
N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Université Mohamed Khider-Biskra



FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE LA NATURE ET DE LA VIE

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme

DOCTORAT EN SCIENCES

En : Mathématiques

SPÉCIALITÉ : ANALYSE

Equations aux Dérivées Partielles

Par : MOHAMMED EL HADI MEZABIA

Thème

**Modélisation du problème de Signorini avec frottement
pour une coque piézoélectrique anisotrope
et non homogène.**

Soutenue le // 2019

Devant le jury composé de :

Meraghni	Djamal	Pr	Université Mohamed Khider-Biskra	Président
Chacha	Djamal Ahmed	Pr	Université Kasdi Merbah- Ouargla	Rapporteur
Benabderrahamene	Benyattou	Pr	Université Mohamed Boudiaf de M'Sila	Examinateur
Khelil	Nacer	MCA	Université Mohamed Khider-Biskra	Examinateur
Bensayah	Abdallah	MCA	Université Kasdi Merbah- Ouargla	Examinateur

Remerciements

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds à mon encadreur Monsieur Chacha Djamel Ahmed, professeur à l'université Kasdi Marbah Ouargla qui m'a proposé le sujet de ce travail son aide et ses conseils ont été pour moi un soutien très précieux. Je tiens plus à le remercier pour sa compétence, sa rigueur, ainsi que pour le caractère novateur de ses idées.

J'adresse mes remerciements les plus chaleureux et sincères à mon co-encadreur Monsieur Abderrezak Ghezal professeur à l'université Kasdi Merbah ouargla, pour son aide et sa compétence m'ont encouragé à poursuivre mes travaux de recherche, on le remercie aussi à la confiance qu'il m'a accordé et ses conseils.

Comme je tiens à remercier vivement, mes professeurs Monsieur Meraghni Djamel professeur à l'université Mohamed Khider-Biskra, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse, et Monsieur Khelil Nacer maitre de conférences A à l'université de Mohamed Khider-Biskra, pour l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à ma thèse en acceptant de participer au jury en tant qu'examineur.

Mes remerciements s'adressent au professeur Benyattou Benabderrahmane professeur à l'université de M'sila pour l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à ma thèse en acceptant de participer au jury en tant qu'examineur.

Je tiens à remercier Monsieur BENSAYAH Abdallah maitre de conférences A à l'université Kasdi Merbah ouargla, pour l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à ma thèse en acceptant de participer au jury en tant qu'examineur.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes amis et toute ma famille

Table des matières

Remerciements	2
0.1 Notations	6
0.2 Introduction	8
I ANALYSE ASYMPTOTIQUE DES COQUES MINCES	11
1 Élasticité tridimensionnelle	13
1.1 Les équations d'équilibre	13
1.1.1 Les lois de comportement	17
1.2 Définition de la surface moyenne	20
2 Modélisation asymptotique du problème de Signorini d'une coque mince linéarisée	23
2.1 Description de la géométrie d'une coque mince	23
2.2 Le cas sans frottement	24
2.2.1 Problème classique $(\hat{P}^\varepsilon.C)$	24
2.2.2 Problème variationnel $(\hat{P}^\varepsilon.V)$	26
2.2.3 Problème variationnel $(\hat{P}^\varepsilon.V)$ en coordonnées curvilignes	26
2.2.4 Passage à un domaine de référence	28
2.2.5 Identification d'un problème variationnel bidimensionnel	30
2.2.6 Modèle de coque membranaire	31
2.3 Le cas avec frottement de Coulomb	36
2.3.1 Problème classique $(\hat{P}^\varepsilon.C)$	36
2.3.2 Problème variationnel $(\hat{P}^\varepsilon.V)$	37
2.3.3 Problème variationnel $(\hat{P}^\varepsilon.V)$ en coordonnées curvilignes	37
2.3.4 Position du problème variationnel sur un domaine indépendant de l'épaisseur	38
2.3.5 Modèle de coque membranaire	39

3	Etude de la convergence des solutions du problème variationnel mis à l'échelle $P(\varepsilon, \Omega)$ pour une coque elliptique membranaire.	45
3.1	Le cas de contact sans frottement	45
II	ANALYSE ASYMPTOTIQUE DES COQUES MINCES PIÉZOÉLECTRIQUES	55
4	ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU PROBLEME DE CONTACT AVEC FROTTEMENT POUR LES COQUES PEU- PROFONDES PIÉZOÉLECTRIQUES	59
4.1	Position du problème	59
4.2	L'inégalité variationnelle	61
4.2.1	L'inégalité variationnelle dans $\widehat{\Omega}^\varepsilon$	61
4.2.2	L'inégalité variationnelle dans Ω^ε	63
4.3	Analyse asymptotique	64
4.3.1	L'inégalité variationnelle dans Ω	64
4.3.2	Convergence	66
4.4	Modèle bidimensionnel	68
4.4.1	L'inégalité variationnelle dans ω	68
4.4.2	Le problème découplé	69
4.4.3	La formulation forte dans ω	71
4.5	Conclusion et commentaire	72
5	Problème de Signorini pour les coques piézoélectriques tridimensionnelles	74
5.1	Géométrie différentielle tridimensionnelle	74
5.1.1	Cadre physique	74
5.1.2	Description de la géométrie et des efforts envisagés	74
5.1.3	Formulation du problème	75
5.2	Existence et unicité d'une solution	77
5.2.1	Deux formulations variationnelles du problème	77
5.2.2	Problème homogène	79
5.2.3	Théorème d'existence et d'unicité	80
6	Modélisation asymptotique du problème de Signorini d'une coque mince piézoélectriques	83
6.1	Préliminaires aux méthodes asymptotiques	83
6.2	Le cas de contact sans frottement	84
6.2.1	Passage à un domaine de référence	85
6.2.2	Méthode des développements asymptotiques	86
6.2.3	Le problème membranaire	94
6.3	Conclusion	103

Notations et conventions

0.1 Notations

Dans toute la suite de cette thèse, nous utiliserons les conventions suivantes :

- ▶ les indices latins (i, j, k, \dots) varient de 1 à 3.
- ▶ les indices grecs ($\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \dots$) varient de 1 à 2.
- ▶ les composantes contravariantes d'un vecteur (ou d'un tenseur) sont notées avec des indices supérieurs et les composantes covariantes avec indices inférieurs. La convention de sommation sur les indices répétés est utilisée.
- ▶ $u_i v^i = \sum_{i=1}^{i=3} u_i v^i$.
- ▶ $u = (u_i)$ vecteur de composantes u_i .
- ▶ $u \cdot v = u_i v_i$ produit scalaire euclidien.
- ▶ n normale unitaire extérieure.
- ▶ $u_N = u \cdot n$ la composante normale du déplacement.
- ▶ $u = (u_T, u_N)$, u_T la composante tangentielle du déplacement.
- ▶ $\sigma_N = (\sigma(u)n)n$ la composante de la force de pression appliquée sur une section de normale n .
- ▶ $\sigma(u)n = (\sigma_T, \sigma_N)$, σ_T la composante tangentielle du vecteur $\sigma(u)n$.
- ▶ $\partial_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ dérivée de u_j par rapport à x_i .
- ▶ $\text{div} \sigma(u) = \partial_j \sigma_{ij} e_i$ divergence du tenseur $\sigma(u)$.
- ▶ $|u| = \sqrt{u \cdot u}$ norme vectorielle euclidienne.
- ▶ $A = (A_{ijkl})$: tenseur de rigidité d'ordre 4 .
- ▶ $D(\Omega)$: l'espace des fonctions testes. Ω domaine (ouvert borné connexe de frontière Lipshitzienne) de \mathbb{R}^3 .
- ▶ ω : domaine (ouvert borné connexe de frontière Lipshitzienne) de \mathbb{R}^2 .
- ▶ S : la surface moyenne de Ω .
- ▶ (a_1, a_2, a_3) : (resp. (a^1, a^2, a^3)) base covariante (resp. contravariante) associée à la surface moyenne S .
- ▶ (g_1, g_2, g_3) : (resp. (g^1, g^2, g^3)) base covariante (resp. contravariante) associée à Ω .
- ▶ $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$: composantes covariantes du tenseur métrique et du tenseur de courbure associées à S .

➤ g_{ij} : (*resp.* g^{ij}) composantes covariantes (*resp.* contravariante)du tenseur métrique associées à Ω .

- S désigne une surface dans l'espace Euclidien habituel.
- $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ désignent les symboles de Christoffel.
- Γ_0 désigne une partie de la frontière de mesure non nulle.
- le triplet (a^1, a^2, a^3) forme la base contravariante en tout point de S .
- $C(\Omega)$ espace des fonctions continues définies sur Ω .
- $C^k(\Omega)$, $k > 0$ espace des fonctions continues définies sur Ω , dont les dérivées partielles d'ordres $\leq k$ sont continues .
- $C^\infty(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω
- $\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact.
- \mathcal{D}' : l'espace des distributions.
- \rightharpoonup : la convergence faible.
- $H^s(\Omega)$: espace de Sobolev d'ordre s .
- $b(u, v)$: la forme bilinéaire d'énergie de déformation en flexion.
- $a(u, v)$: la forme bilinéaire d'énergie de déformation membranaire.
- ε : l'épaisseur ou le rapport de l'épaisseur à une autre dimension de la coque
- \mathbb{M}^3 : ensemble des matrices d'ordre 3.
- $\mathbb{M}_+^3 = \{A \in \mathbb{M}^3, \det A > 0\}$.
- \mathbb{S}^3 : ensemble des matrices symétriques d'ordre 3.
- $\mathbb{S}_>^3$: ensemble des matrices symétriques définie-positive d'ordre 3.
- \mathbb{O}^3 : ensemble des matrices orthogonales d'ordre 3.
- $\mathbb{O}_+^3 = \{R \in \mathbb{O}^3, \det R = 1\}$.

Introduction générale

0.2 Introduction

Dans la plupart des systèmes de la mécanique des structures, il existe des situations dans lesquelles un corps déformable entre en contact avec d'autres corps. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsqu'elles subissent ces forces.

Il est évident que le caractère de ce contact peut jouer un rôle fondamental dans le comportement de la structure : sa déformation, son mouvement, la distribution des efforts, etc... . Le contact unilatéral des corps solides, avec ou sans frottement, est une contrainte mécanique souvent rencontrée en modélisation. Citons par exemple le frottement d'une tôle dans un procédé d'emboutissage, le contact d'un pneu sur la route, le déploiement d'un airbag. le problème de contact unilatéral (dit de Signorini) qui est issu de la mécanique des structures et où les inéquations portent sur la frontière. La condition de contact a été formulée par Signorini [51] en 1959. La formulation variationnelle associée à ce type de condition a été étudiée mathématiquement par Fichera [24] en 1964. Ensuite, viennent les travaux de G.Duvaut et J.L.Lions [21] qui ont rajouté le frottement aux problèmes de contact et ils ont pu écrire ce problème sous forme d'un problème de minimisation de fonctionnelle quadratique dans le cas d'un frottement de Tresca (i.e.avec un seuil de frottement fixe qui ne dépend pas de la contrainte normale). Dans [21], on peut trouver aussi des résultats d'existence et d'unicité pour le problème dit de Signorini (sans frottement).

Le premier résultat d'existence de solutions pour le problème de Signorini avec frottement a été établi au début des années 80. Nečas, Jaršek et Haslinger [43] ont prouvé un résultat d'existence pour une barre élastique en dimension deux sous la condition d'un coefficient de frottement assez petit. Des résultats plus généraux sont donnés ensuite par *Jarušek* [32], Kato [33], Eck et *Jarušek* [23]. Récemment, R. Hassani, P.Hild et I.Ionescu [30] ont trouvé des conditions de non unicité des solutions. Récemment, Y.Renard [45] a donné un critère d'unicité de solution pour le problème de contact avec frottement. Ce résultat est très important pour la recherche de solutions multiples.

On désigne par structures minces les corps solides dont l'une des dimensions (l'épais-

seur, le diamètre) est petite devant les autres dimensions. Ce sont les plaques, les coques, les barres, les filaments.... L'intérêt pour une modélisation fine de ces structures est d'autant plus grand que le nombre des applications industrielles va croissant. Une modélisation fine doit prendre en compte la faible épaisseur où le diamètre et en déduire des simplifications au modèle de départ qui est tridimensionnel. De nombreux modèles bidimensionnels où unidimensionnels ont ainsi été décrits depuis plus d'un siècle. Ces cas ont été proposés par Kirchhoff, Love, Novozhilov-Donnell, Donnell-Mushtari-Vlasov, Cossierat, Naghdi, Mindlin, Reissner, Von Kármán Marguerre-Von Karman et Koiter. Suivant quelques hypothèses, ils ont proposé des modèles. Parmi ces modèles les modèles de Kirchhoff-Love et Mindlin-Reissner. Dans les quarante dernières années, Ciarlet et Destuynder [14] et ses collaborateurs se sont attachés à donner des justifications mathématiques à ces modèles et à en construire de nouveaux. L'étude d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince contre un obstacle rigide avec frottement de coulomb a été faite par Dhia [19] en utilisant une méthode de pénalisation. En 2002; Paumier [40] réalise une modélisation asymptotique d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince encastrée, de modèle de Kirchhoff-Love, contre un obstacle rigide où il a prouvé que ce problème tridimensionnel avec frottement tend vers un problème bidimensionnel sans frottement. Parmi les questions posées par Paumier[40] : "is this approach valid for shells and rods". Léger et Miara [36] et [35] ont étudié pour les coques peu profonde en élasticité linéaire sans frottement par l'utilisation de la méthode de convergence.

La piézoélectricité peut être considérée comme une interaction entre deux phénomènes électromécaniques qui couplent les champs élastique et électrique . Une déformation mécanique du matériau génère un champ électrique, c'est l'effet direct de piézoélectricité où effet capteur. Inversement, l'application d'un champ électrique, ou d'une différence de potentiel, induit des déformations mécaniques, c'est l'effet inverse de piézoélectricité ou effet actionneur. Ces phénomènes de piézoélectricité ont été découverts en 1880 par les frères Jacques et Pierre Curie.

Il y a beaucoup de matériaux, naturels ou synthétiques, pouvant être polarisés pour exhiber ces propriétés piézoélectriques, ce qui offre une diversité et une flexibilité pour une grande variété d'application. Par exemple, la peau et les os ont de telles propriétés .

Notre système sensoriel au bout des doigts provoque la création d'un potentiel électrique à la surface de la peau qui est transmis au cerveau par le système nerveux; la formation des os et leur destruction sont déclenchées par les propriétés électromécanique de l'os par lesquelles le signal électrique orchestre la synthèse de microstructures viables avec les propriétés mécaniques appropriées.

Parmi les matériaux piézoélectriques les plus utilisés dans les applications, on trouve les piézocéramiques et les piézopolymères, dont les zirconates titanates (PZT) et les polyvinylidène fluorides (PVDF) sont des exemples représentatifs . Les PZT, de par leur nature céramique, ont des rigidités comparables, et souvent supérieure, à celles des structures auxquelles ils sont fixés. Une de ces conséquences est un bon rendement de la conver-

sion de l'énergie électrique en énergie mécanique, d'où un rôle actionneur très efficace, qui, même si les forces générées sont inférieures à celles d'autres matériaux tels que les magnétostrictifs, s'avère suffisant pour des structures minces.

Première partie

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DES COQUES MINCES

Introduction

Cette première partie de la thèse présente l'étude variationnelle et asymptotique d'un problème statique de contact unilatéral d'une coque mince élastique contre un obstacle rigide avec les conditions de complémentarité dites les conditions de Signorini et ceci sur la partie condidate au contact. Ce qui reste du bord est divisé en deux parties, une subit une force surfacique, l'autre est encastrée. Chaque fois, on fait l'étude du problème sans frottement puis avec frottement.

On débute notre travail par un chapitre qui comporte l'étude variationnelle de ce problème en supposant, en général, un corps élastique. Puis on établit un théorème d'existence et d'unicité dans le cas sans frottement et un théorème d'existence dans le cas avec frottement non local (loi de Tresca) puis local (loi de Coulomb). Et tout ceci dans le cadre de l'élasticité linéaire.

Dans le deuxième chapitre on va garder la même situation que celle du premier chapitre en remplaçant le corps élastique par une coque élastique mince. Ce chapitre est divisé en trois sections. La première section comporte la géométrie des coques minces. Dans la deuxième section, on part du problème classique formulé en coordonnées cartésiennes et puisque les coordonnées curvilignes sont mieux adaptées pour les coques, on reformule le problème variationnel en coordonnées curvilignes et ceci dans le cas sans frottement. Dans la troisième section on fait la même procédure pour le cas avec frottement de Coulomb.

Dans le troisième chapitre, on garde la position du problème du chapitre précédent tout en proposant l'étude asymptotique des modèles bidimensionnels "membranaire" et "couplé flexion-membrane" pour des coques dans le cadre de l'élasticité linéaire, toujours en distinguant simultanément le cas sans frottement et le cas avec frottement de Coulomb. Au dernier chapitre on fait l'étude de la convergence. Enfin une conclusion qui comporte les résultats essentiels et quelques perspectives.

Chapitre 1

Élasticité tridimensionnelle

Soit Ω un ouvert borné connexe de R^3 de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ suffisamment régulière et soit $\bar{\Omega}$ l'adhérence de Ω dans R^3 . Dans tout la suite, l'ensemble $\bar{\Omega}$ représentera le volume occupé par un solide "non déformé" et sera appelé configuration de référence. Nous noterons x un point courant de l'ensemble $\bar{\Omega}$, de composantes x_i dans la base canonique $\{e_i\}$ de \mathbb{R}^3 , et $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ la dérivée partielle par rapport à la variable x_i .

La structure est encastrée sur une partie de sa frontière $\Gamma_0 \subset \Gamma$ de $\partial\Omega$ - mesure non nulle et est soumise à une distribution surfacique de force h sur Γ_- de telle sorte que $\Gamma_0 \cap \Gamma_- = \emptyset$, et de densité de force volumique f .

Les aspects mécaniques du problème sont de deux sortes; les équations d'équilibre sont déduites de principes mécaniques généraux ne faisant pas intervenir la nature du matériau, les lois de comportement dépendent du matériau considéré et traduisent les relations "contraintes-déformations"

1.1 Les équations d'équilibre

Nous appellerons déformation de la configuration de référence une application $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow R^3$ suffisamment régulière, injective, et préservant l'orientation, c'est à dire vérifiant (voir Ciarlet P.G.[8]) :

$$\det \nabla \varphi(x) > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (1.1)$$

A toute déformation φ , nous associons un déplacement u , qui est le champ de vecteurs $u : \bar{\Omega} \rightarrow R^3$ défini par la relation :

$$\varphi(x) = x + u(x). \quad (1.2)$$

L'ensemble $\bar{\Omega}^\varphi = \varphi(\bar{\Omega})$ est appelé configuration déformée, sa frontière $\Gamma^\varphi = \varphi(\Gamma)$. Notons $F : \bar{\Omega} \rightarrow M_3^+$ le gradient de la déformation φ , $F = \nabla \varphi = I_3 + \nabla u$.

Si φ est une déformation dérivable au point $x \in \bar{\Omega}$, le tenseur des déformations de Cauchy-Green à droite $C = \nabla \varphi^T \nabla \varphi$, apparaît en quantité :

$$|\varphi(x + \delta x) - \varphi(x)|^2 = \delta x^T \nabla \varphi^T(x) \nabla \varphi(x) \delta x + o(|\delta x|^2), \quad x, x + \delta x \in \bar{\Omega}, \quad (1.3)$$

il joue un rôle fondamental en théorie de l'élasticité.

On dit que φ est une déformation rigide, si $\nabla\varphi(x) = Q, \forall x \in \bar{\Omega}$, telle que Q est une matrice orthogonale et $\det Q > 0$; on a alors $C = I_3$ dans $\bar{\Omega}$ (voir théorème 1.1.2, Ciarlet [8]).

Lemme 1.1

Soit $V \subset \Omega$ un ouvert, de frontière ∂V suffisamment régulière, et soit $A \subset \partial V$, alors : pour $V^\varphi = \varphi(V)$, élément de volume,

$$\int_{V^\varphi} dx^\varphi = \int_V |\det \nabla \varphi(x)| dx, \quad (1.4)$$

et pour $A^\varphi = \varphi(A)$,

$$\int_{A^\varphi} da^\varphi = \int_A |\text{Cof} \nabla \varphi(x) n(x)| da, \quad (1.5)$$

où :

n : le vecteur normal extérieur unitaire le long de ∂V .

Preuve

Voir ([13], Theorem 1.3-1).

Théorème 1.1

Soit $T^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{M}^3$ le champ de tenseurs, et soit $T(x) = T^\varphi(x^\varphi) \text{Cof} \nabla \varphi(x)$ la transformée de Piola, alors :

$$\text{div} T(x) = \det \nabla \varphi(x) \text{div}^\varphi T^\varphi(x^\varphi), \quad (1.6)$$

avec :

$$\text{div}^\varphi = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i^\varphi},$$

et donc :

$$\int_{\partial V} T \cdot n da = \int_V \text{div} T dx = \int_{V^\varphi} \text{div}^\varphi T^\varphi dx^\varphi = \int_{\partial V^\varphi} T^\varphi \cdot n^\varphi da^\varphi. \quad (1.7)$$

Preuve

Voir ([13], Theorem 1.7-1).

Introduisons enfin le tenseur des déformations de Green-Saint-Venant E (voir Ciarlet [13])

$$E(u) = \frac{1}{2}(C - I_3) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) + \nabla u \cdot \nabla u^T, \quad (1.8)$$

il l'écart entre une déformation donnée et une déformation rigide. Le tenseur E est symétrique $E_{ij} = E_{ji}$.

Dans le tenseur des déformations apparait une partie linéaire (par rapport au déplacement u) et une partie non linéaire. La partie linéaire :

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad (1.9)$$

est appelée tenseur linéarisé des déformations et intervient dans la théorie linéaire de l'élasticité (dans le cadre des petites déformations).

Nous supposons que le corps occupant une configuration déformée $\overline{\Omega}^\varphi$ est soumis à deux types de forces appliquées, forces appliquées de volume, correspondant à un champ de vecteurs $f^\varphi : \Omega^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ et forces appliquée de surfaces définies sur une portion $\Gamma_-^\varphi = \varphi(\Gamma_-)$ de la frontière Γ^φ , correspondant à un champ de vecteurs $h^\varphi : \Gamma_-^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Remarque 1 Pour des questions de compatibilité avec le point de vue mécanique, il est nécessaire que φ soit un difféomorphisme global de Ω sur $\varphi(\Omega)$ et que φ préserve l'orientation, une condition à imposer est donc que :

$$\det \nabla \varphi(x) > 0 \text{ pour tout } x \in \overline{\Omega}. \quad (1.10)$$

Réciproquement, la condition $\det \nabla \varphi(x) > 0$ entraîne que localement, φ est un difféomorphisme qui préserve l'orientation, mais cette seule hypothèse est insuffisante pour obtenir un résultat d'inversibilité global (Voir [13] theorem 1.2-2).

D'après le théorème de Cauchy qui est lui-même une conséquence de l'axiome connu sous le nom de principe des contraintes d'Euler-Cauchy, l'état d'équilibre statique de la configuration déformée est traduite par :

Il existe :

$$t^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (1.11)$$

tel que :

Pour tout $A^\varphi \subset \Omega^\varphi$,

$$\int_{A^\varphi} f^\varphi dx^\varphi + \int_{\partial A^\varphi} t^\varphi(x^\varphi, n^\varphi(x^\varphi)) da^\varphi = 0, \quad (1.12)$$

$$\int_{A^\varphi} x^\varphi \wedge f^\varphi dx^\varphi + \int_{\partial A^\varphi} x^\varphi \wedge t^\varphi(x^\varphi, n^\varphi(x^\varphi)) da^\varphi = 0, \quad (1.13)$$

$$t^\varphi(x^\varphi, n^\varphi(x^\varphi)) = h^\varphi(x^\varphi), \quad (1.14)$$

pour $\partial \Omega^\varphi$ - presque partout $x^\varphi \in \partial A^\varphi \cap \Gamma_-^\varphi$, où :

$n^\varphi(x^\varphi)$ est le vecteur normal extérieur unitaire le long de ∂A^φ en x^φ , ($n^\varphi(x^\varphi)$ existe dx^φ -presque partout, $x^\varphi \in \partial A^\varphi$) et $S_2 = \{v \in \mathbb{R}^3; |v| = 1\}$.

Théorème 1.2

Si $t^\varphi(., n^\varphi) : \overline{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ est de classe C^1 pour tout $n^\varphi \in S_2$,

$t^\varphi(x^\varphi, .) : S_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est continue pour tout $x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi$, et $f^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ est continue.

Alors :

$t^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est linéaire pour la deuxième variable.

Preuve

(Voir [13] .,theorem 2.3-1).

Autrement dit, il existe $T^\varphi : \bar{\Omega}^\varphi \rightarrow \mathbb{M}^3$ de classe C^1 tel que :
 $t^\varphi(x^\varphi, n^\varphi) = T^\varphi(x^\varphi)n^\varphi$, pour tout $x^\varphi \in \bar{\Omega}^\varphi$ et pour tout $n^\varphi \in S_2$,
 T^φ est appelé tenseur des contraintes de Cauchy.

Les équations d'équilibre dans la configuration déformée $\bar{\Omega}^\varphi$ doivent être satisfaites :

Théorème 1.3

$$-div T^\varphi(x^\varphi) = f^\varphi(x^\varphi) \text{ pour tout } x^\varphi \in \Omega^\varphi, \quad (1.15)$$

$$T^\varphi(x^\varphi)n^\varphi(x^\varphi) = h^\varphi(x^\varphi) \text{ pour tout } x^\varphi \in \Gamma_-^\varphi, \quad (1.16)$$

$$T^\varphi(x^\varphi) \in \mathbb{S}^3 \text{ pour tout } x^\varphi \in \Omega^\varphi \quad (1.17)$$

Preuve

(Voir [13], theorem 2.4-1).

Pour passer à la variable $x \in \bar{\Omega}$ ($x^\varphi = \varphi(x)$) tout en préservant autant que possible la forme "de divergence" des équations, on introduit la transformée de Piola du champ de tenseurs T^φ : c'est le champ de tenseurs $T = (t_{ij}) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{M}^3$.

On a :

$$dx^\varphi = |det \nabla \varphi(x)| dx, \quad (1.18)$$

$$n^\varphi da^\varphi = Cof \nabla \varphi(x) n(x) da, \quad (1.19)$$

et on définit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $h : \Gamma_- \rightarrow \mathbb{R}^3$, par :

$$f^\varphi(x^\varphi) dx^\varphi = f(x) dx, \quad (1.20)$$

$$h^\varphi(x^\varphi) da^\varphi = h(x) da. \quad (1.21)$$

On fera désormais l'hypothèse que les forces appliquées sont "mortes", dans le sens que les champs $f^\varphi, h^\varphi, f, h$ sont indépendants de la déformation φ .

En supposant que φ suffisamment régulière et utilisant le changement de variables dans (1.12), on déduit que :

pour tout $A \subset \Omega$,

$$\int_A f(x) dx + \int_{\partial A} T^\varphi(\varphi(x)) Cof \nabla \varphi(x) n(x) da = 0. \quad (1.22)$$

On définit T par :

$$T(x) = T^\varphi(\varphi(x)) Cof \nabla \varphi(x) \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}, \quad (1.23)$$

il est appelé en élasticité le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

Donc :

$$\int_A f(x) dx + \int_{\partial A} T(x) n(x) da = 0. \quad (1.24)$$

et T vérifie les équations d'équilibre dans la configuration de référence $\bar{\Omega}$:

$$-divT(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \Omega, \quad (1.25)$$

$$T(x)n(x) = h(x) \text{ pour tout } x \in \Gamma_-. \quad (1.26)$$

$$\nabla\varphi(x)^{-1}T(x) \in \mathbb{S}^3 \text{ pour tout } x \in \Omega \quad (1.27)$$

où :

$$\Gamma_- \subset \partial\Omega \text{ et } \Gamma_-^\varphi = \varphi(\Gamma_-). \quad (1.28)$$

Un inconvénient du premier tenseur de Piola-Kirchhoff est son absence de symétrie, alors que le tenseur de Cauchy est symétrique. On "récupère" cette symétrie en introduisant le champ de tenseur $\Sigma = (\sigma_{ij}) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}^3$ défini par :

$$\Sigma(x) = \nabla\varphi(x)^{-1}T(x) \text{ pour tout } x \in \Omega. \quad (1.29)$$

Le tenseur Σ , est appelé en élasticité le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, il est évidemment symétrique; on déduit en effet immédiatement de (1.25) – (1.27) les équations suivantes, qui représentent l'autre forme des équations d'équilibre dans la configuration de référence $\bar{\Omega}$:

$$-div(\nabla\varphi(x)\Sigma(x)) = f(x) \text{ pour tout } x \in \Omega, \quad (1.30)$$

$$(\nabla\varphi(x)\Sigma(x))n(x) = h(x) \text{ pour } x \in \Gamma_-. \quad (1.31)$$

$$\Sigma \in \mathbb{S}^3 \text{ pour tout } x \in \Omega. \quad (1.32)$$

Ce qui équivaut à :

$$-\partial_j(\sigma_{ij}) = f_i \text{ dans } \Omega, \quad (1.33)$$

$$(\sigma_{ij})n_j = h_i \text{ sur } \Gamma_-, \quad (1.34)$$

en utilisant les relations :

$$\partial_j\varphi_i = \delta_{ij} + \partial_j u_i. \quad (1.35)$$

1.1.1 Les lois de comportement

Les lois de comportement expriment les relations qui existent entre le second tenseur de Piola-Kirchhoff σ et le tenseur des déformations de Green Saint-Venant . Ces relations dépendent de la nature du matériau.

On suppose dans toute la suite que l'ensemble $\bar{\Omega}$ dans la configuration de référence est occupé par un matériau élastique.

Définition 1.1

On dit qu'un matériau occupant l'ensemble $\bar{\Omega}$ dans la configuration initiale est élastique s'il existe une fonction $\hat{T} : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{M}^3$, tel que :

$$T(x) = \hat{T}(x, \nabla\varphi(x)) \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}, \quad (1.36)$$

\hat{T} : est dite loi de comportement du premier tenseur de Piola – Kirchhoff.

Ce qui équivaut à, il existe une fonction $\hat{\Sigma} : \bar{\Omega} \times \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$, tel que :

$$\Sigma(x) = \hat{\Sigma}(x, \nabla\varphi(x)) \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}, \quad (1.37)$$

$\hat{\Sigma}$: est dite loi de comportement du second tenseur de Piola -Kirchhoff.

Théorème 1.4

Un matériau élastique satisfait le principe de l'indifférence matérielle si et seulement si :

$$\hat{T}(x, QF) = Q\hat{T}(x, F) \quad (1.38)$$

pour tout $x \in \bar{\Omega}$, $Q \in \mathbb{O}_+^3$ et $F \in \mathbb{M}_+^3$

Ce qui équivaut :

$$\hat{\Sigma}(x, QF) = \hat{\Sigma}(x, F), \quad (1.39)$$

pour tout $x \in \bar{\Omega}$, $Q \in \mathbb{O}_+^3$ et $F \in \mathbb{M}_+^3$.

Preuve

(Voir [13], Theorem 3.3.1)

De (1.39), on déduit que :

$\hat{\Sigma}$ dépend de F uniquement par la matrice $U = (F^T F)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{S}_>^3$.

D'où on en déduit que :

$$\hat{\Sigma}(x, F) = \hat{\Sigma}(x, U), \quad (1.40)$$

pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $F = RU \in \mathbb{M}_+^3$.

Ce qui implique que, le second tenseur des contraintes de Piola - Kirchhoff Σ dépend de φ uniquement par le tenseur métrique $C = \nabla\varphi^T \nabla\varphi$.

D'où :

$$\Sigma(x) = \tilde{\Sigma}(x, C(x)) \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}, \quad (1.41)$$

où : $\tilde{\Sigma} : \bar{\Omega} \times \mathbb{S}_>^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ est défini par :

$$\tilde{\Sigma}(x, C) = \hat{\Sigma}(x, C^{\frac{1}{2}}), \quad (1.42)$$

pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $C \in \mathbb{S}_{>}^3$.

Définition 1.2

Lorsque le matériau est quelconque et ne possède pas de symétrie élastique, il est dit anisotrope. Un matériau anisotrope est caractérisé par 21 constantes élastiques indépendantes. C'est la relation de comportement qui lie les contraintes aux déformations.

Définition 1.3

Un matériau est isotrope en $x \in \bar{\Omega}$ si les propriétés du matériau "sont les mêmes dans toutes les directions"; il s'agit donc d'une caractéristique d'un matériau donné, mais vraisemblablement "raisonnable" pour certains matériaux, c'est une propriété de symétrie matérielle.

Remarque 1

Un matériau occupant la configuration de référence $\bar{\Omega}$ est isotrope s'il est isotrope en tout les points de $\bar{\Omega}$.

Théorème 1.5

Un matériau élastique occupant la configuration de référence $\bar{\Omega}$ est isotrope si et seulement si :

$$\hat{T}(x, FQ) = \hat{T}(x, F)Q, \quad (1.43)$$

pour tout $x \in \bar{\Omega}$, $Q \in \mathbb{O}_+^3$ et $F \in \mathbb{M}_+^3$.

Ce qui équivaut à :

$$\hat{\Sigma}(x, FQ) = Q^T \hat{\Sigma}(x, F)Q, \quad (1.44)$$

pour tout $x \in \bar{\Omega}$, $Q \in \mathbb{O}_+^3$ et $F \in \mathbb{M}_+^3$.

Preuve

(Voir [13], theorem 3.4-1).

Définition 1.4

Un matériau élastique occupant la configuration de référence $\bar{\Omega}$ est homogène si sa loi de comportement est indépendante du point $x \in \bar{\Omega}$ considéré.

Ce qui équivaut à :

ils existent; $\hat{T} : \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{M}^3$ et $\hat{\Sigma} : \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$, tels que :

$$\hat{T}(x, F) = \hat{T}(F), \quad (1.45)$$

et

$$\hat{\Sigma}(x, F) = \hat{\Sigma}(F), \quad (1.46)$$

pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $F \in \mathbb{M}_+^3$.

La configuration de référence $\bar{\Omega}$ est un état naturel (les contraintes sont libres), si

$$\widehat{T}(x, I) = 0 \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}. \quad (1.47)$$

Ce qui équivaut à :

$$\widehat{\Sigma}(x, I) = 0 \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}. \quad (1.48)$$

Théorème 1.6

Si un matériau est isotrope et satisfait le principe de l'indifférence matérielle, alors il existe des fonctions $\gamma_i^\sharp : \Omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, telle que :

$$\sum(x) = \gamma_0(x)I + \gamma_1(x)C(x) + \gamma_2(x)C^2(x) \text{ pour tout } x \in \bar{\Omega}. \quad (1.49)$$

Où $\gamma_i(x) = \gamma_i^\sharp(x, \text{tr}C, \text{tr}(C \text{ of } C), \det C)$

Preuve

(Voir [13], theorem 3.7-1).

1.2 Définition de la surface moyenne

Soit \mathcal{E}^3 l'espace euclidien habituel rapporté à un repère orthonormé fixe (O, e_1, e_2, e_3) , et soit ω un sous-ensemble ouvert borné du plan \mathcal{E}^2 dont la frontière est notée γ . Alors, la surface moyenne \bar{S} de la coque est l'image dans \mathcal{E}^3 de l'ensemble $\bar{\omega}$ (ω est appelé domaine de référence) par l'application θ :

$$\theta : (\zeta^1, \zeta^2) \in \bar{\omega} \subset \mathcal{E}^2 \rightarrow \theta(\zeta^1, \zeta^2) \in \bar{S} \subset \mathcal{E}^3.$$

Notons $\partial S = \theta(\gamma)$, de telle sorte que $\bar{S} = S \cup \partial S$, et supposons θ et γ suffisamment régulières. En particulier, nous supposons que tous les points de la surface moyenne $\bar{S} = \theta(\bar{\omega})$ sont réguliers de telle sorte que les vecteurs,

$$a_\alpha = \frac{\partial \theta}{\partial \zeta^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2,$$

sont linéairement indépendants pour tous les points $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2) \in \bar{\omega}$. Ces deux vecteurs définissent le plan tangent à la surface \bar{S} en tout point $\theta(\zeta)$. Le vecteur normal au plan tangent est donné par,

$$a_3 = \frac{a_1 \times a_2}{|a_1 \times a_2|}.$$

En désignant par $|\cdot|$ la norme euclidienne dans l'espace ξ^3 équipé du produit scalaire habituel $(a, b) \rightarrow a \cdot b$, alors, le point $\theta(\zeta)$ et les trois vecteurs a_i définissent un repère local pour la surface moyenne (voir figure 1.1), i.e., la base covariante attachée au point $\theta(\zeta)$.

Nous désignerons par $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ les première et seconde formes fondamentales de la surface moyenne S ; autrement dit,

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = a_\alpha a_\beta$$

$$b_{\alpha\beta} = a_3 \cdot \partial_\alpha a_\beta = -\partial_\alpha a_3 \cdot a_\beta = b_{\beta\alpha}$$

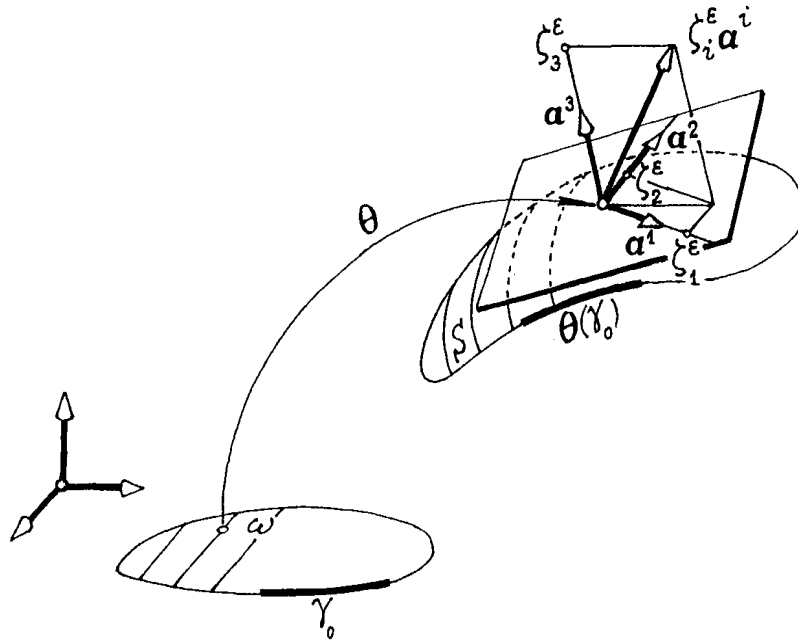


FIGURE 1.1 – Définition de la surface moyenne

Dans toute la suite, nous utiliserons des lettres grecques, α, β, \dots , pour des indices prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2\}$, des lettres latines, i, j, \dots , pour les indices prenant leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et nous adoptons la convention de sommation sur les indices répétés haut et bas. Aux vecteurs a_α , nous associons deux autres vecteurs a^β du plan tangent définis par,

$$a_\alpha \cdot a^\beta = \delta_\alpha^\beta,$$

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}, \quad (1.50)$$

Ces vecteurs sont reliés aux vecteurs a_α par les relations,

$$a_\alpha = a_{\alpha\beta} a^\beta, \quad a^\alpha = a^{\alpha\beta} a_\beta, \quad a^{\alpha\beta} = a^\alpha a^\beta = a^{\beta\alpha},$$

où la matrice $(a^{\alpha\beta})$ est l'inverse de la matrice $(a_{\alpha\beta})$. Cette matrice inverse est bien définie car tous les points de la surface moyenne S sont supposés réguliers.

L'ensemble (a^1, a^2, a^3) définit la base contravariante attachée au point $\theta(\zeta)$.

Pour un tenseur donné, les tenseurs métriques $(a_{\alpha\beta})$ et $(a^{\alpha\beta})$ nous permettent d'associer les composantes covariantes, contravariantes et mixtes d'un tenseur donné. Par exemple, aux composantes covariantes $b_{\alpha\beta}$ de la seconde forme fondamentale, nous pouvons associer les composantes mixtes et la contravariantes correspondantes

$$b_{\alpha}^{\beta} = a^{\beta\lambda} b_{\lambda\alpha}; \quad b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\lambda} a^{\beta\nu} b_{\lambda\nu},$$

et inversement,

$$b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\lambda} = a_{\alpha\lambda} a_{\beta\nu} b^{\lambda\nu}.$$

Étant donné que les bases (a_1, a_2, a_3) et (a^1, a^2, a^3) ne sont en général ni normées ni orthogonales, il est commode d'introduire les symboles de Christoffel $\Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha}$ par,

$$\Gamma_{\beta\sigma}^{\alpha} = a^{\alpha} \partial_{\beta} a_{\sigma} = -\partial_{\beta} a^{\alpha} a_{\sigma} = \Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha}.$$

Il est également commode de préciser les expressions de quelques produits vectoriels des fonctions de base :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\alpha} \times a_{\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} a^3; \quad a^{\alpha} a^{\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} a_3 \\ a_3 \times a_{\beta} = \varepsilon_{\beta\lambda} a^{\lambda}; \quad a_3 \times a^{\beta} = \varepsilon^{\beta\lambda} a_{\lambda}, \end{array} \right. \quad (1.51)$$

on définit

$$a = a_{11} a_{22} - (a_{12})^2 \neq 0 \text{ (points réguliers),}$$

et on définit l'élément d'aire dS de la surface moyenne par,

$$dS = |a_1 \times a_2| d\zeta^1 d\zeta^2 = \sqrt{a} d\zeta^1 d\zeta^2.$$

Remarque 2

(Liens entre $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ et les courbures de la surface moyenne.)

La première forme fondamentale $a_{\alpha\beta}$ est attachée aux caractéristiques métriques de la surface moyenne tandis que la seconde forme fondamentale $b_{\alpha\beta}$ est attachée aux caractéristiques de courbure de cette surface moyenne. Ces formes $a_{\alpha\beta}$ et $b_{\alpha\beta}$ sont naturellement dépendantes du choix de la représentation θ choisie.

Chapitre 2

Modélisation asymptotique du problème de Signorini d'une coque mince linéarisée

Introduction

Ce chapitre est divisé en trois sections. La première section comporte la géométrie des coques minces. Dans la deuxième section, on part du problème classique formulé en coordonnées cartésiennes et puisque les coordonnées curvilignes sont mieux adaptées pour les coques, on reformule le problème variationnel en coordonnées curvilignes et ceci dans le cas sans frottement. Dans la troisième section on fait la même procédure pour le cas avec frottement de Coulomb.

2.1 Description de la géométrie d'une coque mince

Soit $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$, $\varepsilon > 0$, un domaine ouvert borné de \mathbb{R}^3 ; tel que ω est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 , avec une frontière assez régulière γ . On note la frontière latérale de Ω par $\Gamma_0^\varepsilon = \gamma \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ la face supérieure et la face inférieure sont notées, respectivement par Γ_+^ε et Γ_-^ε . Soit $\theta^\varepsilon : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une fonction de classe C^3 . La configuration de référence de la coque est $\left\{ \widehat{\Omega}^\varepsilon \right\}^-$, où $\widehat{\Omega}^\varepsilon = \Theta(\Omega^\varepsilon)$, $\widehat{x}^\varepsilon = \Theta(x^\varepsilon)$, $\Theta(x^\varepsilon) = \theta(x_1, x_2) + x_3^\varepsilon a_3(x_1, x_2)$ pour tout $x^\varepsilon = (x_1, x_2, x_3^\varepsilon) \in \bar{\Omega}^\varepsilon$ et a_3^ε est le vecteur unitaire normal à la surface moyenne $\widehat{\omega} = \Theta^\varepsilon(\bar{\omega})$ de la coque (voir figure 2.1)¹, pour ε assez petit, l'application $\Theta^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \rightarrow \Theta^\varepsilon(\bar{\Omega}^\varepsilon)$ est un C^1 -difféomorphisme (voir [13]) et on suppose aussi qu'elle préserve l'orientation, i.e $\det \nabla^\varepsilon \Theta(x^\varepsilon) > 0, \forall x^\varepsilon \in \bar{\Omega}^\varepsilon$.

On suppose que $\bar{\Omega}^\varepsilon$ est occupé par un corps linéairement élastique, homogène et isotrope (voir chapitre 1, définition (1.1),(1.3) et(1.4)). Dans sa configuration naturelle : une coque d'épaisseur 2ε dont les constantes de Lamé sont notées par $\lambda > 0, \mu > 0$ et sont supposées indépendantes de ε . On suppose que la coque en question est soumise à des

1. Cette figure et toutes les figures suivantes sont prises de [12]

forces volumiques de densité $\widehat{f}^\varepsilon \in (L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon))^3$, sa face inférieure $\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Gamma_-^\varepsilon)$ soumise à des forces surfaciques de densité $\widehat{h}^\varepsilon \in (L^2(\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon))^3$ sa face latérale est encastrée uniquement sur $\Theta^\varepsilon(\gamma_0 \times [-\varepsilon, \varepsilon])$ qui est une partie non vide de $\widehat{\Gamma}_0^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Gamma_0^\varepsilon)$ représentant sa face latérale totale. On suppose aussi que cette coque entre en contact unilatéral sur sa face supérieure $\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Gamma_+^\varepsilon)$ contre une fondation rigide $D^\varepsilon = \{x^\varepsilon \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2) \in \omega, x_3 \geq \widehat{d}^\varepsilon\}$, où $(\widehat{d}^\varepsilon \geq 0)$ est la fonction d'interstice définie sur $\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon$ et qui désigne la distance entre la face supérieure et la fondation rigide mesurée dans la direction normale, Λ son coefficient de frottement. On suppose aussi que le système est en état statique.

Tout au long de cette thèse, les indices et exposants grecs varient dans l'ensemble $\{1, 2\}$ et les indices et exposants latins varient dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et la convention de sommation d'Einstein par rapport aux indices et exposants répétés est systématiquement utilisées, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_i^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_i^\varepsilon}$, $\widehat{\partial}_i^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial \widehat{x}_i^\varepsilon}$, $\widehat{n}^\varepsilon = (\widehat{n}_i^\varepsilon)$ est la normale unitaire extérieure le long de la frontière de la coque $\widehat{\Omega}^\varepsilon$. On note par l'indice T la composante tangentielle, et par l'indice N la composante normale; (ν_α) et (τ_α) sont respectivement la normale unitaire extérieure et le vecteur tangent unitaire tels que $\tau_1 = -\nu_2$ et $\tau_2 = \nu_1$ le long de la frontière de l'ensemble ω . Les opérateurs différentiels de la dérivée normale extérieure et de la dérivée tangentielle $\nu_\alpha \partial_\alpha$ et $\tau_\alpha \partial_\alpha$ long de γ sont notées par ∂_ν et ∂_τ . Dans toute la suite, on utilise la convention de notation suivante : les notations comportant un chapeau sont exprimées dans un système de coordonnées cartésiennes, celles sans chapeau étant exprimées dans un système de coordonnées curvilignes, Soit $\widehat{u}_N^\varepsilon$ (respectivement $\widehat{G}_N^\varepsilon$) représente la composante normale du déplacement de contact (respectivement, pression) sur $\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon$. La fonction $\widehat{u}_N^\varepsilon$ (respectivement, $\widehat{G}_N^\varepsilon$) est la composante le long de \widehat{n}^ε (respectivement, $\widehat{n}^\varepsilon \otimes \widehat{n}^\varepsilon$) de la trace sur $\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon$ du champ de déplacement (respectivement, du champ de contrainte).

2.2 Le cas sans frottement

Nous utilisons une décomposition classique du vecteur de déplacement $\widehat{u}^\varepsilon = (\widehat{u}_i^\varepsilon)$ et du tenseur des contraintes $\widehat{\sigma}^\varepsilon = (\widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon)$ sur $\partial\widehat{\Omega}^\varepsilon$ comme suit

$$\begin{aligned}\widehat{u}_N^\varepsilon &= \widehat{u}^\varepsilon \widehat{n}^\varepsilon, \quad \widehat{u}_T^\varepsilon = \widehat{u}^\varepsilon - \widehat{u}_N^\varepsilon \widehat{n}^\varepsilon \\ \widehat{G}_N^\varepsilon &= \widehat{\sigma}^\varepsilon \widehat{n}^\varepsilon \cdot \widehat{n}^\varepsilon = \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \widehat{n}_j^\varepsilon \widehat{n}_i^\varepsilon, \quad \widehat{G}_T^\varepsilon = \widehat{\sigma}^\varepsilon \widehat{n}^\varepsilon - \widehat{G}_N^\varepsilon \widehat{n}^\varepsilon\end{aligned}$$

2.2.1 Problème classique ($\widehat{P}^\varepsilon.C$)

Le problème classique de l'équilibre d'une coque linéairement élastique tridimensionnelle $\widehat{\Omega}^\varepsilon$, en contact unilatéral sans frottement avec la fondation rigide sur la frontière $\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon$ est

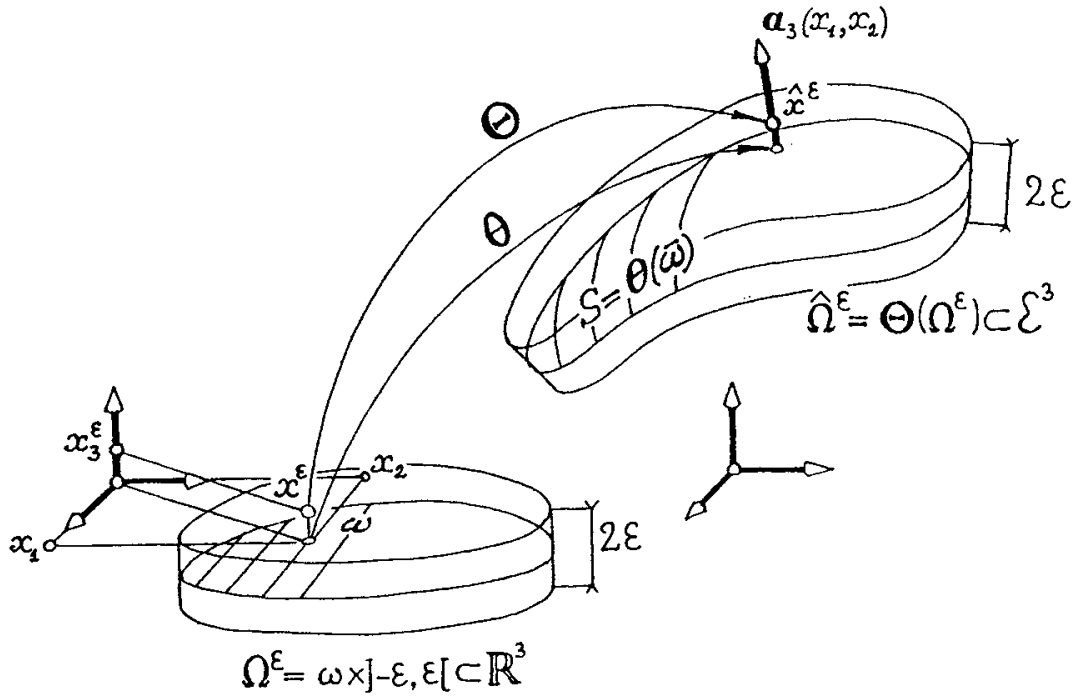


FIGURE 2.1 – Transformation du domaine

formulé comme suit :

$$\widehat{P}^\varepsilon . C \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \widehat{u}^\varepsilon \text{ telque :} \\ -\widehat{\partial}_j^\varepsilon \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) = \widehat{f}_i^\varepsilon \text{ dans } \widehat{\Omega}^\varepsilon \\ \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) \widehat{n}_j^\varepsilon = \widehat{h}_i^\varepsilon \text{ sur } \widehat{\Gamma}_- \\ \widehat{u}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \widehat{\Gamma}_0 \\ \widehat{u}_N^\varepsilon \leq \widehat{d}^\varepsilon, \widehat{G}_N^\varepsilon \leq 0, \widehat{G}_N^\varepsilon(\widehat{u}_N^\varepsilon - \widehat{d}^\varepsilon) = 0, \widehat{G}_T^\varepsilon = 0 \text{ sur } \widehat{\Gamma}_+ \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où

$$\widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) = \widehat{A}^{ijkl, \varepsilon} \widehat{e}_{kl}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon), \quad (2.2)$$

$$\widehat{A}^{ijkl, \varepsilon} = \lambda^\varepsilon \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu^\varepsilon (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) : \lambda^\varepsilon, \mu^\varepsilon \text{ coefficients élastiques de Lamé,} \quad (2.3)$$

$$\widehat{e}_{ij}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2} (\widehat{\partial}_i^\varepsilon \widehat{u}_j^\varepsilon + \widehat{\partial}_j^\varepsilon \widehat{u}_i^\varepsilon) \text{ composantes du tenseur de déformation linéarisé.} \quad (2.4)$$

Remarque 3

$\widehat{G}_N^\varepsilon$ présente la densité de force de pression et $\widehat{G}_T^\varepsilon$ la densité des forces de frottement.

2.2.2 Problème variationnel ($\widehat{P}^\varepsilon.V$)

Théorème 2.1

Le problème ($\widehat{P}^\varepsilon.C$) est formellement équivalent au problème ($\widehat{P}^\varepsilon.V$)

$$\widehat{P}^\varepsilon.V \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{G}_N^\varepsilon) \in \mathbf{K}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \times H^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon) \text{ telque :} \\ \widehat{a}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon) = \widehat{L}^\varepsilon(\widehat{v}^\varepsilon) + \langle \widehat{G}_N^\varepsilon, \widehat{v}_N^\varepsilon \rangle \quad \forall \widehat{v}^\varepsilon \in \mathbf{V}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \\ \langle \widehat{G}_N^\varepsilon, \widehat{v}_N^\varepsilon - \widehat{u}_N^\varepsilon \rangle \geq 0, \quad \forall \widehat{v}^\varepsilon \in \mathbf{K}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \end{array} \right.$$

(2.5)

$$\begin{aligned} \widehat{a}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon) &= \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{A}^{ijkl,\varepsilon} \widehat{e}_{kl}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(\widehat{v}) d\widehat{x}^\varepsilon \\ \widehat{L}^\varepsilon(\widehat{v}) &= \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{f}_i^\varepsilon \widehat{v}_i d\widehat{x}^\varepsilon + \int_{\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon} \widehat{h}_i^\varepsilon \widehat{v}_i d\widehat{\Gamma}^\varepsilon \\ &\langle \cdot, \cdot \rangle \text{représente le produit de la dualité sur } \widehat{\Gamma}_+^\varepsilon, \\ \mathbf{V}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) &= \{ \widehat{v}^\varepsilon = (\widehat{v}_i^\varepsilon) \in \mathbf{H}^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon), \widehat{v}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \widehat{\Gamma}_0^\varepsilon, \}, \mathbf{H}^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon) = (H^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon))^3 \\ \mathbf{K}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) &= \{ \widehat{v}^\varepsilon \in \mathbf{V}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) / \widehat{v}_N^\varepsilon \leq \widehat{d}^\varepsilon \text{ sur } \widehat{\Gamma}_+^\varepsilon \} \end{aligned}$$

Preuve

(Voir [21])

Remarque 4

Le problème (2.5) est équivalent à l'inéquation variationnelle :

$$\widehat{a}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon - \widehat{u}^\varepsilon) \geq \widehat{L}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon - \widehat{v}^\varepsilon)$$

dans $K(\widehat{\Omega}^\varepsilon)$ qui admet une solution unique sous les conditions $\widehat{f}_i^\varepsilon \in L^2(\widehat{\Omega}^\varepsilon)$ et $\widehat{h}_i^\varepsilon \in L^2(\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon)$, cette solution réalise le minimum de la fonctionnelle :

$$\widehat{I}(\widehat{v}^\varepsilon) = \frac{1}{2} \widehat{a}^\varepsilon(\widehat{v}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon) - \widehat{L}^\varepsilon(\widehat{v}^\varepsilon)$$

2.2.3 Problème variationnel ($\widehat{P}^\varepsilon.V$) en coordonnées curvilignes

On note par \widehat{e}^i la base canonique de \mathbb{R}^3 et $(g^{m,\varepsilon}(x^\varepsilon))$ sa base contravariante au point \widehat{x}^ε , définie par $g_i^\varepsilon(x^\varepsilon) \cdot g^{j,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \delta_i^j$, dont la base covariante est $(g_i^\varepsilon(x^\varepsilon))$ donnée par $g_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = \partial_i^\varepsilon \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon) \quad \forall x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$. On note respectivement les symboles de Christoffel et les composantes covariantes et contravariantes du tenseur métrique par

$\Gamma_{ij}^{k,\varepsilon} = \partial_i^\varepsilon g_j^\varepsilon \cdot g^{k,\varepsilon}$, $g_{ij}^\varepsilon = g_i^\varepsilon \cdot g_j^\varepsilon$, $g^{ij,\varepsilon} = g^{i,\varepsilon} \cdot g^{j,\varepsilon}$, l'élément de volume de $\Theta^\varepsilon(\widehat{\Omega}^\varepsilon)$ est $\sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon$, où

$g^\varepsilon = \det(g_{ij}^\varepsilon)$. On note aussi les composantes contravariantes des forces volumiques et surfaciques respectivement par $\widehat{f}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i = f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)g_i^\varepsilon(x^\varepsilon) \forall x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon$, $\widehat{h}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i = h^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon)g_i^\varepsilon(x^\varepsilon) \forall x^\varepsilon \in (\Gamma_-^\varepsilon)$. Les composantes de chaque champs de vecteurs $\widehat{v}^\varepsilon = (\widehat{v}_i^\varepsilon) \in \mathbf{V}(\widehat{\Omega}^\varepsilon)$ sont données par $\widehat{v}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i = v_i^\varepsilon(x^\varepsilon)g^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon), \forall \widehat{x}^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon) \in \{\widehat{\Omega}^\varepsilon\}^-$, et on utilise les relations $v_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = \widehat{v}_j^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)[g_i^\varepsilon(x^\varepsilon)]^j$ où $[g_i^\varepsilon(x^\varepsilon)]^j$ est la j^{eme} composante du vecteur $g_i^\varepsilon(x^\varepsilon)$. Pour plus de détails (voir [13] et [12]) (voir figure 2.2).

Pour tout $\widehat{v}_N^\varepsilon \in H^{\frac{1}{2}}(\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon)$ on a $\widehat{v}_N^\varepsilon = \widehat{v}_i^\varepsilon \widehat{n}^{i,\varepsilon} = (v_3^\varepsilon g^{3,\varepsilon})(g_3^\varepsilon) = v_3^\varepsilon \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+^\varepsilon)$.

On définit ϕ_3^ε dans l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+^\varepsilon)$ pour tout $v_3^\varepsilon \in (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_+^\varepsilon))$ par $\langle \phi_3^\varepsilon, v_3^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} \rangle = \langle \widehat{\phi}_N^\varepsilon, \widehat{v}_N^\varepsilon \rangle$ pour tout $\widehat{v}^\varepsilon \in (H^{\frac{1}{2}}(\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon))^3$.

Soient (u_i^ε) les composantes covariantes du champs de vecteurs $\widehat{u}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i$ et $G^{i,\varepsilon}$ les composantes contravariantes du champs de vecteurs $\widehat{G}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i$. On transforme le problème précédent écrit en coordonnées cartésiennes $\widehat{x}^\varepsilon = (\widehat{x}_i^\varepsilon)$ en un problème écrit en coordonnées curvilignes $x^\varepsilon = (x_i^\varepsilon)$ mieux adaptées à l'étude des coques est décrite par la proposition suivante.

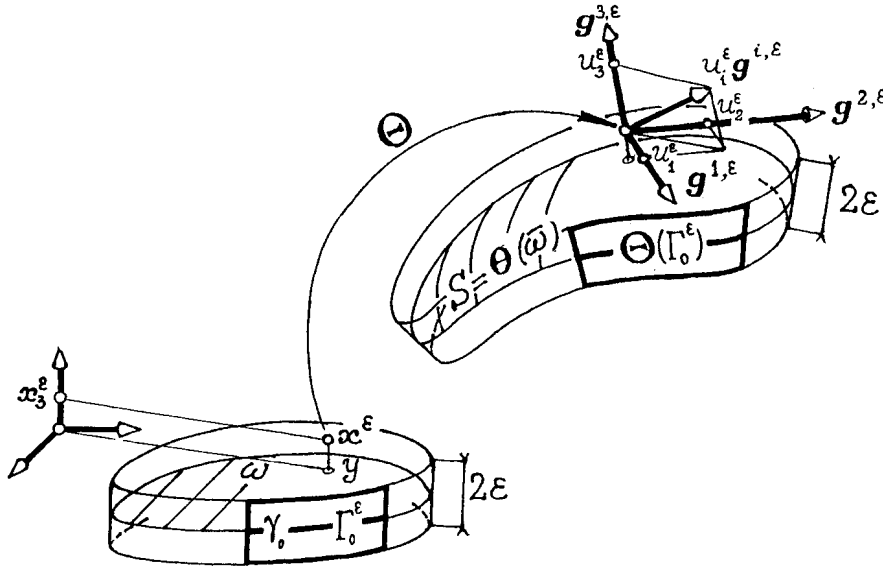


FIGURE 2.2 – Coordonnées curvilignes

Proposition 2.1

Soit (u_i^ε) les composantes covariantes du champ vectoriel $\widehat{u}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i$ et $G^{i,\varepsilon}$ les composantes contravariantes du champ vectoriel $\widehat{G}_i^\varepsilon(\widehat{x}^\varepsilon)\widehat{e}^i$ alors le problème variationnelle $(\widehat{P}^\varepsilon \cdot V)$ en coordonnées curvilignes est formulé sous la forme suivante :

$$(P^\varepsilon \cdot V) \begin{cases} \text{Trouver } (u^\varepsilon, G^{3,\varepsilon}) \in \mathbf{K}(\Omega^\varepsilon) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+^\varepsilon) \text{ telque :} \\ a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = L^\varepsilon(v^\varepsilon) + \langle G^{3,\varepsilon}, v_3^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} \rangle \quad \forall v^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) \\ \langle G^{3,\varepsilon}, (v_3^\varepsilon - u_3^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3^\varepsilon \in K(\Omega^\varepsilon) \end{cases} \quad (2.6)$$

où

$$\begin{aligned} a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) &= \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijkl,\varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(v^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon, \quad A^{ijkl,\varepsilon} = \lambda g^{ij,\varepsilon} g^{kl,\varepsilon} + \mu (g^{ik,\varepsilon} g^{jl,\varepsilon} + g^{il,\varepsilon} g^{jk,\varepsilon}) \\ e_{i||j}^\varepsilon(v^\varepsilon) &= \frac{1}{2}(v_{i||j}^\varepsilon + v_{j||i}^\varepsilon), \quad v_{i||j}^\varepsilon = \partial_j^\varepsilon v_i^\varepsilon - \Gamma_{ij}^{k,\varepsilon} v_k^\varepsilon \\ L^\varepsilon(v^\varepsilon) &= \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_-^\varepsilon} h^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} d\Gamma^\varepsilon \\ \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) &= \{v^\varepsilon = (v_i^\varepsilon) \in \mathbf{H}^1(\Omega^\varepsilon), v^\varepsilon = 0 \text{ on } \Gamma_0^\varepsilon\} \\ \mathbf{K}(\Omega^\varepsilon) &= \{v^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) / v_3^\varepsilon \leq d^\varepsilon \text{ on } \Gamma_+^\varepsilon\}, \quad d^\varepsilon = \widehat{d}^\varepsilon \end{aligned}$$

Preuve

(voir [21])

2.2.4 Passage à un domaine de référence

On considère le domaine fixe $\Omega = \omega \times]-1, +1[$ indépendant du paramètre d'épaisseur ε . A tout point $x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3)$ de $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$, on associe le point $x = (x_1, x_2, x_3)$ de Ω par $x_\alpha^\varepsilon = x_\alpha$ et $x_3^\varepsilon = \varepsilon x_3$.

On définit les ensembles suivants :

$$\Omega = \omega \times]-1, +1[\text{ ainsi que } \Gamma = \gamma \times]-1, +1[, \quad \Gamma_0 = \gamma_0 \times]-1, +1[\text{ et } \Gamma_\pm = \omega \times \{\pm 1\}.$$

On note $x = (x_i)$ un point de $\overline{\Omega}$ et on pose $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

On construit l'application π^ε bijective de $\overline{\Omega}$ dans $\overline{\Omega}^\varepsilon$ de la façon suivante [voir figure(2.3)] :

$$\pi^\varepsilon : x = (x_1, x_2, x_3) \in \overline{\Omega} \longrightarrow \pi^\varepsilon(x) = x^\varepsilon = (x_1, x_2, \varepsilon x_3) \in \overline{\Omega}^\varepsilon \quad (2.7)$$

d'où : $\partial_\alpha^\varepsilon = \partial_\alpha$ et $\partial_3^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \partial_3$.

A toute fonction κ^ε définie sur Ω^ε , on associe la fonction "mise à l'échelle" définie sur Ω par

$$\kappa^\varepsilon(x^\varepsilon) = \kappa(\varepsilon)(x), \quad x^\varepsilon \in \Omega^\varepsilon, \quad x \in \Omega.$$

On définit ainsi les fonctions :

$$\lambda^\varepsilon = \lambda, \quad \mu^\varepsilon = \mu, \quad g^\varepsilon(x^\varepsilon) = g(\varepsilon)(x), \quad d^\varepsilon(x^\varepsilon) = d(\varepsilon)(x)$$

$$u_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = u_i(\varepsilon)(x), \quad v_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = v_i(\varepsilon)(x), \quad f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = f^i(\varepsilon)(x), \quad \text{pour tout } x^\varepsilon = \pi^\varepsilon(x) \in \overline{\Omega}^\varepsilon$$

$$h^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = h^i(\varepsilon)(x), \quad A^{ijkl,\varepsilon}(x^\varepsilon) = A^{ijkl}(\varepsilon)(x) \text{ pour } x^\varepsilon \in \Gamma_-^\varepsilon \text{ et } x \in \Gamma_-$$

$$G^{3,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon G^3(\varepsilon)(x) \text{ pour } x^\varepsilon \in \Gamma_+^\varepsilon \text{ et } x \in \Gamma_+,$$

$$e_{i||j}^\varepsilon(v^\varepsilon)(x^\varepsilon) = e_{i||j}(\varepsilon, v(\varepsilon))(x) = e_{i||j}(\varepsilon; v)(x), \quad \Gamma_{ij}^{k,\varepsilon}(\varepsilon)(x) = \Gamma_{ij}^{k,\varepsilon}(x^\varepsilon), \quad \forall x^\varepsilon \in \overline{\Omega}^\varepsilon \text{ et } x \in \Omega.$$

Alors, le problème variationnel $P^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ (2.6) se reformule sur le domaine fixe comme suit :

$$P(\varepsilon, \Omega) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u(\varepsilon), G^3(\varepsilon)) \in \mathbf{K}(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+) \text{ telque :} \\ \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon, u(\varepsilon)) e_{i||j}(\varepsilon, v) \sqrt{g(\varepsilon)} dx = L(v) + \varepsilon \langle G^3(\varepsilon), v_3 \sqrt{g(\varepsilon)} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \\ \langle G^3(\varepsilon), (v_3 - u_3(\varepsilon)) \sqrt{g(\varepsilon)} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \end{array} \right. \quad (2.8)$$

tels que :

$$\begin{aligned} L(v) &= \int_{\Omega} f^i(\varepsilon)(x) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_-} g^i(\varepsilon)(x) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \\ e_{i||j}(\varepsilon, v) &= \frac{1}{2} (v_{i||j}(\varepsilon) + v_{j||i}(\varepsilon)) \\ v_{i||j}(\varepsilon, v) &= \partial_j v_i - \Gamma_{ij}^k(\varepsilon) v_k \\ \mathbf{V}(\Omega) &= \{v = (v_i) \in \mathbf{H}^1(\Omega) , v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\} \\ \mathbf{K}(\Omega) &= \{v \in \mathbf{V}(\Omega) / v_3 \leq d\}, \quad d = d^\varepsilon \end{aligned}$$

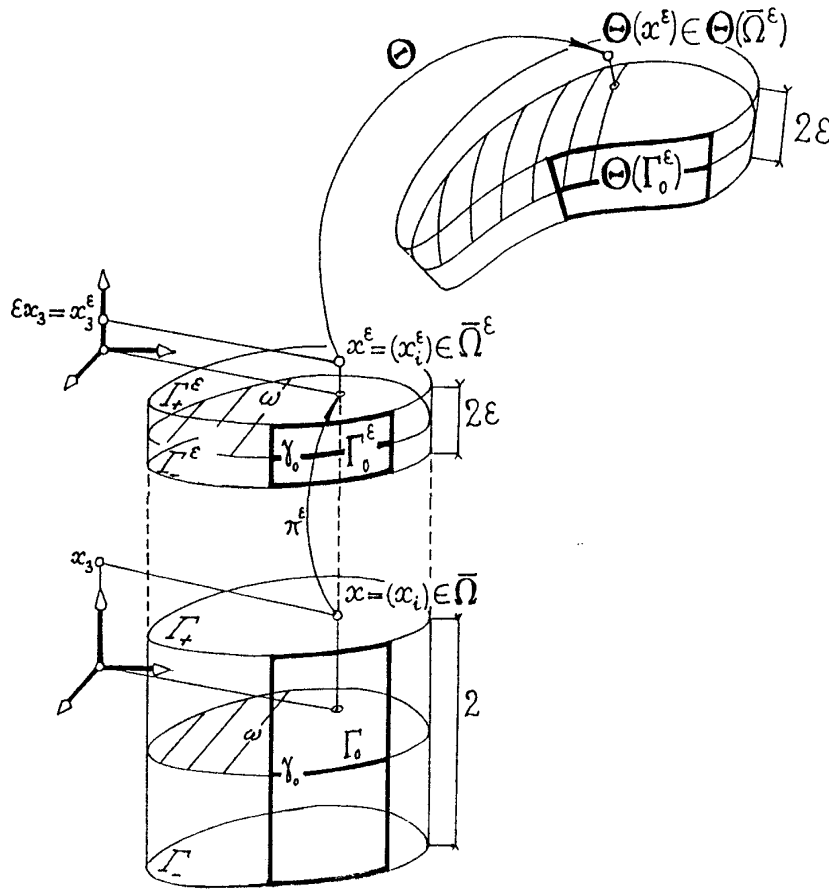


FIGURE 2.3 – Transformation en domaine indépendant de ε .

2.2.5 Identification d'un problème variationnel bidimensionnel

Etude asymptotique

L'objectif de l'analyse asymptotique est de connaître le comportement de la solution asymptotique du problème variationnel $P(\varepsilon, \Omega)$.

On suppose que la solution de ce problème admet un développement asymptotique formel.

$$u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon^1 u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots \text{ avec } u^0 \in \mathbf{K}(\Omega), u^q \in \mathbf{H}^1(\Omega), q = 1, 2, \dots \text{ et } u^0 \neq 0 \quad (2.9)$$

$$G^3(\varepsilon) = \varepsilon^{-2} G^{3,-2} + \varepsilon^{-1} G^{3,-1} + G^{3,0} + \varepsilon G^{3,1} + \varepsilon^2 G^{3,2} + \dots \quad (2.10)$$

avec

$$\begin{aligned} G^{3,k} &\in H^{-\frac{1}{2}}, k = -2, -1, 0, 1, 2, \dots \\ e_{i\|j}(\varepsilon; u(\varepsilon)) &= \frac{1}{\varepsilon} e_{i\|j}^{-1} + e_{i\|j}^0 + \varepsilon e_{i\|j}^1 + \varepsilon^2 e_{i\|j}^2 + \dots, \\ e_{ij}(\varepsilon; v) &= \frac{1}{\varepsilon} e_{ij}^{-1}(v) + e_{ij}^0(v) + \varepsilon e_{ij}^1(v) + \varepsilon^2 e_{ij}^2(v) + \dots, \end{aligned} \quad (2.11)$$

Le comportement asymptotique des fonctions $g(\varepsilon)$ et $A^{ijkl}(\varepsilon)$ implique que (voir [12] section 3.4)

$$g(\varepsilon) = a + O(\varepsilon)$$

$$\sqrt{g(\varepsilon)} = \sqrt{a} + \varepsilon(\sqrt{a})^1 + \varepsilon^2(\sqrt{a})^2 + o(\varepsilon^2) \quad (2.12)$$

$$A^{ijkl} \sqrt{g(\varepsilon)} = A^{ijkl}(0) \sqrt{a} + \varepsilon B^{ijkl,1} + \varepsilon^2 B^{ijkl,2} + o(\varepsilon^2), \quad (2.13)$$

où

$$\begin{cases} A^{\alpha\beta\gamma\delta}(0) = \lambda a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} + \mu(a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta} a^{\beta\gamma}) \\ A^{\alpha\beta 33}(0) = \lambda a^{\alpha\beta}, \quad A^{\alpha 3\gamma 3}(0) = \mu a^{\alpha\gamma}, \quad A^{3333}(0) = \lambda + 2\mu \\ A^{\alpha\beta\gamma 3}(0) = A^{\alpha 333}(0) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

et

$$\begin{cases} e_{\alpha\|\beta}^{-1} = 0 \\ e_{\alpha\|3}^{-1} = \frac{1}{2} \partial_3 u_\alpha^0 \\ e_{3\|3}^{-1} = \partial_3 u_3^0 \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} e_{\alpha\|\beta}^0 = \frac{1}{2}(\partial_\beta u_\alpha^0 + \partial_\alpha u_\beta^0) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma^0 - b_{\alpha\beta} u_3^0 \\ e_{\alpha\|3}^0 = \frac{1}{2}(\partial_3 u_\alpha^1 + \partial_\alpha u_3^0) + b_\alpha^\sigma u_\sigma^0 \\ e_{3\|3}^0 = \partial_3 u_3^1 \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} e_{\alpha\|\beta}^1 = \frac{1}{2}(\partial_\beta u_\alpha^1 + \partial_\alpha u_\beta^1) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u_\sigma^1 - b_{\alpha\beta} u_3^1 + x_3 \{b_{\beta|\alpha}^\sigma u_\sigma^0 + b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} u_3^0\} \\ e_{\alpha\|3}^1 = \frac{1}{2}(\partial_3 u_\alpha^2 + \partial_\alpha u_3^1) + b_\alpha^\sigma u_\sigma^1 + x_3 b_\alpha^\tau b_\tau^\sigma u_\sigma^0 \\ e_{3\|3}^1 = \partial_3 u_3^2 \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} e_{\alpha\|\beta}^{-1}(v) = 0 \\ e_{\alpha\|3}^{-1}(v) = \frac{1}{2}\partial_3 v_\alpha \\ e_{3\|3}^{-1}(v) = \partial_3 v_3 \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} e_{\alpha\|\beta}^0(v) = \frac{1}{2}(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma v_\sigma - b_{\alpha\beta} v_3 \\ e_{\alpha\|3}^0(v) = \frac{1}{2}\partial_\alpha v_3 + b_\alpha^\sigma v_\sigma \\ e_{3\|3}^0(v) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} e_{\alpha\|\beta}^1(v) = x_3 b_{\beta|\alpha}^\alpha v_\sigma + x_3 b_\alpha^\sigma b_{\sigma\beta} v_3 \\ e_{\alpha\|3}^1(v) = x_3 b_\alpha^\tau b_\tau^\sigma v_\sigma \\ e_{3\|3}^1(v) = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Lemme 2.1

Soit ω un ouvert de \mathbb{R}^2 de frontière γ , soit $\Omega = \omega \times]-1, 1[$, et soit $w \in L^p(\Omega)$, $p > 1$, vérifiant : $\int_\Omega w \partial_3 v dx = 0$ pour tout $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tel que $v = 0$ sur $\gamma \times [-1, 1]$. Alors $w = 0$

Preuve

Soit $\varphi \in D(\Omega)$ et $v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$v(x_1, x_2, x_3) = \int_{-1}^{x_3} \varphi(x_1, x_2, \tau) d\tau \text{ pour tout } (x_1, x_2, x_3) \in \bar{\Omega}$$

alors $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et $v = 0$ sur $\gamma \times [-1, 1]$;

donc $\int_\Omega w \varphi dx = 0 = \int_\Omega w \partial_3 \varphi dx = 0$ ce qui entraîne $w = 0$ p.p sur Ω

2.2.6 Modèle de coque membranaire

On se propose quelques modèles bidimensionnels de coques membranaires obtenus par l'analyse asymptotique formelle à partir du modèle tridimensionnel de coques élastiques minces constituées d'un matériau isotrope et homogène.

On suppose qu'il existe deux fonctions $f^{i,0} \in L^2(\Omega)$, $h^{i,1} \in L^2(\Gamma_-)$ tel que

$$f^i(\varepsilon)(x) = f^{i,0}(x), \forall x \in \Omega \quad (2.21)$$

$$h^i(\varepsilon)(x) = \varepsilon h^{i,1}, \forall x \in \Gamma_- \quad (2.22)$$

$$G^{3,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon G^3(\varepsilon)(x) \text{ pour } x^\varepsilon \in \Gamma_+^\varepsilon \text{ et } x \in \Gamma_+, \quad (2.23)$$

$$d(\varepsilon) = d$$

On substitue (2.9), (2.10), (2.12), (2.13), (2.21), (2.22) et (2.23) dans l'équation variationnel de (2.8), et on identifie les termes du même ordre de ε ; on obtient aux ordres ε^{-2} , ε^{-1} et ε^0 respectivement les équations :

$$P^{-2} \left\{ \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^{-1}(v) \sqrt{a} dx = \langle G^{3,-2}, v_3 \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \right. \quad (2.24)$$

$$P^{-1} \left\{ \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) (e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(v) + e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^0(v)) \sqrt{a} dx = \langle G^{3,-2}, v_3 (\sqrt{a})^1 \rangle + \langle G^{3,-1}, v_3 \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \right. \quad (2.25)$$

$$P^0 \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) (e_{k||l}^0 e_{i||j}^0(v) + e_{k||l}^1 e_{i||j}^{-1}(v) + e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^1(v)) \sqrt{a} dx + \\ & \int_{\Omega} B^{ijkl,1}(0) (e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(v) + e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^0(v)) dx \\ & + \int_{\Omega} B^{ijkl,2}(0) e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^{-1}(v) = \int_{\Omega} f^{i,0} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1} v_i \sqrt{a} d\Gamma \\ & + \langle G^{3,0}, v_3 \sqrt{a} \rangle + \langle G^{3,-1}, v_3 (\sqrt{a})^1 \rangle + \langle G^{3,-2}, v_3 (\sqrt{a})^2 \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega). \end{aligned} \right. \quad (2.26)$$

De même, on substitue (2.9), (2.10) et (2.12) dans l'inéquation variationnelle de (2.8) on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^2} (\langle G^{3,-2}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle) + \frac{1}{\varepsilon} (\langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle + \langle G^{3,-2}, (v_3 - u_3^0) (\sqrt{a})^1 - u_3^1 \sqrt{a} \rangle) + \\ & (\langle G^{3,0}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle) + \langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0) (\sqrt{a})^1 - u_3^1 \sqrt{a} \rangle + \langle G^{3,-2}, (v_3 - u_3^0) (\sqrt{a})^2 \\ & - u_3^1 (\sqrt{a})^1 - u_3^2 \sqrt{a} \rangle) + \varepsilon [\dots] + \dots \geq 0, \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \end{aligned} \quad (2.27)$$

• Etape (a) : Le problème de Signorini d'ordre ε^{-2}

On multiplie (2.27) par ε^2 et on tend ε vers 0, on obtient

$$\langle G^{3,-2}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega), \quad (2.28)$$

le problème de Signorini d'ordre ε^{-2} est formulé comme suit

$$(P_c^{-2}) \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^{-1}(v) \sqrt{a} dx = \langle G^{3,-2}, v_3 \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \\ & \langle G^{3,-2}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \end{aligned} \right. \quad (2.29)$$

On choisit $v \in V(\Omega)$ indépendant de x_3 dans (2.29) ($e_{i||j}^{-1}(v) = 0$), on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} & \langle G^{3,-2}, v_3 \sqrt{a} \rangle = 0, \quad \forall v_3 \in V(\omega) = \{\eta \in H^1(\omega); \eta = 0 \text{ sur } \partial\omega\} \\ & \langle G^{3,-2}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\omega) = \{\eta \in V(\omega); \eta \leq d\} \end{aligned} \right. \quad (2.30)$$

alors

$$G^{3,-2} = 0 \quad (2.31)$$

En utilisant les expressions des fonctions $A^{ijkl}(0)$, on a :

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^{-1}(v) \sqrt{a} dx = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \quad (2.32)$$

donc de l'ellipticité des coefficients $A^{ijkl}(0)$ on déduit que

$$e_{i||j}^{-1} = e_{i||j}^{-1}(u^0) = 0 \quad (2.33)$$

D'après le théorème (2.1) on obtient : $\partial_3 u^0 = 0$ dans Ω . D'où le terme principal $u^0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ est indépendant de x_3 et peut ˆtre identifié avec un champ de vecteurs $\xi^0 \in \mathbf{H}^1(\omega)$ satisfaisant $\xi^0 = 0$ sur γ_0 .

D'après l'identification des coefficients de ε^{-2} on obtient les relations :

$$\begin{cases} \xi^0 \in \mathbf{V}(\omega) = \{\eta = (\eta_i) \in \mathbf{H}^1(\omega); \eta = 0 \text{ sur } \gamma_0\} \\ e_{i||j}^{-1} = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (2.34)$$

•Etape (b) : **Le problème de Signorini d'ordre ε^{-1}**

Si l'on injecte les résultats (2.31), (2.34) dans (2.25), on obtient l'équation simplifiée

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(v) \sqrt{a} dx = \langle G^{3,-1}, v_3 \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega). \quad (2.35)$$

De mˆme, nous remplaçons (2.31) dans (2.27) et nous multiplions le résultat par ε , nous tendons ε vers zéro, on obtient :

$$\langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega). \quad (2.36)$$

Le problème de Signorini à l'ordre ε^{-1} est formulé comme suit

$$(P_c^{-1}) \begin{cases} \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(v) \sqrt{a} dx = \langle G^{3,-1}, v_3 \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \\ \langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \end{cases} \quad (2.37)$$

nous choisissons la fonction test $v \in \mathbf{V}(\Omega)$ indépendante de x_3 dans (2.37), on trouve :

$$\begin{cases} \langle G^{3,-1}, v_3 \sqrt{a} \rangle = 0 \quad \forall v_3 \in V(\omega) = \{\eta \in H^1(\omega); \eta = 0 \text{ sur } \partial\omega\} \\ \langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\omega) = \{\eta \in V(\omega); \eta \leq d\} \end{cases} \quad (2.38)$$

d'où

$$G^{3,-1} = 0. \quad (2.39)$$

Donc, de (2.14), (2.37) et (2.39) nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A^{ijkl}(0)e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(v)\sqrt{a}dx &= \int_{\Omega} (A^{\alpha\beta\gamma\delta}(0)e_{\gamma||\delta}^0 + A^{\alpha\beta 33}(0)e_{3||3}^0)e_{\alpha||\beta}^{-1}(v)\sqrt{a}dx + \\ 4 \int_{\Omega} A^{\alpha 3\gamma 3}(0)e_{\gamma||3}^0 e_{\alpha||3}^{-1}(v)\sqrt{a}dx &+ \int_{\Omega} (A^{33\gamma\delta}(0)e_{\gamma||\delta}^0 + A^{3333}(0)e_{3||3}^0)e_{3||3}^{-1}(v)\sqrt{a}dx = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.40)$$

De (??),(2.14) et (2.18) :

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0)e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(v)\sqrt{a}dx = \int_{\Omega} (2\mu a^{\alpha\sigma} e_{\sigma||3}^0 \partial_3 v_{\alpha} + (\lambda a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^0 + (\lambda + 2\mu)e_{3||3}^0) \partial_3 v_3) \sqrt{a}dx = 0$$

$\forall v \in \mathbf{V}(\Omega)$. D'après le théorème (2.1)et (2.18) on obtient les équations :

$$e_{\sigma||3}^0 = 0 \quad \text{et} \quad e_{3||3}^0 = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^0 \quad \text{dans } \Omega$$

•Etape (c) : **Le problème de Signorini d'ordre ε^0**

Maintenant, nous nous intéressons à l'identification du problème où le terme (u^0, G^0) est solution.

Tout d'abord, nous choisissons $v = (0, 0, v_3) \in \mathbf{V}(\Omega)$ dans (2.40). On a alors

$$e_{\alpha||\beta}^{-1}(v) = e_{\alpha||3}^{-1}(v) = 0, \quad e_{3||3}^{-1}(v) = \partial_3 v_3$$

et

$$\int_{\Omega} (A^{33\gamma\delta}(0)e_{\gamma||\delta}^0 + A^{3333}(0)e_{3||3}^0) \partial_3 v_3 \sqrt{a}dx = 0. \quad (2.41)$$

Pour résoudre l'équation (2.41), nous utilisons le lemme (2.1) nous obtenons

$$e_{3||3}^0 = \frac{A^{33\gamma\delta}(0)}{A^{3333}(0)} e_{\gamma||\delta}^0 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} a^{\gamma\delta} e_{\gamma||\delta}^0. \quad (2.42)$$

Deuxièmement, nous choisissons $v = (v_1, v_2, 0) \in \mathbf{V}(\Omega)$ dans (2.40), alors

$$e_{\alpha||\beta}^{-1}(v) = e_{3||3}^{-1}(v) = 0, \quad e_{\alpha||3}^{-1}(v) = \frac{1}{2} \partial_3 v_{\alpha}$$

et

$$\int_{\Omega} A^{\alpha 3\gamma 3}(0)e_{\gamma||3}^0 \partial_3 v_{\alpha} \sqrt{a}dx = 0 \quad (2.43)$$

impliquent que

$$e_{\gamma||3}^0 = 0. \quad (2.44)$$

En utilisant maintenant (2.31), (2.34), (2.39), (2.42) et (2.44) , alors le problème (P^0) est réduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} A^{ijkl}(0)(e_{k||l}^0 e_{i||j}^0(v) + e_{i||j}^1 e_{k||l}^{-1}(v))\sqrt{a}dx + \\ \int_{\Omega} B^{ijk,l} e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(v)dx = \int_{\Omega} f^{i,0} v_i \sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1} v_i \sqrt{a}d\Gamma \\ + \langle G^{3,0}, v_3 \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega). \end{array} \right. \quad (2.45)$$

En remplaçant (2.31) et (2.39) dans (2.27) et en tendant ε vers zéro, on obtient

$$\langle G^{3,0}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad (2.46)$$

Nous concluons que le problème de Signorini à l'ordre ε^0 est formulé comme suit

$$(P_c^0) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} A^{ijkl}(0)(e_{k||l}^0 e_{i||j}^0(v) + e_{i||j}^1 e_{k||l}^{-1}(v))\sqrt{a}dx + \int_{\Omega} B^{ijk,l} e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(v)dx \\ = \int_{\Omega} f^{i,0} v_i \sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1} v_i \sqrt{a}d\Gamma + \langle G^{3,0}, v_3 \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \\ \langle G^{3,0}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega). \end{array} \right. \quad (2.47)$$

Si nous choisissons la fonction test dans l'équation variationnelle de (P_c^0) indépendante de x_3 , $v = \eta(x_1, x_2)$ nous aurons :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{i||j}^{-1}(v) = 0 \\ e_{\alpha||\beta}^0(v) = e_{\alpha||\beta}^0(\eta) = e_{\alpha\beta}(\eta) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \eta_{\sigma} - b_{\alpha\beta} \eta_3 \\ e_{\alpha||3}^0(v) = e_{\alpha||\beta}^0(\eta) = \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \eta_3 + b_{\alpha}^{\sigma} \eta_{\sigma} \\ e_{3||3}^0(v) = e_{3||3}^0(\eta) = 0. \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Par conséquent, la première équation variationnelle est réduite à

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^0 e_{i||j}^0(\eta) \sqrt{a}dx = \int_{\Omega} f^{i,0} v_i \sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1} v_i \sqrt{a}d\Gamma + \langle G^{3,0}, v_3 \sqrt{a} \rangle. \quad (2.49)$$

En utilisant (2.42), (2.44) et (2.48) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^0 e_{i||j}^0(\eta) \sqrt{a}dx &= \int_{\Omega} A^{\alpha\beta\gamma\delta}(0) e_{\gamma||\sigma}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\eta) \sqrt{a}dx + \int_{\Omega} A^{\alpha\beta 33}(0) e_{3||3}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\eta) \sqrt{a}dx \\ &= \int_{\omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma||\delta}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\eta) \sqrt{a}dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

où

$$a^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} + 2\mu(a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta} a^{\beta\gamma}) \quad (2.51)$$

les composantes contravariantes du tenseur d'élasticité bidimensionnel mis à l'échelle de la coque.

Par conséquent, si nous choisissons la fonction test $v = \eta(x_1, x_2)$ dans (P_c^0) nous concluons que le problème de Signorini à l'ordre 0, ce qui est l'approximation asymptotique du problème $(P(\varepsilon, \Omega))$ (2.8), est formulé comme suit :

$$P_M(\omega) \begin{cases} \text{Trouver } (u^0, G^{3,0}) \in \mathbf{K}(\omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\omega) \\ \int_{\omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma|\delta}^0 e_{\alpha\beta}^0(\eta) \sqrt{a} dx_1 dx_2 = \int_{\omega} p^i \eta_i \sqrt{a} dx_1 dx_2 + \langle G^{3,0}, \eta_3 \sqrt{a} \rangle, \quad \forall \eta \in \mathbf{V}(\omega) \\ \langle G^{3,0}, (\eta_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall \eta_3 \in K(\omega) \end{cases} \quad (2.52)$$

où

$$\mathbf{K}(\omega) = \{\eta \in \mathbf{V}(\omega); \eta_3 \leq d\}$$

$$p^i = \int_{-1}^1 f^{i,0} dx_3 + h^{i,1}(\cdot, -1).$$

2.3 Le cas avec frottement de Coulomb

On va étudier dans cette partie, le même problème précédent en supposant que le contact unilatéral est avec frottement de Coulomb.

2.3.1 Problème classique ($\widehat{P}^\varepsilon.C$)

$$\widehat{P}^\varepsilon.C \begin{cases} \text{Trouver } \widehat{u}^\varepsilon \text{ telque :} \\ -\widehat{\partial}_j^\varepsilon \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) = \widehat{f}_i^\varepsilon \text{ dans } \widehat{\Omega}^\varepsilon \\ \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) \widehat{n}_j^\varepsilon = \widehat{h}_i^\varepsilon \text{ sur } \widehat{\Gamma}_- \\ \widehat{u}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \widehat{\Gamma}_0 \\ \widehat{u}_N^\varepsilon \leq \widehat{d}^\varepsilon, \widehat{G}_N^\varepsilon \leq 0, \widehat{G}_N^\varepsilon(\widehat{u}_N^\varepsilon - \widehat{d}^\varepsilon) = 0, \text{ sur } \widehat{\Gamma}_+ \\ |\widehat{\sigma}_\tau^\varepsilon| < \nu |\widehat{\sigma}_N^\varepsilon| \Rightarrow \widehat{u}_\tau^\varepsilon = 0 \text{ sur } \widehat{\Gamma}_+ \\ |\widehat{\sigma}_\tau^\varepsilon| < \nu |\widehat{\sigma}_N^\varepsilon| \Rightarrow \exists \delta > 0, \widehat{u}_\tau^\varepsilon = -\delta \widehat{\sigma}_\tau^\varepsilon \text{ sur } \widehat{\Gamma}_+ \end{cases} \quad (2.53)$$

tels que :

$$\widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) = \widehat{A}^{ijkl,\varepsilon} \widehat{e}_{kl}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon), \quad (2.54)$$

$$\widehat{A}^{ijkl,\varepsilon} = \lambda^\varepsilon \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu^\varepsilon (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}), \quad (2.55)$$

$$\widehat{e}_{ij}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2} (\widehat{\partial}_i^\varepsilon \widehat{u}_j^\varepsilon + \widehat{\partial}_j^\varepsilon \widehat{u}_i^\varepsilon). \quad (2.56)$$

2.3.2 Problème variationnel ($\widehat{P}^\varepsilon.V$)

Théorème 2.2

Le problème précédent ($\widehat{P}^\varepsilon.C$) est formellement équivalent au problème ($\widehat{P}^\varepsilon.V$)

$$\widehat{P}^\varepsilon.V \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{G}^\varepsilon) \in \mathbf{K}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \times \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon) \text{ tel que :} \\ \widehat{a}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon) = \widehat{L}^\varepsilon(\widehat{v}^\varepsilon) + \langle \widehat{G}_i^\varepsilon, \widehat{v}_i^\varepsilon \rangle \quad \forall \widehat{v}^\varepsilon \in \mathbf{V}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \\ \langle \widehat{G}_N^\varepsilon, \widehat{v}_N - \widehat{u}_N^\varepsilon \rangle \geq 0, \quad \forall \widehat{v}^\varepsilon \in \mathbf{K}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \\ \langle \widehat{G}_T^\varepsilon, \widehat{v}_T - \widehat{u}_T^\varepsilon \rangle + \langle \nu |\widehat{G}_N^\varepsilon|, |\widehat{v}_T^\varepsilon| - |\widehat{u}_T^\varepsilon| \rangle \geq 0, \quad \forall \widehat{v}^\varepsilon \in \mathbf{V}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \end{array} \right. \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \widehat{a}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{v}^\varepsilon) &= \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{A}^{ijkl,\varepsilon} \widehat{e}_{kl}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(\widehat{v}) d\widehat{x}^\varepsilon \\ \widehat{L}^\varepsilon(\widehat{v}) &= \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{f}_i^\varepsilon \widehat{v}_i d\widehat{x}^\varepsilon + \int_{\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon} \widehat{h}_i^\varepsilon \widehat{v}_i d\widehat{\Gamma}^\varepsilon \\ \langle \widehat{G}_i^\varepsilon, \widehat{\phi}_i^\varepsilon \rangle &= \int_{\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon} \widehat{G}_i^\varepsilon \widehat{\phi}_i^\varepsilon d\widehat{\Gamma}^\varepsilon \\ &\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ présente le crochet de dualité sur } \widehat{\Gamma}_+^\varepsilon, \\ \mathbf{V}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) &= \{ \widehat{v}^\varepsilon = (\widehat{v}_i^\varepsilon) \in \mathbf{H}^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon), \widehat{v}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \widehat{\Gamma}_0^\varepsilon \}, \mathbf{H}^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon) = (H^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon))^3 \\ \mathbf{K}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) &= \{ \widehat{v}^\varepsilon \in \mathbf{V}(\widehat{\Omega}^\varepsilon) / \widehat{v}_N^\varepsilon \leq \widehat{d}^\varepsilon \text{ sur } \widehat{\Gamma}_+^\varepsilon \} \end{aligned}$$

Preuve

Voir [21].

Remarque 5

Pour \widehat{u}^ε assez régulier, alors les problèmes $\widehat{P}^\varepsilon.C$ et $\widehat{P}^\varepsilon.V$ sont équivalents.

2.3.3 Problème variationnel ($\widehat{P}^\varepsilon.V$) en coordonnées curvilignes

On transforme le problème précédent écrit en coordonnées cartésiennes $\widehat{x}^\varepsilon = (\widehat{x}_i^\varepsilon)$ en un problème écrit en coordonnées curvilignes $x^\varepsilon = (x_i^\varepsilon)$ mieux adaptées à l'étude des coques.

Théorème 2.3

$$(P^\varepsilon.V) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u^\varepsilon, G^\varepsilon) \in \mathbf{K}(\Omega^\varepsilon) \times \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+^\varepsilon) \text{ tel que :} \\ a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) = L^\varepsilon(v^\varepsilon) + \langle G^{i,\varepsilon}, v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} \rangle \quad \forall v^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) \\ \langle G^{3,\varepsilon}, (v_3^\varepsilon - u_3^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3^\varepsilon \in K(\Omega^\varepsilon) \\ \langle G_T^\varepsilon, (v_T^\varepsilon - u_T^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} \rangle + \langle \Lambda |G^{3,\varepsilon}|, (|v_T^\varepsilon| - |u_T^\varepsilon|) \sqrt{g^\varepsilon} \rangle \geq 0 \quad \forall v^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) \end{array} \right. \quad (2.58)$$

où

$$\begin{aligned}
 a^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon) &= \int_{\Omega^\varepsilon} A^{ijkl,\varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(u^\varepsilon) e_{k||l}^\varepsilon(v^\varepsilon) \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon, \quad A^{ijkl,\varepsilon} = \lambda g^{ij,\varepsilon} g^{kl,\varepsilon} + \mu (g^{ik,\varepsilon} g^{jl,\varepsilon} + g^{il,\varepsilon} g^{jk,\varepsilon}) \\
 e_{i||j}^\varepsilon(v^\varepsilon) &= \frac{1}{2}(v_{i||j}^\varepsilon + v_{j||i}^\varepsilon), \quad v_{i||j}^\varepsilon = \partial_j^\varepsilon v_i^\varepsilon - \Gamma_{ij}^{k,\varepsilon} v_k^\varepsilon, \quad L^\varepsilon(v^\varepsilon) = \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_-^\varepsilon} h^{i,\varepsilon} v_i^\varepsilon \sqrt{g^\varepsilon} d\Gamma^\varepsilon \\
 \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) &= \{v^\varepsilon = (v_i^\varepsilon) \in \mathbf{H}^1(\Omega^\varepsilon), v^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon\}, \quad \mathbf{K}(\Omega^\varepsilon) = \{v^\varepsilon \in \mathbf{V}(\Omega^\varepsilon) / v_3^\varepsilon \leq \\
 &d^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon\}, \quad d^\varepsilon = \widehat{d}^\varepsilon
 \end{aligned}$$

Preuve

Voir([21])

.

2.3.4 Position du problème variationnel sur un domaine indépendant de l'épaisseur

L'objectif de l'analyse asymptotique est de connaître le comportement de la solution u^ε du problème $P^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ lorsque ε tend vers zéro. Pour cela il est important que le domaine sur lequel est posé le problème ne dépend pas de ε .

On garde la même mise à l'échelle pour les données que celle fait dans le cas sans frottement.

On peut alors réécrire le problème variationnel $P^\varepsilon(\Omega^\varepsilon)$ (2.58) sur l'ouvert fixe Ω :

$$P(\varepsilon, \Omega) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u(\varepsilon), G(\varepsilon)) \in \mathbf{K}(\Omega) \times (H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_+)){}^3 \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon, u(\varepsilon)) e_{i||j}(\varepsilon, v) \sqrt{g(\varepsilon)} dx = L(v) + \varepsilon \langle G^i(\varepsilon), v_i \sqrt{g(\varepsilon)} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \\ \langle G^3(\varepsilon), (v_3 - u_3(\varepsilon)) \sqrt{g(\varepsilon)} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \\ \langle G_T(\varepsilon), ((v - u(\varepsilon)) - (v_T - u_T(\varepsilon))) \sqrt{g(\varepsilon)} \rangle + \langle \Lambda |G^3(\varepsilon)|, (|v_T| - |u_T(\varepsilon)|) \sqrt{g(\varepsilon)} \rangle \geq 0 \\ \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \end{array} \right. \quad (2.59)$$

où :

$$\begin{aligned}
 L(v) &= \int_{\Omega} f^i(\varepsilon) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_-} h^i(\varepsilon) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} d\Gamma \\
 e_{i||j}(\varepsilon, v) &= \frac{1}{2}(v_{i||j}(\varepsilon) + v_{j||i}(\varepsilon)) \\
 v_{i||j}(\varepsilon) &= \partial_j v_i - \Gamma_{ij}^k(\varepsilon) v_k \\
 \mathbf{V}(\Omega) &= \{v = (v_i) \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\} \\
 \mathbf{K}(\Omega) &= \{v \in \mathbf{V}(\Omega) / v_3 \leq d\}
 \end{aligned}$$

2.3.5 Modèle de coque membranaire

On se propose quelques modèles bidimensionnels de coques membranaires obtenus par l'analyse asymptotique formelle à partir du modèle tridimensionnel de coques élastiques minces constituées d'un matériau isotrope et homogène, entrant en contact avec frottement de Coulomb contre un obstacle rigide.

On suppose qu'il existe deux fonctions $f^{i,0} \in L^2(\Omega)$, $h^{i,1} \in L^2(\Gamma_-)$ tel que

$$f^i(\varepsilon)(x) = f^{i,0}(x), \forall x \in \Omega \quad (2.60)$$

$$h^i(\varepsilon)(x) = \varepsilon h^{i,1}, \forall x \in \Gamma_- \quad (2.61)$$

$$d(\varepsilon) = d$$

$$G^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \varepsilon G^i(\varepsilon)(x), \forall x \in \Gamma_+ \quad (2.62)$$

$$G^i(\varepsilon) = G^{i,0} + \varepsilon G^{i,1} + \varepsilon^2 G^{i,2} + \dots \quad (2.63)$$

On substitue (2.9), (2.12), (2.13), (2.60), (2.61), (2.62) et (2.63) dans l'équation variationnel de (2.59), et on identifie les termes du même ordre de ε ; on obtient à l'ordre ε^{-2} , ε^{-1} et ε^0 respectivement les équations :

$$P^{-2} \left\{ \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^{-1}(v) \sqrt{a} dx = \langle G^{i,-2}, v_i \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \right. \quad (2.64)$$

$$P^{-1} \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) (e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(v) + e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^0(v)) \sqrt{a} dx = \langle G^{i,-2}, v_i (\sqrt{a})^1 \rangle \\ & + \langle G^{i,-1}, v_i \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \end{aligned} \right. \quad (2.65)$$

$$P^0 \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) (e_{k||l}^0 e_{i||j}^0(v) + e_{k||l}^1 e_{i||j}^{-1}(v) + e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^1(v)) \sqrt{a} dx + \\ & \int_{\Omega} B^{ijkl,1}(0) (e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(v) + e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^0(v)) dx \\ & + \int_{\Omega} B^{ijkl,2}(0) e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^{-1}(v) dx = \int_{\Omega} f^{i,0} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma} h^{i,1} v_i \sqrt{a} d\Gamma \\ & + \langle G^{i,0}, v_i \sqrt{a} \rangle + \langle G^{i,-1}, v_i (\sqrt{a})^1 \rangle + \langle G^{i,-2}, v_i (\sqrt{a})^2 \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \end{aligned} \right. \quad (2.66)$$

De même, en substituant (2.9), (2.12) et (2.63) dans l'inéquation variationnelle de (2.59) on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & \varepsilon^d \langle G^{3,d}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle + \sum_{s>d} \varepsilon^s \langle \tilde{G}^{3,s}, \tilde{v}_3^s \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \\ & \varepsilon^d (\langle G_T^d, ((v - u^0) - (v_T - u_T^0)) \sqrt{a} \rangle + \langle \Lambda |G^{3,d}|, (|v_T| - |u_T^0|) \sqrt{a} \rangle) \\ & + \sum_{s>0} \varepsilon^s (\langle \tilde{G}_T^s, \tilde{v}_T^s \rangle) \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{K}(\Omega) \\ & (d \geq -2) \end{aligned} \right. \quad (2.67)$$

• Etape (1) : Le problème de Signorini d'ordre ε^{-2}

On multiplie (2.67) par ε^2 et on tend ε vers 0, on obtient

$$\begin{cases} \langle G^{3,-2}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \\ \langle G_T^{-2}, ((v - u^0) - (v_T - u_T^0))\sqrt{a} \rangle + \langle \Lambda |G^{3,-2}|, (|v_T| - |u_T^0|)\sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{K}(\Omega) \end{cases} \quad (2.68)$$

le problème de Signorini d'ordre ε^{-2} est

$$(P_c^{-2}) \begin{cases} \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^{-1}(v) \sqrt{a} dx = \langle G^{i,-2}, v_i \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \\ \langle G^{3,-2}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \\ \langle G_T^{-2}, ((v - u^0) - (v_T - u_T^0))\sqrt{a} \rangle + \langle \Lambda |G^{3,-2}|, (|v_T| - |u_T^0|)\sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \end{cases} \quad (2.69)$$

On choisit $v \in \mathbf{V}(\Omega)$ indépendant de x_3 , dans (2.69), $(e_{i||j}^{-1}(v) = 0)$, on obtient :

$$\begin{cases} \langle G^{i,-2}, v_i \sqrt{a} \rangle = 0, \forall v_i \in V(\omega) = \{\eta \in H^1(\omega); \eta = 0 \text{ sur } \partial\omega\} \\ \langle G^{3,-2}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\omega) = \{\eta \in V(\omega); \eta \leq d\} \\ \langle G_T^{-2}, ((v - u^0) - (v_T - u_T^0))\sqrt{a} \rangle + \langle \Lambda |G^{3,-2}|, (|v_T| - |u_T^0|)\sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \end{cases} \quad (2.70)$$

alors

$$G^{i,-2} = 0 \quad \text{donc} \quad G^{3,-2} = G^{\alpha,-2} = 0 \quad (2.71)$$

En utilisant les expressions des fonctions $A^{ijkl}(0)$, on a :

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^{-1}(v) \sqrt{a} dx = 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \quad (2.72)$$

donc de l'ellipticité de $A^{ijkl}(0)$ on déduit alors

$$e_{i||j}^{-1} = e_{i||j}^{-1}(u^0) = 0 \quad (2.73)$$

D'après le théorème (2.1) on obtient : $\partial_3 u^0 = 0$ dans Ω . D'où le terme principale $u^0 \in \mathbf{V}(\Omega)$ est indépendant de x_3 et peut être identifié avec un champ de vecteurs $\xi^0 \in \mathbf{H}^1(\omega)$ satisfaisant $\xi^0 = 0$ sur γ_0 .

D'après l'identification des coefficients de ε^{-2} on obtient les relations :

$$\begin{cases} \xi^0 \in \mathbf{V}(\omega) = \{\eta = (\eta_i) \in \mathbf{H}^1(\omega); \eta = 0 \text{ sur } \gamma_0\} \\ e_{i||j}^{-1} = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases} \quad (2.74)$$

• Etape (2) : Le problème de Signorini d'ordre ε^{-1}

Si l'on injecte les résultats (2.71), (2.73) dans (2.65), on obtient l'équation simplifiée

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^{-1} e_{i||j}^{-1}(v) \sqrt{a} dx = \langle G^{i,-1}, v_i \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \quad (2.75)$$

De même, nous remplaçons (2.71) dans (2.67) et nous multiplions le résultat par ε et on tend ε vers zéro, on obtient :

$$\begin{cases} \langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in V(\Omega) \\ \langle G_T^{-1}, ((v - u^0) - (v_T - u_T^0)) \sqrt{a} \rangle + \langle \Lambda |G^{3,-1}|, (|v_T| - |u_T^0|) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{K}(\Omega). \end{cases} \quad (2.76)$$

Le problème de Signorini à l'ordre ε^{-1} est formulé comme suit

$$(P_c^{-1}) \begin{cases} \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(v) \sqrt{a} dx = \langle G^{i,-1}, v_i \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \\ \langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \\ \langle G_T^{-1}, ((v - u^0) - (v_T - u_T^0)) \sqrt{a} \rangle + \langle \Lambda |G^{3,-1}|, (|v_T| - |u_T^0|) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \end{cases} \quad (2.77)$$

nous choisissons la fonction test $v \in \mathbf{V}(\Omega)$ indépendante de x_3 dans (2.77), on trouve :

$$\begin{cases} \langle G^{i,-1}, v_i \sqrt{a} \rangle = 0 \quad \forall v_i \in V(\omega) = \{\eta \in H^1(\omega); \eta = 0 \text{ sur } \partial\omega\} \\ \langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\omega) = \{\eta \in V(\omega); \eta \leq d\} \\ \langle G_T^{-1}, ((v - u^0) - (v_T - u_T^0)) \sqrt{a} \rangle + \langle \Lambda |G^{3,-1}|, (|v_T| - |u_T^0|) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \end{cases} \quad (2.78)$$

d'où

$$G^{i,-1} = 0 \text{ donc } G^{3,-1} = G^{\alpha,-1} = 0 \quad (2.79)$$

Donc, de (2.14), (2.77) et (2.79) nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(v) \sqrt{a} dx &= \int_{\Omega} (A^{\alpha\beta\gamma\delta}(0) e_{\gamma||\delta}^0 + A^{\alpha\beta 33}(0) e_{3||3}^0) e_{\alpha||\beta}^{-1}(v) \sqrt{a} dx + \\ 4 \int_{\Omega} A^{\alpha 3 \gamma 3}(0) e_{\gamma||3}^0 e_{\alpha||3}^{-1}(v) \sqrt{a} dx &+ \int_{\Omega} (A^{33\gamma\delta}(0) e_{\gamma||\delta}^0 + A^{3333}(0) e_{3||3}^0) e_{3||3}^{-1}(v) \sqrt{a} dx = 0 \\ \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \end{aligned} \quad (2.80)$$

de (??),(2.14) et (2.18) :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A^{ijkl}(0)e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(v)\sqrt{a}dx \\ &= \int_{\Omega} (2\mu a^{\alpha\sigma} e_{\sigma||3}^0 \partial_3 v_{\alpha} + (\lambda a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^0 + (\lambda + 2\mu)e_{3||3}^0) \partial_3 v_3) \sqrt{a}dx \\ &= 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega). \end{aligned}$$

D'après le Lemme (2.1)et (2.18) on obtient les équations :

$$e_{\sigma||3}^0 = 0 \quad \text{et} \quad e_{3||3}^0 = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^0 \quad \text{dans } \Omega$$

• Etape (3) : **Le problème de Signorini d'ordre ε^0**

Maintenant, nous nous intéressons à l'identification du problème où le terme (u^0, G^0) est solution.

Tout d'abord, nous choisissons $v = (0, 0, v_3) \in \mathbf{V}(\Omega)$ dans (2.80). On a alors

$$e_{\alpha||\beta}^{-1}(v) = e_{\alpha||3}^{-1}(v) = 0, \quad e_{3||3}^{-1}(v) = \partial_3 v_3$$

et

$$\int_{\Omega} (A^{33\gamma\delta}(0)e_{\gamma||\delta}^0 + A^{3333}(0)e_{3||3}^0) \partial_3 v_3 \sqrt{a}dx = 0 \quad (2.81)$$

Pour résoudre l'équation (2.81), nous avons besoin du Lemme (2.1) on a

$$e_{3||3}^0 = \frac{A^{33\gamma\delta}(0)}{A^{3333}(0)} e_{\gamma||\delta}^0 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} a^{\gamma\delta} e_{\gamma||\delta}^0 \quad (2.82)$$

Deuxièmement, nous choisis $v = (v_1, v_2, 0) \in \mathbf{V}(\Omega)$ dans (2.80), alors

$$e_{\alpha||\beta}^{-1}(v) = e_{3||3}^{-1}(v) = 0, \quad e_{\alpha||3}^{-1}(v) = \frac{1}{2} \partial_3 v_{\alpha}$$

et

$$\int_{\Omega} A^{\alpha 3\gamma 3}(0) e_{\gamma||3}^0 \partial_3 v_{\alpha} \sqrt{a}dx = 0 \quad (2.83)$$

ce qui implique lors de l'application du Lemme (2.1) que

$$e_{\gamma||3}^0 = 0. \quad (2.84)$$

En utilisant maintenant (2.71), (2.73), (2.79), (2.82) et (2.84) , alors le problème (P^0) est réduit à

$$\begin{cases} \int_{\Omega} A^{ijkl}(0)(e_{k||l}^0 e_{i||j}^0(v) + e_{i||j}^1 e_{k||l}^{-1}) \sqrt{a}dx + \int_{\Omega} B^{ijk,l} e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(v) \\ = \int_{\Omega} f^{i,0} v_i \sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1} v_i \sqrt{a}d\Gamma + \langle G^{i,0}, v_i \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \end{cases} \quad (2.85)$$

En remplaçant (2.71) et (2.79) dans (2.67) et en tendant ε vers zéro, on obtient

$$\begin{cases} \langle G^{3,0}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a} \rangle \geq 0 \\ \langle G_T^0, ((v - u^0) - (v_T - u_T^0))\sqrt{a} \rangle + \langle \Lambda |G^{3,0}|, (|v_T - |u_T^0||)\sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \end{cases} \quad (2.86)$$

Nous concluons que le problème de Signorini de l'ordre ε^0 est formulé comme suit

$$(P_c^0) \begin{cases} \int_{\Omega} A^{ijkl}(0)(e_{k||l}^0 e_{i||j}^0(v) + e_{i||j}^1 e_{k||l}^{-1})\sqrt{a}dx + \int_{\Omega} B^{ijk,l} e_{k||l}^0 e_{i||j}^{-1}(v) \\ = \int_{\Omega} f^{i,0} v_i \sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1} v_i \sqrt{a}d\Gamma + \langle G^{i,0}, v_i \sqrt{a} \rangle \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \\ \langle G^{3,0}, (v_3 - u_3^0)\sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \\ \langle G_T^0, ((v - u^0) - (v_T - u_T^0))\sqrt{a} \rangle + \langle \Lambda |G^{3,0}|, (|v_T| - |u_T^0|)\sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{V}(\Omega) \end{cases} \quad (2.87)$$

Si nous choisissons la fonction test dans l'équation variationnelle de (P_c^0) indépendante de x_3 , $v = \eta(x_1, x_2)$ nous aurons :

$$\begin{cases} e_{i||j}^{-1}(v) = 0 \\ e_{\alpha||\beta}^0(v) = e_{\alpha||\beta}^0(\eta) = e_{\alpha\beta}(\eta) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \eta_{\sigma} - b_{\alpha\beta} \eta_3 \\ e_{\alpha||3}^0(v) = e_{\alpha||3}^0(\eta) = \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \eta_3 + b_{\alpha}^{\sigma} \eta_{\sigma} \\ e_{3||3}^0(v) = e_{3||3}^0(\eta) = 0 \end{cases} \quad (2.88)$$

Par conséquent, la première équation variationnelle est réduite à

$$\int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^0 e_{i||j}^0(\eta) \sqrt{a}dx = \int_{\Omega} f^{i,0} v_i \sqrt{a}dx + \int_{\Gamma_-} h^{i,1} v_i \sqrt{a}d\Gamma + \langle G^{i,0}, v_i \sqrt{a} \rangle \quad (2.89)$$

En utilisant (2.82), (2.84) et (2.88) on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^0 e_{i||j}^0(\eta) \sqrt{a}dx &= \int_{\Omega} A^{\alpha\beta\gamma\delta}(0) e_{\gamma||\sigma}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\eta) \sqrt{a}dx + \int_{\Omega} A^{\alpha\beta 33}(0) e_{3||3}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\eta) \sqrt{a}dx \\ &= \int_{\omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma||\delta}^0 e_{\alpha||\beta}^0(\eta) \sqrt{a}dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (2.90)$$

où

$$a^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} + 2\mu(a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta} a^{\beta\gamma}), \quad (2.91)$$

sont les composantes contravariants du tenseur d'élasticité bidimensionnel mis à l'échelle de la coque.

Par conséquent, si nous choisissons la fonction test $v = \eta(x_1, x_2)$ dans (P_c^0) nous constatons que le problème de Signorini d'ordre 0, qui est l'approximation asymptotique du problème $(P(\varepsilon, \Omega))$ (2.59), est formulé comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Trouver } (u^0, G^0) \in \mathbf{K}(\omega) \times (H^{-\frac{1}{2}}(\omega))^3 \text{ tel que :} \\
 \int_{\omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma|\delta}^0 e_{\alpha\beta}^0(\eta) \sqrt{a} dx_1 dx_2 = \int_{\omega} p^i \eta_i \sqrt{a} dx_1 dx_2 + \langle G^{i,0}, \eta_i \sqrt{a} \rangle, \quad \forall \eta \in \mathbf{V}(\omega) \\
 \langle G^{3,0}, (\eta_3 - \xi_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall \eta_3 \in K(\omega) \\
 \langle G_T^0, ((\eta - \xi^0) - (\eta_T - \xi_T^0)) \sqrt{a} \rangle + \langle \Lambda |G^{3,0}|, (|\eta_T| - |\xi_T^0|) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall \eta \in \mathbf{V}(\omega)
 \end{array} \right. \quad (2.92)$$

où

$$\mathbf{K}(\omega) = \{ \eta \in \mathbf{V}(\omega; \eta_3 \leq d) \}$$

$$p^i = \int_{-1}^1 f^{i,0} dx_3 + h^{i,1}(\cdot, -1)$$

Chapitre 3

Etude de la convergence des solutions du problème variationnel mis à l'échelle $P(\varepsilon, \Omega)$ pour une coque elliptique membranaire.

Dans ce chapitre¹, on établit un théorème de convergence des solutions du problème variationnel $P(\varepsilon, \Omega)$ d'une coque elliptique membranaire, i.e, sa surface moyenne $S = \theta(\bar{\omega})$ est elliptique qui se caractérise par la courbure Gaussienne (voir [13] ou [12, p.121]), par exemple une partie d'un ellipsoïde. On suppose aussi qu'elle est totalement encastrée. On va prouver que sa limite est solution d'un problème bidimensionnel ce qui valide les résultats obtenus par la méthode des développements asymptotiques formels (Chapitre 3).

On va étudier chaque fois le cas de contact sans frottement puis le cas de contact avec frottement de Coulomb.

Nous énonçons maintenant quelques résultats qu'on aura besoin par la suite :

3.1 Le cas de contact sans frottement

Théorème 3.1

On Suppose que $\theta \in C^3(\bar{\omega}, \mathbb{R}^3)$, et on considère une famille de coques membranaires, linéairement élastiques et elliptiques; d'épaisseur 2ε qui s'approche de zéro, dont la surface moyenne $S = \theta(\bar{\omega})$ est la même pour toutes les coques. Soit $(u(\varepsilon), G^3(\varepsilon))$ la solution du problème $P_M(\varepsilon, \Omega)$; si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$; alors il existe des fonctions $u_\alpha^* \in H^1(\Omega)$ satisfaisants $u_\alpha^* = 0$ sur $\gamma \times [-1, 1]$, $u_3^* \in L^2(\Omega)$ et $G^{3*} \in L^2(\omega)$ tels que :

$$u_\alpha(\varepsilon) \rightarrow u_\alpha^* \text{ dans } H^1(\Omega)$$

$$u_3(\varepsilon) \rightarrow u_3^* \text{ dans } L^2(\Omega)$$

$$G^3(\varepsilon) \rightarrow G^{3*} \text{ dans } L^2(\omega)$$

1. La première section de ce chapitre est l'objet d'une communication au séminaire international TAM-TAM'11, Sousse, Tunisie.

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

$u^* := (u_i^*)$ est indépendante de x_3 .

En outre la moyenne; $\bar{u}^* := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^* dx_3$ satisfait le problème variationnel bidimensionnel mis à l'échelle $P_M(\omega)$ d'une coque elliptique membranaire linéairement élastique suivant :

$$(P_M(\omega)) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\bar{u}_3^*, G^{3*}) \in K_M(\omega) \times L^2(\omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\omega} a^{\alpha\beta\sigma\tau} \gamma_{\sigma\tau}(\bar{u}_3^*) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy = \int_{\omega} p^i \eta_i \sqrt{a} dy + \langle G^{3*}, \bar{\eta}_3 \rangle \quad \forall \eta = (\eta_i) \in \mathbf{V}_M(\omega) \\ \langle G^{3*}, \bar{\eta}_3 - \bar{u}_3^* \rangle \geq 0 \quad \forall \eta_3 \in K_M(\omega) \end{array} \right.$$

tels que

$$\mathbf{K}_M(\omega) = \{\eta = (\eta_i) \in \mathbf{V}_M(\omega) / \eta_3 \leq d\};$$

$$\mathbf{V}_M(\omega) = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times L^2(\omega)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(\eta) := \frac{1}{2} (\partial_\beta \eta_\alpha + \partial_\alpha \eta_\beta) - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \eta_\sigma - b_{\alpha\beta} \eta_3$$

$$a^{\alpha\beta\sigma\tau} := \frac{4\lambda u}{\lambda + 2u} a^{\alpha\beta} a^{\sigma\tau} + 2u (a^{\alpha\sigma} a^{\beta\tau} + a^{\alpha\tau} a^{\beta\sigma})$$

$$p^i := \int_{-1}^1 f^i dx_3 + h_-^i \quad \text{et } h_-^i = h(\cdot, -1)$$

Preuve

La preuve de ce théorème est divisée en huit étapes. Pour des raisons techniques la considération des forces de surface n'est pas prise en compte .

Etape1 On montre dans cette partie que les suites $\{u_\alpha(\varepsilon)\}, \{u_3(\varepsilon)\}$ et $\{e_{i||j}(\varepsilon)\}$ admettent des sous-suites notées aussi, respectivement par $\{u_\alpha(\varepsilon)\}, \{u_3(\varepsilon)\}$ et $\{e_{i||j}(\varepsilon)\}$ vérifiant les convergences faibles suivantes :

$$\begin{aligned} u_\alpha(\varepsilon) &\rightharpoonup u_\alpha^* \text{ dans } H^1(\Omega), \\ u_3(\varepsilon) &\rightharpoonup u_3^* \text{ dans } L^2(\Omega), \\ e_{i||j}(\varepsilon) &\rightharpoonup e_{i||j}^* \text{ dans } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Korn tridimensionnelle on obtient : \exists des constantes C_M et

C_e tels que :

$$\begin{aligned}
 C_M^{-2} \sum_i |u_i(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 &\leq C_M^{-2} \left(\sum_\alpha \|u_\alpha(\varepsilon)\|_{1,\Omega}^2 + |u_3(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \right) \\
 &\leq \sum_{ij} |e_{i\|j}(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \\
 &\leq C_e g_0^{\frac{-1}{2}} \int_\Omega A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k\|l}(\varepsilon) e_{i\|j}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
 &= C_e g_0^{\frac{-1}{2}} \left(\int_\Omega f^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \langle \sqrt{g(\varepsilon)} G^3(\varepsilon), u_3(\varepsilon) \rangle \right) \\
 &\leq C_e g_0^{\frac{-1}{2}} \int_\Omega f^i u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
 &\leq C_e g_0^{\frac{-1}{2}} g_1^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_i |f^i|_{0,\Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_i |u_i(\varepsilon)|_{0,\Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

D'où, il existe des constantes C_1 , C_2 et C_3 indépendantes de ε telles que :

$$\|u_\alpha(\varepsilon)\|_{1,\Omega} \leq C_1, |u_3(\varepsilon)|_{0,\Omega} \leq C_2 \text{ et } |e_{i\|j}(\varepsilon)|_{0,\Omega} \leq C_3.$$

On déduit que les suites $\{u_\alpha(\varepsilon)\}$, $\{u_3(\varepsilon)\}$ et $\{e_{i\|j}(\varepsilon)\}$ sont bornées, respectivement dans $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$. Ce qui nous permet d'extraire des sous-suites toujours notées respectivement par $\{u_\alpha(\varepsilon)\}$, $\{u_3(\varepsilon)\}$ et $\{e_{i\|j}(\varepsilon)\}$ qui admettent des limites faibles respectivement dans $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ qu'on note u_α^* , u_3^* et $e_{i\|j}^*$ respectivement.

Etape2 On montre que les fonctions u_i^* trouvées dans (i) sont indépendantes de x_3 .
D'après (i) :

$$\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) + \varepsilon \partial_\alpha u_3(\varepsilon) = 2\varepsilon \{e_{\alpha\|3}(\varepsilon) + \Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon) u_\sigma(\varepsilon)\} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega);$$

en effet, d'après (i) la suite $(u_3(\varepsilon))$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et $u_\alpha(\varepsilon) \rightharpoonup u_\alpha^*$ dans $H^1(\Omega)$ et $\Gamma_{\alpha 3}^\sigma(\varepsilon)$ convergent dans $C^0(\bar{\Omega})$ (voir [12, Thm.3.3.1]).

D'autre part, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \partial_3 u_\alpha^* \varphi dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \partial_3 u_\alpha(\varepsilon) \varphi dx,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_\Omega \varepsilon \partial_\alpha u_3(\varepsilon) \varphi dx \right\} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_\Omega \varepsilon u_3(\varepsilon) \partial_\alpha \varphi dx \right\} = 0$$

Donc :

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_\Omega (\partial_3 u_\alpha(\varepsilon) + \varepsilon \partial_\alpha u_3(\varepsilon)) \varphi dx \right\} = \int_\Omega \partial_3 u_\alpha^* \varphi dx,$$

ce qui donne $\partial_3 u_\alpha^* = 0$ dans Ω au sens des distributions.

La partie (i) implique également que $\partial_3 u_3(\varepsilon) = \varepsilon e_{3\|3}(\varepsilon) \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$.

Pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, de $u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3^*$ dans $L^2(\Omega)$ on a

$$\int_{\Omega} \partial_3 u_3^* \varphi dx = - \int_{\Omega} u_3^* \partial_3 \varphi dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_3(\varepsilon) \partial_3 \varphi dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \partial_3 u_3(\varepsilon) \varphi dx = 0$$

ce qui implique $\partial_3 u_3^* = 0$ dans Ω au sens des distributions.

Etape3 Les limites $e_{i||j}^*$ trouvées dans (i) sont indépendantes de x_3 , de plus elles sont en rapport avec la limite $u^* := (u_i^*)$ par :

$$e_{\alpha||\beta}^* = \gamma_{\alpha\beta}(u^*) := \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} u_{\beta}^* + \partial_{\beta} u_{\alpha}^*) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} u_{\sigma}^* - b_{\alpha\beta} u_3^*, \quad (3.1)$$

$$e_{\alpha||3}^* = 0, \quad (3.2)$$

$$e_{3||3}^* = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^*. \quad (3.3)$$

On rappelle que

$$e_{\alpha||\beta}(\varepsilon) = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} u_{\beta}(\varepsilon) + \partial_{\beta} u_{\alpha}(\varepsilon)) - \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) u_p(\varepsilon).$$

D'après (i) on a $e_{\alpha||\beta}(\varepsilon) \rightharpoonup e_{\alpha||\beta}^*$ dans $L^2(\Omega)$, $u_{\alpha}(\varepsilon) \rightharpoonup u_{\alpha}^*$ dans $H^1(\Omega)$, $u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3^*$ dans $L^2(\Omega)$. Et le fait que $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}(\varepsilon) \rightarrow \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}$ et $\Gamma_{\alpha\beta}^3(\varepsilon) \rightarrow b_{\alpha\beta}$ dans $C^0(\bar{\Omega})$ (voir [12, Thm. 3.3-1]); on trouve que

$$\frac{1}{2} (\partial_{\alpha} u_{\beta}(\varepsilon) + \partial_{\beta} u_{\alpha}(\varepsilon)) - \Gamma_{\alpha\beta}^p(\varepsilon) u_p(\varepsilon) \rightharpoonup \gamma_{\alpha\beta}(u^*) \text{ dans } L^2(\Omega)$$

d'où (3.1).

De la partie (ii) on déduit que les fonctions $e_{\alpha||\beta}^*$ sont indépendantes de x_3 car les fonctions u_i^* sont indépendantes de x_3 .

Soit $v = (v_i)$ une fonction arbitraire dans l'espace

$$V(\Omega) = \{v = (v_i) \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ on } \gamma \times [-1, 1]\}$$

Les relations suivantes sont des conséquences directes des définitions des $e_{i||j}(\varepsilon, v)$:

$$\varepsilon e_{\alpha||\beta}(\varepsilon, v) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega)$$

$$\varepsilon e_{\alpha||3}(\varepsilon, v) \rightarrow \frac{1}{2} \partial_3 v_{\alpha} \text{ dans } L^2(\Omega)$$

$$\varepsilon e_{3||3}(\varepsilon, v) = \partial_3 v_3$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Les équations du problème variationnel tri-dimensionnel mis à l'échelle $P(\varepsilon, \Omega)$ nous donnent

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) \{ \varepsilon e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, v) \} \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
 &= \int_{\Omega} \{ A^{\alpha\beta\sigma\tau}(\varepsilon) e_{\sigma||\tau}(\varepsilon) + A^{\alpha\beta 33}(\varepsilon) e_{3||3}(\varepsilon) \} \{ \varepsilon e_{\alpha||\beta}(\varepsilon, v) \} \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
 &+ \int_{\Omega} \{ 4A^{\alpha 3\sigma 3}(\varepsilon) e_{\sigma||3}(\varepsilon) \} \{ \varepsilon e_{\alpha||3}(\varepsilon, v) \} \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
 &+ \int_{\Omega} \{ A^{33\sigma\tau}(\varepsilon) e_{\sigma||\tau}(\varepsilon) + A^{3333}(\varepsilon) e_{3||3}(\varepsilon) \} \{ \varepsilon e_{3||3}(\varepsilon, v) \} \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
 &= \varepsilon \int_{\Omega} f^i v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \varepsilon \langle \sqrt{g(\varepsilon)} G^3(\varepsilon), v_3 \rangle.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

On choisit $v_3 = 0$ sur le bord Γ_+ dans (4.18) ; après passage à la limite, on trouve

$$\int_{\Omega} \{ 2\mu a^{\alpha\sigma} e_{\sigma||3}^* \partial_3 v_{\alpha} + (\lambda a^{\sigma\tau} e_{\sigma||\tau}^* + (\lambda + 2\mu) e_{3||3}^*) \partial_3 v_3 \} \sqrt{a} dx = 0.$$

A l'aide des fonctions tests convenables, on déduit que $e_{\sigma||3}^* = 0$ et $e_{3||3}^* = \frac{-\lambda}{\lambda+2\mu} a^{\alpha\beta} e_{\alpha||\beta}^*$.

Etape4 : $G^3(\varepsilon) \rightharpoonup G^{3*}$ dans $L^2(\omega)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$?

De (4.18) nous avons $\forall v \in \mathbf{V}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
 \langle G^3(\varepsilon), v_3 \rangle &= \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon) e_{i||j}(\varepsilon, v) \sqrt{g(\varepsilon)} dx - \int_{\Omega} f^{i,0}(x) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
 &= \int_{\Omega} \{ A^{\alpha\beta\tau\delta}(\varepsilon) e_{\tau||\delta}(\varepsilon) + A^{\alpha\beta 33}(\varepsilon) e_{3||3}(\varepsilon) \} e_{\alpha||\beta}(\varepsilon, v) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
 &+ 4 \int_{\Omega} A^{\alpha 3\tau 3}(\varepsilon) e_{\tau||3}(\varepsilon) e_{\alpha||3}(\varepsilon, v) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
 &+ \int_{\Omega} \{ A^{33\tau\delta}(\varepsilon) e_{\tau||\delta}(\varepsilon) + A^{3333}(\varepsilon) e_{3||3}(\varepsilon) \} e_{3||3}(\varepsilon, v) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
 &- \int_{\Omega} f^{i,0}(x) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Pour $v \in \mathbf{V}(\Omega)$ indépendant de x_3 nous avons quand $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\left. \begin{aligned}
 e_{\alpha||\beta}(\varepsilon, v) &\longrightarrow \gamma_{\alpha\beta}(v) = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} v_{\beta} + \partial_{\beta} v_{\alpha}) - \Gamma_{\alpha\beta}^{\tau} v_{\tau} - b_{\alpha\beta} v_3 \text{ in } L^2(\Omega), \\
 e_{\alpha||3}(\varepsilon, v) &\longrightarrow \frac{1}{2} \partial_{\alpha} v_3 + b_{\alpha}^{\tau} v_{\tau} \text{ in } L^2(\Omega), \\
 e_{3||3}(\varepsilon, v) &= 0.
 \end{aligned} \right\} \tag{3.7}$$

Gardons $v \in \mathbf{V}(\Omega)$ indépendant de x_3 fixé en (3.6) et que $\varepsilon \rightarrow 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle G^3(\varepsilon), v_3 \rangle &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} a^{\alpha\beta} a^{\tau\delta} + \mu (a^{\alpha\tau} a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta} a^{\beta\tau}) \right\} e_{\tau\|\delta}^* \gamma_{\alpha\beta}(v) \sqrt{a} dx \\
 &\quad - \int_{\Omega} f^{i,0}(x) v_i \sqrt{a} dx \\
 &= \int_{\Omega} a^{\alpha\beta\tau\delta} \gamma_{\tau\delta}(u^*) \gamma_{\alpha\beta}(v) \sqrt{a} dx - \int_{\Omega} f^{i,0}(x) v_i \sqrt{a} dx
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

de $v \in \mathbf{V}(\Omega)$ indépendant de x_3 nous avons $v(y, x_3) = \bar{v}(y)$ avec $(y, x_3) \in \Omega$ et $\bar{v} \in \mathbf{H}_0^1(\omega)$ [15, Lemma3.2], . La relation (3.8) est valable pour tous les $v \in \mathbf{V}(\Omega)$ indépendant de x_3 et en particulier pour $v = (0, 0, v_3)$, nous avons donc

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle G^3(\varepsilon), v_3 \rangle &= \int_{\omega} a^{\alpha\beta\tau\delta} \gamma_{\tau\delta}(\bar{u}_3^*) \gamma_{\alpha\beta}(v) \sqrt{a} dx_1 dx_2 - \int_{\omega} \left(\int_{-1}^1 f^{3,0} dx_3 \right) v_3 \sqrt{a} dx_1 dx_2 \\
 &= - \int_{\omega} b_{\alpha\beta} a^{\alpha\beta\tau\delta} \gamma_{\tau\delta}(\bar{u}_3^*) \bar{v}_3 \sqrt{a} dx_1 dx_2 - \int_{\omega} \left(\int_{-1}^1 f^{3,0} dx_3 \right) \bar{v}_3 \sqrt{a} dx_1 dx_2
 \end{aligned}$$

L'application $\bar{v}_3 \mapsto - \int_{\omega} b_{\alpha\beta} a^{\alpha\beta\tau\delta} \gamma_{\tau\delta}(\bar{u}_3^*) \bar{v}_3 \sqrt{a} dx_1 dx_2 - \int_{\omega} \left(\int_{-1}^1 f^{3,0} dx_3 \right) \bar{v}_3 \sqrt{a} dx_1 dx_2$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\omega)$, et comme $\overline{H_0^1(\omega)} = L^2(\omega)$, nous pouvons étendre l'application à une forme linéaire continue sur $L^2(\omega)$. Ainsi, il existe $G^{3,*} \in L^2(\omega)$ (sous-ensemble dense de $H^{-\frac{1}{2}}(\omega)$) tel que :

$$\langle G^{3,*}, \bar{v}_3 \rangle = - \int_{\omega} b_{\alpha\beta} a^{\alpha\beta\tau\delta} \gamma_{\tau\delta}(\bar{u}_3^*) \bar{v}_3 \sqrt{a} dx_1 dx_2 - \int_{\omega} \left(\int_{-1}^1 f^{3,0} dx_3 \right) \bar{v}_3 \sqrt{a} dx_1 dx_2$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle G^3(\varepsilon), v_3 \rangle = \langle G^{3,*}, \bar{v}_3 \rangle. \tag{3.9}$$

A partir de (3.8) et (3.9) $(u^*, G^{3,*})$ est la solution de la formulation variationnelle

$$\int_{\Omega} a^{\alpha\beta\tau\delta} \gamma_{\tau\delta}(u^*) \gamma_{\alpha\beta}(v) \sqrt{a} dx = \int_{\Omega} f^{i,0}(x) v_i \sqrt{a} dx + \langle G^{3,*}, \bar{v}_3 \rangle$$

qui peut s'écrire comme (u^* et v sont indépendants de x_3), en utilisant [15, Lemma3.2], ,

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{u}_3^*, G^{3,*}) \in V_M(\omega) \times L^2(\omega) \text{ tel que :} \\ \int_{\omega} a^{\alpha\beta\tau\delta} \gamma_{\tau\delta}(\bar{u}_3^*) \gamma_{\alpha\beta}(\bar{v}) \sqrt{a} dx_1 dx_2 = \int_{\omega} \left(\int_{-1}^1 f^{i,0} dx_3 \right) \bar{v}_i \sqrt{a} dx_1 dx_2 + \langle G^{3,*}, \bar{v}_3 \rangle \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Etape5 : $u_3^* \leq d$ dans Ω ?

De $u_3(\varepsilon)$ dans $K(\Omega)$, **Etape1** et **Etape2** la fonction $u_3(\varepsilon)$ vérifie quelques propriétés

$$\left. \begin{array}{l} u_3(\varepsilon) \leq d \text{ a.e. sur } \Gamma_+, \\ u_3(\varepsilon) \rightharpoonup u_3^* \text{ dans } L^2(\Omega), \\ \partial_3 u_3(\varepsilon) \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega). \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

Nous notons que l'ensemble $K(\Omega)$ étant convexe et faiblement fermé dans $H^1(\Omega)$ mais la limite faible de $u_3(\varepsilon)$ est dans $L^2(\Omega)$ et non dans $H^1(\Omega)$. Donc on ne peut pas en déduire de cette propriété que $u_3^* \leq d$ p.p. dans Ω . Pour cela, nous utilisons un autre argument, le raisonnement par l'absurde, la même méthode que celle utilisée dans [46]. Supposons qu'il existe $\omega_0 \subset \omega$, $\text{mes}(\omega_0) > 0$, tel que $u_3^* > d$ dans $\Sigma = \omega_0 \times [-1, 1]$.

Soit $\phi \geq 0$ élément de $D(\omega_0)$ et $\Sigma_\phi = \text{Supp}(\phi) \times [-1, 1] \subset \Sigma$. Définissons une fonction χ dans Σ_ϕ par $\chi = -(1 + x_3)\phi$, nous avons les propriétés

$$\left. \begin{array}{l} \chi = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \chi < 0 \text{ sur } \Sigma_\phi \setminus \Gamma_-, \\ \chi \leq 0 \text{ sur } \Gamma_+, \\ \partial_3 \chi = -\phi \leq 0 \text{ dans } \Sigma_\phi. \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

En utilisant la formule de Green, nous obtenons

$$\left. \begin{array}{l} \int_\Omega \partial_3 (u_3(\varepsilon) - d) \chi dx = - \int_\Omega (u_3(\varepsilon) - d) \partial_3 \chi dx + \int_{\partial\Omega} (u_3(\varepsilon) - d) \chi n_3 d\sigma \\ = \int_\Omega (u_3(\varepsilon) - d) \phi dx + \int_{\Gamma_+} (u_3(\varepsilon) - d) \chi d\sigma \end{array} \right\} \quad (3.13)$$

Passons à la limite quant $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (3.13) en considérant les relations (3.11), (3.12) et $u_3^* > d$ dans Σ

nous déduisons que le côté droit de (3.13) converge vers une limite strictement positive. Par contre le côté gauche converge vers la limite 0 ce qui induit une contradiction. Nous en déduisons donc que $u_3^* \leq d$ dans Ω . De **Etape2** nous avons $u_3^* \in L^2(\Omega)$ est indépendant de x_3 alors $u_3^*(y, x_3) = \bar{u}_3^*(y) \in L^2(\omega)$ pour presque tout $(y, x_3) \in \Omega$. Par conséquent

$$\bar{u}_3^* \in K(\omega) = \{\eta \in L^2(\omega); \eta \leq d \text{ p.p. sur } \omega\} \quad (3.14)$$

Etape6 : $\langle G^{3*}, (\eta_3 - \bar{u}_3^*) \rangle \geq 0$ pour tout $\eta_3 \in K_M(\omega)$?

Prenons dans l'inéquation de (2.8) $v_3 = d$ et $v_3 = 2u(\varepsilon) - d$, nous obtenons $\langle G^3(\varepsilon), (d - u_3(\varepsilon)) \rangle = 0$, comme $d \in H_0^1(\omega)$ par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle G^3(\varepsilon), u_3(\varepsilon) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle G^3(\varepsilon), d \rangle = \langle G^{3*}, d \rangle. \quad (3.15)$$

De plus, nous avons

$$\langle G^3(\varepsilon), (v_3 - u_3(\varepsilon)) \rangle \geq 0, \forall v_3 \in K(\Omega) \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle G^3(\varepsilon), (v_3 - u_3(\varepsilon)) \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle G^3(\varepsilon), v_3 \rangle - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle G^3(\varepsilon), u_3(\varepsilon) \rangle \\
 &= \langle G^{3*}, \bar{v}_3 \rangle - \langle G^{3*}, d \rangle \\
 &\leq \langle G^{3*}, \bar{v}_3 \rangle - \langle G^{3*}, \bar{u}_3^* \rangle = \langle G^{3*}, (\bar{v}_3 - \bar{u}_3^*) \rangle.
 \end{aligned}$$

Nous concluons que

$$\langle G^{3*}, (\bar{v}_3 - \bar{u}_3^*) \rangle \geq 0, \forall \bar{v}_3 \in K(\omega). \quad (3.17)$$

A la fin, en utilisant les relations (3.10), (3.14) et (3.17) nous déduisons le problème variationnelle limite

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\bar{u}_3^*, G^{3,*}) \in \mathbf{K}_M(\omega) \times L^2(\omega) \text{ tel que} \\ \int_{\omega} a^{\alpha\beta\tau\delta} \gamma_{\tau\delta}(\bar{u}_3^*) \gamma_{\alpha\beta}(\bar{v}) \sqrt{a} dx_1 dx_2 = \int_{\omega} \left(\int_{-1}^1 f^{i,0} dx_3 \right) \bar{v}_i \sqrt{a} dx_1 dx_2 + \langle G^{3,*}, \bar{v}_3 \rangle, \forall \bar{v} \in \mathbf{V}_M(\omega) \\ \langle G^{3*}, (\bar{v}_3 - \bar{u}_3^*) \rangle \geq 0, \forall \bar{v}_3 \in K(\omega) \end{array} \right.$$

avec $\mathbf{K}_M(\omega) = H_0^1(\omega) \times H_0^1(\omega) \times K(\omega)$.

Ce problème a une solution unique d'après le théorème de Stampacchia. Par conséquent, les convergences établies pour les sous-suites $u(\varepsilon)$, $G^3(\varepsilon)$ sont pour l'ensemble des suites.

Etape7 $e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}^*$ dans $L^2(\Omega)$? (les convergences faibles établies à l'Etape 1 sont fortes).

Soit $\Lambda(\varepsilon)$ défini par :

$$\begin{aligned}
 \Lambda(\varepsilon) &= \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) (e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}^*) (e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}^*) \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\
 &= \int_{\Omega} f^{i,0}(x) u_i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \langle G^3(\varepsilon), u_3(\varepsilon) \rangle \\
 &\quad - \int_{\Omega} A^{ijkl}(\varepsilon) (2e_{k||l}(\varepsilon) - e_{k||l}^*) e_{i||j}^* \sqrt{g(\varepsilon)} dx.
 \end{aligned}$$

Combinons le fait que les coefficients $A^{ijkl}(\varepsilon)$ sont définis positifs uniformément [12, Thm. 3.3-2], la relation $0 < g_0 \leq g(\varepsilon)$, $\forall x \in \bar{\Omega}$ [12, Thm. 3.3-1], les convergences faibles de **Etape1**, le comportement asymptotique de $A^{ijkl}(\varepsilon)$, $\sqrt{g(\varepsilon)}$ (2.12), (2.13) et (3.15) nous obtenons

$$0 \leq C_e^{-1} \sqrt{g_0} \sum_{i,j} \|e_{i||j}(\varepsilon) - e_{i||j}^*\|_{0,\Omega}^2 \leq \Lambda(\varepsilon)$$

et

$$\Lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Lambda(\varepsilon) = \int_{\Omega} f^{i,0} u_i^* \sqrt{a} dx + \langle G^{3*}, d \rangle - \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^* e_{i||j}^* \sqrt{a} dx.$$

En utilisant les expressions de $A^{ijkl}(0)$ (2.14) et $e_{i||j}^*$ (3.1), (4.2), (4.3) et que $(u_i^*, e_{i||j}^*)$ sont

indépendants de x_3 (**Etape2**) nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A^{ijkl}(0) e_{k||l}^* e_{i||j}^* \sqrt{a} dx &= \int_{\omega} a^{\alpha\beta\tau\delta} \gamma_{\tau\delta}(\bar{u}_3^*) \gamma_{\alpha\beta}(\bar{u}_3^*) \sqrt{a} dx_1 dx_2 \\ \int_{\Omega} f^{i,0} u_i^* \sqrt{a} dx &= \int_{\omega} \left(\int_{-1}^1 f^{i,0} dx_3 \right) \bar{u}_i^* \sqrt{a} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\Lambda = \langle G^{3*}, d \rangle - \langle G^{3*}, \bar{u}_3^* \rangle = \langle G^{3*}, (d - \bar{u}_3^*) \rangle \leq 0$$

ce qui signifie que $e_{i||j}(\varepsilon) \rightarrow e_{i||j}^*$ dans $L^2(\Omega)$.

Etape8 : $u_{\alpha}(\varepsilon) \rightarrow u_{\alpha}^*$ dans $H^1(\Omega)$, $u_3(\varepsilon) \rightarrow u_3^*$ dans $L^2(\Omega)$? (les convergences faibles établies dans **Etape1** sont fortes). Le preuve est identique à celle proposée dans [15, Thm. 5.1.], .

Conclusion

On conclut de ce travail, dans le cas des coques minces, en utilisant la méthode des développements asymptotiques formelles que dans le cas sans frottement, on trouve un problème bidimensionnel de Signorini sans frottement et dans le cas avec frottement de Coulomb, on trouve un problème bidimensionnel de Signorini avec frottement. Donc, dans chaque cas, on dérive un problème bidimensionnel de même type. Et ceci en utilisant l'étude asymptotique formelle. Ce qui n'est pas le cas pour les plaques et les coques peu-profondes (shallow shells) où on perd les forces de frottements dans le problème bidimensionnel, ce qui répond à la question de Paumier [40]. Ensuite dans le chapitre 4, on a validé ce résultat à l'aide de la méthode de convergence et ceci pour le cas particulier : une coque membranaire elliptique totalement encastrée et uniquement dans le cas sans frottement. Pour le cas avec frottement, on a pas pu avoir un résultat de convergence pour toute la suite $u(\varepsilon)$ parce qu'on dispose pas d'un résultat d'unicité pour le problème limite en général. La question qui se pose, qu'est ce qui se passe pour les autres modèles de coques, membrane généralisée, flexion, membrane-flexion, modèle de Naghdi et modèle de Koiter. La question se pose aussi pour les modèles non linéarisés et pour les modèles dynamiques.

Deuxième partie

**ANALYSE ASYMPTOTIQUE DES COQUES
MINCES
PIÉZOÉLECTRIQUES**

INTRODUCTION

Un problème de contact est décrit par un système d'équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement et la déformation des corps, ainsi que par des conditions aux limites modélisant des forces de contact et de frottement. Les premiers résultats sur le sujet des problèmes de contact dans la théorie d'élasticité ont été obtenus à la fin du 19^{ème} siècle par Hertz (1895) (la date se réfère à la date de publication de ses travaux). La recherche a été effectuée en (1880) et Boussinesq (1885). Pour plus de détails sur les études menées avant 1953 sur les problèmes de contact nous nous référons à [27]. Au cours des dernières décennies, des problèmes d'analyse de structure impliquant Les interfaces de contact ont reçu une grande importance en raison des énormes applications industrielles. Signorini (1933, 1959) a donné une formulation générale pour les problèmes de contact sans frottement. Il a énoncé des conditions aux limites et des conditions de contact prescrites pour un corps élastique contre une fondation rigide. Les premiers résultats de l'existence de ces problèmes ont été donnés par Fichera [24, 25]. L'étude du contact unilatéral sans frottement pour une plaque élastique avec obstacle rigide a été analysé par Caffarelli et Friedman [6], Caffarelli, Friedman et Torelli [7], Dal Maso et Paderni [39]. Dans le cas avec frottement, Paumier [40] a étudié la modélisation asymptotique du contact unilatéral avec frottement de Coulomb pour la plaque Kirchhof-Love contre une fondation rigide. Il a prouvé que le problème tridimensionnel de Signorini avec frottement converge fortement vers la solution unique d'un problème de plaque de Signorini bidimensionnel sans frottement. Récemment, Léger et Miara [17] ont étudié une coque linéaire peu profonde sans frottement en utilisant la méthode de convergence. Bensayah, Chacha et Ghezal [2] ont généralisé les résultats de Paumier [40] à une coque peu profonde et l'étude de Léger et Miara [17] au cas de frottement de Coulomb. Dans cette direction, nous nous référons à Ghezal et Chacha [28] et aux références citées dans ce document pour une coque non linéaire peu profonde. La piézoélectricité est un phénomène électromécanique qui couple les champs élastiques et électriques. En général, un matériau piézoélectrique répond à des forces / pressions mécaniques et génère une charge / tension électrique. Ce phénomène s'appelle l'effet piézoélectrique direct, il a été découvert en 1880 par Pierre et Jacques Curie. Inversement, une charge / un champ électrique appliqué au matériau induit des contraintes ou déformations mécaniques. Ce phénomène est appelé l'effet piézoélectrique inverse, avait été prédit en 1881 par Lippmann. Pour plus de détails sur la piézoélectricité, voir par exemple Ikeda

[31] et les références citées dans celui-ci. L'une des premières applications de l'effet piézo-électrique était un détecteur sous-marin à ultrasons développé pendant la première guerre mondiale. Les structures minces de matériaux piézoélectriques sont généralement utilisées sous forme de patches ou de films minces collés ou insérés dans une structure en matériau classique, pour détecter ou générer des déformations, appelées capteurs ou actionneurs. Les matériaux piézoélectriques appartiennent à une classe des matériaux intelligents, qui sont très importants dans de nombreuses applications telles que, par exemple, la biomécanique, la biomédecine, la mécanique des structures, l'aéronautique, le génie civil, etc. Le domaine des matériaux intelligents a fait l'objet de recherches intensives au cours des dernières décennies. De plus, les matériaux avancés tels que les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans l'industrie moderne. Ils rendent les structures plus légères et plus rigides. Cependant, ils apportent des problèmes de vibrations et de bruit. Afin de répondre à ces préoccupations, de nombreuses méthodes d'amortissement des vibrations utilisant des matériaux piézoélectriques ont été développées. Les exemples les plus habituels utilisés dans les applications aérospatiales, aéronautiques et automobiles sont les coques élastiques minces, en particulier les structures de coques minces et peu profondes, où la courbure initiale de la coque est supposée faible. En particulier, les coques composites avec capteurs et actionneurs piézoélectriques semblent combiner les avantages des coques composites avec des capacités multifonctionnelles supplémentaires. En outre, le comportement électromécanique couplé de matériaux piézoélectriques et leur disponibilité sous forme de feuilles ont entraîné une utilisation intensive de coques composites stratifiées avec des couches piézoélectriques dans les domaines civil, naval et aérospatial. Nous nous référons à Rogacheva [44], Bernadou et Haenel [4], Tzou [47] et Yang [48] pour la théorie des coques piézoélectriques et leurs applications. Un dispositif piézoélectrique en contact avec ou sans frottement est fourni par les commutateurs ou systèmes microélectromécaniques et le problème de la stabilisation des vibrations dans les structures mécaniques. Il existe actuellement un intérêt considérable pour les problèmes de contact avec frottement impliquant des matériaux piézoélectriques. Il a une importance technologique en perspective : à titre d'exemple, le mouvement relatif de deux corps peut être détecté par un capteur piézoélectrique en contact avec frottement avec eux. Cependant, il existe très peu de résultats mathématiques concernant les problèmes de contact avec frottement pour des matériaux piézoélectriques, voir par exemple Maceri et Bisegna [38], et Matei et Sofonea [42]. Pour les structures piézoélectriques minces, les résultats sont limités. Nous citons les résultats importants de Yan et Miara [49, 50] et de Figueiredo et Stadler [26]. Dans ce travail, nous examinons le problème de contact avec le frottement pour les coques peu profondes piézoélectriques. Au moyen d'une analyse asymptotique, nous montrerons que la solution du problème tridimensionnel de Signorini avec frottement de Tresca d'une coque peu profonde piézoélectrique linéaire converge vers un problème bidimensionnel d'une coque peu profonde piézoélectrique lorsque l'épaisseur de la coque tend vers zéro. Dans ce travail, nous étendons les travaux de Yan et Miara (19) sur le problème de Signorini au problème de Signorini avec frottement de Tresca. Aussi, nous généralisons le modèle obtenu en (20)

à une coque peu profonde piézoélectrique. Le plan de notre travail est le suivant : Après cette introduction, nous donnons dans la section 2, les équations d'équilibre mécanique et de Maxwell-Gauss, le contact de Signorini et les conditions de frottement de Tresca. Dans la section 3, nous étudions le problème de l'inégalité variationnelle équivalent. Dans la section 4, nous prouvons la convergence de la solution lorsque l'épaisseur de la coque peu profonde tend vers zéro et établissons le problème limite d'une coque piézoélectrique peu profonde en contact unilatéral avec frottement. Dans la section 5, nous donnons le modèle à deux dimensions. Conclusion et commentaire sont présentés dans la dernière section.

Chapitre 4

ANALYSE ASYMPTOTIQUE DU PROBLEME DE CONTACT AVEC FROTTEMENT POUR LES COQUES PEU- PROFONDES PIÉZOÉLECTRIQUES

4.1 Position du problème

Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\Gamma_0^\varepsilon = \gamma_0 \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\Gamma_\pm^\varepsilon = \omega \times \{\pm\varepsilon\}$ et $\theta^\varepsilon : \bar{\omega} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de la classe C^3 . On définit une application :

$$\Theta^\varepsilon : \bar{\Omega}^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3 : \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon) = (x_1, x_2, \theta^\varepsilon(x_1, x_2)) + x_3^\varepsilon \mathbf{a}_3^\varepsilon(x_1, x_2).$$

Suivant la définition proposée par Ciarlet et Paumier [18], nous pouvons dire qu'une coque est peu profonde s'il existe une fonction $\theta \in C^3(\bar{\omega})$ indépendante de ε tel que $\theta^\varepsilon(x_1, x_2) = \varepsilon \theta(x_1, x_2)$, $\forall (x_1, x_2) \in \bar{\omega}$.

Soit $\hat{\Omega}^\varepsilon$ le domaine tridimensionnel occupé par le milieu piézoélectrique, c'est-à-dire la coque peu profonde.

On suppose que la coque peu profonde est soumise à une densité de force volumique $\hat{f}^\varepsilon \in L^2(\hat{\Omega}^\varepsilon)$ et une densité de charges électriques $\hat{\rho}_e^\varepsilon \in L^2(\hat{\Omega}^\varepsilon)$, soumise à une densité surfacique de force $\hat{g}^\varepsilon \in L^2(\hat{\Gamma}_-^\varepsilon)$ et soumise à des charges électriques $\hat{\vartheta}_e^\varepsilon \in L^2(\hat{\Gamma}_-^\varepsilon)$ et soumise à un potentiel fixe $\hat{\varphi}^\varepsilon = 0$ sur $\hat{\Gamma}_0^\varepsilon$, et encastrée sur la partie $\hat{\Gamma}_0^\varepsilon$ de la frontière.

On suppose aussi que cette coque entre en contact unilatéral sur sa face supérieure $\hat{\Gamma}_+^\varepsilon = \Theta^\varepsilon(\Gamma_+^\varepsilon)$ contre une fondation rigide $D^\varepsilon = \{x^\varepsilon \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2) \in \omega, x_3^\varepsilon \geq \hat{s}^\varepsilon\}$, où $(\hat{s}^\varepsilon \geq 0)$ est la fonction d'interstice définie sur $\hat{\Gamma}_+^\varepsilon$ et qui désigne la distance entre la face supérieure et la fondation rigide mesurée dans la direction normale

, voir Figure 4.1.

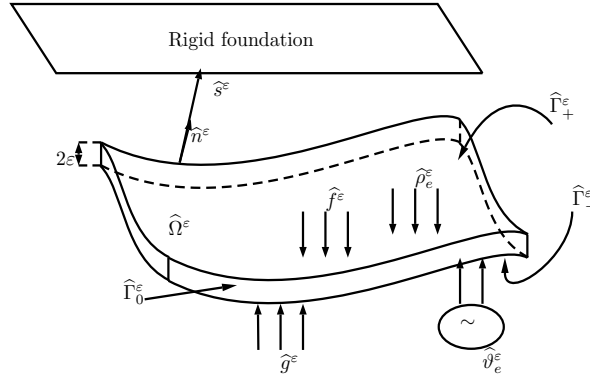


FIGURE 4.1 – Coque piézoélectrique linéaire peu profonde en contact avec frottement contre une fondation rigide.

Le problème classique à trois dimensions d'une coque peu-profonde piézoélectrique linéaire $\hat{\Omega}^\varepsilon$ entre en contact unilatéral avec frottement contre une fondation rigide sur la frontière $\hat{\Gamma}_+^\varepsilon$ est formulé comme suit :

Équations d'équilibre mécanique et conditions aux limites

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \hat{\sigma}^\varepsilon = \hat{f}^\varepsilon & \text{dans } \hat{\Omega}^\varepsilon, \\ \hat{\sigma}^\varepsilon \hat{n}^\varepsilon = \hat{g}^\varepsilon & \text{sur } \hat{\Gamma}_-^\varepsilon, \\ \hat{u}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \hat{\Gamma}_0^\varepsilon. \end{cases} \quad (4.1)$$

Équations de Maxwell-Gauss et conditions aux limites électriques

$$\begin{cases} \operatorname{div} \hat{D}^\varepsilon = \hat{\rho}_e^\varepsilon & \text{dans } \hat{\Omega}^\varepsilon, \\ \hat{D}^\varepsilon \hat{n}^\varepsilon = \hat{v}_e^\varepsilon & \text{sur } \hat{\Gamma}_-^\varepsilon, \\ \hat{D}^\varepsilon \hat{n}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \hat{\Gamma}_+^\varepsilon, \\ \hat{\varphi}^\varepsilon = 0 & \text{sur } \hat{\Gamma}_0^\varepsilon. \end{cases} \quad (4.2)$$

Équations constitutives tridimensionnelles

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_{ij}^\varepsilon = \hat{C}_{ijkl} \hat{e}_{kl}^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon) - \hat{P}_{kij} \hat{E}_k^\varepsilon(\hat{\varphi}^\varepsilon) & \text{dans } \hat{\Omega}^\varepsilon, \\ \hat{D}_k^\varepsilon = \hat{P}_{kij} \hat{e}_{ij}^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon) + \hat{d}_{kl} \hat{E}_l^\varepsilon(\hat{\varphi}^\varepsilon) & \text{dans } \hat{\Omega}^\varepsilon, \end{cases} \quad (4.3)$$

tels que :

$\hat{C} = (\hat{C}_{ijkl})$ est le tenseur d'ordre quatre des coefficients élastiques, $\hat{P} = (\hat{P}_{kij})$ est le tenseur d'ordre trois des coefficients piézoélectriques, $\hat{d} = (\hat{d}_{kl})$ est le tenseur d'ordre deux des coefficients diélectriques du matériau sont supposés être indépendants du paramètre ε ,

Nous supposons que les trois tenseurs du matériau piézoélectrique \hat{C} , \hat{P} et \hat{d} vérifient les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{C}_{ijkl} = \widehat{C}_{ijlk} = \widehat{C}_{klij}, \exists c > 0, \widehat{C}_{ijkl} M_{kl} M_{ij} \geq c \sum_{i,j=1}^3 (M_{ij})^2, \forall M = (M_{ij}), M_{ij} = M_{ji}, \\ \widehat{d}_{kl} = \widehat{d}_{lk}, \exists c > 0, \widehat{d}_{kl} \varrho_k \varrho_l \geq c \sum_{k=1}^3 \varrho_k^2, \forall \varrho = (\varrho_k) \in \mathbb{R}^3, \\ \widehat{P}_{mkl} = \widehat{P}_{mlk}. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

conditions de contact de Signorini

$$\widehat{u}_N^\varepsilon \leq \widehat{s}^\varepsilon, \widehat{\sigma}_N^\varepsilon \leq 0, \widehat{\sigma}_N^\varepsilon (\widehat{u}_N^\varepsilon - \widehat{s}^\varepsilon) = 0, \text{ sur } \widehat{\Gamma}_+^\varepsilon. \quad (4.5)$$

La loi de frottement de tresca

$$\left. \begin{array}{l} |\widehat{\sigma}_T^\varepsilon| \leq \widehat{q}^\varepsilon, \\ |\widehat{\sigma}_T^\varepsilon| < \widehat{q}^\varepsilon \implies \widehat{u}_T = 0, \\ |\widehat{\sigma}_T^\varepsilon| = \widehat{q}^\varepsilon \implies \exists c \geq 0 : \widehat{u}_T = -c \widehat{\sigma}_T, \end{array} \right\} \text{ sur } \widehat{\Gamma}_+^\varepsilon. \quad (4.6)$$

4.2 L'inégalité variationnelle

4.2.1 L'inégalité variationnelle dans $\widehat{\Omega}^\varepsilon$

Nous définissons les espaces de déplacements mécaniques admissibles

$$\widehat{\mathbf{V}}^\varepsilon(\widehat{\Omega}^\varepsilon) = \{\widehat{v}^\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon); \widehat{v}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \widehat{\Gamma}_0^\varepsilon\},$$

le cône convexe

$$\widehat{\mathbf{K}}^\varepsilon(\widehat{\Omega}^\varepsilon) = \{\widehat{v}^\varepsilon \in \widehat{\mathbf{V}}^\varepsilon(\widehat{\Omega}^\varepsilon); \widehat{v}_N^\varepsilon \leq \widehat{s}^\varepsilon \text{ sur } \widehat{\Gamma}_+^\varepsilon\},$$

et l'espace des potentiels électriques admissibles

$$\widehat{Q}^\varepsilon(\widehat{\Omega}^\varepsilon) = \{\widehat{\psi}^\varepsilon \in H^1(\widehat{\Omega}^\varepsilon); \widehat{\psi}^\varepsilon = 0 \text{ sur } \widehat{\Gamma}_0^\varepsilon\}.$$

En utilisant la formulation de Green dans (4.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \widehat{e}_{ij}^\varepsilon (\widehat{v}^\varepsilon - \widehat{u}^\varepsilon) d\widehat{x}^\varepsilon - \int_{\partial\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \widehat{n}_j^\varepsilon (\widehat{v}_i^\varepsilon - \widehat{u}_i^\varepsilon) d\widehat{\Gamma}^\varepsilon &= \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{f}_i^\varepsilon (\widehat{v}_i^\varepsilon - \widehat{u}_i^\varepsilon) d\widehat{x}^\varepsilon, \\ \int_{\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon} \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \widehat{n}_j^\varepsilon (\widehat{v}_i^\varepsilon - \widehat{u}_i^\varepsilon) d\widehat{\Gamma}^\varepsilon &= \int_{\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon} \widehat{g}_i^\varepsilon (\widehat{v}_i^\varepsilon - \widehat{u}_i^\varepsilon) d\widehat{\Gamma}^\varepsilon, \\ \int_{\widehat{\Gamma}_0^\varepsilon} \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \widehat{n}_j^\varepsilon (\widehat{v}_i^\varepsilon - \widehat{u}_i^\varepsilon) d\widehat{\Gamma}^\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \widehat{\Gamma}_0^\varepsilon, \end{aligned}$$

pour tout $\widehat{v}^\varepsilon \in \widehat{\mathbf{K}}^\varepsilon(\widehat{\Omega}^\varepsilon)$.

Nous avons

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \widehat{n}_j^\varepsilon (\widehat{v}_i^\varepsilon - \widehat{u}_i^\varepsilon) &= \widehat{\sigma}_T^\varepsilon (\widehat{v}_T^\varepsilon - \widehat{u}_T^\varepsilon) + \widehat{\sigma}_N^\varepsilon (\widehat{v}_N^\varepsilon - \widehat{u}_N^\varepsilon) \\ &= \widehat{\sigma}_T^\varepsilon (\widehat{v}_T^\varepsilon - \widehat{u}_T^\varepsilon) + \widehat{\sigma}_N^\varepsilon (\widehat{v}_N^\varepsilon - \widehat{s}^\varepsilon) - \widehat{\sigma}_N^\varepsilon (\widehat{u}_N^\varepsilon - \widehat{s}^\varepsilon),\end{aligned}$$

comme $\widehat{\sigma}_N^\varepsilon (\widehat{u}_N^\varepsilon - \widehat{s}^\varepsilon) = 0$ sur $\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \widehat{e}_{ij}^\varepsilon (\widehat{v}^\varepsilon - \widehat{u}^\varepsilon) d\widehat{x}^\varepsilon - \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{f}_i^\varepsilon (\widehat{v}_i^\varepsilon - \widehat{u}_i^\varepsilon) d\widehat{x}^\varepsilon - \int_{\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon} \widehat{g}_i^\varepsilon (\widehat{v}_i^\varepsilon - \widehat{u}_i^\varepsilon) d\widehat{\Gamma}^\varepsilon \\ - \int_{\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon} (\widehat{\sigma}_T^\varepsilon (\widehat{v}_T^\varepsilon - \widehat{u}_T^\varepsilon) - \widehat{\sigma}_N^\varepsilon (\widehat{v}_N^\varepsilon - \widehat{s}^\varepsilon)) d\widehat{\Gamma}^\varepsilon = 0.\end{aligned}$$

Alors

$$\int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \widehat{e}_{ij}^\varepsilon (\widehat{v}^\varepsilon - \widehat{u}^\varepsilon) d\widehat{x}^\varepsilon - \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{f}_i^\varepsilon (\widehat{v}_i^\varepsilon - \widehat{u}_i^\varepsilon) d\widehat{x}^\varepsilon - \int_{\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon} \widehat{g}_i^\varepsilon (\widehat{v}_i^\varepsilon - \widehat{u}_i^\varepsilon) d\widehat{\Gamma}^\varepsilon \geq \int_{\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon} \widehat{\sigma}_T^\varepsilon (\widehat{v}_T^\varepsilon - \widehat{u}_T^\varepsilon) d\widehat{\Gamma}^\varepsilon, \quad (4.7)$$

puisque $\widehat{\sigma}_N^\varepsilon (\widehat{v}_N^\varepsilon - \widehat{s}^\varepsilon) \geq 0$.

A partir des conditions de contact de Signorini et de la loi de friction de Tresca, nous obtenons

$$\int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} (\widehat{\sigma}_T^\varepsilon (\widehat{v}_T^\varepsilon - \widehat{u}_T^\varepsilon) + \widehat{q}^\varepsilon |\widehat{v}_T^\varepsilon| - \widehat{q}^\varepsilon |\widehat{u}_T^\varepsilon|) d\widehat{x}^\varepsilon \geq 0. \quad (4.8)$$

Nous définissons la fonction de frottement \widehat{j}^ε par

$$\widehat{j}^\varepsilon (\widehat{v}^\varepsilon) = \int_{\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon} \widehat{q}^\varepsilon |\widehat{v}_T^\varepsilon| d\widehat{\Gamma}^\varepsilon. \quad (4.9)$$

En ajoutant $\widehat{j}^\varepsilon (\widehat{v}^\varepsilon) - \widehat{j}^\varepsilon (\widehat{u}^\varepsilon)$ des deux côtés de l'équation (4.7) et en utilisant la relation (4.8), nous obtenons

$$\int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \widehat{e}_{ij}^\varepsilon (\widehat{v}^\varepsilon - \widehat{u}^\varepsilon) d\widehat{x}^\varepsilon + \widehat{j}^\varepsilon (\widehat{v}^\varepsilon) - \widehat{j}^\varepsilon (\widehat{u}^\varepsilon) - \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{f}_i^\varepsilon (\widehat{v}_i^\varepsilon - \widehat{u}_i^\varepsilon) d\widehat{x}^\varepsilon - \int_{\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon} \widehat{g}_i^\varepsilon (\widehat{v}_i^\varepsilon - \widehat{u}_i^\varepsilon) d\widehat{\Gamma}^\varepsilon \geq 0. \quad (4.10)$$

En utilisant la formulation de Green dans (4.2), nous obtenons

$$- \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{D}_i^\varepsilon \widehat{\partial}_i^\varepsilon \widehat{\psi}^\varepsilon d\widehat{x}^\varepsilon + \int_{\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon} \widehat{\nu}_e^\varepsilon \widehat{\psi}^\varepsilon d\widehat{\Gamma}^\varepsilon = \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{\rho}_e^\varepsilon \widehat{\psi}^\varepsilon d\widehat{x}^\varepsilon, \quad (4.11)$$

pour tout $\widehat{\psi}^\varepsilon \in \widehat{Q}^\varepsilon(\widehat{\Omega}^\varepsilon)$.

D'après (4.3), (4.10) et (6.1), nous en déduisons que le problème initial est équivalent à l'inégalité variationnelle elliptique du second type

$$(V.\widehat{P}^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{\varphi}^\varepsilon) \in \widehat{\mathbf{K}}^\varepsilon(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \times \widehat{Q}^\varepsilon(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \text{ tel que :} \\ \widehat{b}^\varepsilon((\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{\varphi}^\varepsilon), (\widehat{v}^\varepsilon - \widehat{u}^\varepsilon, \widehat{\psi}^\varepsilon)) + \widehat{j}^\varepsilon(\widehat{v}^\varepsilon) - \widehat{j}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) \geq \widehat{l}^\varepsilon(\widehat{v}^\varepsilon - \widehat{u}^\varepsilon, \widehat{\psi}^\varepsilon), \\ \forall (\widehat{v}^\varepsilon, \widehat{\psi}^\varepsilon) \in \widehat{\mathbf{K}}^\varepsilon(\widehat{\Omega}^\varepsilon) \times \widehat{Q}^\varepsilon(\widehat{\Omega}^\varepsilon), \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} \widehat{b}^\varepsilon((\widehat{u}^\varepsilon, \widehat{\varphi}^\varepsilon), (\widehat{v}^\varepsilon, \widehat{\psi}^\varepsilon)) &= \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{C}_{ijkl} \widehat{e}_{kl}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) \widehat{e}_{ij}^\varepsilon(\widehat{v}^\varepsilon) d\widehat{x}^\varepsilon - \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{d}_{ij} \widehat{\partial}_j^\varepsilon \widehat{\varphi}^\varepsilon \widehat{\partial}_i^\varepsilon \widehat{\psi}^\varepsilon d\widehat{x}^\varepsilon \\ &+ \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{P}_{kij} \widehat{\partial}_k^\varepsilon \widehat{\varphi}^\varepsilon \widehat{e}_{ij}^\varepsilon(\widehat{v}^\varepsilon) d\widehat{x}^\varepsilon + \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{P}_{kij} \widehat{\partial}_k^\varepsilon \widehat{\psi}^\varepsilon \widehat{e}_{ij}^\varepsilon(\widehat{u}^\varepsilon) d\widehat{x}^\varepsilon, \\ \widehat{l}^\varepsilon(\widehat{v}^\varepsilon, \widehat{\psi}^\varepsilon) &= - \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{\rho}_e \widehat{\psi}^\varepsilon d\widehat{x}^\varepsilon + \int_{\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon} \widehat{\vartheta}_e \widehat{\psi}^\varepsilon d\widehat{\Gamma}^\varepsilon + \int_{\widehat{\Omega}^\varepsilon} \widehat{f}_i^\varepsilon \widehat{v}_i^\varepsilon d\widehat{x}^\varepsilon + \int_{\widehat{\Gamma}_-^\varepsilon} \widehat{g}_i^\varepsilon \widehat{v}_i^\varepsilon d\widehat{\Gamma}^\varepsilon. \end{aligned}$$

En utilisant des arguments classiques [22, 34, 42] de l'inégalité variationnelle elliptique de deuxième espèce, nous montrons que le problème $(V, \widehat{P}^\varepsilon)$ admet une solution unique.

4.2.2 L'inégalité variationnelle dans Ω^ε

Afin de transformer le problème $(V, \widehat{P}^\varepsilon)$ en un problème posé sur un domaine cylindrique Ω^ε , nous utilisons l'application $(\Theta^\varepsilon)^{-1}$ et les relations suivantes à l'aide de cette transformation

$$\begin{cases} d\widehat{x}^\varepsilon = \delta^\varepsilon(x^\varepsilon) dx^\varepsilon, \\ d\widehat{\Gamma}^\varepsilon = \delta^\varepsilon(x^\varepsilon) \{b_{3i}^\varepsilon(x^\varepsilon) b_{3i}^\varepsilon(x^\varepsilon)\}^{1/2} d\Gamma^\varepsilon, \\ \widehat{\partial}_j^\varepsilon \widehat{v}_i^\varepsilon = b_{kj}^\varepsilon(x^\varepsilon) \partial_k^\varepsilon v_i^\varepsilon(x^\varepsilon), \\ \widehat{\partial}_j^\varepsilon \widehat{\varphi}^\varepsilon = b_{kj}^\varepsilon(x^\varepsilon) \partial_k^\varepsilon \varphi^\varepsilon = \Upsilon_j^\varepsilon(\varphi^\varepsilon), \end{cases} \quad (4.12)$$

tel que

$$\begin{cases} \nabla^\varepsilon \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon) = (\partial_j^\varepsilon \Theta_i^\varepsilon(x^\varepsilon)), \\ \delta^\varepsilon(x^\varepsilon) = \det \nabla^\varepsilon \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon), \\ b_{ij}^\varepsilon(x^\varepsilon) = (\{\nabla^\varepsilon \Theta^\varepsilon(x^\varepsilon)\}^{-1})_{ij}. \end{cases} \quad (4.13)$$

On définit

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon = \widehat{u}_i^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon, v_i^\varepsilon = \widehat{v}_i^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon, \sigma_{ij}^\varepsilon = \widehat{\sigma}_{ij}^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon, \\ \varphi^\varepsilon = \widehat{\varphi}^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon, \psi^\varepsilon = \widehat{\psi}^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon, f^\varepsilon = \widehat{f}^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon, \\ g^\varepsilon = \widehat{g}^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon, \rho_e^\varepsilon = \widehat{\rho}_e^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon, \vartheta_e^\varepsilon = \widehat{\vartheta}_e^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon, \\ s^\varepsilon = \widehat{s}^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon, q^\varepsilon = \widehat{q}^\varepsilon \circ \Theta^\varepsilon. \end{cases} \quad (4.14)$$

Aussi, nous définissons les espaces

$$\mathbf{V}^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) = \{v^\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega^\varepsilon); v^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon\},$$

$$Q^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) = \{\psi^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon); \psi^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon\},$$

et le cône

$$\mathbf{K}^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) = \{v^\varepsilon \in \mathbf{V}^\varepsilon(\Omega^\varepsilon); v_N^\varepsilon \leq s^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_+^\varepsilon\}.$$

En utilisant la relation (4.12) et (4.14), nous pouvons reformuler le problème variationnel $(V.\widehat{P}^\varepsilon)$ au problème équivalent suivant

$$(V.P^\varepsilon) \begin{cases} \text{Trouver } (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \in \mathbf{K}^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) \times Q^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) \text{ tel que :} \\ b^\varepsilon((u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon), (v^\varepsilon - u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)) + j^\varepsilon(v^\varepsilon) - j^\varepsilon(u^\varepsilon) \geq l^\varepsilon((v^\varepsilon - u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)), \\ \forall (v^\varepsilon, \psi^\varepsilon) \in \mathbf{K}^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) \times Q^\varepsilon(\Omega^\varepsilon), \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} b^\varepsilon((u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon), (v^\varepsilon, \psi^\varepsilon)) &= \int_{\Omega^\varepsilon} C_{ijkl} e_{kl}^\varepsilon(u^\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(v^\varepsilon) \delta^\varepsilon dx^\varepsilon - \int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij} \Upsilon_j^\varepsilon(\varphi^\varepsilon) \Upsilon_i^\varepsilon(\psi^\varepsilon) \delta^\varepsilon dx^\varepsilon \\ &+ \int_{\Omega^\varepsilon} P_{kij} \Upsilon_k^\varepsilon(\varphi^\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(v^\varepsilon) \delta^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\Omega^\varepsilon} P_{kij} \Upsilon_k^\varepsilon(\psi^\varepsilon) e_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) \delta^\varepsilon dx^\varepsilon, \\ l^\varepsilon(v^\varepsilon, \psi^\varepsilon) &= - \int_{\Omega^\varepsilon} \rho_e^\varepsilon \psi^\varepsilon \delta^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_-^\varepsilon} \vartheta_e^\varepsilon \psi^\varepsilon \delta^\varepsilon \{b_{3i}^\varepsilon b_{3i}^\varepsilon\}^{1/2} d\Gamma^\varepsilon \\ &+ \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i^\varepsilon \delta^\varepsilon dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_-^\varepsilon} g_i^\varepsilon v_i^\varepsilon \delta^\varepsilon \{b_{3i}^\varepsilon b_{3i}^\varepsilon\}^{1/2} d\Gamma^\varepsilon, \\ j^\varepsilon(v^\varepsilon) &= \int_{\Gamma_+^\varepsilon} q^\varepsilon |v_T^\varepsilon| \delta^\varepsilon \{b_{3i}^\varepsilon b_{3i}^\varepsilon\}^{1/2} d\Gamma^\varepsilon. \end{aligned}$$

4.3 Analyse asymptotique

4.3.1 L'inégalité variationnelle dans Ω

Dans cette section, nous transformons le problème des coques peu profondes posé sur Ω^ε en un problème posé sur un domaine fixe Ω . D'abord, nous transformons Ω^ε en Ω , en utilisant l'application π^ε bijective de $\overline{\Omega}^\varepsilon$ dans $\overline{\Omega}^\varepsilon$ de la façon suivante

$$\begin{cases} \pi^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \rightarrow \Omega \\ x^\varepsilon = (x_1, x_2, x_3^\varepsilon) \rightarrow \pi^\varepsilon(x^\varepsilon) = (x_1, x_2, x_3), \\ x_3 = \frac{1}{\varepsilon} x_3^\varepsilon. \end{cases} \quad (4.15)$$

On obtient ainsi

$\Gamma_0 = \pi^\varepsilon(\Gamma_0^\varepsilon)$, $\Gamma_\pm = \pi^\varepsilon(\Gamma_\pm^\varepsilon)$, $\Gamma_+ = \omega \times \{+1\}$, $\Gamma_- = \omega \times \{-1\}$, $\Gamma_0 = \gamma_0 \times [-1, +1]$. Ensuite, nous donnons les scalings pour les inconnues et les fonctions de test

$$\begin{cases} u_\alpha^\varepsilon = \varepsilon^2 u_\alpha(\varepsilon), u_3^\varepsilon = \varepsilon u_3(\varepsilon), \\ v_\alpha^\varepsilon = \varepsilon^2 v_\alpha, v_3^\varepsilon = \varepsilon v_3, \\ \varphi^\varepsilon = \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon), \psi^\varepsilon = \varepsilon^2 \psi. \end{cases} \quad (4.16)$$

Nous supposons qu'il existe $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $g \in \mathbf{L}^2(\Gamma_-)$, $\rho_e \in L^2(\Omega)$, $\vartheta_e \in L^2(\Gamma_-)$, $s \in L^\infty(\Gamma_+)$, $s > 0$ et indépendant de ε , tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_\alpha^\varepsilon = \varepsilon^2 f_\alpha, f_3^\varepsilon = \varepsilon^3 f_3, \\ g_\alpha^\varepsilon = \varepsilon^3 g_\alpha, g_3^\varepsilon = \varepsilon^4 g_3, \\ \rho_e^\varepsilon = \varepsilon^2 \rho_e, \\ \vartheta_e^\varepsilon = \varepsilon^3 \vartheta_e, \\ q^\varepsilon = \varepsilon^3 q, \\ \theta^\varepsilon = \varepsilon \theta, \\ s^\varepsilon = \varepsilon s(\varepsilon). \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Notons que la normale unitaire \widehat{n}^ε sur $\widehat{\Gamma}_+^\varepsilon$ s'exprime sur la forme

$$\widehat{n}^\varepsilon = (-\partial_1^\varepsilon \theta^\varepsilon + O(\varepsilon^3), -\partial_2^\varepsilon \theta^\varepsilon + O(\varepsilon^3), 1 + O(\varepsilon^2)).$$

Dans ce cas, un simple calcul donne

$$\begin{aligned} v_T^\varepsilon &= (\varepsilon^2(v_1 - v_3 n_1^\theta) + O(\varepsilon^4), \varepsilon^2(v_2 - v_3 n_2^\theta + O(\varepsilon^4)), O(\varepsilon^3)) = \varepsilon^2 v_T(\varepsilon), \\ v_N^\varepsilon &= \varepsilon v_N(\varepsilon), v_N(\varepsilon) = v_3 n_3^\theta + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

où $n^\theta = (-\partial_1 \theta, -\partial_2 \theta, 1)$.

Par suite, nous définissons les espaces

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\},$$

$$Q(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega); \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_0\},$$

et le cône

$$\mathbf{K}(\varepsilon)(\Omega) = \{v \in \mathbf{V}(\Omega); v_N(\varepsilon) \leq s(\varepsilon) \text{ sur } \Gamma_+\}.$$

Premièrement nous introduisons les relations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^\varepsilon(x^\varepsilon) = \delta(\varepsilon)(x) = 1 + \varepsilon^2 \delta^\sharp(\varepsilon, \theta), \\ b_{\alpha\beta}^\varepsilon(x^\varepsilon) = b_{\alpha\beta}(\varepsilon)(x) = \delta_{\alpha\beta} + \varepsilon^2 b_{\alpha\beta}^\sharp(\varepsilon, \theta), \\ b_{\alpha 3}^\varepsilon(x^\varepsilon) = b_{\alpha 3}(\varepsilon)(x) = \varepsilon(\partial_\alpha \theta + \varepsilon^2 b_{\alpha 3}^\sharp(\varepsilon, \theta)), \\ b_{3\beta}^\varepsilon(x^\varepsilon) = b_{3\beta}(\varepsilon)(x) = -\varepsilon(\partial_\beta \theta + \varepsilon^2 b_{3\beta}^\sharp(\varepsilon, \theta)), \\ b_{33}^\varepsilon(x^\varepsilon) = b_{33}(\varepsilon)(x) = 1 + \varepsilon^2 b_{33}^\sharp(\varepsilon, \theta). \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Ensuite, nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{\alpha\beta}^\varepsilon(v^\varepsilon) = e_{\alpha\beta}(\varepsilon)(v) = \varepsilon^2 \{e_{\alpha\beta}^\theta(v) + \varepsilon^2 e_{\alpha\beta}^\sharp(\varepsilon, \theta, v)\}, \\ e_{\alpha 3}^\varepsilon(v^\varepsilon) = e_{\alpha 3}(\varepsilon)(v) = \varepsilon \{e_{\alpha 3}^\theta(v) + \varepsilon^2 e_{\alpha 3}^\sharp(\varepsilon, \theta, v)\}, \\ e_{3\beta}^\varepsilon(v^\varepsilon) = e_{3\beta}(\varepsilon)(v) = \varepsilon \{e_{3\beta}^\theta(v) + \varepsilon^2 e_{3\beta}^\sharp(\varepsilon, \theta, v)\}, \\ e_{33}^\varepsilon(v^\varepsilon) = e_{33}(\varepsilon)(v) = e_{33}^\theta(v) + \varepsilon^2 (\partial_\alpha \theta \partial_\alpha v_3 + b_{33}^\sharp(\varepsilon, \theta) \partial_3 v_3) + \varepsilon^4 e_{33}^b(\varepsilon, \theta, v). \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Les composantes du vecteur mis à l'échelle $\Upsilon(\varepsilon) = (\Upsilon_j(\varepsilon))$ données par :

$$\begin{cases} \Upsilon_\alpha(\varepsilon)(\psi(x)) = \varepsilon^2\{\Upsilon_\alpha^\theta(\psi(x)) + \varepsilon^2\Upsilon_\alpha^\sharp(\varepsilon, \theta, \psi(x))\}, \\ \Upsilon_3(\varepsilon)(\psi(x)) = \varepsilon\{\Upsilon_3^\theta(\psi(x)) + \varepsilon^2\Upsilon_3^\sharp(\varepsilon, \theta, \psi(x))\}, \end{cases} \quad (4.20)$$

où

$$\begin{cases} \Upsilon_\alpha^\theta(\psi) = \partial_\alpha\psi - \partial_3\psi\partial_\alpha\theta, \\ \Upsilon_3^\theta(\psi) = \partial_3\psi, \end{cases} \quad (4.21)$$

et les fonctions $\delta^\sharp(\varepsilon, \theta)$, $b_{ij}^\sharp(\varepsilon, \theta)$, $e_{ij}^\sharp(\varepsilon, \theta, v)$, $e_{33}^b(\varepsilon, \theta, v)$ et $\Upsilon_j^\sharp(\varepsilon, \theta, \psi(x))$ sont bornées indépendamment de ε , pour plus de détails voir [17, 50]. Enfin, remplaçons $(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ et $(v^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$ par leurs mis-à-l' échelle $(u(\varepsilon), \varphi(\varepsilon))$ et (v, ψ) dans $(V.P^\varepsilon)$, et en utilisant les hypothèses (5.2), nous obtenons

$$(V.P(\varepsilon)) \begin{cases} \text{Trouver } (u(\varepsilon), \varphi(\varepsilon)) \in \mathbf{K}(\varepsilon)(\Omega) \times Q(\Omega) \text{ tel que :} \\ b(\varepsilon)((u(\varepsilon), \varphi(\varepsilon)), (v - u(\varepsilon), \psi)) + j(\varepsilon)(v) - j(\varepsilon)(u(\varepsilon)) \geq l(\varepsilon)((v - u(\varepsilon), \psi)), \\ \forall (v, \psi) \in \mathbf{K}(\varepsilon)(\Omega) \times Q(\Omega), \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} b(\varepsilon)((u(\varepsilon), \varphi(\varepsilon)), (v, \psi)) &= \varepsilon \int_{\Omega} C_{ijkl}e_{kl}(\varepsilon)(u(\varepsilon))e_{ij}(\varepsilon)(v)\delta(\varepsilon)dx \\ &- \varepsilon \int_{\Omega} d_{ij}\Upsilon_j(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon))\Upsilon_i(\varepsilon)(\psi)\delta(\varepsilon)dx + \varepsilon \int_{\Omega} P_{kij}\Upsilon_k(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon))e_{ij}(\varepsilon)(v)\delta(\varepsilon)dx \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} P_{kij}\Upsilon_k(\varepsilon)(\psi)e_{ij}(\varepsilon)(u(\varepsilon))\delta(\varepsilon)dx, \\ l(\varepsilon)((v, \psi)) &= \varepsilon \int_{\Omega} f.v\delta(\varepsilon)dx + \int_{\Gamma_-} g.v\delta(\varepsilon)\{b_{3j}(\varepsilon)b_{3j}(\varepsilon)\}^{\frac{1}{2}}d\Gamma \\ &- \varepsilon \int_{\Omega} \rho_e\psi\delta(\varepsilon)dx + \int_{\Gamma_-} \vartheta_e\psi\delta(\varepsilon)\{b_{3j}(\varepsilon)b_{3j}(\varepsilon)\}^{\frac{1}{2}}d\Gamma, \\ j(\varepsilon)(v) &= \int_{\Gamma_+} q|v_T(\varepsilon)|\delta(\varepsilon)\{b_{3j}(\varepsilon)b_{3j}(\varepsilon)\}^{\frac{1}{2}}d\Gamma. \end{aligned}$$

4.3.2 Convergence

L'objectif de cette section est d'établir la convergence du déplacement mis-à- l'échelle et du potentiel électrique mis- à- l' échelle .

Nous avons défini le tenseur symétrique $R^\theta(\varepsilon) = (R_{ij}^\theta(\varepsilon)) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et le tenseur mis à l'échelle $\chi(\varepsilon) = (\chi_i(\varepsilon)) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ à l'aide des relations suivantes

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta}^\theta(\varepsilon)(v) = e_{\alpha\beta}^\theta(v), \\ R_{\alpha 3}^\theta(\varepsilon)(v) = \frac{1}{\varepsilon}e_{\alpha 3}^\theta(v), \\ R_{33}^\theta(\varepsilon)(v) = \frac{1}{\varepsilon^2}e_{33}^\theta(v) + \partial_\alpha\theta\partial_\alpha v_3, \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\begin{cases} \chi_\alpha^\theta(\varepsilon)(\psi) = \Upsilon_\alpha^\theta(\psi), \\ \chi_3^\theta(\varepsilon)(\psi) = \frac{1}{\varepsilon}\Upsilon_3^\theta(\psi) = \frac{1}{\varepsilon}\partial_3\psi. \end{cases} \quad (4.23)$$

Nous donnons maintenant le résultat de convergence suivant

Théorème 4.1

Nous supposons que

$$f \in \mathbf{L}^2(\Omega), g \in \mathbf{L}^2(\Gamma_-), \rho_e \in L^2(\Omega), \vartheta_e \in L^2(\Gamma_-), s \in L^\infty(\Gamma_+), q \in L^2(\Gamma_+) \text{ et } \theta \in C^3(\bar{\Omega}).$$

Soit $(u(\varepsilon), \varphi(\varepsilon))$ est la solution de l'inégalité variationnelle $(VP(\varepsilon))$, alors

$$u(\varepsilon) \rightarrow u \text{ in } \mathbf{K}(\Omega), \varphi(\varepsilon) \rightarrow \varphi \text{ dans } Q(\Omega), \quad (4.24)$$

et le couple (u, φ) satisfait au problème tridimensionnel limite

$$(V.P) \begin{cases} \text{Trouver } (u, \varphi) \in \mathbf{K}(\Omega) \times Q(\Omega) \text{ tel que :} \\ b((u, \varphi), (v - u, \psi)) + j(v) - j(u) \geq l((v - u, \psi)), \forall (v, \psi) \in \mathbf{K}(\Omega) \times Q(\Omega), \end{cases}$$

où

$$\mathbf{K}(\Omega) = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega), v = 0 \text{ on } \Gamma_0, v_3(x_1, x_2, 1) \leq s \text{ sur } \Gamma_+\},$$

$$Q(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega), \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_0\},$$

$$\begin{aligned} b((u, \varphi), (v, \psi)) &= \int_{\Omega} C_{\alpha\beta\sigma\tau} R_{\sigma\tau}^\theta(u) e_{\alpha\beta}^\theta(v) dx + 2 \int_{\Omega} C_{\alpha\beta\sigma 3} R_{\sigma 3}^\theta(u) e_{\alpha\beta}^\theta(v) dx \\ &+ \int_{\Omega} C_{\alpha\beta 33} R_{33}^\theta(u) e_{\alpha\beta}^\theta(v) dx + \int_{\Omega} P_{\gamma\alpha\beta} \chi_\gamma^\theta(\varphi) e_{\alpha\beta}^\theta(v) dx + \int_{\Omega} P_{3\alpha\beta} \chi_3^\theta(\varphi) e_{\alpha\beta}^\theta(v) dx \\ &- \int_{\Omega} d_{\alpha\beta} \chi_\beta^\theta(\varphi) \partial_\alpha(\psi) dx - \int_{\Omega} d_{\alpha 3} \chi_3^\theta(\varphi) \partial_\alpha(\psi) dx + \int_{\Omega} P_{\gamma\alpha\beta} \partial_\gamma(\psi) R_{\alpha\beta}^\theta(u) dx \\ &+ 2 \int_{\Omega} P_{\gamma\alpha 3} \partial_\gamma(\psi) R_{\alpha 3}^\theta(u) dx + \int_{\Omega} P_{\gamma 33} \partial_\gamma(\psi) R_{33}^\theta(u) dx, \\ l((v, \psi)) &= \int_{\Omega} (f \cdot v - \rho_e \psi) dx + \int_{\Gamma_-} (g \cdot v + \vartheta_e \psi) d\Gamma, \\ j(v) &= \int_{\Gamma_+} q |v_T| d\Gamma, v_T = (v_1 - v_3 n_1^\theta, v_2 - v_3 n_2^\theta, 0). \end{aligned}$$

Preuve

La démonstration est longue et technique et, pour cette raison, est divisée en trois Lemmes, leurs preuves sont données ([41] à l'annexe A).

Lemme 4.1

Soit $(u(\varepsilon), \varphi(\varepsilon))$ une solution de l'inégalité variationnelle $((V.P(\varepsilon)))$, alors

$$u(\varepsilon) \rightarrow u \text{ in } \mathbf{H}(\Omega), \varphi(\varepsilon) \rightarrow \varphi \text{ dans } H^1(\Omega), \quad (4.25)$$

et la limite u est un déplacement de Kirchhoff-Love, et la limite φ est indépendante de x_3 .

Lemme 4.2

La limite faible (u, φ) établie dans le lemme 4.1 est en faite forte :

$$u(\varepsilon) \rightarrow u \text{ dans } \mathbf{K}(\Omega), \varphi(\varepsilon) \rightarrow \varphi \text{ dans } Q(\Omega). \quad (4.26)$$

Lemme 4.3

La limite forte (u, φ) satisfait au problème tridimensionnel limite (V.P)

4.4 Modèle bidimensionnel

4.4.1 L'inégalité variationnelle dans ω

Dans Lemme (4.1), nous trouvons que la limite u est un déplacement de Kirchhoff-Love, dans le sens où qu'il existe des fonctions $\zeta = (\zeta_H, \zeta_3) \in \mathbf{V}_H(\omega) \times K_3(\omega)$, tel que :

$$u_\alpha = \zeta_\alpha - x_3 \partial_\alpha \zeta_3, \quad u_3 = \zeta_3, \quad (4.27)$$

où $\zeta_H = (\zeta_\alpha)$, l'espace bidimensionnel $\mathbf{V}_H(\omega)$ et $K_3(\omega)$ sont définis par

$$\mathbf{V}_H(\omega) = \{\eta_H = (\eta_\alpha) \in \mathbf{H}^1(\omega); \eta_H = 0 \text{ sur } \gamma_0\},$$

$$K_3(\omega) = \{\eta_3 \in H^2(\omega); \eta_3 = \partial_\nu \eta_3 = 0 \text{ sur } \gamma_0, \eta_3 \leq s \text{ dans } \omega\}.$$

Là aussi on trouve que le potentiel électrique limite, est indépendant de x_3 , en ce sens que il appartient à l'espace fonctionnel bidimensionnel

$$Q(\omega) = \{\psi \in H^1(\omega); \psi = 0 \text{ sur } \gamma_0\}.$$

Ensuite, la solution limite $(\zeta_H, \zeta_3, \varphi)$ résout le problème couplé suivant

Théorème 4.2

$$(\bar{P}) \begin{cases} \text{Trouver } (\zeta_H, \zeta_3, \varphi) \in \mathbf{V}_H(\omega) \times K_3(\omega) \times Q(\omega) \text{ tel que :} \\ \bar{b}((\zeta, \varphi), (\eta - \zeta, \psi)) + \bar{j}(\eta) - \bar{j}(\zeta) \geq \bar{l}((\eta - \zeta, \psi)), \\ \forall (\eta_H, \eta_3, \psi) \in \mathbf{V}_H(\omega) \times K_3(\omega) \times Q(\omega), \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \bar{b}((\zeta, \varphi), (\eta, \psi)) &= \frac{2}{3} \int_\omega \tilde{C}_{\alpha\beta\sigma\tau} \partial_{\sigma\tau}(\zeta_3) \partial_{\alpha\beta}(\eta_3) d\omega + 2 \int_\omega \tilde{n}_{\alpha\beta}^\theta(\zeta, \varphi) \partial_\alpha \theta \partial_\beta \eta_3 d\omega \\ &+ 2 \int_\omega \tilde{n}_{\alpha\beta}^\theta(\zeta, \varphi) e_{\alpha\beta}(\eta_H) d\omega + 2 \int_\omega \tilde{D}_\gamma^\theta(\zeta, \varphi) \partial_\gamma \psi d\omega, \\ \bar{l}((\eta, \psi)) &= \int_\omega (p_3 \eta_3 - \mathfrak{s}_\alpha \partial_\alpha \eta_3) d\omega + \int_\omega p_H \cdot \eta_H d\omega - \int_\omega (\tilde{\rho}_e - \vartheta_e) \psi d\omega, \end{aligned}$$

$$p_i(x_1, x_2) = \int_{-1}^1 f_i dx_3 + g_i^-, \mathfrak{s}_\alpha(x_1, x_2) = \int_{-1}^1 x_3 f_\alpha dx_3 + g_\alpha^-, g_i^-(x_1, x_2) = g_i(x_1, x_2, -1),$$

$$\tilde{\rho}_e(x_1, x_2) = \int_{-1}^1 \rho_e dx_3,$$

$$\bar{j}(\eta) = \int_\omega q|\bar{\eta}|d\omega, \bar{\eta} = (\bar{\eta}_H, 0) = (\eta_1 - x_3\partial_1\eta_3 + \eta_3\partial_1\theta, \eta_2 - x_3\partial_2\eta_3 + \eta_3\partial_2\theta, 0).$$

Les équations bidimensionnelles constitutives sont les suivantes

$$\begin{cases} \tilde{n}_{\alpha\beta}^\theta(\zeta, \varphi) = \tilde{C}_{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma\tau}^\theta(\zeta) + \tilde{P}_{\gamma\alpha\beta} \partial_\gamma \varphi, \\ \tilde{D}_\gamma^\theta(\zeta, \varphi) = \tilde{P}_{\gamma\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^\theta(\zeta) - \tilde{d}_{\gamma\beta} \partial_\beta \varphi, \\ e_{\alpha\beta}^\theta(\zeta) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha \zeta_\beta + \partial_\beta \zeta_\alpha) + \frac{1}{2}(\partial_\alpha \theta \partial_\beta \zeta_3 + \partial_\beta \theta \partial_\alpha \zeta_3). \end{cases}$$

Les caractéristiques d'une coque peu profonde piézoélectrique bidimensionnelle sont les suivantes

$$\begin{cases} \tilde{C}_{\alpha\beta\sigma\tau} = C'_{\alpha\beta\sigma\tau} - \frac{1}{\Delta} C'_{\alpha\beta k3} \Delta_{\sigma\tau}^k, C'_{ijkl} = C_{ijkl} + \frac{P_{3ij} P_{3kl}}{d_{33}}, \\ \tilde{P}_{\gamma\alpha\beta} = P'_{\gamma\alpha\beta} - \frac{1}{\Delta} C'_{\alpha\beta k3} \Delta_\gamma^k, P'_{kij} = P_{kij} - \frac{P_{3ij} d_{3k}}{d_{33}}, \\ \tilde{d}_{\gamma\beta} = d'_{\gamma\beta} + \frac{1}{\Delta} P'_{\gamma k3} \Delta_\beta^k, d'_{ij} = d_{ij} - \frac{d_{i3} d_{3j}}{d_{33}}, \end{cases}$$

où les valeurs de Δ , Δ_γ^1 , Δ_γ^2 , Δ_γ^3 , $\Delta_{\zeta\eta}^1$, $\Delta_{\zeta\eta}^2$ et $\Delta_{\zeta\eta}^3$ sont définies dans l'annexe A.

Preuve

La preuve est donnée dans ([41] l'annexe B).

4.4.2 Le problème découplé

Tout d'abord, dans l'inégalité (\bar{P}) , on prend la fonction test électrique $\psi = 0$ ensuite la fonction test mécanique $\eta = \zeta$, on obtient

$$(\bar{P}_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\zeta_H, \zeta_3, \varphi) \in \mathbf{V}_H(\omega) \times K_3(\omega) \times Q(\omega) \text{ tel que :} \\ \frac{2}{3} \int_\omega \tilde{C}_{\alpha\beta\sigma\tau} \partial_{\sigma\tau}(\zeta_3) \partial_{\alpha\beta}(\eta_3 - \zeta_3) d\omega + 2 \int_\omega \tilde{n}_{\alpha\beta}^\theta(\zeta, \varphi) \partial_\alpha \theta \partial_\beta (\eta_3 - \zeta_3) d\omega \\ + 2 \int_\omega \tilde{n}_{\alpha\beta}^\theta(\zeta, \varphi) e_{\alpha\beta}(\eta_H - \zeta_H) d\omega + \int_\omega q|\bar{\eta}|d\omega - \int_\omega q|\bar{\zeta}|d\omega \geq \\ \int_\omega (p_3(\eta_3 - \zeta_3) - \mathfrak{s}_\alpha \partial_\alpha (\eta_3 - \zeta_3)) d\omega + \int_\omega p_H \cdot (\eta_H - \zeta_H) d\omega, \\ \forall (\eta_H, \eta_3) \in \mathbf{V}_H(\omega) \times K_3(\omega), \\ 2 \int_\omega \tilde{D}_\gamma^\theta(\zeta, \varphi) \partial_\gamma \psi d\omega = - \int_\omega (\tilde{\rho}_e - \vartheta_e) \psi d\omega, \forall \psi \in Q(\omega). \end{array} \right.$$

Dans le dernier problème (\bar{P}_1) , nous avons le couplage du déplacement mécanique et du potentiel électrique apparaît dans les termes $\tilde{n}_{\alpha\beta}^\theta(\zeta, \varphi)$ et $\tilde{D}_\gamma^\theta(\zeta, \varphi)$. Pour le découplage de ζ et φ , nous pouvons choisir le matériau piézoélectrique cubique, ceci est dû à Yan et Miara [50] dans le cas d'une coque peu profonde sans frottement, qui est caractérisée par un système cubique, ayant la symétrie suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} = C_{11}, \\ C_{1122} = C_{1133} = C_{2233} = C_{12}, \\ C_{1212} = C_{2323} = C_{1313} = C_{44}, \\ P_{123} = P_{213} = P_{312}, \\ d_{11} = d_{22} = d_{33}, \\ \text{tous les autres termes disparaissent.} \end{array} \right.$$

Dans ce cas, on obtient le problème découplé suivant

$$(\bar{P}_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\zeta_H, \zeta_3, \varphi) \in \mathbf{V}_H(\omega) \times K_3(\omega) \times Q(\omega) \text{ tel que :} \\ \frac{2}{3} \int_{\omega} \tilde{C}_{\alpha\beta\sigma\tau} \partial_{\sigma\tau}(\zeta_3) \partial_{\alpha\beta}(\eta_3 - \zeta_3) d\omega + 2 \int_{\omega} \tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta}(\zeta) \partial_{\alpha}\theta \partial_{\beta}(\eta_3 - \zeta_3) d\omega \\ + 2 \int_{\omega} \tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta}(\zeta) e_{\alpha\beta}(\eta_H - \zeta_H) d\omega + \int_{\omega} q|\bar{\eta}| d\omega - \int_{\omega} q|\bar{\zeta}| d\omega \geq \\ \int_{\omega} (p_3(\eta_3 - \zeta_3) - \mathfrak{s}_{\alpha} \partial_{\alpha}(\eta_3 - \zeta_3)) d\omega + \int_{\omega} p_H \cdot (\eta_H - \zeta_H) d\omega, \\ \forall (\eta_H, \eta_3) \in \mathbf{V}_H(\omega) \times K_3(\omega), \\ 2 \int_{\omega} \tilde{D}_{\gamma}^{\theta}(\varphi) \partial_{\gamma} \psi d\omega = - \int_{\omega} (\tilde{\rho}_e - \vartheta_e) \psi d\omega, \forall \psi \in Q(\omega), \end{array} \right.$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta}(\zeta) = \tilde{C}_{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma\tau}^{\theta}(\zeta), \\ \tilde{D}_{\gamma}^{\theta}(\varphi) = (d_{11} + \frac{P_{123}^2}{C_{44}}) \partial_{\gamma} \varphi. \end{array} \right.$$

Ensuite, dans l'inégalité variationnelle du problème (\bar{P}_1) , le déplacement tangentiel et transversal ζ_{α} et ζ_3 sont couplés dans l'intégrale $\int_{\omega} q|\bar{\zeta}| d\omega$, qui représente la condition de frottement. C'est pourquoi nous utilisons des multiplicateurs de Lagrange, grâce à Figueiredo et Stadler[26] dans le cas d'une plaque. Il découle de la théorie de dualité et des régularités supposées de ζ et φ , qu'il existe deux variables $(\lambda, \mu) \in (H^2(\omega))' \times (L^2(\omega))^2$, telles que :

$$\frac{2}{3} \int_{\omega} \tilde{C}_{\alpha\beta\sigma\tau} \partial_{\sigma\tau}(\zeta_3) \partial_{\alpha\beta}(\eta_3) d\omega + 2 \int_{\omega} \tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta}(\zeta, \varphi) \partial_{\alpha}\theta \partial_{\beta} \eta_3 d\omega + 2 \int_{\omega} \tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta}(\zeta, \varphi) e_{\alpha\beta}(\eta_H) d\omega + \int_{\omega} \lambda \eta_3 d\omega + \int_{\omega} \mu \cdot \bar{\eta}_H d\omega = \int_{\omega} (p_3 \eta_3 - \mathfrak{s}_{\alpha} \partial_{\alpha} \eta_3) d\omega + \int_{\omega} p_H \cdot \eta_H d\omega, \forall (\eta_H, \eta_3) \in \mathbf{V}_H(\omega) \times K_3(\omega),$$

où λ et μ satisfaisant les conditions de contact et de frottement suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_3 \leq s, \lambda \leq 0, \lambda(\zeta_3 - s) = 0, \\ |\mu| \leq q, \\ |\mu| < q \implies \bar{\zeta}_H = 0, \\ |\mu| = q \implies \exists c \geq 0 : \bar{\zeta}_H = -c\mu, \end{array} \right\} \text{ dans } \omega. \quad (4.28)$$

Pour découpler la condition de frottement dans (4.28), on prend d'abord la fonction test

$\eta = (0, 0, \eta_3)$ avec $\eta_3 \neq 0$ ensuite $\eta = (\eta_H, 0)$ avec $\eta_H \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \int_{\omega} \tilde{C}_{\alpha\beta\sigma\tau} \partial_{\sigma\tau}(\zeta_3) \partial_{\alpha\beta}(\eta_3) d\omega + 2 \int_{\omega} \tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta}(\zeta, \varphi) \partial_{\alpha} \theta \partial_{\beta} \eta_3 d\omega \\ & + \int_{\omega} \lambda \eta_3 d\omega + \int_{\omega} \mu_{\alpha} (-x_3 \partial_{\alpha} \eta_3 + \eta_3 \partial_{\alpha} \theta) d\omega = \int_{\omega} (p_3 \eta_3 - \mathfrak{s}_{\alpha} \partial_{\alpha} \eta_3) d\omega, \forall \eta_3 \in K_3(\omega), \end{aligned} \quad (4.29)$$

et

$$2 \int_{\omega} \tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta}(\zeta, \varphi) e_{\alpha\beta}(\eta_H) d\omega + \int_{\omega} \mu \cdot \eta_H d\omega = \int_{\omega} p_H \cdot \eta_H d\omega, \forall \eta_H \in \mathbf{V}_H(\omega). \quad (4.30)$$

Nous notons que, le déplacement mécanique ζ et le potentiel électrique φ dans (4.29) et (4.30) sont découplés dans le cas de matériaux piézoélectriques cubiques.

4.4.3 La formulation forte dans ω

Une intégration par parties montre que les problèmes variationnels bidimensionnels (4.29) et (4.30) sont équivalents aux problèmes aux limites bidimensionnels suivants : problème aux limites de coque peu-profonde en flexion et problème aux limites de coque peu-profonde membranaire

$$(F.E) \begin{cases} \frac{2}{3} \partial_{\alpha\beta} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\zeta_3) - 2 \partial_{\beta} (\tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta}(\zeta, \varphi) \partial_{\alpha} \theta) + \lambda + x_3 \partial_{\alpha} \mu_{\alpha} + \partial_{\alpha} \theta = p_3 + \partial_{\alpha} \mathfrak{s}_{\alpha} \text{ dans } \omega, \\ -\frac{2}{3} \partial_{\alpha} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_{\beta} - \frac{2}{3} \partial_{\tau} (\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_{\alpha} \tau_{\beta}) + 2 \tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta}(\zeta, \varphi) \partial_{\alpha} \theta \nu_{\beta} - x_3 \mu_{\alpha} \nu_{\alpha} = -\mathfrak{s}_{\alpha} \nu_{\alpha} \text{ sur } \gamma_0, \\ \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_{\alpha} \nu_{\beta} = 0 \text{ sur } \gamma_0, \end{cases}$$

où $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\zeta_3) = \tilde{C}_{\alpha\beta\sigma\tau} \partial_{\sigma\tau}(\zeta_3)$.

$$(M.E) \begin{cases} -2 \partial_{\beta} \tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta}(\zeta, \varphi) + \mu_{\alpha} = p_{\alpha} \text{ dans } \omega, \\ \tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta}(\zeta, \varphi) \nu_{\beta} = 0 \text{ sur } \gamma_0. \end{cases}$$

De même, on obtient le problème aux limites diélectrique suivant

$$(D.E) \begin{cases} 2 \partial_{\gamma} \tilde{D}_{\gamma}^{\theta}(\zeta, \varphi) = \tilde{\rho}_e - \vartheta_e \text{ dans } \omega, \\ \tilde{D}_{\gamma}^{\theta}(\zeta, \varphi) \nu_{\gamma} = 0 \text{ sur } \gamma_0. \end{cases}$$

On note également que, le déplacement mécanique ζ et le potentiel électrique φ en (F.E), (M.E) et (D.E) sont découplés dans le cas d'un matériau piézoélectrique cubique. Enfin, pour revenir au cadre physique, nous présentons des problèmes aux limites analogues aux problèmes précédents. (F.E), (M.E) et (D.E), mais en termes d'inconnues de-scaling

$$(F.E^\varepsilon) \begin{cases} \frac{2}{3}\partial_{\alpha\beta}\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^\varepsilon(\zeta_3^\varepsilon) - 2\partial_\beta(\tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta,\varepsilon}(\zeta^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)\partial_\alpha\theta^\varepsilon) + \lambda^\varepsilon + x_3^\varepsilon\partial_\alpha\mu_\alpha^\varepsilon + \partial_\alpha\theta^\varepsilon = p_3^\varepsilon + \partial_\alpha\mathfrak{s}_\alpha^\varepsilon \text{ dans } \omega, \\ -\frac{2}{3}\partial_\alpha\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^\varepsilon(\zeta_3^\varepsilon)\nu_\beta - \frac{2}{3}\partial_\tau(\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^\varepsilon(\zeta_3^\varepsilon)\nu_\alpha\tau_\beta) + 2\tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta,\varepsilon}(\zeta^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)\partial_\alpha\theta^\varepsilon\nu_\beta - x_3^\varepsilon\mu_\alpha^\varepsilon\nu_\alpha = -\mathfrak{s}_\alpha^\varepsilon\nu_\alpha \text{ sur } \gamma_0, \\ \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^\varepsilon(\zeta_3^\varepsilon)\nu_\alpha\nu_\beta = 0 \text{ sur } \gamma_0, \end{cases}$$

$$(M.E^\varepsilon) \begin{cases} -2\partial_\beta\tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta,\varepsilon}(\zeta^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) + \mu_\alpha^\varepsilon = p_\alpha^\varepsilon \text{ dans } \omega, \\ \tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta,\varepsilon}(\zeta^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)\nu_\beta = 0 \text{ sur } \gamma_0, \end{cases}$$

$$(D.E^\varepsilon) \begin{cases} 2\partial_\gamma\tilde{D}_\gamma^{\theta,\varepsilon}(\zeta^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = \tilde{\rho}_e^\varepsilon - \vartheta_e^\varepsilon \text{ dans } \omega, \\ \tilde{D}_\gamma^{\theta,\varepsilon}(\zeta^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)\nu_\gamma = 0 \text{ sur } \gamma_0, \end{cases}$$

où

$$\left. \begin{cases} \zeta_\alpha^\varepsilon = \varepsilon^2\zeta_\alpha, \zeta_3^\varepsilon = \varepsilon\zeta_3, \varphi^\varepsilon = \varepsilon^2\varphi, \lambda^\varepsilon = \varepsilon^4\lambda, \mu^\varepsilon = \varepsilon^3\mu, \theta^\varepsilon = \varepsilon\theta, \\ \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^\varepsilon(\zeta_3^\varepsilon) = \varepsilon^3\tilde{C}_{\alpha\beta\sigma\tau}\partial_{\sigma\tau}(\zeta_3^\varepsilon), \tilde{n}_{\alpha\beta}^{\theta,\varepsilon}(\zeta^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = \varepsilon\tilde{n}_{\alpha\beta}^\theta(\zeta^\varepsilon, \varphi^\varepsilon), \\ \tilde{D}_\gamma^{\theta,\varepsilon}(\zeta^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = \varepsilon\tilde{D}_\gamma^\theta(\zeta^\varepsilon, \varphi^\varepsilon), p_i^\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^\varepsilon f_i^\varepsilon dx_3^\varepsilon + g_i^\varepsilon, \\ \mathfrak{s}_\alpha^\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^\varepsilon x_3^\varepsilon f_\alpha^\varepsilon dx_3^\varepsilon + g_\alpha^\varepsilon, \tilde{\rho}_e^\varepsilon(x_1, x_2) = \int_{-\varepsilon}^\varepsilon \rho_e^\varepsilon dx_3^\varepsilon, \end{cases} \right\} \text{ dans } \bar{\omega}.$$

4.5 Conclusion et commentaire

1. L'application des techniques d'analyse asymptotique au problème de Signorini avec frottement de Tresca pour les coques peu-profondes piézoélectriques linéaires tridimensionnels, montre que la solution du problème tridimensionnel converge vers la solution d'une inéquation variationnelle bidimensionnelle. Ensuite, nous utilisons les multiplieurs de Lagrange pour découpler les déplacements tangentiels et transversaux, qui apparaissent dans le terme de frottement, et nous donnons trois équations piézoélastiques : l'équation de coque peu-profonde en flexion, l'équation de coque peu-profonde membranaire et l'équation diélectrique.
2. Si nous négligeons le frottement et nous ne prenons en compte que les conditions de contact de Signorini, le modèle précédent se réduit au modèle de contact sans frottement d'une coque peu-profonde piézoélectrique linéaire, qui a été étudié dans [50], pour le problème d'obstacle.
3. Si la fonction $\theta = 0$ en $\bar{\omega}$, la coque peu profonde devient une plaque. Ensuite, nous retrouvons le problème de frottement pour les plaques piézoélectriques, et le modèle bidimensionnel peut s'écrire sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\zeta_H, \zeta_3, \varphi) \in \mathbf{V}_H(\omega) \times K_3(\omega) \times Q(\omega) \text{ tel que :} \\ \frac{2}{3} \int_{\omega} \tilde{C}_{\alpha\beta\sigma\tau} \partial_{\sigma\tau}(\zeta_3) \partial_{\alpha\beta}(\eta_3 - \zeta_3) d\omega + 2 \int_{\omega} \tilde{n}_{\alpha\beta}(\zeta_H, \varphi) e_{\alpha\beta}(\eta_H - \zeta_H) d\omega \\ + 2 \int_{\omega} \tilde{D}_{\gamma}(\zeta_H, \varphi) \partial_{\gamma} \psi d\omega + \int_{\omega} q |\bar{\eta}_0| d\omega - \int_{\omega} q |\bar{\zeta}_0| d\omega \\ \geq \int_{\omega} (p_3(\eta_3 - \zeta_3) - \mathfrak{s}_{\alpha} \partial_{\alpha}(\eta_3 - \zeta_3)) d\omega + \int_{\omega} p_H \cdot (\eta_H - \zeta_H) d\omega - \int_{\omega} (\tilde{\rho}_e - \vartheta_e) \psi d\omega, \\ \forall (\eta_H, \eta_3, \psi) \in \mathbf{V}_H(\omega) \times K_3(\omega) \times Q(\omega), \end{array} \right.$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{n}_{\alpha\beta}(\zeta_H, \varphi) = \tilde{C}_{\alpha\beta\sigma\tau} e_{\sigma\tau}(\zeta_H) + \tilde{P}_{\gamma\alpha\beta} \partial_{\gamma} \varphi, \\ \tilde{D}_{\gamma}(\zeta_H, \varphi) = \tilde{P}_{\gamma\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\zeta_H) - \tilde{d}_{\gamma\beta} \partial_{\beta} \varphi, \\ e_{\alpha\beta}(\zeta_H) = \frac{1}{2} (\partial_{\alpha} \zeta_{\beta} + \partial_{\beta} \zeta_{\alpha}), \\ \bar{j}(\eta_0) = \int_{\omega} q |\bar{\eta}_0| d\omega, \quad \bar{\eta}_0 = (\bar{\eta}_{0,H}, 0) = (\eta_1 - x_3 \partial_1 \eta_3, \eta_2 - x_3 \partial_2 \eta_3, 0). \end{array} \right.$$

De plus, nous avons nécessairement les formulations fortes associées

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} \partial_{\alpha\beta} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\zeta_3) + \lambda + x_3 \partial_{\alpha} \mu_{\alpha} = p_3 + \partial_{\alpha} \mathfrak{s}_{\alpha} \text{ in } \omega, \\ -\frac{2}{3} \partial_{\alpha} \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_{\beta} - \frac{2}{3} \partial_{\tau} (\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_{\alpha} \tau_{\beta}) - x_3 \mu_{\alpha} \nu_{\alpha} = -\mathfrak{s}_{\alpha} \nu_{\alpha} \text{ sur } \gamma, \\ \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\zeta_3) \nu_{\alpha} \nu_{\beta} = 0 \text{ sur } \gamma, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \partial_{\beta} \tilde{n}_{\alpha\beta}(\zeta_H, \varphi) + \mu_{\alpha} = p_{\alpha} \text{ dans } \omega, \\ \tilde{n}_{\alpha\beta}(\zeta_H, \varphi) \nu_{\beta} = 0 \text{ sur } \gamma, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \partial_{\gamma} \tilde{D}_{\gamma}(\zeta_H, \varphi) = \tilde{\rho}_e - \vartheta_e \text{ dans } \omega, \\ \tilde{D}_{\gamma}(\zeta_H, \varphi) \nu_{\gamma} = 0 \text{ sur } \gamma. \end{array} \right.$$

Ce modèle représente le quatrième choix de la condition aux limites électriques dans [26], qui n'a pas été étudié. De plus, il généralise le modèle obtenu en [49] pour le problème d'obstacle au problème de Signorini avec frottement de Tresca.

4. Pour nos futur travaux, nous envisageons d'étudier le problème Signorini avec frottement de Coulomb, pour les coques peu-profondes piézoélectriques, et nous étendrons notre étude aux coque piézoélectriques.

Chapitre 5

Problème de Signorini pour les coques piézoélectriques tridimensionnelles

5.1 Géométrie différentielle tridimensionnelle

5.1.1 Cadre physique

On suppose que les variations de température et le champ magnétique sont négligeables. Cette hypothèse, qui est raisonnable pour les matériaux piézoélectriques (céramiques, polymères et composites) utilisés habituellement, entraîne que l'on a seulement un couplage électromécanique. On se place dans le cadre de la piézoélectricité linéaire en petites déformations, et on choisit de formuler le problème en déplacement mécanique et potentiel électrique. En ce qui concerne l'inconnue électrique, ce choix est motivé par les conditions aux limites qui sont imposées sur le potentiel.

5.1.2 Description de la géométrie et des efforts envisagés

Soit $\widehat{\Omega}$ le domaine de \mathbb{R}^3 , occupé par le milieu piézoélectrique, c'est-à-dire la coque. On suppose qu'il peut être décrit par un système de coordonnées curvilignes, c'est-à-dire qu'il existe un domaine de référence tridimensionnel Ω et une application Θ définie sur $\bar{\Omega}$ à valeurs dans \mathcal{E}^3 tels que $\Theta(\bar{\Omega}) = \widehat{\Omega}$. On suppose que le domaine Ω et l'application Θ vérifient les propriétés suivantes :

- Ω est un ouvert borné simplement connexe de frontière Γ continue de classe \mathcal{C}^2 et Ω est situé localement d'un seul côté de Γ ;
- $\Theta \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$.

Les hypothèses sur Ω , Γ et Θ donnent un sens aux différentes définitions de géométrie différentielle introduites précédemment. L'hypothèse de simple connexité du domaine Ω et la régularité de sa frontière Γ , nous permettent par la suite d'écrire le champ électrique comme le gradient d'un potentiel scalaire.

On considère les deux décompositions suivantes de la frontière Γ de Ω , correspondant respectivement aux conditions aux limites mécaniques (indiquées par un exposant M) et aux conditions aux limites électriques (indiquées par un exposant E) :

$$\Gamma = \Gamma_0^M \cup \Gamma_1^M \text{ avec } \Gamma_0^M \cap \Gamma_1^M = \emptyset; \Gamma_1^M = \Gamma_2 \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-$$

$$\Gamma = \Gamma_0^E \cup \Gamma_1^E \text{ avec } \Gamma_0^E \cap \Gamma_1^E = \emptyset;$$

On suppose que la coque est :

- i) soumise à une densité de force volumique $f = f^i g_i$ dans Ω ;
- ii) encastrée sur la partie Γ_0^M de sa frontière;
- iii) soumise à une densité surfacique de force $h = h^i g_i$ agissant sur la partie Γ_+ de la frontière.
- iv) soumise à un potentiel fixe φ_d sur la partie Γ_0^E de la frontière;
- v) libre de charges électriques dans le milieu et sur la partie Γ_1^E de la frontière.
- vi) On suppose aussi que cette coque entre en contact unilatéral sur sa face inférieure Γ_- contre une fondation rigide $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2) \in \omega, x_3 \geq d\}$, où $d(\geq 0)$ est la fonction d'interstice définie sur Γ_- et qui désigne la distance entre la face inférieure et la fondation rigide mesurée dans la direction normal,

5.1.3 Formulation du problème

On définit les quantités suivantes :

$$\underline{\sigma} = \sigma^{ij} g_i \otimes g_j \quad : \text{Tenseur des contraintes};$$

$$\underline{\epsilon} = \epsilon_{i||j} g^i \otimes g^j \quad : \text{Tenseur des déformations};$$

$$G = G^i g_i \quad : \text{Représente la densité de force de pression et de frottement.}$$

$$U = U^i g_i \quad : \text{Vecteur déplacement mécanique};$$

$$D = D^i g_i \quad : \text{Vecteur déplacement électrique};$$

$$E = E_i g^i \quad : \text{Vecteur champ électrique};$$

$$\varphi \quad : \text{Potentiel scalaire électrique.}$$

Équation d'équilibre :

$$-div \underline{\sigma} = f \text{ dans } \Omega, \tag{5.1}$$

$$U = 0 \text{ sur } \Gamma_0^M, \quad (5.2)$$

$$\underline{\sigma} \cdot n = h \text{ sur } \Gamma_+. \quad (5.3)$$

Équations de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} D = 0 \text{ dans } \Omega, \quad (5.4)$$

$$D \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_1^E, \quad (5.5)$$

$$\varphi = \varphi_d \text{ sur } \Gamma_0^E.$$

où $n = n_i g^i$ est la normale unitaire extérieure à Γ . Les différentes inconnues sont reliées par les lois de comportement des matériaux piézoélectriques suivantes :

Lois constitutives :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \underline{C} \cdot \underline{e} - \underline{p}^e \cdot E; \\ D &= \underline{p} \cdot e^t \cdot \underline{e} + \underline{d} \cdot E; \end{aligned} \quad (5.6)$$

Conditions de contact de Signorini

$$U_N \leq s, \quad G_N \leq 0, \quad G_N(U_N - s) = 0 \text{ et } G_T = 0 \text{ sur } \Gamma_- \quad (5.7)$$

où :

- $\underline{C} = C^{ijkl} g_i \otimes g_j \otimes g_k \otimes g_l$ est le tenseur d'ordre quatre des coefficients élastiques qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} C^{ijkl} &\in L^\infty(\bar{\Omega}), \\ C^{ijkl} &= C^{jikl} = C^{klij}, \\ \exists c_m > 0 \text{ constante, } &C^{ijkl}(\xi) X_{ij} X_{kl} \geq c_m X_{ij} X_{ij}, \quad \forall \xi \in \bar{\Omega}, \quad \forall X_{ij} = X_{ji} \in \mathbb{R}; \end{aligned} \quad (5.8)$$

- $\underline{p}^e = \underline{p}^e e^{ikl} g_i \otimes g_k \otimes g_l$ est le tenseur d'ordre trois des coefficients piézoélectriques qui vérifie :

$$\begin{aligned} \underline{p}^e e^{ikl} &\in L^\infty(\bar{\Omega}), \\ \underline{p}^e e^{ikl} &= \underline{p}^e e^{ilk}; \end{aligned} \quad (5.9)$$

- $\underline{d} = d^{ik} g_i \otimes g_k$ est le tenseur d'ordre deux des coefficients diélectriques qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 d^{ik} &\in L^\infty(\bar{\Omega}), \\
 d^{ik} &= d^{ki}, \\
 \exists c_d > 0 \text{ constante, } d^{ik} w_i w_k &\geq c_d w_i w_i, \quad \forall \xi \in \bar{\Omega}, \quad \forall w_i \in \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Le problème aux limites se formule donc de la façon suivante :

$$\left[\begin{array}{l}
 \text{Trouver un déplacement mécanique } U \\
 \text{et un potentiel électrique } \varphi \\
 \text{et une densité de force de pression } G_N \text{ vérifiant :} \\
 -\sigma_{||j}^{ij} = f^i \text{ dans } \Omega \\
 D_{||i}^i = 0 \text{ dans } \Omega \\
 U^i = 0 \text{ sur } \Gamma_0^M, \\
 \sigma^{ij} n_j = h^i \text{ sur } \Gamma_+, \\
 \varphi = \varphi_d \text{ sur } \Gamma_0^E, \\
 D^i n_i = 0 \text{ sur } \Gamma_1^E, \\
 \sigma^{ij} = C^{ijkl} e_{k||l}(U) -_P e^{kij} E_k(\varphi), \\
 D^i =_P e^{ikl} e_{k||l}(U) + d^{ij} E_j(\varphi), \\
 e_{i||j}(U) = \frac{1}{2}(U_{i||j} + U_{j||i}), \\
 E_i(\varphi) = -\varphi_{||i} = -\varphi_{,i}. \\
 \sigma^{ij} n_j = G^i \text{ sur } \Gamma_-, \\
 U_N \leq s, G_N \leq 0, G_N(U_N - s) = 0 \text{ dans } G_T = 0 \text{ sur } \Gamma_-
 \end{array} \right]. \tag{5.11}$$

5.2 Existence et unicité d'une solution

5.2.1 Deux formulations variationnelles du problème

On définit les espaces suivants :

$$\mathbf{V}_M(\Omega) = \{v \in (H^1)^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0^M\}; \tag{5.12}$$

$$\mathbf{K}(\Omega) = \{v \in \mathbf{V}_M(\Omega) / v_N \leq s \text{ sur } \Gamma_-\} \tag{5.13}$$

$$V_{E\varphi_d}(\Omega) = \{\psi \in H^1, \psi = \varphi_d \text{ sur } \Gamma_0^E\} \quad \forall \varphi_d \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^E); \tag{5.14}$$

avec en particulier

$$V_{E_0}(\Omega) = \{\psi \in H^1, \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_0^E\}. \tag{5.15}$$

On munit les espaces $\mathbf{V}_M(\Omega)$ et $V_{E_0}(\Omega)$ des normes suivantes :

$$\|v\|_{\mathbf{V}_M(\Omega)} = \left(\sum_i \|v_i\|_{1,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega); \tag{5.16}$$

$$\|\psi\|_{V_{E_0}(\Omega)} = \|\psi\|_{1,\Omega} \quad \forall \psi \in V_{E_0}. \tag{5.17}$$

On suppose que les données du problème (5.11) sont suffisamment régulières par exemple $f^i \in L^2(\Omega)$, $h^i \in L^2(\Gamma_+)$ et $\varphi_d \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^E)$, et que (U, φ, G_N) est une solution suffisamment régulière de ce problème. Soit v un élément de $\mathbf{V}_M(\Omega)$. En multipliant chacune des équations (5.11)₁ par les composantes covariantes v_i de v et en intégrant sur Ω , on obtient

$$\int_{\Omega} -\sigma_{\parallel j}^{ij} v_i dx = \int_{\Omega} f^i v_i dx.$$

En appliquant la formule de Green, on a

$$\int_{\Omega} \sigma^{ij} v_{i\parallel j} dx - \int_{\Gamma} \sigma^{ij} v_i n_j d\Gamma = \int_{\Omega} f^i v_i dx.$$

Or $v \in \mathbf{V}_M(\Omega)$, donc $v = 0$ sur Γ_0^M et, d'après (5.11)_{4,11,12}, $\sigma^{ij} n_j = h^i$ sur Γ_+ et $\sigma^{ij} n_j = G^i$, $G_T = 0$ sur Γ_- . Donc on a, par symétrie du tenseur des contraintes,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma^{ij} e_{i\parallel j}(v) dx &= \int_{\Omega} f^i v_i dx + \int_{\Gamma_+} h^i v_i d\Gamma + \langle G_N, v_N \rangle \\ \langle G_N, v_N - U_N \rangle &\geq 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

où $e_{i\parallel j}(v) = \frac{1}{2}(v_{i\parallel j} + v_{j\parallel i})$.

De même, soit ψ un élément de $V_{E_0}(\Omega)$. En multipliant l'équation (5.11)₂ par ψ et en intégrant sur Ω , on obtient-

$$\int_{\Omega} D_{\parallel i}^i \psi dx = 0$$

En appliquant la formule de Green, on a

$$\int_{\Omega} D^i \psi_{\parallel i} dx = \int_{\Gamma} D^i \psi n_i d\Gamma.$$

Or $\psi \in V_{E_0}(\Omega)$, donc $\psi = 0$ sur Γ_0^E et, d'après (5.11)₆, $D^i n_i = 0$ sur Γ_1^E . D'où

$$\int_{\Omega} D^i E_i(\psi) dx = 0, \quad (5.19)$$

où $E_i(\psi) = -\psi_{\parallel i} = -\psi_{,i}$. En additionnant les équations (5.18) et (5.19), on obtient le problème variationnel suivant :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Trouver } (U, \varphi, G_N) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_{\varphi_d}}(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-) \text{ tel que} \\ a_1[(U, \varphi), (v, \psi)] = f(v), \quad \forall (v, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega) \\ \langle G_N, v_N - U_N \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{K}(\Omega) \end{array} \right] \quad (5.20)$$

avec, en utilisant les expressions (5.11)₇ et (5.11)₈ des σ^{ij} et D^i ,

$$\begin{aligned} a_1[(U, \varphi), (v, \psi)] &= \int_{\Omega} \{ [\mathbf{C}^{ijkl} e_{k\parallel l}(U) - {}_p e^{kij} E_k(\varphi)] e_{i\parallel j}(v) \\ &\quad + [{}_p e^{ikl} e_{k\parallel l}(U) + d^{ik} E_k(\varphi)] E_i(\psi) \} dx \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$f(v) = \int_{\Omega} f^i v_i dx + \int_{\Gamma_+} h^i v_i d\Gamma + \langle G_N, v_N \rangle \quad (5.22)$$

En soustrayant les deux équations (5.18) et (5.19) on obtient un second problème variationnel :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Trouver } (U, \varphi, G_N) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_{\varphi_d}}(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-) \text{ tel que} \\ a_2[(U, \varphi), (v, \psi)] = f(v), \quad \forall (v, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega) \\ \langle G_N, v_N - U_N \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{K}(\Omega) \end{array} \right] \quad (5.23)$$

avec

$$\begin{aligned} a_2[(U, \varphi), (v, \psi)] = & \int_{\Omega} \{ [\mathbf{C}^{ijkl} e_{k||l}(U) - {}_p e^{kij} E_k(\varphi)] e_{i||j}(v) \\ & - [{}_p e^{ikl} e_{k||l}(U) + d^{ik} E_k(\varphi)] E_i(\psi) \} dx \end{aligned} \quad (5.24)$$

Proposition 5.1

Les problèmes variationnels (5.20) et (5.23) sont équivalents.

Preuve

Soit (U_1, φ_1, G_N) une solution de (5.20). Puisque pour tout ψ dans $\mathbf{V}_{E_0}(\Omega)$, $-\psi \in \mathbf{V}_{E_0}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} a_1[(U_1, \varphi_1), (v, -\psi)] = & f(v), \quad \forall (v, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega) \\ \langle G_N, v_N - U_N \rangle \geq & 0 \quad \forall v \in \mathbf{K}(\Omega) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Or pour tout $(v, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega)$, $a_1[(U_1, \varphi_1), (v, -\psi)] = a_2[(U_1, \varphi_1), (v, \psi)]$. Donc (U_1, φ_1, G_N) est aussi solution de (5.23). De même, on montre que toute solution (U_2, φ_2, G_N) de (5.23) est aussi solution de (5.20).

5.2.2 Problème homogène

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel (5.20), il est intéressant de considérer le problème homogène correspondant.

Lemme 5.1

Si φ_d est un élément de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^E)$, il existe un relèvement $\widehat{\varphi}$ de φ_d dans $H^1(\Omega)$, c'est-à-dire une fonction $\widehat{\varphi} \in H^1(\Omega)$ telle que $\widehat{\varphi}|_{\Gamma_0^E} = \varphi_d$

On pose alors

$$\bar{\varphi} = \varphi - \widehat{\varphi} \quad (5.26)$$

ce qui conduit à la proposition suivante :

Proposition 5.2

La solution (U, φ, G_N) du problème (5.20) est donnée par $\varphi = \bar{\varphi} + \widehat{\varphi}$ avec $(U, \bar{\varphi}, G_N)$ solution du problème suivant :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Trouver } (U, \bar{\varphi}, G_N) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_-) \text{ tel que} \\ a_1[(U, \bar{\varphi}), (v, \psi)] = L_1(v, \psi), \quad \forall (v, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega) \\ \langle G_N, v_N - U_N \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbf{K}(\Omega) \end{array} \right] \quad (5.27)$$

où $a_1[.,.]$ est définie en (5.21) et $L_1(v, \psi)$ est définie par

$$\begin{aligned} L_1(v, \psi) &= \int_{\Omega} f^i v_i dx + \int_{\Gamma_+} h^i v_i d\Gamma + \langle G_N, v_N \rangle \\ &+ \int_{\Omega} \{ {}_p e^{kij} E_k(\widehat{\varphi}) e_{i||j}(v) - d^{ik} E_k(\widehat{\varphi}) E_i(\psi) \} dx. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Preuve

On a

$$a_1[(U, \varphi), (v, \psi)] = a_1[(U, \bar{\varphi} + \widehat{\varphi}), (v, \psi)], \forall (v, \psi) \in \mathbf{V}(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega).$$

Or

$$E_k(\varphi) = -\varphi_{,k} = -(\bar{\varphi} + \widehat{\varphi})_{,k} = -\partial_k \bar{\varphi} - \partial_k \widehat{\varphi} = E_k(\bar{\varphi}) + E_k(\widehat{\varphi}).$$

Donc en remplaçant $E_k(\varphi)$ par $E_k(\widehat{\varphi})$ dans (5.20) on a

$$a_1[(U, \varphi), (v, \psi)] - f(v) = a_1[(U, \bar{\varphi}), (v, \psi)] - L_1(v, \psi), \forall (v, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega).$$

5.2.3 Théorème d'existence et d'unicité

Avant d'énoncer le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème variationnel (5.27), on rappelle deux lemmes nécessaires pour sa démonstration, et on énonce quelques propriétés des formes linéaire $L_1(\cdot)$ et bilinéaire $a_1[.,.]$ définies en (5.28) et (5.21).

Lemme 5.2

Lemme du mouvement rigide en coordonnées curvilignes

Si $\text{mes}\Gamma_0^M > 0$, $v \in \mathbf{V}_M(\Omega)$ et $e_{i||j}(v) = 0$, alors $v=0$.

Lemme 5.3

Inégalité de Korn en coordonnées curvilignes. Si $\Theta \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ et $\text{mes}\Gamma_0^M > 0$, alors il existe une constante $c > 0$ tel que

$$\left(\sum_{i,j} \|e_{i||j}(v)\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq c \|v\|_{\mathbf{V}_M(\Omega)}, \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega).$$

Lemme 5.4

Si $f^i \in L^2(\Omega)$, $h^i \in L^2(\Gamma_+)$ et $G^i \in L^2(\Gamma_-)$, alors la forme linéaire $L_1(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega)$.

Preuve

Par hypothèse $f^i \in L^2(\Omega)$, $h^i \in L^2(\Gamma_+)$ et $G^i \in L^2(\Gamma_-)$ et, d'après le lemme (5.1), $\widehat{\varphi} \in H^1(\Omega)$. Donc, puisque les coefficients ${}_p e^{kij}$ et d^{ki} sont dans $L^\infty(\bar{\Omega})$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} |L_1(v, \psi)| &\leq g_1^{\frac{1}{2}} (\|f^i\|_{0,\Omega} \|v_i\|_{0,\Omega} + \|h^i\|_{0,\Gamma_+} \|v_i\|_{0,\Gamma_+} + \|G_N\|_{0,\Gamma_-} \|v_N\|_{0,\Gamma_-}) \\ &+ C g_1^{\frac{1}{2}} (\sum_k \|\widehat{\varphi}_{,k}\|_{0,\Omega}) \left(\sum_{ij} \|e_{i||j}(v)\|_{0,\Omega} + \sum_i \|E_i(\psi)\|_{0,\Omega} \right), \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\forall (v, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega),$$

De plus, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\sum_{i,j} \|e_{i||j}(v)\|_{0,\Omega}^2 \leq C_2 \|v\|_{\mathbf{V}_M(\Omega)}^2 \quad \text{et} \quad \sum_i \|E_i(\psi)\|_{0,\Omega}^2 \leq C_2 \|\psi\|_{\mathbf{V}_{E_0}(\Omega)}^2.$$

Donc, d'après les propriétés d'injection continues $(H^1(\Omega))^3 \hookrightarrow (L^2(\Omega))^3$, il existe une constant $C > 0$ telle que

$$|L_1(v, \psi)| \leq C \left(\|v\|_{\mathbf{V}_M(\Omega)} + \|\psi\|_{\mathbf{V}_{E_0}(\Omega)} \right), \quad \forall (v, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega).$$

Lemme 5.5

Si $\text{mes} \Gamma_0^M > 0$ et $\text{mes} \Gamma_0^E > 0$, alors la forme bilinéaire $a_1[(\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot)]$ est continue et elliptique sur $\mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega)$.

Preuve

Continuité : Puisque les coefficients \mathbf{C}^{ijkl} , ${}_p e^{ikl}$ et d^{ik} sont dans $L^\infty(\bar{\Omega})$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité $(0 < g_0 < g(x) < g_1, \forall x \in \bar{\Omega})$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} |a_1[(v, \psi), (w, \theta)]| &\leq C \left(\sum_{k,l} \|e_{k||l}(v)\|_{0,\Omega} + \sum_k \|E_k(\psi)\|_{0,\Omega} \right) \left(\sum_{i,j} \|e_{i||j}(w)\|_{0,\Omega} + \sum_i \|E_i(\theta)\|_{0,\Omega} \right), \\ &\leq C \left(\|v\|_{\mathbf{V}_M(\Omega)} + \|\psi\|_{\mathbf{V}_{E_0}(\Omega)} \right) \left(\|w\|_{\mathbf{V}_M(\Omega)} + \|\theta\|_{\mathbf{V}_{E_0}(\Omega)} \right), \\ &\quad \forall (v, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega), \forall (w, \theta) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega). \end{aligned} \tag{5.30}$$

Ellipticité :

Pour tout (v, ψ) dans l'espace $\mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega)$, $a_1[(v, \psi), (v, \psi)] = a_M(v, v) + a_E(\psi, \psi)$, avec $a_M(v, v) = \int_{\Omega} \mathbf{C}^{ijkl} e_{k||l}(v) e_{i||j}(v) dx$ et $a_E(\psi, \psi) = \int_{\Omega} d^{ik} E_k(\psi) E_i(\psi) dx$.

D'après la propriété (5.8) d'ellipticité du tenseur des coefficients élastiques \mathbf{C} , il existe une constante $C > 0$ telle que

$$a_M(v, v) \geq C \sum_{i,j} \|e_{i||j}(v)\|_{0,\Omega}^2, \quad \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega),$$

et puisque $\text{mes} \Gamma_0^M > 0$, d'après l'inégalité de Korn (lemme (5.3)) et le lemme du mouvement rigide (lemme (5.2)), il existe une constante $C > 0$ tel que

$$a_M(v, v) \geq C \|v\|_{\mathbf{V}_M(\Omega)}^2, \quad \forall v \in \mathbf{V}_M(\Omega).$$

De même d'après la propriété (5.10) d'ellipticité du tenseur des coefficients diélectriques d^{ik} , il existe une constante $C > 0$ telle que

$$a_E(\psi, \psi) \geq C \sum_i \|E_i(\psi)\|_{0,\Omega}^2, \quad \forall \psi \in \mathbf{V}_{E_0}(\Omega),$$

et puisque $\text{mes}\Gamma_0^E > 0$, d'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$a_E(\psi, \psi) \geq C \|\psi\|_{\mathbf{V}_{E_0}(\Omega)}^2, \quad \forall \psi \in \mathbf{V}_{E_0}(\Omega).$$

D'où

$$a_1[(v, \psi), (v, \psi)] \geq C \left(\|v\|_{\mathbf{V}_M(\Omega)}^2 + \|\psi\|_{\mathbf{V}_{E_0}(\Omega)}^2 \right), \quad \forall (v, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega).$$

Théorème 5.1

Si $\text{mes}\Gamma_0^M > 0$ et $\text{mes}\Gamma_0^E > 0$, si $f^i \in L^2(\Omega)$ et $h^i \in L^2(\Gamma_+)$, $G^i \in L^2(\Gamma_-)$, alors le problème variationnel (5.27) admet une solution unique.

Preuve

On a vu avec les lemmes (5.5) et (5.4) que la forme bilinéaire $a_1[.,.]$ est continue et elliptique et que la forme linéaire $L_1(.)$ est continue sur $\mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega)$. Donc, en appliquant le lemme de Lax Milgram, on obtient l'existence et l'unicité de la solution du problème.

Remarque 6

Si $\text{mes}\Gamma_0^E = 0$ alors le problème (5.27) a une solution unique dans l'espace $\mathbf{V}_M(\Omega) \times (\mathbf{V}_{E_0}(\Omega)/\mathbb{R})$, c'est-à-dire que le potentiel électrique est déterminé à une constante près.

Si $\text{mes}\Gamma_0^M > 0$ et $\text{mes}\Gamma_0^E > 0$, si $f^i \in L^2(\Omega)$, $h^i \in L^2(\Gamma_+)$ et $G^i \in L^2(\Gamma_-)$, $\varphi_d \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^E)$, alors le problème variationnel (5.20) admet une solution unique.

Preuve

C'est une conséquence immédiate de la proposition (5.2) avec le lemme (5.1) et du théorème (5.1)

Chapitre 6

Modélisation asymptotique du problème de Signorini d'une coque mince piézoélectriques

6.1 Préliminaires aux méthodes asymptotiques

Soit Ω^ε le domaine tridimensionnel occupé par la coque piézoélectrique, $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ où ω est une surface de \mathbb{R}^2 représentant la surface moyenne et ε désigne la demi-épaisseur de la coque. Dans ce qui suit, on indique par un exposant $^\varepsilon$ les quantités qui dépendent de ce paramètre. En particulier, le déplacement mécanique et le potentiel électrique tridimensionnels sont notés respectivement u^ε et $\bar{\varphi}^\varepsilon$. On rappelle le problème tridimensionnel formulé dans le sixième chapitre (cf. problème homogène (5.27)) pour une coque piézoélectrique occupant le domaine Ω^ε , encastrée sur une partie $\Gamma_0^{M,\varepsilon}$ de sa frontière, soumise à des forces de volume f^ε dans Ω^ε et de surface h^ε sur la faces Γ_+^ε et soumise à un potentiel φ_d^ε sur une partie $\Gamma_0^{E,\varepsilon}$ de sa frontière dont on a considéré une fonction de relèvement $\hat{\varphi}^\varepsilon$ dans Ω^ε (cf. Lemme (5.1)), et l'on suppose que la face "inférieure" Γ_-^ε est susceptible d'entrer en contact (6.1)

$$v_i g^{i,\varepsilon}|_3 \geq -\Phi^\varepsilon|_3 - \varepsilon \text{ sur } \Gamma_-^\varepsilon. \quad (6.1)$$

avec le plan horizontal situé à la cote $-\varepsilon$. Les conditions de contact unilatéral entre la coque et ce plan sont alors exprimées par les conditions (6.2),

$$\left\{ \begin{array}{l} v_i g^{i,\varepsilon}|_3 \geq -\Phi^\varepsilon|_3 - \varepsilon, \\ -[(G^{i,\varepsilon})g_i^\varepsilon]|_3 \geq 0, \\ (v_i g^{i,\varepsilon}|_3 + \Phi^\varepsilon|_3 + \varepsilon)[(G^{i,\varepsilon})g_i^\varepsilon]|_3 = 0. \end{array} \right. \quad (6.2)$$

ce qui conduit classiquement au fait que l'équilibre est donné par l'unique solution $u^\varepsilon = (u_i^\varepsilon)$ du problème (6.3)

posé dans un cadre fonctionnel qui est le cône convexe (6.7).

6.2 Le cas de contact sans frottement

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u^\varepsilon, \bar{\varphi}^\varepsilon, \dot{G}_N^\varepsilon) \in K_M^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) \times V_{E_0}^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\varepsilon) \text{ telque :} \\ \int_{\Omega^\varepsilon} \{ [C^{ijkl,\varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(u^\varepsilon) - p e^{kij,\varepsilon} E_k^\varepsilon(\bar{\varphi}^\varepsilon)] e_{i||j}^\varepsilon(v) \\ + [p e^{ijk,\varepsilon} e_{k||l}^\varepsilon(u^\varepsilon) + d^{ik,\varepsilon} E_k^\varepsilon(\bar{\varphi}^\varepsilon)] E_i^\varepsilon(\psi) \} \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon \\ = \int_{\Omega^\varepsilon} f^{i,\varepsilon} v_i \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon + \int_{\Gamma_+^\varepsilon} h^{i,\varepsilon} v_i |g_1^\varepsilon \times g_2^\varepsilon| d\Gamma^\varepsilon + \langle \dot{G}_N^\varepsilon, \dot{v}_N \rangle \\ + \int_{\Omega^\varepsilon} \{ p e^{kij,\varepsilon} E_k^\varepsilon(\bar{\varphi}^\varepsilon) e_{i||j}^\varepsilon(v) - d^{ik,\varepsilon} E_k^\varepsilon(\bar{\varphi}^\varepsilon) E_i^\varepsilon(\psi) \} \sqrt{g^\varepsilon} dx^\varepsilon, \forall (v, \psi) \in V_M^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) \times V_{E_0}^\varepsilon(\Omega^\varepsilon). \\ \langle \dot{G}_N^\varepsilon, \dot{v}_N - \dot{u}_N^\varepsilon \rangle \geq 0, \forall v \in K(\Omega^\varepsilon) \end{array} \right. \quad (6.3)$$

tel que :

$\langle G^{i,\varepsilon}, v_i \rangle$ signifie le crochet de la dualité

$$\langle \dot{G}_N^\varepsilon, \dot{v}_N \rangle = \langle [(G^{i,\varepsilon}) g_i^\varepsilon] |_{3}, v_i g^{i,\varepsilon} |_{3} \rangle \quad (6.4)$$

$$:= \langle G^{3,\varepsilon}, v_3 \rangle \quad (6.5)$$

où les espaces fonctionnels sont définis par :

$$V_M^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) = \{v \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0^{M,\varepsilon}\}; \quad (6.6)$$

$$K_M^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) := \{v \in V_M^\varepsilon(\Omega^\varepsilon), v_3 \geq -\Phi^\varepsilon|_3 - \varepsilon \text{ sur } \Gamma_-\}; \quad (6.7)$$

$$V_{E_0}^\varepsilon(\Omega^\varepsilon) = \{\psi \in H^1(\Omega^\varepsilon), \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_0^{E,\varepsilon}\}, \quad (6.8)$$

avec

$$\Gamma_0^{M,\varepsilon} = \gamma_0^M \times [-\varepsilon, \varepsilon];$$

$$\Gamma_0^{E,\varepsilon} = \Gamma_0^{E_0,\varepsilon} \cup \Gamma_0^{E_1,\varepsilon} \cup \Gamma_0^{E_2,\varepsilon} \cup \Gamma_0^{E_3,\varepsilon};$$

$$\Gamma_0^{E_0,\varepsilon} = \gamma_0^E \times [-\varepsilon, \varepsilon];$$

$$\Gamma_0^{E_1,\varepsilon} = \omega_1 \times \{\pm\varepsilon\};$$

$$\Gamma_0^{E_2,\varepsilon} = \omega_2 \times \{+\varepsilon\};$$

$$\Gamma_0^{E_3,\varepsilon} = \omega_3 \times \{-\varepsilon\},$$

et

$$e_{i||j}^\varepsilon = \frac{1}{2}(\partial_i^\varepsilon v_j + \partial_j^\varepsilon v_i) - \Gamma_{ij}^{k,\varepsilon} v_k, \forall v \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3;$$

$$E_i^\varepsilon(\psi) = -\partial_i^\varepsilon \psi, \forall \psi \in H^1(\Omega^\varepsilon)$$

.

6.2.1 Passage à un domaine de référence

On considère le domaine fixe $\Omega = \omega \times]-1, 1[$ indépendant du paramètre d'épaisseur ε . A tout point $x^\varepsilon = (x_\alpha, x_3^\varepsilon)$ de $\Omega^\varepsilon = \omega \times]-\varepsilon, +\varepsilon[$, on associe le point $x = (x_\alpha, x_3)$ de Ω par $x_\alpha^\varepsilon = x_\alpha$ et $x_3^\varepsilon = \varepsilon x_3$. A toute fonction k^ε définie sur Ω^ε , on associe la fonction $k(\varepsilon)$ définie sur Ω par $k^\varepsilon(x^\varepsilon) = k(\varepsilon)(x)$, $\forall x \in \Omega$. On définit les espaces suivants :

$$V_M(\Omega) = \{v \in (H^1(\Omega))^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0^M\}; \quad (6.9)$$

$$\tilde{K}_M(\Omega) := \{v \in V_M(\Omega), v_i g^{i,\varepsilon}|_3 \geq -\theta_3 + \varepsilon a_3|_3 - \varepsilon\}; \quad (6.10)$$

$$V_{E_0}(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega), \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_0^E\} \quad (6.11)$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma_0^M &= \gamma_0^M \times [-1, 1], \quad \Gamma_0^E = \Gamma_0^{E_0} \cup \Gamma_0^{E_1} \cup \Gamma_0^{E_2} \cup \Gamma_0^{E_3}, \\ \Gamma_0^{E_0} &= \gamma_0^E \times [-1, 1], \quad \Gamma_0^{E_1} = \omega_1 \times \{\pm 1\}, \quad \Gamma_0^{E_2} = \omega_2 \times \{+1\}, \quad \Gamma_0^{E_3} = \omega_3 \times \{-1\}. \end{aligned}$$

On pose :

$\Omega_1 = \omega_1 \times]-1, 1[$; $\Omega_2 = \omega_2 \times]-1, 1[$; $\Omega_3 = \omega_3 \times]-1, 1[$;
 $\Omega_0 = \Omega - (\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3) = \omega_0 \times]-1, 1[$; avec $\omega_0 = \omega - (\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3)$. Avec les fonctions $u_i^\varepsilon, v_i^\varepsilon, \varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon, f^{i,\varepsilon}, h^{i,\varepsilon}, C^{ijkl,\varepsilon}, e_{i||j}^\varepsilon, g^\varepsilon, \dot{G}_N^\varepsilon$, et d^ε nous associons les fonctions correspondantes définies sur Ω à travers les relations :

$$\begin{aligned} u_i^\varepsilon(x^\varepsilon) &= u_i(\varepsilon)(x), \quad v_i^\varepsilon(x^\varepsilon) = v_i(x), \quad \varphi^\varepsilon = \varphi(\varepsilon), \quad \psi^\varepsilon = \psi(\varepsilon), \quad f^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) = f^i(\varepsilon)(x) \\ h^{i,\varepsilon}(x^\varepsilon) &= h^i(\varepsilon)(x), \quad C^{ijkl,\varepsilon}(x^\varepsilon) = C^{ijkl}(\varepsilon)(x), \quad e_{i||j}^\varepsilon(v^\varepsilon)(x^\varepsilon) = e_{i||j}(\varepsilon; v)(x) \\ g^\varepsilon(x^\varepsilon) &= g(\varepsilon)(x), \quad \langle \dot{G}_N^\varepsilon(x^\varepsilon), \dot{v}_N \rangle = \varepsilon \langle G^3(\varepsilon)(x), v_3 \rangle, \quad \Gamma_{ij}^{k,\varepsilon}(x^\varepsilon) = \Gamma_{ij}^k(\varepsilon)(x), \\ d^\varepsilon(x^\varepsilon) &= d(\varepsilon)(x) = d + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

Alors, le problème variationnel (6.3) se reformule sur le domaine fixe Ω comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u(\varepsilon), \bar{\varphi}(\varepsilon), \dot{G}_N(\varepsilon)) \in K_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Omega) \text{ tel que :} \\ \varepsilon \int_\Omega \{ [C^{ijkl}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) - {}_p e^{kij}(\varepsilon) E_k(\varepsilon)(\bar{\varphi}(\varepsilon))] e_{i||j}(\varepsilon)(v) \\ + [{}_p e^{ijk}(\varepsilon) e_{k||l}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) + d^{ik}(\varepsilon) E_k(\varepsilon)(\bar{\varphi}(\varepsilon))] E_i(\varepsilon)(\psi) \} \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ = \varepsilon \int_\Omega f^i(\varepsilon) v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Gamma_+} h^i(\varepsilon) v_i |g_1(\varepsilon) \times g_2(\varepsilon)| d\Gamma + \varepsilon \langle G^3(\varepsilon), v_3 \rangle \\ + \varepsilon \int_\Omega \{ {}_p e^{kij}(\varepsilon) E_k(\varepsilon)(\bar{\varphi}(\varepsilon)) e_{i||j}(\varepsilon)(v) - d^{ik}(\varepsilon) E_k(\varepsilon)(\bar{\varphi}(\varepsilon)) E_i(\varepsilon)(\psi) \} \sqrt{g(\varepsilon)} dx, \\ \forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega). \\ \langle G^3(\varepsilon), v_3 - u_3(\varepsilon) \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \end{array} \right. \quad (6.12)$$

tel que :

$$\langle G^i(\varepsilon), v_i \rangle \text{ signifie le crochet de la dualité}$$

Le tenseur des déformations et le vecteur champ électrique mis à l'échelle sont définis par :

$$\forall v \in (H^1(\Omega))^3 \begin{cases} e_{\alpha\|\beta}(\varepsilon)(v) = \frac{1}{2}(v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha}) - \Gamma_{\alpha\beta}^k(\varepsilon)v_k \\ e_{\alpha\|3}(\varepsilon)(v) = \frac{1}{2}(\frac{1}{\varepsilon}v_{\alpha,3} + v_{3,\alpha}) - \Gamma_{\alpha 3}^k(\varepsilon)v_k \\ e_{3\|3}(\varepsilon)(v) = \frac{1}{\varepsilon}v_{3,3} - \Gamma_{33}^k(\varepsilon)v_k \end{cases} \quad (6.13)$$

$$E_\alpha(\varepsilon)(\psi) = -\psi_{,\alpha}, \quad E_3(\varepsilon)(\psi) = -\frac{1}{\varepsilon}\psi_{,3}, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega).$$

Par analogie avec les définitions (5.11)_{7,8} du tenseur des contraintes $\sigma^{ij}(\varepsilon)$ et du vecteur déplacement électrique $D^i(\varepsilon)$ du problème tridimensionnel non homogène, c'est-à-dire qui dépendent des inconnues $u(\varepsilon)$ et $\varphi(\varepsilon)$ par les relations

$$\begin{cases} \sigma^{ij}(\varepsilon) = C^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) -_p e^{kij}(\varepsilon)E_k(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon)), \\ D^i(\varepsilon) =_p e^{ikl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) + d^{ik}(\varepsilon)E_k(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon)), \end{cases}$$

on définit le tenseur des contraintes et le vecteur déplacement électrique relatifs au problème homogène (c'est-à-dire aux inconnues $u(\varepsilon)$ et $\bar{\varphi}(\varepsilon)$) par

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^{ij}(\varepsilon) = C^{ijkl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) -_p e^{kij}(\varepsilon)E_k(\varepsilon)(\bar{\varphi}(\varepsilon)), \\ \bar{D}^i(\varepsilon) =_p e^{ikl}(\varepsilon)e_{k\|l}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) + d^{ik}(\varepsilon)E_k(\varepsilon)(\bar{\varphi}(\varepsilon)), \end{cases} \quad (6.14)$$

et qui vérifient, puisque (cf.(5.26)) $\varphi(\varepsilon) = \bar{\varphi}(\varepsilon) + \hat{\varphi}(\varepsilon)$,

$$\begin{cases} \bar{\sigma}^{ij}(\varepsilon) = \sigma^{ij}(\varepsilon) +_p e^{kij}(\varepsilon)E_k(\varepsilon)(\hat{\varphi}(\varepsilon)) \\ \bar{D}^i(\varepsilon) = D^i(\varepsilon) - d^{ik}(\varepsilon)E_k(\varepsilon)(\hat{\varphi}(\varepsilon)). \end{cases} \quad (6.15)$$

Le problème (6.12) se réécrit avec (6.14) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u(\varepsilon), \bar{\varphi}(\varepsilon), G^3(\varepsilon)) \in K_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Omega) \text{ tel que :} \\ \varepsilon \int_{\Omega} \{ \bar{\sigma}^{ij}(\varepsilon)e_{i\|j}(\varepsilon)(v) + \bar{D}^i(\varepsilon)E_i(\varepsilon)(\psi) \} \sqrt{g(\varepsilon)} dx \\ = \varepsilon \int_{\Omega} f^i(\varepsilon)v_i \sqrt{g(\varepsilon)} dx + \int_{\Gamma_+} h^i(\varepsilon)v_i |g_1(\varepsilon) \times g_2(\varepsilon)| d\Gamma + \varepsilon \langle G^3(\varepsilon), v_3 \rangle \\ + \varepsilon \int_{\Omega} \{ {}_p e^{kij}(\varepsilon)E_k(\varepsilon)(\hat{\varphi}(\varepsilon))e_{i\|j}(\varepsilon)(v) - d^{ik}(\varepsilon)E_k(\varepsilon)(\hat{\varphi}(\varepsilon))E_i(\varepsilon)(\psi) \} \sqrt{g(\varepsilon)} dx, \\ \forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega), \\ \langle G^3(\varepsilon), v_3 - u_3(\varepsilon) \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \end{array} \right. \quad (6.16)$$

6.2.2 Méthode des développements asymptotiques

On applique la méthode de développements asymptotiques pour les coques élastiques. La solution $(u(\varepsilon), \bar{\varphi}(\varepsilon), G_N(\varepsilon))$ du problème (6.12)(ou (6.16))posé sur le domaine fixe Ω dépend du petit paramètre ε . On suppose donc que $u(\varepsilon)$ et $\bar{\varphi}(\varepsilon)$ admettent un développement asymptotique formel en ε , et puisque le problème est linéaire, on commence ce développement à l'ordre 0, i.e.

$$\begin{cases} u(\varepsilon) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots; \\ \bar{\varphi}(\varepsilon) = \bar{\varphi}^0 + \varepsilon \bar{\varphi}^1 + \varepsilon^2 \bar{\varphi}^2 + \dots; \end{cases} \quad (6.17)$$

les termes des développements (6.17) étant a priori cherchés dans les espaces $V_M(\Omega)$ et $V_{E_0}(\Omega)$, i.e. $u^s \in V_M(\Omega)$ et $\bar{\varphi}^s \in V_{E_0}(\Omega)$ pour tout $s \geq 0$, ce qui impose en particulier que

$$\bar{\varphi}^s = 0 \text{ sur } \Gamma_0^E, \forall s \geq 0. \quad (6.18)$$

Les différentes quantités intervenant dans le problème (tenseurs des coefficients $C^{ijkl}(\varepsilon)$, ${}_p e^{kij}(\varepsilon)$ et $d^{ik}(\varepsilon)$, symboles de Christoffel $\Gamma_{ij}^k(\varepsilon)$, ...) dépendent également de ε . Elles admettent donc un développement au voisinage de $x_3 = 0$ (qui correspond à la surface moyenne) :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_\alpha(\varepsilon) = a_\alpha + \varepsilon x_3 (g_\alpha)^1 + \varepsilon^2 x_3^2 (g_\alpha)^2 + \dots; \\ g(\varepsilon) = a + \varepsilon x_3 g^1 + \varepsilon^2 x_3^2 g^2 + \dots; \\ \Gamma_{ij}^k(\varepsilon) = \Gamma_{ij}^k + \varepsilon x_3 \Gamma_{ij}^{k,1} + \varepsilon^2 x_3^2 \Gamma_{ij}^{k,2} + \dots; \\ C^{ijkl}(\varepsilon) = C^{ijkl} + \varepsilon x_3 C^{ijkl,1} + \varepsilon^2 x_3^2 C^{ijkl,2} + \dots; \\ {}_p e^{kij}(\varepsilon) = {}_p e^{kij} + \varepsilon x_3 {}_p e^{kij,1} + \varepsilon^2 x_3^2 {}_p e^{kij,2} + \dots; \\ d^{ik}(\varepsilon) = d^{ik} + \varepsilon x_3 d^{ik,1} + \varepsilon^2 x_3^2 d^{ik,2} + \dots; \end{array} \right. \quad (6.19)$$

Les termes a_α , a , Γ_{ij}^k sont des éléments de géométrie différentielle de la surface moyenne définis au paragraphe (1.2), et les coefficients C^{ijkl} , ${}_p e^{kij}$ et d^{ik} sont respectivement les coefficients des tenseurs $C^{ijkl}(\varepsilon)$, ${}_p e^{kij}(\varepsilon)$ et $d^{ik}(\varepsilon)$ écrits dans la base (a_i) . D'après (6.19), on peut également écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} C^{ijkl}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} = C^{ijkl} \sqrt{a} + \varepsilon \tilde{C}^{ijkl,1} + \varepsilon^2 \tilde{C}^{ijkl,2} + \dots, \\ {}_p e^{ikl}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} = {}_p e^{ikl} \sqrt{a} + \varepsilon {}_p \tilde{e}^{ikl,1} + \varepsilon^2 {}_p \tilde{e}^{ikl,2} + \dots; \\ d^{ik}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} = d^{ik} \sqrt{a} + \varepsilon \tilde{d}^{ik,1} + \varepsilon^2 \tilde{d}^{ik,2} + \dots; \end{array} \right. \quad (6.20)$$

En combinant les développements (6.17) et (6.19), on a les développements suivants des tenseurs des déformations et des vecteurs champs électriques (6.13) :

-pour les inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{i||j}(\varepsilon)(u(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}^{-1}(u) + e_{i||j}^0(u) + \varepsilon e_{i||j}^1(u) + \varepsilon^2 e_{i||j}^2(u) + \dots; \\ E_i(\varepsilon)(\bar{\varphi}(\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon} E_i^{-1}(\bar{\varphi}) + E_i^0(\bar{\varphi}) + \varepsilon E_i^1(\bar{\varphi}) + \varepsilon^2 E_i^2(\bar{\varphi}) + \dots; \end{array} \right. \quad (6.21)$$

-pour les fonctions tests :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{i||j}(\varepsilon)(v) = \frac{1}{\varepsilon} e_{i||j}^{-1}(v) + e_{i||j}^0(v) + \varepsilon e_{i||j}^1(v) + \varepsilon^2 e_{i||j}^2(v) + \dots; \\ E_i(\varepsilon)(\psi) = \frac{1}{\varepsilon} E_i^{-1}(\psi) + E_i^0(\psi) + \varepsilon E_i^1(\psi) + \varepsilon^2 E_i^2(\psi) + \dots; \end{array} \right. \quad (6.22)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{\alpha\|\beta}^{-1}(u) = 0, \\ e_{\alpha\|3}^{-1}(u) = \frac{1}{2}\partial_3 u_\alpha^0, \\ e_{3\|3}^{-1}(u) = \partial_3 u_3^0 \\ e_{\alpha\|\beta}^0(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta^0 + \partial_\beta u_\alpha^0) - \Gamma_{\alpha\beta}^k u_k^0, \\ e_{\alpha\|3}^0(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_3^0 + \partial_3 u_\alpha^1) - \Gamma_{\alpha 3}^\rho u_\rho^0, \\ e_{3\|3}^0(u) = \partial_3 u_3^1, \\ e_{\alpha\|\beta}^1(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta^1 + \partial_\beta u_\alpha^1) - \Gamma_{\alpha\beta}^k u_k^1 - x_3 \Gamma_{\alpha\beta}^{k,1} u_k^0, \\ e_{\alpha\|3}^1(u) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_3^1 + \partial_3 u_\alpha^2) - \Gamma_{\alpha 3}^\rho u_\rho^1 - x_3 \Gamma_{\alpha 3}^{k,1} u_k^0, \\ e_{3\|3}^1(u) = \partial_3 u_3^2 - x_3 \Gamma_{33}^{k,1} u_k^0, \end{array} \right. \quad (6.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_{\alpha\|\beta}^{-1}(v) = 0, \\ e_{\alpha\|3}^{-1}(v) = \frac{1}{2}\partial_3 v_\alpha, \\ e_{3\|3}^{-1}(v) = \partial_3 v_3 \\ e_{\alpha\|\beta}^0(v) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^k v_k, \\ e_{\alpha\|3}^0(v) = \frac{1}{2}\partial_\alpha v_3 - \Gamma_{\alpha 3}^\rho v_\rho, \\ e_{3\|3}^0(v) = 0, \end{array} \right. \quad (6.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_\alpha^{-1}(\bar{\varphi}) = 0, E_3^{-1}(\bar{\varphi}) = -\partial_3 \bar{\varphi} \\ E_\alpha^0(\bar{\varphi}) = -\partial_\alpha \bar{\varphi}^0, E_3^0(\bar{\varphi}) = -\partial_3 \bar{\varphi}^1, \\ E_\alpha^1(\bar{\varphi}) = -\partial_\alpha \bar{\varphi}^1, E_3^1(\bar{\varphi}) = -\partial_3 \bar{\varphi}^2, \end{array} \right. \quad (6.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_\alpha^{-1}(\psi) = 0, E_3^{-1}(\psi) = -\partial_3 \psi \\ E_\alpha^0(\psi) = -\partial_\alpha \psi, E_3^0(\psi) = 0 \end{array} \right. \quad (6.26)$$

$$\forall m \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} e_{i\|j}^m(v) = x_3^m \Gamma_{ij}^{k,m} v_k, \\ E_i^m(\psi) = 0 \end{array} \right. \quad (6.27)$$

Remarque 7

Les inconnues $u(\varepsilon)$ et $\bar{\varphi}(\varepsilon)$ et les fonctions tests v et ψ n'ont pas le même rôle puisqu'on ne considère qu'un développement asymptotique des premières. C'est pourquoi les termes des développements des tenseurs des déformations et des vecteurs champs électriques (6.21) et (6.22) sont différents pour chacune.

Avec les expressions (6.14) du tenseur des contraintes et du vecteur déplacement électrique du problème homogène, et avec les développements (6.20) et (6.21), on a

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{ij}(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} &= \frac{1}{\varepsilon} \bar{\sigma}^{ij,-1} + \bar{\sigma}^{ij,0} + \varepsilon \bar{\sigma}^{ij,1} + \varepsilon^2 \bar{\sigma}^{ij,2} \dots; \\ \bar{D}^i(\varepsilon) \sqrt{g(\varepsilon)} &= \frac{1}{\varepsilon} \bar{D}^{i,-1} + \bar{D}^{i,0} + \varepsilon \bar{D}^{i,1} + \varepsilon^2 \bar{D}^{i,2} + \dots; \end{aligned} \quad (6.28)$$

avec, pour tout $s \geq -1$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^{ij,s} &= (C^{ijkl} e_{k||l}^s(u) + {}_p e^{kij} E_k^s(\bar{\varphi}))\sqrt{a} + \sum_{m+n=s} \sum_{m \geq 1, n \geq -1} (C^{ijkl,m} e_{k||l}^n(u) + {}_p e^{kij,m} E_k^n(\bar{\varphi})), \\ \bar{D}^{i,s} &= ({}_p e^{ikl} e_{k||l}^s(u) + d^{ik} E_k^s(\bar{\varphi}))\sqrt{a} + \sum_{m+n=s} \sum_{m \geq 1, n \geq -1} ({}_p e^{ikl,m} e_{k||l}^n(u) + d^{ik,m} E_k^n(\bar{\varphi})).\end{aligned}\quad (6.29)$$

On prend pour les forces mécaniques appliquées $f(\varepsilon)$ et $h(\varepsilon)$ ainsi que pour le champ électrique imposé $E(\varepsilon)(\hat{\varphi}(\varepsilon))$ et $\dot{G}(\varepsilon)$, des ordres de grandeur en ε arbitraires, c'est-à-dire que l'on pose :

$$f(\varepsilon) = \sum_{s \geq a} \varepsilon^s f^s; \quad h(\varepsilon) = \sum_{s \geq b} \varepsilon^s h^s; \quad E(\varepsilon)(\hat{\varphi}(\varepsilon)) = \sum_{s \geq c} \varepsilon^s E^s(\hat{\varphi}); \quad \langle \dot{G}(\varepsilon), \dot{v} \rangle = \sum_{s \geq d} \varepsilon^s \langle \dot{G}^s, \dot{v} \rangle. \quad (6.30)$$

où $f^s(s \geq a)$, $h^s(s \geq b)$ et $E^s(\hat{\varphi})(s \geq c)$ $\dot{G}^s(s \geq d)$ sont indépendants de ε et, a, b, c et d (qui sont des entiers relatifs) sont des ordres de grandeur que l'on déterminera plus tard.

Remarque 8

Les composantes du champ électrique n'interviennent pas toutes au même ordre (cf.(6.13)). C'est pourquoi dans (6.30) on a considéré une décomposition du champ électrique $E(\varepsilon)(\hat{\varphi}(\varepsilon))$ plutôt que de $\hat{\varphi}(\varepsilon)$. On rappelle que $\hat{\varphi}(\varepsilon)$ est la fonction de relèvement du potentiel électrique. Elle peut être construite soit affine, soit constante en x_3 en fonction des conditions aux limites. Ce qui implique que

$$E^c(\hat{\varphi}) \text{ est indépendant de } x_3,$$

et, en particulier,

$$\begin{cases} E_\alpha^c(\hat{\varphi}) = 0 & \text{si } \hat{\varphi}(\varepsilon) \text{ est affine en } x_3, \\ E_3^c(\hat{\varphi}) = 0 & \text{si } \hat{\varphi}(\varepsilon) \text{ est constante en } x_3. \end{cases}$$

De plus, dans Ω_1 , elle est nécessairement affine puisque le potentiel est appliqué sur $\omega_1 \times \{\pm 1\}$, et donc

$$E_\alpha^s(\hat{\varphi}) = 0 \quad \forall s \geq c \text{ dans } \Omega_1.$$

On remplace, dans le problème (6.16) posé sur le domaine fixe Ω , $\bar{\sigma}^{ij}(\varepsilon)$ et $\bar{D}^i(\varepsilon)$ par leurs expressions (6.28), les $e_{i||j}(\varepsilon)(v)$ et $E_i(\varepsilon)(\psi)$ par (6.22) et les seconds membres par (6.30). On obtient ainsi la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \sum_{s \geq -2} \varepsilon^s \sum_{m+n=s} \sum_{m \geq -1, n \geq -1} \left(\bar{\sigma}^{ij,m} e_{i||j}^n(v) + \bar{D}^{i,m} E_i^n(\psi) \right) dx \\ & = \varepsilon \int_{\Omega} \left\{ e^a f^{i,a} v_i \sqrt{a} + \sum_{s > a} \varepsilon^s \tilde{f}^{i,k} v_i \right\} dx + \int_{\Gamma_+} \left\{ \varepsilon^b h^{i,b} v_i \sqrt{a} + \sum_{s > b} \varepsilon^s \tilde{h}^{i,k} v_i \right\} d\Gamma \\ & \quad + \varepsilon \left\{ \varepsilon^d \langle G^{3,d}, v_3 \rangle + \sum_{s > d} \varepsilon^s \langle \dot{G}_N^k, \dot{v}_N \rangle \right\} \\ & + \varepsilon \int_{\Omega} \sum_{s \geq c-1} \varepsilon^s \left\{ \sum_{m \geq c, n \geq -1} \sum_{m+n=s} \left({}_p e^{kij} E_k^m(\hat{\varphi}) e_{i||j}^n(v) - d^{ik} E_k^m(\hat{\varphi}) E_i^n(\psi) \right) \sqrt{a} \right\} dx \\ & + \varepsilon \int_{\Omega} \sum_{s \geq c-1} \varepsilon^s \left\{ \sum_{l \geq 1, m \geq c, n \geq -1} \sum_{l+m+n=s} \left({}_p e^{kij,l} E_k^m(\hat{\varphi}) e_{i||j}^n(v) - d^{ik,l} E_k^m(\hat{\varphi}) E_i^n(\psi) \right) \sqrt{a} dx \right\} dx \end{aligned} \right. \quad (6.31)$$

$$\varepsilon \left\{ \varepsilon^d \langle G^{3,d}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle + \sum_{s>d} \varepsilon^s \langle \tilde{G}_N^k, \dot{v}_N - \dot{u}_N^0 \rangle \right\} \geq 0 \quad \forall v_3 \in K_M(\Omega) \quad (6.32)$$

la méthode des développements asymptotiques consiste à identifier les coefficients des mêmes puissances de ε dans (6.31), en cherchant les ordres de grandeur des seconds membres (c'est -à-dire a , b , c et d dans (6.30)) jusqu'à ce que l'on obtienne un problème bidimensionnel dont les premiers termes u^0 , $\bar{\varphi}^0$ et \dot{G}_N^0 des développements (6.17) et (6.30) de $u(\varepsilon)$, $\bar{\varphi}(\varepsilon)$ et $\dot{G}(\varepsilon)$ soient solutions, sans avoir de restrictions (c'est-à-dire de relations de compatibilités) sur les chargements mécaniques et électriques appliqués.

Remarque 9

-Le problème est linéaire. C'est ce qui nous permet de partir de l'ordre 0 pour les développements de $u(\varepsilon)$ et $\bar{\varphi}(\varepsilon)$, et de déterminer les ordres de grandeur des seconds membres qui conviennent à ces développements, c'est-à-dire a , b , c et d ;

-Puisque le membre de gauche du problème (6.31) commence à l'ordre -1, on a nécessairement $a \geq -2$, $b \geq -1$, et $c \geq -1$, $d \geq -2$ dans (6.30).

On énonce deux lemmes qui serviront dans les développements ultérieurs.

Lemme 6.1

Soit w une fonction de $L^2(\Omega)$ (avec $\Omega = \omega \times]-1, +1[$) tel que :

$$\int_{\Omega} w \partial_3 v dx = 0, \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega}), v = 0 \text{ sur } \partial\omega \times [-1, 1].$$

Alors $w = 0$

.

Remarque 10

On appliquera le lemme (6.1) en utilisant le fait que ;

$$\{v \in C^\infty(\bar{\Omega}), v = 0 \text{ sur } \partial\omega \times [-1, +1]\} \subset V_M(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_0^M\}.$$

Lemme 6.2

1. Soit w une fonction de $L^2(\Omega_1)$ (avec $\Omega_1 = \omega_1 \times]-1, +1[$) tel que :

$$\int_{\Omega_1} w \partial_3 v dx = 0, \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega}_1), v = 0 \text{ sur } \partial\omega_1 \times [-1, +1] \cup \omega_1 \times \{\pm 1\}.$$

Alors w est indépendante de x_3 dans Ω_1 .

2. Soit w une fonction de $L^2(\Omega_2)$ (avec $\Omega_2 = \omega_2 \times]-1, +1[$) tel que :

$$\int_{\Omega_2} w \partial_3 v dx = 0, \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega}_2), v = 0 \text{ sur } \partial\omega_2 \times [-1, +1] \cup \omega_2 \times \{+1\}.$$

Alors $w = 0$ dans Ω_2 .

3. Soit w une fonction de $L^2(\Omega_3)$ (avec $\Omega_3 = \omega_3 \times]-1, +1[$) tel que :

$$\int_{\Omega_3} w \partial_3 v dx = 0, \forall v \in C^\infty(\bar{\Omega}_3), v = 0 \text{ sur } \partial\omega_3 \times [-1, +1] \cup \omega_3 \times \{-1\}.$$

Alors $w = 0$ dans Ω_3 .

Preuve

Pour plus de détails voir [29, Lemme (3.1.2)]

Remarque 11

On rappelle que $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, avec $\Omega_i = \omega_i \times]-1, +1[$

pour $i=0, \dots, 3$, et que toute fonction ψ dans V_{E_0} vérifie :

$$\psi = 0 \text{ sur } \gamma_0^E \times [-1, +1] \cup \omega_1 \times \{\pm 1\} \cup \omega_2 \times \{+1\} \cup \omega_3 \times \{-1\}.$$

On appliquera le lemme (6.2) en utilisant le fait que $\int_{\Omega} w \partial_3 \psi = 0$, $\forall \psi \in V_{E_0}(\Omega)$, implique que pour $i=0, \dots, 3$, on a

$$\int_{\Omega_i} w \partial_3 \psi = 0, \forall \psi \in C^\infty(\bar{\Omega}_i), \psi = 0 \text{ sur } \partial\omega_i \times [-1, +1] \cup \begin{cases} \omega_i \times \{\pm 1\} \text{ si } i = 1; \\ \omega_i \times \{+1\} \text{ si } i = 2; \\ \omega_i \times \{-1\} \text{ si } i = 3; \end{cases}$$

et donc

$$w = C, \text{ } C \text{ indépendante de } x_3, \text{ dans } \Omega_1;$$

$$w = 0 \text{ dans } \Omega_2 \cup \Omega_3;$$

$$w = 0 \text{ dans } \Omega_0 \text{ (d'après le lemme (6.1)).}$$

On utilise la notation tensorielle suivante qui à toute paire d'indices ou d'exposants pouvant être interchangés associe un entier selon le schéma suivant :

$$11 \rightarrow \underline{1}; \quad 22 \rightarrow \underline{2}; \quad 33 \rightarrow \underline{3}; \quad 23 \rightarrow \underline{4}; \quad 31 \rightarrow \underline{5}; \quad 12 \rightarrow \underline{6}. \text{ On pose}$$

$$\mathcal{C}_m = [C^{ij}]_{(\underline{i}, \underline{j}=1,2,6)}, \quad \mathcal{C}_t = [C^{ij}]_{(\underline{i}, \underline{j}=3,4,5)},$$

$$\mathcal{C}_{mt} = [C^{ij}]_{(\underline{i}=1,2,6)(\underline{j}=3,4,5)}, \quad \mathcal{C}_{tm} = [C^{ij}]_{(\underline{i}=3,4,5)(\underline{j}=1,2,6)},$$

Soit \mathcal{A} la matrice $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_m & \mathcal{A}_{mt} \\ \mathcal{A}_{tm} & \mathcal{A}_t \end{bmatrix}$ où

$$\mathcal{A}_m = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_m & -[p e^{\lambda \underline{i}}]_{(\underline{i}=1,2,6)}^t \\ [p e^{\alpha \underline{j}}]_{(\underline{j}=1,2,6)} & [d^{\alpha \lambda}] \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{mt} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{mt} & -[p e^{3 \underline{i}}]_{(\underline{i}=1,2,6)}^t \\ [p e^{\alpha \underline{j}}]_{(\underline{j}=3,4,5)} & [d^{\alpha 3}] \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{tm} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{tm} & -[p e^{\lambda \underline{i}}]_{(\underline{i}=3,4,5)}^t \\ [p e^{3 \underline{j}}]_{(\underline{j}=1,2,6)} & [d^{3 \lambda}] \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_t = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_t & -[p e^{3 \underline{i}}]_{5 \underline{i}=3,4,5}^t \\ [p e^{3 \underline{j}}]_{(\underline{j}=3,4,5)} & [d^{33}] \end{bmatrix} \quad \text{La matrice } \mathcal{A} \text{ est celle}$$

de loi de comportement des matériaux piézoélectriques qui relie le tenseur des contraintes σ et le vecteur déplacement électrique D avec le tenseur des déformations ε et le vecteur champ électrique E , où on a réordonné les composantes pour séparer celles dans le plan des autres. Elle exprime que

$$\left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} (\sigma^i_j = 1, 2, 6) \\ D^\alpha \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} (\sigma^i_j = 3, 4, 5) \\ D^3 \end{array} \right] \end{array} \right) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_m & \mathcal{A}_{mt} \\ \mathcal{A}_{tm} & \mathcal{A}_t \end{bmatrix} \left(\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} e_{\alpha\|\alpha} \\ 2e_{1\|2} \\ E_\lambda \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} e_{3\|3} \\ 2e_{\lambda\|3} \\ E_3 \end{array} \right] \end{array} \right)$$

Proposition 6.1

Les matrices \mathcal{C}_m , \mathcal{C}_t , \mathcal{A}_m et \mathcal{A}_t sont inversibles, $\mathcal{C}_{mt} = \mathcal{C}_{tm}^t$ et $\mathcal{A}_{mt} = \mathcal{A}_{tm}^t$.

Preuve

Les tenseurs C^{ijkl} , ${}_p e^{ikl}$ et d^{ik} sont les tenseurs $C^{ijkl}(\varepsilon)$, ${}_p e^{ikl}(\varepsilon)$ et $d^{ik}(\varepsilon)$ pris en $x_3 = 0$. Les résultats de la proposition (6.1) découlent donc directement des propriétés d'ellipticité et de symétrie (5.8)-(5.10) de ces tenseurs.

Analyse asymptotique

Pour chacun des problèmes bidimensionnels obtenus par la méthode des développements asymptotiques, on montre que la moyenne dans l'épaisseur de la solution du problème tridimensionnel converge vers leurs solutions dans des espaces fonctionnels appropriés. On énonce dans le lemme suivant quelques résultats nécessaires pour la suite.

Lemme 6.3

1. Soit $v \in L^2(\Omega)$, $\Omega = \omega \times]-1, +1[$. On définit sa moyenne dans l'épaisseur, que l'on note \underline{v} , pour presque tout y dans ω par

$$\underline{v}(y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} v(y, x_3) dx_3. \quad (6.33)$$

La fonction \underline{v} est bien définie pour presque tout $y \in \omega$ et

$$\underline{v} \in L^2(\omega) \quad \text{et} \quad \|\underline{v}\|_{0,\omega} \leq \frac{1}{2} \|v\|_{0,\Omega}. \quad (6.34)$$

2. Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|g(\varepsilon) - a\|_{0,\infty,\bar{\Omega}} \leq C_1 \varepsilon. \quad (6.35)$$

3. Il existe des constantes g_0 et g_1 tels que :

$$0 < g_0 \leq g(\varepsilon)(y) \leq g_1, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0]; \quad \forall y \in \bar{\Omega}. \quad (6.36)$$

On énonce maintenant quelques propriétés des tenseurs $C^{ijkl}(\varepsilon)$, ${}_p e^{kij}(\varepsilon)$ et $d^{ik}(\varepsilon)$.

Lemme 6.4

1. Propriétés $L^\infty(\bar{\Omega})$.

Il existe des constantes $C > 0$ telles que :

$$\begin{aligned} \|C^{ijkl}(\varepsilon) - C^{ijkl}(0)\|_{0,\infty,\bar{\Omega}} &\leq C\varepsilon; \\ \|{}_p e^{ikl}(\varepsilon) - {}_p e^{ikl}(0)\|_{0,\infty,\bar{\Omega}} &\leq C\varepsilon; \\ \|d^{ij}(\varepsilon) - d^{ij}(0)\|_{0,\infty,\bar{\Omega}} &\leq C\varepsilon. \end{aligned} \quad (6.37)$$

2. Propriétés d'uniforme ellipticité.

Il existe des constantes $C > 0$ telles que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$;

$$\begin{aligned} C^{ijkl}(\varepsilon)t_{kl}t_{ij} &\geq Ct_{ij}t_{ij}, \quad \forall t_{ij} = t_{ji} \in \mathbf{R}; \\ d^{ij}(\varepsilon)t_i t_j &\geq Ct_i t_j, \quad \forall t_i \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Preuve

1. Les propriétés (6.37) viennent du fait que les tenseurs $C^{ijkl}(\varepsilon)$, ${}_p e^{ikl}(\varepsilon)$ et $d^{ij}(\varepsilon)$ sont écrits dans la base covariante tridimensionnelle $(g_i(\varepsilon))$, et les tenseurs $C^{ijkl}(0)$, ${}_p e^{ikl}(0)$ et $d^{ij}(0)$ sont écrits dans la base covariante (a_i) attachée à la surface moyenne. Or on a les relations suivantes :

$$g_\alpha(\varepsilon) = a_\alpha + \varepsilon x_3 \partial_\alpha a_3 = a_\alpha + O(\varepsilon) \text{ et } g_3(\varepsilon) = a_3.$$

2. Pour tout $\varepsilon > 0$, le tenseur $C^{ijkl}(\varepsilon)$ est défini positif uniformément par rapport à $x \in \bar{\Omega}$, i.e. il existe des constantes $C(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$C^{ijkl}(\varepsilon)(x)t_{kl}t_{ij} \geq C(\varepsilon)t_{ij}t_{ij}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall t_{ij} = t_{ji}.$$

De plus, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$C^{ijkl}(0)(x)t_{kl}t_{ij} \geq C_1 t_{ij}t_{ij}, \quad \forall t_{ij} = t_{ji}.$$

Or l'application $(x, t_{ij}) \in \bar{\Omega} \times S_1 \rightarrow C^{ijkl}(\varepsilon)(x)t_{kl}t_{ij}$, où

$S_1 := \{\text{matrices } t_{ij} \text{ symétriques d'ordre 3 telles que } t_{ij}t_{ij} = 1\}$ étant continue, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, pour tout $x \in \bar{\Omega}$, et pour tout $t_{ij} = t_{ji}$,

$$C^{ijkl}(\varepsilon)(x)t_{kl}t_{ij} \geq Ct_{ij}t_{ij}.$$

On démontre de la même façon qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, pour tout $x \in \bar{\Omega}$, et pour tout t_i ,

$$d^{ij}(\varepsilon)t_i t_j \geq Ct_i t_j.$$

6.2.3 Le problème membranaire

Construction du problème membranaire par les développements asymptotiques

On va construire le problème membranaire par la méthode des développements asymptotiques. Pour cela, on va identifier les coefficients des termes ε^{-1} , ε^0 et ε^1 dans l'équation (6.31). On commence par les résultats obtenus à chaque étape.

Identification des coefficients des termes en ε^{-1}

Le problème variationnel s'écrit alors, en identifiant les termes en ε^{-1} dans (6.31),

$$\int_{\Omega} \{\bar{\sigma}^{ij,-1} e_{i||j}^{-1}(v) + \bar{D}^{i,-1} E_i^{-1}(\psi)\} dx = \int_{\Omega} f^{i,-2} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,-1} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle G^{3,-2}, v_3 \sqrt{a} \rangle + \int_{\Omega} \{p e^{kij} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) e_{i||j}^{-1}(v) - d^{ik} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) E_i^{-1}(\psi)\} \sqrt{a} dx, \forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega).$$
 et d'après les définitions (6.24), (6.26) des $e_{i||j}^{-1}(v)$ et $E_i^{-1}(\psi)$, on a

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \{\bar{\sigma}^{i3,-1} v_{i,3} - \bar{D}^{3,-1} \psi_{,3}\} dx = \int_{\Omega} f^{i,-2} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,-1} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle G^{3,-2}, v_3 \sqrt{a} \rangle \\ + \int_{\Omega} \{p e^{ki3} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) v_{i,3} + d^{3k} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) \psi_{,3}\} \sqrt{a} dx, \forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega). \end{cases} \quad (6.39)$$

Le problème de Signorini d'ordre ε^{-1}

On multiplie (6.32) par ε et on tend ε vers 0 on obtient

$$\langle G^{3,-2}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq \forall v_3 \in K(\Omega) \quad (6.40)$$

le problème de Signorini à l'ordre ε^{-1} est formulé comme suit

$$P_c^{-1} \begin{cases} \int_{\Omega} \{\bar{\sigma}^{i3,-1} v_{i,3} - \bar{D}^{3,-1} \psi_{,3}\} dx = \int_{\Omega} f^{i,-2} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,-1} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle G^{3,-2}, v_3 \sqrt{a} \rangle \\ + \int_{\Omega} \{p e^{ki3} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) v_{i,3} + d^{3k} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) \psi_{,3}\} \sqrt{a} dx, \forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega), \\ \langle G^{3,-2}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq \forall v_3 \in K(\Omega) \end{cases} \quad (6.41)$$

En prenant des fonctions tests v indépendantes de x_3 et ψ nulle, on obtient la relation de compatibilité suivante sur les données mécaniques :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} f^{i,-2} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,-1} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle G^{3,-2}, v_3 \sqrt{a} \rangle = 0, \forall v \in V_M(\Omega), \\ (v \text{ indépendant de } x_3). \\ \langle G^{3,-2}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq \forall v_3 \in K(\Omega) \end{cases} \quad (6.42)$$

Donc pour que les forces soient les plus générales possible, on impose $f^{-2} = 0$ et $h^{-1} = 0$, ie $a \geq -1$ et $b \geq 0$ dans (6.30) on a donc

$$\begin{cases} \langle G^{3,-2}, v_3 \sqrt{a} \rangle = 0, \forall v \in V_M(\Omega), \quad v \text{ indépendant de } x_3. \\ \langle G^{3,-2}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq \forall v_3 \in K(\Omega) \end{cases} \quad (6.43)$$

on obtient :

$$G^{3,-2} = 0; \text{ i.e. } d \geq -1 \quad (6.44)$$

En appliquant le lemme (6.1) avec la remarque (10) et le lemme (6.2) avec la remarque (11), on obtient respectivement :

$$\bar{D}^{3,-1} = \begin{cases} \bar{\sigma}^{i3,-1} = {}_p e^{ki3} E_k^{-1}(\hat{\varphi})\sqrt{a} \text{ dans } \Omega; \\ -d^{3k} E_K^{-1}(\hat{\varphi})\sqrt{a} \text{ dans } \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_3; \\ -d^{3k} E_k^{-1}(\hat{\varphi})\sqrt{a} + C^{-1}, C^{-1} \text{ indépendante de } x_3, \text{ dans } \Omega_1. \end{cases} \quad (6.45)$$

avec d'après (6.29),

$$\bar{\sigma}^{i3,-1} = (2C^{i3\lambda 3} e_{\lambda\|3}^{-1}(u) + C^{i333} e_{3\|3}^{-1}(u) - {}_p e^{3i3} E_3^{-1}(\bar{\varphi}))\sqrt{a},$$

$$\bar{D}^{3,-1} = (2{}_p e^{3\lambda 3} e_{\lambda\|3}^{-1}(u) + {}_p e^{333} e_{3\|3}^{-1}(u) + d^{33} E_3^{-1}(\bar{\varphi}))\sqrt{a}.$$

D'où, avec la notation (6.2.2), $(e_{i\|3}^{-1}(u), E_3^{-1}(\bar{\varphi}))$ vérifie le système suivant :

$$\mathcal{A}_t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{3\|3}^{-1}(u) \\ 2e_{\lambda\|3}^{-1}(u) \\ E_3^{-1}(\bar{\varphi}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} ({}_p e_{(i=3,4,5)}^{ki}) \\ -d^{k3} \end{pmatrix} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) \text{ dans } \Omega - \Omega_1; \\ \begin{pmatrix} ({}_p e_{(i=3,4,5)}^{ki}) \\ -d^{k3} \end{pmatrix} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) + \begin{pmatrix} 0 \\ C^{-1} \end{pmatrix} \text{ dans } \Omega_1. \end{cases} \quad (6.46)$$

Donc, puisque d'après la proposition (6.1) la matrice \mathcal{A}_t est inversible, on peut, dans $\Omega - \Omega_1$, exprimer $e_{i\|3}^{-1}(u)$ et $E_3^{-1}(\bar{\varphi})$ en fonction des $E_k^{-1}(\hat{\varphi})$ à l'aide du système (6.46), c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{3\|3}^{-1}(u) \\ 2e_{\lambda\|3}^{-1}(u) \\ E_3^{-1}(\bar{\varphi}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \mathcal{A}_t^{-1} \begin{pmatrix} ({}_p e_{(i=3,4,5)}^{ki}) \\ -d^{k3} \end{pmatrix} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) \text{ dans } \Omega - \Omega_1. \quad (6.47)$$

Dans Ω_1 , d'après le système (6.46), puisque la matrice \mathcal{A}_t , $E_k^{-1}(\hat{\varphi})$ (cf. remarque (8)) et C^{-1} sont indépendants de x_3 , $E_3^{-1}(\bar{\varphi})$ et $e_{i\|3}^{-1}(u)$ sont aussi indépendants de x_3 . Or $E_3^{-1}(\bar{\varphi}) = -\partial_3 \bar{\varphi}^0$ et, d'après (6.18), $\bar{\varphi}^0 = 0$ sur $\omega_1 \times \{\pm 1\}$. Donc on a nécessairement

$$E_3^{-1}(\bar{\varphi}) = 0 \text{ et } \bar{\varphi}^0 = 0 \text{ dans } \Omega_1, \quad (6.48)$$

c'est-à-dire que, dans Ω_1 , C^{-1} est tel que $E_3^{-1}(\bar{\varphi}) = 0$. On a donc en utilisant respectivement

les seconde et première équations de (6.45) :

$$C^{-1} = \left. \begin{aligned} & (2_p e^{3\lambda 3} e_{\lambda\|3}^{-1}(u) + {}_P e^{333} e_{3\|3}^{-1}(u) + d^{33} E_3^{-1}(\hat{\varphi})) \sqrt{a} \\ & \left(\begin{array}{c} e_{3\|3}^{-1}(u) \\ 2e_{\lambda\|3}^{-1}(u) \end{array} \right) = C_t^{-1} ({}_p e_{(i=3,4,5)}^{3i}) E_3^{-1}(\hat{\varphi}) \end{aligned} \right\} \text{ dans } \Omega_1. \quad (6.49)$$

Identification des coefficients des termes en ε^0

En égalant les coefficients en ε^0 dans l'équation (6.31), on obtient le problème variationnel

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ \bar{\sigma}^{ij,-1} e_{i\|j}^0(v) + \bar{D}^{i,-1} E_i^0(\psi) + \bar{\sigma}^{ij,0} e_{i\|j}^{-1}(v) + \bar{D}^{i,0} E_i^{-1}(\psi) \} dx \\ & = \int_{\Omega} f^{i,-1} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,0} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle G^{3,-1}, v_3 \sqrt{a} \rangle \\ & \quad + \int_{\Omega} \{ {}_p e^{kij} E_k^0(\hat{\varphi}) e_{i\|j}^{-1}(v) - d^{ik} E_k^0(\hat{\varphi}) E_i^{-1}(\psi) \} \sqrt{a} dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \{ {}_p e^{kij,1} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) e_{i\|j}^{-1}(v) - d^{ik,1} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) E_i^{-1}(\psi) \} \sqrt{a} dx \\ & + \int_{\Omega} \{ {}_p e^{kij} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) e_{i\|j}^0(v) - d^{ik} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) E_i^0(\psi) \} \sqrt{a} dx, \quad \forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Le problème de Signorini d'ordre ε^0

De même, nous remplaçons (6.44) dans (6.32) et nous multiplions le résultat par ε , nous tendons ε vers zéro, on obtient :

$$\langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega). \quad (6.51)$$

Le problème de Signorini à l'ordre ε^0 est formulé comme suit

$$P_c^0 \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega} \{ \bar{\sigma}^{ij,-1} e_{i\|j}^0(v) + \bar{D}^{i,-1} E_i^0(\psi) + \bar{\sigma}^{ij,0} e_{i\|j}^{-1}(v) + \bar{D}^{i,0} E_i^{-1}(\psi) \} dx \\ & = \int_{\Omega} f^{i,-1} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,0} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle G^{3,-1}, v_3 \sqrt{a} \rangle \\ & \quad + \int_{\Omega} \{ {}_p e^{kij} E_k^0(\hat{\varphi}) e_{i\|j}^{-1}(v) - d^{ik} E_k^0(\hat{\varphi}) E_i^{-1}(\psi) \} \sqrt{a} dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \{ {}_p e^{kij,1} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) e_{i\|j}^{-1}(v) - d^{ik,1} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) E_i^{-1}(\psi) \} dx \\ & + \int_{\Omega} \{ {}_p e^{kij} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) e_{i\|j}^0(v) - d^{ik} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) E_i^0(\psi) \} \sqrt{a} dx, \quad \forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega). \\ & \langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \end{aligned} \right. \quad (6.52)$$

En prenant des fonctions tests v et ψ indépendantes de x_3 , donc $\psi = 0$ dans $\Omega - \Omega_0$ (car $\psi = 0$ sur $\omega_1 \times \{\pm 1\} \cup \omega_2 \times \{+1\} \cup \omega_3 \times \{-1\}$), $e_{i\|3}^{-1}(v)$ et $E_3^{-1}(\psi)$ sont nuls, et le

problème variationnel (6.52) devient

$$P_c^0 \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \bar{\sigma}^{ij,-1} e_{i||j}^0(v) dx + \int_{\Omega} \bar{D}^{\alpha,-1} E_i^0(\psi) dx \\ = \int_{\Omega} f^{i,-1} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,0} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle G^{3,-1}, v_3 \sqrt{a} \rangle \\ + \int_{\Omega} ({}^p e)^{kij} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) e_{i||j}^0(v) \sqrt{a} dx - \int_{\Omega} d^{ik} E_k^{-1}(\hat{\varphi}) E_i^0(\psi) \sqrt{a} dx, \quad \forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega), \\ v \text{ et } \psi \text{ indépendantes de } x_3. \\ \langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\Omega) \end{array} \right. \quad (6.53)$$

D'après (6.29) $\bar{\sigma}^{\alpha\beta,-1}$ et $\bar{D}^{\alpha,-1}$ ne dépendent que des $e_{i||3}^{-1}(u)$ et $E_3^{-1}(\bar{\varphi})$, donc, d'après (6.47), (6.48) et (6.49) des $E_k^{-1}(\hat{\varphi})$. Le problème (6.53) ne fait donc pas intervenir les inconnues $u(\varepsilon)$ et $\bar{\varphi}(\varepsilon)$, mais seulement les chargements mécaniques et électriques appliqués, $f^{-1}, h^0, E_k^{-1}(\hat{\varphi})$ et $\langle G^{3,-1}, v_3 \sqrt{a} \rangle$.

Donc, pour ne pas avoir de condition sur les chargements appliqués, on suppose que

$$f^{-1} = 0, \quad h^0 = 0, \quad E_k^{-1}(\hat{\varphi}) = 0 \text{ et } \langle G^{3,-1}, v_3 \sqrt{a} \rangle = 0, \quad \text{i.e. } a \geq 0, \quad b \geq 1, \quad \text{et } c \geq 0, \quad (6.54)$$

D'où, d'après (6.53) et (6.54)

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle G^{3,-1}, v_3 \sqrt{a} \rangle = 0 \quad \forall v_3 \in V(\omega) = \{\eta \in H^1(\omega); \eta = 0 \text{ on } \partial\omega\} \\ \langle G^{3,-1}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K(\omega) = \{\eta \in V(\omega); \eta \leq \varepsilon d\} \end{array} \right. \quad (6.55)$$

on obtient respectivement :

$$G^{3,-1} = 0, \quad \text{i.e. } d \geq 0 \quad (6.56)$$

D'où, d'après (6.47), (6.48) et (6.49),

$$e_{i||3}^{-1} = 0 \text{ et } E_3^{-1} = 0, \quad (6.57)$$

et d'après (6.23) , (6.25) et (6.18)

$$\begin{array}{l} u^0 \text{ et } \bar{\varphi}^0 \text{ sont indépendants de } x_3, \\ \bar{\varphi}^0 = 0 \text{ et } E_{\alpha}^0(\bar{\varphi}) = 0 \text{ dans } \Omega - \Omega_0 \end{array} \quad (6.58)$$

et d'après (6.29)

$$\bar{\sigma}^{ij,-1} = 0, \quad \bar{D}^{i,-1} = 0 \quad (6.59)$$

Le problème variationnel (6.50) s'écrit donc, en tenant compte de (6.59) et des définitions (6.24), (6.26) des $e_{i||j}^{-1}(v)$ et des $E_i^{-1}(\psi)$,

$$\int_{\Omega} \{\bar{\sigma}^{i3,0} v_{i,3} - \bar{D}^{3,0} \psi_{,3}\} dx = \int_{\Omega} \{{}^p e^{ki3} E_k^0(\hat{\varphi}) v_{i,3} + d^{3k} E_k^0(\hat{\varphi}) \psi_{,3}\} \sqrt{a} dx, \quad \forall (u, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega).$$

En utilisant le lemme (6.1) avec la remarque (10) et le lemme (6.2) avec la remarque (11)

on obtient respectivement :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{i3,0} &= {}_p e^{ki3} E_k^0(\hat{\varphi}) \sqrt{a} \text{ dans } \Omega; \\ \bar{D}^{3,0} &= \begin{cases} -d^{3k} E_k^0(\hat{\varphi}) \sqrt{a} \text{ dans } \Omega_0 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3; \\ -d^{3k} E_k^0(\hat{\varphi}) \sqrt{a} + C^0, C^0 \text{ indépendante de } x_3 \text{ dans } \Omega_1; \end{cases} \end{aligned} \quad (6.60)$$

avec, d'après (6.29)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{i3,0} &= (C^{i3kl} e_{k||l}^0(u) - {}_p e^{ki3} E_k^0(\bar{\varphi})) \sqrt{a} + (C^{i3kl,1} e_{k||l}^{-1}(u) - {}_p e^{ki3,1} E_k^{-1}(\bar{\varphi})), \\ \bar{D}^{3,0} &= ({}_p e^{3kl} e_{k||l}^0(u) + d^{k3} E_k^0(\bar{\varphi})) \sqrt{a} + ({}_p e^{3kl,1} e_{k||l}^{-1}(u) + d^{k3,1} E_k^{-1}(\bar{\varphi})). \end{aligned}$$

Or, d'après (6.23) , (6.25) et (6.57), $e_{k||l}^{-1}(u) = 0$ et $E_k^{-1}(\bar{\varphi}) = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{i3,0} &= (C^{i3kl} e_{k||l}^0(u) - {}_p e^{ki3} E_k^0(\bar{\varphi})) \sqrt{a}; \\ \bar{D}^{3,0} &= ({}_p e^{3kl} e_{k||l}^0(u) + d^{k3} E_k^0(\bar{\varphi})) \sqrt{a}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

On cherche un problème dont les premiers termes u^0 , $\bar{\varphi}^0$ et G_N^0 des développements (6.17) et (6.30) de $u(\varepsilon)$, $\bar{\varphi}(\varepsilon)$ et $G(\varepsilon)$ soient solutions.

Or dans le système (6.60) avec les relations (6.61), les termes $e_{k||3}^0(u)$ et $E_3^0(\bar{\varphi})$ font apparaître (cf. (6.23) et (6.25)) les termes d'ordre un, u^1 et $\bar{\varphi}^1$, de ces développements. On utilise donc ce système pour les exprimer en fonction des autres.

Avec la notation (6.2.2), le système (6.60) avec (6.61) peut s'écrire

$$\mathcal{A}_t \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{3||3}^0(u) \\ 2e_{\lambda||3}^0(u) \\ E_3^0(\bar{\varphi}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -\mathcal{A}_{tm} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha||\alpha}^0(u) \\ 2e_{1||2}^0(u) \\ E_\lambda^0(\bar{\varphi}) \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ({}_p e_{(\underline{i}=3,4,5)}^{ki}) \\ -d^{k3} \end{pmatrix} E_k^0(\hat{\varphi}) + \begin{pmatrix} 0 \\ C^0 \end{pmatrix}, \quad (6.62)$$

où $C^0 = 0$ dans $\Omega - \Omega_1$ et est indépendante de x_3 dans Ω_1 . Donc, puisque d'après la proposition (6.1) la matrice \mathcal{A}_t est inversible, on peut, dans $\Omega - \Omega_1$, exprimer $e_{i||3}^0(u)$ et $E_3^0(\bar{\varphi})$ en fonction des $e_{\alpha||\beta}^0(u)$, $E_\lambda^0(\bar{\varphi})$, $E_k^0(\hat{\varphi})$, c'est-à-dire, en remarquant que

$$\begin{pmatrix} ({}_p e_{(\underline{i}=3,4,5)}^{ki}) \\ -d^{k3} \end{pmatrix} E_k^0(\hat{\varphi}) = \mathcal{A}_{tm} \begin{pmatrix} 0 \\ E_\lambda^0(\hat{\varphi}) \end{pmatrix} + \mathcal{A}_t \begin{pmatrix} 0 \\ E_3^0(\hat{\Omega}) \end{pmatrix}, \quad (6.63)$$

on a, d'après (6.62)

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{3\parallel 3}^0(u) \\ 2e_{\lambda\parallel 3}^0(u) \end{pmatrix} \\ E_3^0(\bar{\varphi}) \end{pmatrix} = -\mathcal{A}_t^{-1} \mathcal{A}_{tm} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\parallel\alpha}^0(u) \\ 2e_{1\parallel 2}^0(u) \end{pmatrix} \\ E_\lambda^0(\bar{\varphi}) + E_\lambda^0(\hat{\varphi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ E_3^0(\hat{\varphi}) \end{pmatrix}, \text{ dans } \Omega - \Omega_1. \quad (6.64)$$

Dans Ω_1 , d'après le système (6.62), puisque \mathcal{A}_t , \mathcal{A}_{tm} , $E_k^0(\hat{\varphi})$ (cf. remarque (8)) et (cf.(6.58)) $e_{\alpha\parallel\beta}^0$ et $E_\lambda^0(u)$ sont indépendants de x_3 , $E_3^0(\bar{\varphi})$ est aussi indépendant de x_3 . Or $E_3^0(\bar{\varphi}) = \partial_3 \bar{\varphi}^1$ et, d'après (6.18), $\bar{\varphi}^1 = 0$ sur $\omega_1 \times \{\pm 1\}$. Donc on a nécessairement

$$E_3^0(\bar{\varphi}) = 0, \quad \bar{\varphi}^1 = 0 \text{ et } E_\alpha^0(\bar{\varphi}) = 0 \text{ dans } \Omega_1; \quad (6.65)$$

et C^0 est telle que $E_3^0(\bar{\varphi}) = 0$. On a donc en utilisant respectivement les seconde et première équations de (6.60) avec (6.61), et en tenant compte de (6.58),

$$\left. \begin{aligned} C^0 &= ({}_p e^{3kl} e_{k\parallel l}^0(u) + d^{33} E_3^0(\hat{\varphi})) \sqrt{a} \\ \begin{pmatrix} e_{3\parallel 3}^0(u) \\ 2e_{\lambda\parallel 3}^0(u) \end{pmatrix} &= \mathcal{C}_t^{-1} \left[({}_p e_{(\underline{i}=3,4,5)}^{3\underline{i}}) E_3^0(\hat{\varphi}) - \mathcal{C}_{tm} \begin{pmatrix} e_{\alpha\parallel\alpha}^0(u) \\ 2e_{1\parallel 2}^0(u) \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \right\} \text{ dans } \Omega_1. \quad (6.66)$$

Identification des coefficients des termes en ε^1

En égalant les coefficients en ε^1 dans l'équation (6.31), on obtient le problème variationnel

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \{ \bar{\sigma}^{ij,-1} e_{i\parallel j}^1(v) + \bar{D}^{i,-1} E_i^1(\psi) + \bar{\sigma}^{ij,0} e_{i\parallel j}^0(v) + \bar{D}^{i,0} E_i^0 + \bar{\sigma}^{ij,1} e_{i\parallel j}^{-1}(v) + \bar{D}^{i,1} E_i^{-1}(\psi) \} dx \\ & + \int_\Omega f^{i,0} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,1} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle G^{3,0}, v_3 \sqrt{a} \rangle \\ & + \int_\Omega \{ {}_p e^{kij} E_k^0(\hat{\varphi}) e_{i\parallel j}^0(v) - d^{ik} E_k^0(\hat{\varphi}) E_i^0(\psi) \} \sqrt{a} dx + \int_\Omega \{ {}_p e^{kij,1} E_k^0(\hat{\varphi}) e_{i\parallel j}^{-1}(v) - d^{ik,1} E_k^0(\hat{\varphi}) E_i^{-1}(\psi) \} dx \\ & + \int_\Omega \{ {}_p e^{kij} E_k^1(\hat{\varphi}) e_{i\parallel j}^{-1}(v) - d^{ik} E_k^1(\hat{\varphi}) E_i^{-1}(\psi) \} \sqrt{a} dx, \quad \forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega). \end{aligned} \quad (6.67)$$

Le problème de Signorini d'ordre ε^1

En remplaçant (6.56) dans (6.32) et en multiplie le résultat par ε , et on tend ε vers 0 on obtient

$$\langle G^{3,0}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad (6.68)$$

Nous concluons que le problème de Signorini à l'ordre ε^1 est formulé comme suit

$$P_c^1 \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \{ \bar{\sigma}^{ij,-1} e_{i||j}^1(v) + \bar{D}^{i,-1} E_i^1(\psi) + \bar{\sigma}^{ij,0} e_{i||j}^0(v) + \bar{D}^{i,0} E_i^0 + \bar{\sigma}^{ij,1} e_{i||j}^{-1}(v) + \bar{D}^{i,1} E_i^{-1}(\psi) \} dx \\ + \int_{\Omega} f^{i,0} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,1} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle G^{3,0}, v_3 \sqrt{a} \rangle \\ + \int_{\Omega} \{ {}_p e^{kij} E_k^0(\hat{\varphi}) e_{i||j}^0(v) - d^{ik} E_k^0(\hat{\varphi}) E_i^0(\psi) \} \sqrt{a} dx \\ + \int_{\Omega} \{ {}_p e^{kij,1} E_k^0(\hat{\varphi}) e_{i||j}^{-1}(v) - d^{ik,1} E_k^0(\hat{\varphi}) E_i^{-1}(\psi) \} dx \\ + \int_{\Omega} \{ {}_p e^{kij} E_k^1(\hat{\varphi}) e_{i||j}^{-1}(v) - d^{ik} E_k^1(\hat{\varphi}) E_i^{-1}(\psi) \} \sqrt{a} dx, \quad \forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega); \\ \langle G^{3,0}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K_M(\Omega) \end{array} \right. \quad (6.69)$$

En ne prenant que des fonctions tests v et ψ indépendantes de x_3 , donc $\psi = 0$ dans $\Omega - \Omega_0$, on a $e_{i||j}^{-1}(v) = 0$ et $E_i^{-1}(\psi) = 0$. D'où en utilisant (6.59) et (6.60), le problème variationnel (6.69) devient

$$P_c^1 \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \bar{\sigma}^{\alpha\beta,0} e_{\alpha||\beta}^0(v) dx + \int_{\Omega_0} \bar{D}^{\alpha,0} E_{\alpha}^0(\psi) dx = \int_{\Omega} f^{i,0} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,1} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle G^{3,0}, v_3 \sqrt{a} \rangle \\ + \int_{\Omega} ({}_p e^{k\alpha\beta}) E_k^0(\hat{\varphi}) e_{\alpha||\beta}^0(v) \sqrt{a} dx - \int_{\Omega_0} d^{\alpha k} E_k^0(\hat{\varphi}) E_{\alpha}^0(\psi) \sqrt{a} dx, \\ \forall (v, \psi) \in V_M(\Omega) \times V_{E_0}(\Omega), v \text{ et } \psi \text{ indépendantes de } x_3; \\ \langle G_N^{3,0}, (v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K_M(\Omega) \end{array} \right. \quad (6.70)$$

avec, d'après (6.29) en utilisant (6.57),

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{\alpha\beta,0} &= (C^{\alpha\beta ij} e_{i||j}^0(u) - {}_p e^{i\alpha\beta} E_i^0(\hat{\varphi})) \sqrt{a}, \\ \bar{D}^{\alpha,0} &= ({}_p e^{\alpha ij} e_{i||j}^0(u) + d^{\alpha i} E_i^0(\hat{\varphi})) \sqrt{a}. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Les relations (6.71) s'écrivent avec la notation (6.2.2), en rappelant que d'après (6.65) $E_i^0(\hat{\varphi}) = 0$ dans Ω_1 ,

$$\left(\begin{array}{c} \left(\bar{\sigma}_{(i=1,2,6)}^{i,0} \right) \\ \bar{D}^{\alpha,0} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathcal{A}_m \left(\begin{array}{c} e_{\alpha||\alpha}^0(u) \\ 2e_{1||2}^0(u) \\ E_{\lambda}^0(\hat{\varphi}) \end{array} \right) + \mathcal{A}_{mt} \left(\begin{array}{c} e_{3||3}^0(u) \\ 2e_{\lambda||3}^0(u) \\ E_3^0(\hat{\varphi}) \end{array} \right) \end{array} \right) \sqrt{a} \text{ dans } \Omega - \Omega_1,$$

et

$$\left(\bar{\sigma}_{(i=1,2,6)}^{i,0} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathcal{C}_m \left(\begin{array}{c} e_{\alpha||\alpha}^0(u) \\ 2e_{1||2}^0(u) \end{array} \right) + \mathcal{C}_{mt} \left(\begin{array}{c} e_{3||3}^0(u) \\ 2e_{\lambda||3}^0(u) \end{array} \right) \end{array} \right) \sqrt{a} \text{ dans } \Omega_1.$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \bar{\sigma}_{(i=1,2,6)}^{i,0} \\ \bar{D}^{\alpha,0} \end{array} \right) + \begin{pmatrix} -_p e_{(i=1,2,6)}^{ki} \\ d^{\alpha k} \end{pmatrix} E_k^0(\hat{\varphi})\sqrt{a} \\ = \left[\mathcal{A}_m \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\|\alpha}^0(u) \\ 2e_{1\|2}^0(u) \end{pmatrix} \\ E_\lambda^0(\bar{\varphi}) + E_\lambda^0(\hat{\varphi}) \end{pmatrix} + \mathcal{A}_{mt} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{3\|3}^0(u) \\ 2e_{\lambda\|3}^0(u) \end{pmatrix} \\ E_3^0(\bar{\varphi}) \end{pmatrix} + \mathcal{A}_{mt} \begin{pmatrix} 0 \\ E_3^0(\hat{\varphi}) \end{pmatrix} \right] \sqrt{a} \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega - \Omega_1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left(\bar{\sigma}_{(i=1,2,6)}^{i,0} \right) - (_p e_{(i=1,2,6)}^{3i}) E_3^0(\hat{\varphi})\sqrt{a} \\ & = \left[\mathcal{C}_m \begin{pmatrix} e_{\alpha\|\alpha}^0(u) \\ 2e_{1\|2}^0(u) \end{pmatrix} + \mathcal{C}_{mt} \begin{pmatrix} e_{3\|3}^0(u) \\ 2e_{\lambda\|3}^0(u) \end{pmatrix} + \mathcal{A}_{mt}[1, 2] E_3^0(\hat{\varphi}) \right] \sqrt{a} \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega_1.$$

Soit, en utilisant les relations (6.64), (6.66),

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \bar{\sigma}_{(i=1,2,6)}^{i,0} \\ \bar{D}^{\alpha,0} \end{array} \right) + \begin{pmatrix} -_p e_{(i=1,2,6)}^{ki} \\ d^{\alpha k} \end{pmatrix} E_k^0(\hat{\varphi})\sqrt{a} \\ = \left[(\mathcal{A}_m - \mathcal{A}_{mt}\mathcal{A}_t^{-1}\mathcal{A}_{tm}) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\alpha\|\alpha}^0(u) \\ 2e_{1\|2}^0(u) \end{pmatrix} \\ E_\lambda^0(\bar{\varphi}) + E_\lambda^0(\hat{\varphi}) \end{pmatrix} \right] \sqrt{a} \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega - \Omega_1, \quad (6.72)$$

et

$$\begin{aligned} & \left(\bar{\sigma}_{(i=1,2,6)}^{i,0} \right) - (_p e_{(i=1,2,6)}^{3i}) E_3^0(\hat{\varphi})\sqrt{a} \\ & = [(\mathcal{C}_m - \mathcal{C}_{mt}\mathcal{C}_t^{-1}\mathcal{C}_{tm}) \begin{pmatrix} e_{\alpha\|\alpha}^0(u) \\ 2e_{1\|2}^0(u) \end{pmatrix} + (\mathcal{A}_{mt}[1, 2] - \mathcal{C}_{mt}\mathcal{C}_t^{-1}\mathcal{A}_t[1, 2]) E_3^0(\hat{\varphi})] \sqrt{a} \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega_1, \quad (6.73)$$

On définit les coefficients $\mathbf{C}_m^{\alpha\beta\lambda\mu}$, $_p e_m^{k\alpha\beta}$ et $d_m^{\alpha\lambda}$ par :

$$\left[\begin{array}{cc} [\mathbf{C}_m^{ij}]_{(i,j=1,2,6)} & - [_p e_m^{\lambda i}]_{(i=1,2,6)}^t \\ [{}_p e_m^{\alpha j}]_{(j=1,2,6)} & [d_m^{\alpha\lambda}] \end{array} \right] = \mathcal{A}_m - \mathcal{A}_{mt}\mathcal{A}_t^{-1}\mathcal{A}_{tm} \quad \text{dans } \Omega - \Omega_1; \quad (6.74)$$

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{C}_{m(i,\underline{j}=1,2,6)}^{ij}] &= \mathbf{C}_m - \mathbf{C}_{mt}\mathbf{C}_t^{-1}\mathbf{C}_{tm} \\ ({}_p e_{m(\underline{j}=1,2,6)}^{3j}) &= \mathcal{A}_{mt}[1, 2] - \mathbf{C}_{mt}\mathbf{C}_t^{-1}\mathcal{A}_t[1, 2] \end{aligned} \right\} \text{ dans } \Omega_1. \quad (6.75)$$

Remarque 12

Les coefficients $\mathbf{C}_m^{\alpha\beta\lambda\mu}$, ${}_p e_m^{m\lambda\mu}$ et $d_m^{\alpha\beta}$ correspondent aux composantes des tenseurs des coefficients mécaniques, piézoélectriques et diélectriques modifiés par les hypothèses suivantes :

- dans $\Omega - \Omega_1$, les contraintes transverses sont nulles et le déplacement électrique transverse est constant dans l'épaisseur; i.e. $\sigma^{i3} = 0$ et $\partial_3 D^3 = 0$;
- dans Ω_1 , seules les contraintes transverses sont nulles, i.e. $\sigma^{i3} = 0$, et donc $\mathbf{C}_m^{\alpha\beta\lambda\mu} = \bar{\mathbf{C}}^{\alpha\beta\lambda\mu}$ et ${}_p e_m^{3\lambda\mu} = {}_p \bar{e}^{3\lambda\mu}$ où les tenseurs $\bar{\mathbf{C}}^{\alpha\beta\lambda\mu}$ et ${}_p \bar{e}^{3\lambda\mu}$ sont ceux obtenus pour le problème bidimensionnel établi au chapitre 2 (cf.(2.3.10)).

Avec les relations (6.72), (6.73), et avec le tenseur \mathbf{C}_m défini en (6.75), le problème variationnel (6.70) s'écrit, en rappelant que d'après (6.58) $\bar{\varphi}^0 = 0$ dans $\Omega - \Omega_0$,

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\Omega_0} \{[\mathbf{C}_m^{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\lambda\|\mu}^0(u) - {}_p e_m^{\lambda\alpha\beta} E_\lambda^0(\bar{\varphi})] e_{\alpha\|\beta}^0(v) + [{}_p e_m^{\alpha\lambda\mu} e_{\lambda\|\mu}^0 + d_m^{\lambda\alpha} E_\lambda^0(\bar{\varphi})] E_\alpha^0(\psi)\} \sqrt{a} dx \\ & + \int_{\Omega - \Omega_0} \mathbf{C}_m^{\alpha\beta\lambda\mu} e_{\lambda\|\mu}^0(u) e_{\alpha\|\beta}^0(v) \sqrt{a} dx \\ & = \int_{\Omega} f^{i,0} v_i \sqrt{a} dx + \int_{\Gamma_+} h^{i,1} v_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle \mathbf{G}^{3,0}, v_3 \sqrt{a} \rangle \\ & + \int_{\Omega_0} \{ {}_p e_m^{\lambda\alpha\beta} E_\lambda^0(\bar{\varphi}) e_{\alpha\|\beta}^0(v) - d_m^{\lambda\alpha} E_\lambda^0(\bar{\varphi}) E_\alpha^0(\psi) \} \sqrt{a} dx, \\ & + \int_{\Omega_2 \cup \Omega_3} ({}_p e_m^{\lambda\alpha\beta}) E_\lambda^0(\bar{\varphi}) e_{\alpha\|\beta}^0(v) \sqrt{a} dx + \int_{\Omega_1} ({}_p e_m^{3\alpha\beta}) E_3^0(\bar{\varphi}) e_{\alpha\|\beta}^0(v) \sqrt{a} dx, \\ & \forall (v, \psi) \in \mathbf{V}_M(\Omega) \times \mathbf{V}_{E_0}(\Omega), \quad v \text{ et } \psi \text{ indépendantes de } x_3; \\ & \langle G^{3,0}(v_3 - u_3^0) \sqrt{a} \rangle \geq 0 \quad \forall v_3 \in K_M(\Omega). \end{aligned} \right. \quad (6.76)$$

Les fonctions tests v et ψ sont prises indépendantes de x_3 , donc, d'après (6.24) et (6.26), $e_{\alpha\|\beta}^0(v)$ et $E_\alpha^0(\psi)$ sont indépendants de x_3 . Et d'après (6.23), (6.25) et (6.48), $e_{\lambda\|\mu}^0(u)$ et $E_\lambda^0(\bar{\varphi})$ sont aussi indépendants de x_3 . En intégrant sur l'épaisseur, le problème variationnel (6.76) peut être considéré comme un problème bidimensionnel formulé sur ω . On pose

$$\gamma_{\alpha\beta}(v) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^k v_k, \quad (6.77)$$

et on rappelle que

$$E_\alpha(\psi) = -\partial_\alpha \psi.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} e_{\lambda\|\mu}^0(u) &= \gamma_{\lambda\mu}(u^0) \text{ et } e_{\alpha\|\beta}^0(v) = \gamma_{\alpha\beta}(v), \\ E_\lambda^0(\bar{\varphi}) &= E_\lambda(\bar{\varphi}^0) \text{ et } E_\alpha^0(\psi) = E_\alpha(\psi). \end{aligned}$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 6.1

Si les deux premiers termes u^0 , $\bar{\varphi}^0$ et u^1 , $\bar{\varphi}^1$ et le terme $G^{3,0}$ des développements (6.17), (6.30) des inconnues $u(\varepsilon)$ et $\bar{\varphi}(\varepsilon)$, $G^3(\varepsilon)$ existent, et si les forces mécaniques appliquées sont de la forme

$$f(\varepsilon) = f^0 \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^3, \quad h(\varepsilon) = \varepsilon h^1 \in (\mathbf{L}^2(\Gamma^+))^3, \quad G^3(\varepsilon) = G^{3,0} + \varepsilon G^{3,1} + \dots / G^{3,0} \in H^{-\frac{1}{2}},$$

et le champ électrique appliqué est de la forme

$$E(\varepsilon)(\widehat{\varphi}(\varepsilon)) = \sum_{k \geq 0} e^k E^k(\widehat{\varphi}), \quad E^0(\widehat{\varphi}) \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^3, \quad E_k^0(\widehat{\varphi}) \text{ sont indépendants de } x_3,$$

alors

$$u^0 \text{ et } \bar{\varphi}^0 \text{ sont indépendants de } x_3,$$

$$\bar{\varphi}^0 = 0 \text{ dans } \Omega - \Omega_0,$$

et $(u^0, \bar{\varphi}^0, G^{3,0})$ peut être identifié à la solution bidimensionnelle $(\zeta^0, \theta^0, G^{3,0})$ définie sur $\bar{\omega}$ des équations bidimensionnelles membranaires de coques piézoélectriques suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\zeta^0, \theta^0, G^{3,0}) \in \mathbf{V}_{M,mem}(\omega) \times V_{E_0,mem}(\omega) \times (H^{-\frac{1}{2}})(\omega) \text{ tel que} \\ & 2 \int_{\omega_0} \{ [\mathbf{C}_m^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\zeta^0) - {}_p e_m^{\lambda\alpha\beta} E_\lambda(\theta^0)] \gamma_{\alpha\beta}(\eta) + [{}_p e_m^{\alpha\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\zeta^0) + d_m^{\alpha\lambda} E_\lambda(\theta^0)] E_\alpha(\psi) \} \sqrt{a} dy \\ & + 2 \int_{\omega - \omega_0} \mathbf{C}_m^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu}(\zeta^0) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy \\ & = \int_{\omega} \left(\int_{-1}^{+1} f^{i,0} dz \right) \eta_i \sqrt{a} dy + \int_{\Gamma_+} h^{i,1} \eta_i \sqrt{a} d\Gamma + \langle G^{3,0}, \eta_3 \sqrt{a} \rangle \\ & + 2 \int_{\omega_0} \{ {}_p e_m^{\lambda\alpha\beta} E_\lambda^0(\widehat{\varphi}) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) - d_m^{\alpha\lambda} E_\lambda^0(\widehat{\varphi}) E_\alpha(\psi) \} \sqrt{a} dy \\ & + 2 \int_{\omega_2 \cup \omega_3} ({}_p e_m^{\lambda\alpha\beta}) E_\lambda^0(\widehat{\varphi}) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy + 2 \int_{\omega_1} ({}_p e_m^{3\alpha\beta}) E_3^0(\widehat{\varphi}) \gamma_{\alpha\beta}(\eta) \sqrt{a} dy, \\ & \forall (\eta, \psi) \in \mathbf{V}_{M,mem}(\omega) \times V_{E_0,mem}(\omega) \\ & \langle G^{3,0}, \eta_3 \sqrt{a} \rangle \geq 0 \forall \eta_3 K(\omega) \\ & \text{où} \\ & \mathbf{V}_{M,mem}(\omega) = \{ \eta \in H^1(\omega) \times H^1(\Omega) \times L^2(\omega), \eta_\alpha = 0 \text{ sur } \gamma_0^M \}; \\ & \mathbf{K}_M(\omega) = \{ \eta \in \mathbf{V}_{M,mem}(\omega) / \eta_3 \leq d \text{ sur } \Gamma_- \} \\ & V_{E_0,mem}(\omega) = \{ \psi \in H^1(\omega), \psi = 0 \text{ dans } \omega - \omega_0, \psi = 0 \text{ sur } \gamma_0^E \}; \\ & \gamma_{\alpha\beta}(v) = \frac{1}{2} (\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha) - \Gamma_{\alpha\beta}^k v_k; \\ & E_\alpha(\psi) = -\partial_\alpha \psi; \\ & \text{et où les tenseurs } \mathbf{C}_m^{\alpha\beta\lambda\mu}, \quad {}_p e_m^{k\alpha\beta} \text{ et } d_m^{\alpha\lambda} \text{ sont définis en (6.75)} \end{aligned} \tag{6.78}$$

6.3 Conclusion

L'analyse asymptotique du problème piézoélectrique tridimensionnel effectuée dans ce chapitre conduit au problème de coques piézoélectriques membranaires dans le cas d'une coque uniformément elliptique encastree sur partie de sa frontière latérale.

On a ensuite justifié le modèle bidimensionnel. Pour cela, en utilisant la méthode des développements asymptotiques formelles que dans le cas sans frottement, on trouve un problème bidimensionnel de Signorini sans frottement.

Bibliographie

- [1] **Adams. R.A.**, *Sobolev space*, Academic, New York, 1975.
- [2] **Bensayah. A. Chacha. D. A. Ghezal. A.** Asymptotic modeling of Signorini problem with Coulomb friction for a linearly elastostatic shallow shell, *Math. Meth. Appl.* 39 (2016) 1410–1424.
- [3] **Bernadou.M.** *Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces*, 1994 Masson (Paris Milan Barcelone)
- [4] **Bernadou. M and Haenel. C.** Modelization and numerical approximation of piezoelectric thin shells. I. The continuous problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192(2003) 4003–4043.
- [5] **Brezis. H.** *Analyse fonctionnelle théories et applications*. Dunod 1999.
- [6] **Caffarelli. L. A. Friedman. A.** The obstacle problem for the biharmonic operator, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. IV* 6 (1) (1979) 151–184.
- [7] **Caffarelli. L. A. Friedman. A. Torelli. A.** The two-obstacle problem for the biharmonic operator, *Pacific J. Math.* 103 (3) (1982) 325–335.
- [8] **Ciarlet.P.G.**, *Élasticité Tridimensionnelle*, Masson, Paris New York, 1986.
- [9] **Ciarlet P.G.**, *Mathematical Elasticity, vol I, Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [10] **Ciarlet P.G.**, *Plates and junctions in elastic multistructures*, Masson, 1990.
- [11] **Ciarlet P.G.**, *Mathematical Elasticity, vol II, Theory of Plates*, North-Holland, Amsterdam, 1997.
- [12] **Ciarlet P.G.**, *Mathematical Elasticity Volume III : Theory of shells, Studies in Mathematics and its Applications 29*, North Holland. Springer (2005).
- [13] **Ciarlet P.G.**, *An introduction to differential geometry with applications to elasticity*, *J. Elast.* 78-79 (2005), 1-215.
- [14] **Ciarlet. P. G. Destuynder. P.** *A justification of the two dimensional plate model*, *J. Mécanique*, 18 (1989) 315-344.
- [15] **Ciarlet. P. G and Lods. V.** Asymptotic Analysis of Linearly Elastic Shells. I. Justification of Membrane Shell Equations, *journal Arch. Rational Mech. Anal.*, year 1996, volume 136, number "2", pages "119–161".
- [16] **Ciarlet P.G. and Mardare C.**, *An introduction to shell theory*, Lectures notes series 9, Liu Bie centre for mathematical sciences, university of Hong Kong, 2007.

-
- [17] **Ciarlet P.G. and Miara B.**, *Justification of the two-dimensional equations of a linearly elastic shallow shell*, Comm. Pure Appl. Math, **45** (1992), 327-360.
- [18] **Ciarlet. P. G Paumier. J. C.**, A justification of the Marguerre-von Kármán equations, Computational Mechanics 1 (1986) 177–202.
- [19] **Dhia. H. B.** *Equilibre d'une plaque mince élastique avec contact unilatéral et frottement de type Coulomb*, C. R. Acad. Sci. Paris, Scr. I, 308 (1989) 293-296.
- [20] **Duvaut. G.** *Mécanique du milieu continu*. Dunod 1998.
- [21] **Duvant. G. Lions. J. L.** *Les inéquations en mécanique et en physique.* , Dunod 1972
- [22] **Duvaut. G. Lions. J. L.** Inequalities in mechanics and physics, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 219, Springer-Verlag (Berlin, 1976).
- [23] **Eck.C. Jarušek.J.** *Existence results for the static contact problem with Coulomb friction*, Math., Models Methods Appl. Sci., 8,445-468(1998).
- [24] **Fichera. G.** Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, Mem. Accad. Naz. Lincei Ser. VIII (7) (1953) 91–140.
- [25] **Fichera. G** Boundary value problems of elasticity with unilateral constrains. In handbuch der physik, band 6a/2, Springer-Verlag (Berlin, 1972).
- [26] **Figueiredo. I. N. Stadler. G.** Frictional contact of an anisotropic piezoelectric plate, Control, Optimisation and Calculus of Variations 15 (2009) 149–172.
- [27] **Galin. L. A.** Contact problems, Solid mechanics and its applications, Volume 155, Springer, 2008.
- [28] **Ghezal. A. Chacha. D. A.** Justification and solvability of dynamical contact problems for generalized Marguerre-von Kármán shallow shells, ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics 98(5) (2018) 749–780.
- [29] **Haenel. Ch**, Modélisation, Analyse et Simulation Numérique de Coques Piézoélectriques. Thèse de doctorat de l' Université Paris VI.
- [30] **Hassani. R. Hild. P . Ionescu. I.** *Sufficient conditions of non-uniqueness for the Coulomb friction problem*. Math. Meth. Appli. Sci. 2004 ; 27 :47-67.
- [31] **Ikeda. T.** Fundamentals of Piezoelectricity, Oxford University Press (Oxford, 1990).
- [32] **Jaruek. J.** *Contact Problem with Bounded Friction : Coercive case, Coercive case, Czechoslovak*. Math. J.,33(108), 237-261(1983).
- [33] **Kato. Y.** *Signorini Problem with friction in linear elasticity*, J. Appl.Math.,4,237-268(1987).
- [34] **Kikuchi. N. Oden. J.** *Contact problems in elasticity : a study of variaional inequalities and finite element methodes*, SIAM, Studies in applied mathematics, 1988.
- [35] **Léger. A . Miar. B.** *Mathematica justification of the obstacle problem in the case of a shallow shell*. J. Elasticity. Vol. 90, 2008,Pages 241-257.
- [36] **Léger. A . Miara. B.** *the obstacle problem for shallow shells in curvilignes coordinates* . C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 2010
- [37] **Lion.J.L . Magenes.E**, *Problèmes aus limites non homogènes et applications*,vol.1et 2,Dunod 1968.
-

-
- [38] **Maceri. F. Bisegna. B.**, The unilateral frictionless contact of a piezoelectric body with a rigid support, *Math. Comput. Modelling* 28 (1998) 19–28.
- [39] **Maso. G. D. Paderni. G.** Variational inequalities for the biharmonic operator with variable obstacles, *Ann. J. Mat. Pura Appl* 153 (1988) 203–227.
- [40] **Paumier. J. C.** Le problème de Signorini dans la théorie des plaques minces de Kirchhoff-Love, *C. R. Acad. Ser. I* 335 (2002) 567–570.
- [41] **Mezabia. M. E. Ghezal. A. Chacha. D. A.** Asymptotic analysis of frictional contact problem for piezoelectric shallow shell, *oxford university-journal of Applied Mathematics and Mechanics* (2019) doi :10.1093/qjmam/hbz014.
- [42] **Migrski. S. Ochal. A. Sofonea. M.** Nonlinear inclusions and hemivariational inequalities, *Models and Analysis of Contact Problems. Advances in Mechanics and Mathematics*, vol. 26. Springer (New York, 2013).
- [43] **Nécas.J. Jarusek.J . Haslinger.J.**, *On the solution of the variational inequality to the Signorini problem with small friction*, *Boll.U.M.I.* 5(17B), 796-811 (1980).
- [44] **Nellya N. Rogacheva**, *The theory of piezoelectric shells and plates*, CRC Press, 1994.
- [45] **Renard. Y.** *A uniqueness criterion for the Signorini problem with Coulomb friction*. 4th Contact Mechanics International Symposium, Hannover, 2005.
- [46] **Rodríguez-Arós. Á.** Models of Elastic Shells in Contact with a Rigid Foundation : An Asymptotic Approach, *journal J. Elast.*, year 2018, volume 130, number "Issue 2", pages "211–237",
- [47] **Tzou. H. S.** *Piezoelectric shells : distributed sensing and control of continua*, *Solid Mechanics and its Applications*, vol. 19 (Kluwer Academic Publishers, 1993).
- [48] **Yang. G.** *The mechanics of piezoelectric structures*, World Scientific, 2006.
- [49] **Yan. G. Miara. B.** , Mathematical justification of the obstacle problem in the cas of piezoelectric plate, *Asymptot. Anal.* 96 (2016) 283–308.
- [50] **Yan. G. Miara. B.**, Mathematical justification of the obstacle problem in the cas of piezoelectric shallow shell, *Asymptotic Anal.* 102 (2017) 71–97.
- [51] **Signorini. A.** *Questioni de elasticita non linearizzata e semi-linearizzata*. *Rend de Matematica*, Rome, 1959