du système suivant

$$\begin{cases} \hat{w} \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)), \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} - d \Delta \hat{w} = f \text{ dans } \mathcal{D}'(Q_T), \\ \hat{w}(0, \cdot) = v \text{ dans } L^1(\Omega). \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Pour l'existence et l'unicité de \hat{w} solution de (A.4) nous référons le lecteur au [16]. Pour utiliser le point fixe Schauder, il faut montrer que \mathcal{S} est continu et compact. La compacité est une conséquence directe de [15] et pour la continuité, nous considérons une suite (v_n) dans $L^1(\Omega)$, telle que (v_n) converge fortement vers (v) dans $L^1(\Omega)$ et posons $\hat{w}_n = \mathcal{S}(v_n)$, $\hat{w} = \mathcal{S}(v)$. D'après

[16] on a l'estimation suivante

$$\| \widehat{w}_n - \widehat{w} \|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \| \widehat{w}_n - \widehat{w} \|_{L^1(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))} \leq C \| v_n - v \|_{L^1(\Omega)}$$

ce qui implique,

$$\| \widehat{w}_n(T, \cdot) - \widehat{w}(T, \cdot) \|_{L^1(\Omega)} \leq C \| v_n - v \|_{L^1(\Omega)}$$

d'où la continuité est obtenue.

Il reste à prouver l'existence d'un rayon $R_0 > 0$, tel que la boule $B(0, R_0)$ de $L^1(\Omega)$ soit invariante par \mathcal{S} . Pour cela, nous prenons y solution du problème suivant

$$\begin{cases} y \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)), \\ \frac{\partial y}{\partial t} - d\Delta y = f \text{ dans } \mathcal{D}'(Q_T), \\ y(0, \cdot) = 0 \text{ dans } L^1(\Omega). \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

de (A.4) et (A.5), nous obtenons

$$\begin{cases} (\widehat{w} - y) \in L^1(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0, T], L^1(\Omega)), \\ \frac{\partial(\widehat{w} - y)}{\partial t} - d\Delta(\widehat{w} - y) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(Q_T), \text{ pour } j = 1, \dots, M \\ (\widehat{w} - y)(0, \cdot) = v \text{ dans } L^1(\Omega). \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Selon le résultat classique de [9], la solution de (A.6) satisfait à l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \| \widehat{w}(T, \cdot) - y(T, \cdot) \|_{L^1(\Omega)} &\leq \| \widehat{w}(0, \cdot) - y(0, \cdot) \|_{L^1(\Omega)} \exp(-\lambda_1 T) \\ &\leq \| v \|_{L^1(\Omega)} \exp(-\lambda_1 T). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\| \mathcal{S}(v)(T, \cdot) \|_{L^1(\Omega)} \leq \| y(T, \cdot) \|_{L^1(\Omega)} + \| v \|_{L^1(\Omega)} \exp(-\lambda_1 T),$$

où λ_1 est la première valeur propre de $-d\Delta$ avec condition de Dirichlet sur le bord. Pour obtenir l'existence d'un point fixe de \mathcal{S} , il suffit de choisir

$$R_0 \geq \frac{\| y(T, \cdot) \|_{L^1(\Omega)}}{1 - \exp(-\lambda_1 T)}.$$

Ceci termine la preuve.

Bibliographie

- [1] N. Alaa and M. Pierre, *Weak solutions for some quasi-linear elliptic equations with data measures*, SIAM J. Math. Anal. **24** (1993), 23-35.
- [2] N. Alaa and M. Iguernane, *Weak periodic solutions of some quasilinear parabolic equations with data measure*, J. of Inequalities in Pure and Applied Mathematics **3** (2002), no. **3**, Article 46.
- [3] N. Alaa, J.R. Roche, *Theoretical and numerical analysis of a class of nonlinear elliptic equations*. Mediterr. J. Math, **2**,(2005), 327-344 .
- [4] N. Alaa, S. Mesbahi, *Existence result for triangular Reaction-Diffusion systems with L^1 data and critical growth with respect to the gradient*, Mediterr. J. Math. **10** (2013), 255-275.
- [5] N. Alaa, "Contribution à l'Etude d'Equation Elliptiques et Paraboliques Avec Données Mesures", Thèse de Doctorat d'Etat, Université Cadi Ayyad, 1996.
- [6] N. Alaa and I. Mounir, *Global Existence for Reaction-Diffusion with Mass Control and Critical Growth with Respect to the Gradient*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 253, 532-557 (2001).
- [7] N. D. Alikakos, *L^p -Bounds of Solutions of Reaction-Diffusion Equations*, Comm. Partial Differential Equations 4, pp. 827-868, (1979).
- [8] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in order Banach spaces*, SIAM Rev., 18(1976), pp. 660-709.
- [9] H. Amann, *Dual semigroups and second order linear elliptic boundary value problems*, Israel J. Math, **45** (1983), pp. 225-254.
- [10] H. Amann, *Periodic solutions of semilinear parabolic equations*, Nonlinear Analysis, Academic Press, New York, 1978, pp. 1-29.
- [11] M. Avrami, *Kinetics of phase change*, J. Chem. Phys. **I (7)** (1939) 1103-1112. **II(8)** (1940) 212-224, **III(9)** (1941) 177.
- [12] M. Badii, *Periodic solutions for a nonlinear parabolic equation with nonlinear boundary conditions*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 67 (2009), no. **3**, 341-349.
- [13] M. Badii, J.I. Diaz, *On the time periodic free boundary associated to some nonlinear parabolic equations*. Boundary Value Problems. Boundary Value Problems, Volume 2010.
- [14] D.W. Bange, *Periodic Solution of a Quasilinear Parabolic Differential Equation*, J. Differential Equation, **17** (1975), pp. 61-72.

-
- [15] P. Baras, J. C. Hassan, and L. Veron, *Compacité de l'opérateur définissant la solution d'une équation non homogène*, C.R. Acad. Sci. Paris Sere. **A 284**, 799-802, 1977.
- [16] P. Baras and M. Pierre, *Problèmes paraboliques semi-linéaires avec données mesures*. *Applicable Analysis*, (1984), Vol. **18**, 111-149.
- [17] A. J. Bard, L. R. Faulkner, *Electrochimie : Principes, méthodes et applications*, Masson, Paris (1983)
- [18] L. Boccardo, F. Murat and J. P. Puel, *Existence results for some quasilinear parabolic equations*. *Nonlinear Analysis Theory Method and Applications* **13** (1989), 373-392.
- [19] J. O'M. Bockris, D. Drazic, and A. R. Despic, *Electrochim. Acta*, **4**, 325 (1961)
- [20] J.L. Boldrini, J. Crema, *On forced periodic solutions of superlinear quasi-parabolic problems*, *Electron. J. Differential Equations*, 1998 **14** (1998), pp. 1-18.
- [21] N. Boudiba, *Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion paraboliques quasilineaires*, Thèse de troisième cycle, Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene d'Alger, **1995**.
- [22] A. Brenner, *Electrodeposition of alloys*, Vol I, Academic Press, New York (1963)
- [23] T. Cardinali and N. S. Papageorgiou, *Periodic problems and problems with discontinuities for nonlinear parabolic equations*, *Czech.Math. J.*, **50**, No. **125**, 467-497 (2000).
- [24] A. Charkaoui, G. Kouadri, O. selt, N. Alaa, Existence results of weak periodic solution for some quasilinear parabolic problem with L^1 data. *Annals of the University of Craiova Mathematics and Computer Science Series* **46** (2019) (Accepted).
- [25] A. Charkaoui, G. Kouadri, N. Alaa, Some Results on The Existence of Weak Periodic Solutions For Quasilinear Parabolic Systems With L^1 Data. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática* (Accepted).
- [26] G. Duvaut, *Mécanique des milieux continus*, Masson, 1990.
- [27] A.Dall'Aglio-L. Orsina, *Nonlinear Parabolic Equations with Naturel Growth Conditions and L^1 Data*, *Nonlinear Analysis*, **27** (1996), pp. 59-73.
- [28] R. Dautray and J. L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume **8**. Masson, 1988.
- [29] J. Deuel and P. Hess, *Nonlinear Parabolic Boundary Value Problems with Upper and Lower Solutions*, *Israel Journal of Mathematics*. Vol. **29**, N°1, (1978).
- [30] P. Five, *Solutions of parabolic boundary problems existing for all times*, *Arch. Rational Mech. Anal.* **16**. 1964, 155-186.
- [31] W. E. Fitzgibbon, J. Morgan, R. Sanders, Global existence and boundedness for a class of inhomogeneous semilinear parabolic systems, *Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications*, vol.19, No.9, pp. 885-899, 1992.
- [32] T. Inoue, S. Nagaki, T. Kishino, M. Monkawa, *Description of transformation kinetics, heat conduction and elastic-plastic stress in the course of quenching and tempering of some steels*, *Ing. Arch.* **50** (1981) 315-327.
-

-
- [33] D. Gangasingh and J. B. Talbot, *J. Electrochem. Soc.* 140, 669 (1993)
- [34] W.C. Grande and J. B. Talbot, *J. Electrochem. Soc.* 140, 675 (1993)
- [35] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations.* Yale University Press, 1923.
- [36] P. Hess, *Periodic-Parabolic Boundary Value Problem and Positivity*, Pitman Res. Notes Math Ser. **247**. New York : Longman Scientific and Technical, 1991.
- [37] S. Hessami and C. W. Tobias, *J. Electrochem. Soc.* 136, 3611 (1989)
- [38] S. Hollis, R. H. Martin, and M. Pierre, Global existence and boundedness in reaction-diffusion system, *SIAM J. Math. Anal.* 18 (1987), 744-761.
- [39] J. Horkans, *J. Electrochem. Soc.* 126, 1861(1979).
- [40] M. Kern, *Problèmes inverses*, École supérieure d'ingénieurs Léonard De Vinci 2002.
- [41] Ju. S. Kolesov, *Periodic solutions of quasilinear parabolic equations of second order*, *Trans. Moscow Math. Soc.* **21**. 1970, 114-146.
- [42] G. Kouadri, A. Charkaoui, S. Med Said, N. Alaa, Modeling and mathematical analysis of quench-heat conduction in metallic materials, *J. Adv. Math. Stud.* **11** (2018), no. 2, 316–330.
- [43] T. Krause, L. Arulnayagam, and M. Pritzker, *J. Electrochem. Soc.* 144, 960 (1997)
- [44] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonikov, and N. N. Ural'ceva, "Linear and Quasi Linear Equations of Parabolic Type," Translation on Mathematical Monographs, Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, 1968.
- [45] D. Lamberton, Equation d'évolution linéaires associées à des semi-groupes de contractions dans les espaces L^p , *Journal of functional analysis* 72, 252-262 (1987).
- [46] V. G. Levich, *Physiochemical Hydrodynamics*, Printece-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1962)
- [47] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris(1969).
- [48] Li and Hui, *Periodic solutions of a quasilinear parabolic equation with nonlinear convection terms*. *Advances in Difference Equations* 2012 **2012** :206.
- [49] S. Logan, *Introduction à la cinétique chimique, Cours et exercices corrigés*, Dunod, 1998.
- [50] R. H. Martin and M. Pierre, Nonlinear reaction-diffusion systems, in "Nonlinear Equations in the Applied Sciences" (W. F. Ames, C. Gogers, and Kapell, Eds.). Academic Press, San Diego, 1992.
- [51] P. Marchand, *Graphics and GUIs with MATLAB*, CRS Press LLC, 1999.
- [52] K. Masuda, On the Global Existence and Asymptotic Behavior of Reaction-Diffusion Equations, *Hokkaido Math. J.* 12, pp. 360-370, (1983).
-

-
- [53] J. Matulis and R. Slyzys, *J. Electrochem. Soc.* **9**, 1177 (1964)
- [54] M. Matlosz, *J. Electrochem. Soc.* **140**, 2272 (1993)
- [55] J. Morgan, Global existence for semilinear parabolic system, *SIAM J. Math. Anal.* **20** (1989), 1128-1144.
- [56] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, **19**, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [57] M. Nakao, *On boundedness, periodicity, and almost periodicity of solutions of some nonlinear parabolic equations*, *J. Differential Equations* **19**. 1975, 371-385.
- [58] C.V. Pao, *Periodic solutions of parabolic systems with nonlinear boundary conditions*, *J. Math Anal. App.* **234** (1999), 695-716.
- [59] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, *Applied Math. Sciences*, **44**, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [60] M. Pierre, *Global existence in reaction-diffusion systems with dissipation of mass*, a survey, to appear in *Milan Journal of Mathematics*.
- [61] A. Porretta, *Existence results for nonlinear parabolic equations via strong convergence of truncations*, *Annali di Matematica pura ed applicata* **IV**, Vol. 1989, 143-172.
- [62] M. Pierre, An L^1 method to prove global existence in some reaction-diffusion systems, in *Contributions to nonlinear partial differential equations*, J. I et P. L. Lions, ed Pitman Res. Notes in Math. Series, pp. 220-231 (1987).
- [63] M. Pierre and D. Schmitt, "Existence globale ou explosion pour les systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse," Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy I, 1995.
- [64] M. Ramasubramanian, S. N. Popova, B. N. Popova, R. E. White, and K.-M. Yin, *J. Electrochem. Soc.* **143**, 2164 (1996)
- [65] M.A. Rincon, J. Límaco, I-Shih Liu, *A nonlinear heat equation with temperature-dependent parameters*, *Math. Phys. Electron. J. (MPEJ)* **12** (2006). Paper 5.
- [66] F. Rothe, *Global solutions of reaction-diffusion systems*, lecture notes in Math **1072**, Springer Verlage(1984).
- [67] L. Sainsaulieu, *Calcul Scientifique, Cours et exercices corrigés*, Masson, 1996.
- [68] H. Schultz, and M. Pritzker, *J. Electrochem. Soc.* **145**, 2033 (1998)
- [69] J. SIMON, *Compact sets in $L^p(O, T; B)$* , *Ann. Mat. Pura Appl.* **146** (4) (1987), pp.65-96.
- [70] M.G. Teixeira, M.A. Rincon, I.-S.Liu *Numerical analysis of quenching Heat conduction in metallic materials*, *Applied Mathematical Modelling*, vol **33**, pp 2464-2473.
- [71] A. Tikhonov and V. Arsénine. *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*. Éditions Mir, Moscow, 1976. Traduit du russe par Vladimir Kotliar.
- [72] C. W. Tobias, M. Eisenberg, and C .R. Wilke, *J. Electrochem. Soc.* **99**, 359c (1952)
-

- [73] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, Differential Operators*, North-Holland Mathematical Library, 1978.
- [74] R. Y. Ying, P. K. Ng, Z. Mao, and R.E. White, *J. Electrochem. Soc.* 135, 2964 (1988)