

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique  
Université Mohamed Khider-Biskra



Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la  
vie

Département : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

N° d'ordre :

## THESE

Présentée Pour l'obtention du Diplôme de Doctorat en Mathématiques

# Méthodes mathématiques pour la compression et le débruitage d'images

Par  
Bachir Dehda

Soutenue publiquement le mercredi 25 avril 2018, devant le jury composé  
de :

Zouhir Mokhtari  
Khaled Melkemi  
Abdallah Benaissa  
Djabrane Yahia  
EL Amir Djefal

Président  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

Pr. Université de Biskra  
Pr. Université de Batna 2  
Pr. Université de Batna 2  
MCA. Université de Biskra  
MCA. Université de Batna 2

## Remerciements et Dédicace

Je remercie tout d'abord, Dieu tout puissant de m'avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, le professeur **Khaled Melkemi** pour m'avoir encadré, encouragé, orienté et conseillé. Ses conseils et ses encouragements ont permis à réaliser cette thèse. La liberté et la confiance qu'il m'a accordée ont beaucoup contribué à la formation de ce travail.

Mes plus vifs remerciements s'adressent également à tous les membres du jury, qui ont accepté et qui sont intéressés à discuter de ma thèse. Merci monsieur le président : le professeur, **Zouhir Mokhtari**. Merci messieurs les examinateurs : les professeurs, **Abdallah Benaissa**, **Djabrane Yahia** et **El Amir Djefal**.

Enfin, je dédie ce travail à mes parents et ma famille (épouse, fils, frères, soeurs, ...) pour leur aide et leur soutien moral.

# Résumé

Cette thèse, est consacrée à l'étude d'effet pratique de deux nouvelles techniques pour la compression et le débruitage d'images. On commence par un survol sur la théorie des signaux, où on rappelle l'analyse de Fourier et la transformée en ondelettes. Ensuite, on démontre par une étude théorique approfondie et détaillée sur l'analyse multirésolution, que l'on peut construire des variétés des bases orthonormées d'ondelettes telles que : la base d'ondelette de Haar, la base d'ondelettes de Daubechies, la base d'ondelettes de Coifman, la base d'ondelettes biorthogonales et la base de paquets d'ondelettes, on démontre également, que cette étude se prolonge au cas multidimensionnel. Puis, on propose une nouvelle méthode (HDS), permet d'obtenir une base orthonormée d'ondelettes caractérisée par des avantages par rapport aux autres bases d'ondelettes. Après cela, on propose aussi une nouvelle méthode pour la compression et le débruitage d'images basée sur une nouvelle fonction de seuillage des coefficients d'ondelettes.

Finalement, on compare par des critères informatiques d'une part, la performance pratique des techniques de compression d'images telles que : JPEG 2000 et HDS. D'une autre part, l'efficacité de la méthode proposée et les méthodes classiques de seuillage.

**Mots-clés :** Analyse de Fourier, ondelettes, analyse multirésolution, hybridation de l'espace de détail, Seuillage dur et doux, compression et débruitage d'images.

# Abstract

This thesis is devoted to the study of the practical effect of two new techniques for images compression and denoising. We begin with an overview of the signal theory, where we recall the Fourier analysis and the wavelet transform. Next, we demonstrate through a theoretically and detailed study on the multiresolution analysis, that we can build from it varieties of orthonormal wavelet bases such as : the Haar wavelet basis, the Daubechies wavelet basis, the Coifman wavelet basis, the biorthogonal wavelet basis and the wavelet packets basis, we also prove that this study can be extended to the multidimensional case. Then, we propose a new method (HDS), permits to obtain an orthonormal wavelet basis characterised by advantages compared to others wavelet bases. After that, we also propose a new image compression and denoising method based on a novel wavelet thresholding function.

Finally, we compare by informatics criteria firstly, the practical performance of image compression techniques such as : JPEG 2000 and HDS. Secondly, the effectiveness of the proposed method and the classic thresholding methods.

**Keywords :** Fourier analysis, wavelets, multiresolution analysis, hybridization of detail space, Hard and Soft thresholding, images compression and denoising.

# Table des matières

Table des figures	VIII
Liste des tableaux	X
Introduction	1
<b>1 Généralités sur la théorie des signaux</b>	<b>4</b>
1.1 Définitions et quelques notions de base . . . . .	4
1.1.1 Signal unidimensionnel . . . . .	5
1.1.2 Signal multidimensionnel . . . . .	7
1.2 Quelques techniques pour le traitement du signal . . . . .	8
1.2.1 Analyse de Fourier . . . . .	8
1.2.2 Standards algorithmes utilisés au traitement du signal	13
1.2.3 La transformation en ondelettes . . . . .	15
<b>2 Analyse multirésolution de <math>L^2(\mathbb{R})</math></b>	<b>19</b>
2.1 Définitions et des exemples . . . . .	19
2.2 La fonction d'échelle et la base orthonormée . . . . .	21
2.3 Propriétés fréquentielles de la fonction d'échelle . . . . .	32
2.4 Construction d'une base d'ondelette . . . . .	41
<b>3 Familles des ondelettes fréquemment utilisées</b>	<b>71</b>
3.1 Ondelettes à support compact . . . . .	71
3.1.1 Ondelette de Haar . . . . .	71
3.1.2 Ondelettes de Daubechies . . . . .	71
3.1.3 Ondelettes de Coifman (coiflets) . . . . .	74
3.2 Ondelettes biorthogonales . . . . .	76
3.3 Paquets d'ondelettes . . . . .	77

3.4	Justification du choix des ondelettes . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Analyse multirésolution de <math>L^2(\mathbb{R}^n)</math></b>	<b>80</b>
4.1	Définitions et propriétés . . . . .	80
4.2	Algorithmes de Mallat pour ( $n = 2$ ) . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Nouvelles bases adaptatives des ondelettes</b>	<b>91</b>
5.1	L'espace de détail hybride . . . . .	91
5.1.1	Les avantages de la technique HDS . . . . .	97
5.2	Décomposition dans le cas bidimensionnel	98
5.3	Algorithme de compression basé sur la méthode (HDS) . . . . .	99
5.3.1	Caractérisation des hybrides coefficients d'ondelettes . . . . .	100
5.3.2	Les étapes de l'algorithme et le diagramme associé . . . . .	102
<b>6</b>	<b>Nouvelle technique pour le seuillage des coefficients d'onde- lettes</b>	<b>104</b>
6.1	Principe du débruitage d'images par seuillage des coefficients d'ondelettes . . . . .	105
6.2	Rappel sur les traditionnelles techniques de seuillage . . . . .	105
6.2.1	Seuillage dur (Hard Thresholding) . . . . .	105
6.2.2	Seuillage doux (Soft Thresholding) . . . . .	106
6.3	Nouvelle fonction de seuillage des coefficients d'ondelettes . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Application au traitement des images numériques</b>	<b>114</b>
7.1	Notions sur les images numériques . . . . .	114
7.1.1	Définition d'une image numérique . . . . .	114
7.1.2	Différents types d'images . . . . .	115
7.1.3	Différents formats d'images . . . . .	117
7.2	Compression d'images . . . . .	118
7.2.1	Quelques critères de la performance des techniques de compression . . . . .	119
7.2.2	Différents types de la compression . . . . .	119
7.3	Quelques techniques de compression et débruitage d'images . . . . .	122
7.3.1	Technique JPEG . . . . .	122
7.3.2	Technique JPEG 2000 . . . . .	122
7.3.3	Technique HDS . . . . .	122
7.3.4	Technique de seuillage avec une nouvelle fonction . . . . .	123
7.4	Résultats expérimentaux et discussion . . . . .	123

7.4.1	Comparaison de JPEG 2000 par HDS . . . . .	123
7.4.2	Comparaison de seuillage dur et doux par la nouvelle technique de seuillage . . . . .	126
	<b>Conclusion</b>	<b>129</b>
	<b>Bibliographies</b>	<b>130</b>

# Table des figures

1.1	Signal analogique . . . . .	5
1.2	Signal discret . . . . .	6
1.3	Signal échantonné . . . . .	6
1.4	Signal causal . . . . .	7
1.5	Image numérique . . . . .	8
1.6	Une fonction périodique . . . . .	9
1.7	L'ondelette de Haar . . . . .	16
1.8	La première dérivée de G . . . . .	17
2.1	Schéma d'algorithme de décomposition . . . . .	49
2.2	Schéma d'algorithme de reconstruction . . . . .	49
4.1	Schéma de décomposition . . . . .	88
4.2	Schéma de reconstruction . . . . .	90
5.1	Schéma de décomposition au niveau $j$ avec la méthode (HDS) . . . . .	99
5.2	Le diagramme correspondant à l'algorithme de (HDS) . . . . .	103
6.1	Graphe de fonctions de seuillage dur, doux, Garrote et la nouvelle fonction pour $\lambda = 10$ et avec $\alpha = 0.05$ , $\alpha = 0.2$ , $\alpha = 0.3$ . . . . .	107
6.2	Le diagramme correspondant à l'algorithme de débruitage . . . . .	113
7.1	Image monochromatique . . . . .	115
7.2	Image aux niveaux de gris . . . . .	116
7.3	Image couleur . . . . .	117
7.4	Schéma du codage de Huffman pour cet exemple. . . . .	121
7.5	Image originale . . . . .	125
7.6	Décomposition de l'image originale au niveau $j = 1$ . . . . .	125
7.7	Images reconstruites, (a) avec HDS et (b) avec JPEG 2000 . . . . .	126
7.8	Images différence, (c) avec HDS et (d) avec JPEG 2000 . . . . .	126



7.9	Originale and image bruitée correspondant à Barbara pour $\sigma = 20$ . . . . .	128
7.10	Images débruitées, (a), (b), (c), (d) en utilisant dur, doux, Garrote et méthode proposée respectivement pour $\sigma = 20$ . . .	128

# Liste des tableaux

7.1	Résultats de compression avec JPEG 2000 . . . . .	124
7.2	Résultats de compression avec HDS . . . . .	124
7.3	Comparaison de resultats de PSNR (dB) entre les méthodes classiques et la méthode proposée . . . . .	127

# Introduction

Les techniques de compression et de débruitage d'images sont un sujet de recherche très important aujourd'hui, en ce qu'elles suppriment le bruit et réduisent le poids des images volumineuses pour économiser de l'espace de stockage et accélérer la communication entre les êtres humains via Internet. Les méthodes de compression et de débruitage par transformation sont classées parmi des techniques irréversibles, qui sont largement utilisées ces dernières années. Ces méthodes décomposent l'image dans une base orthonormée d'une façon à nous pouvons de mettre à zéro une grande quantité des coefficients de décomposition sans altérer de manière significative l'aspect visuel de l'image originale. En fait, les ondelettes ont donné beaucoup des contributions dans le domaine de compression du signal et de l'image depuis 1985, telles qu'on peut construire des diverses bases orthonormées d'ondelettes à l'aide d'une analyse multirésolution, ces bases se différencient selon leur compétence, en ce qu'elles peuvent de mettre le plus grand nombre de coefficients d'ondelettes à zéro en respectant l'aspect visuel significatif de l'image originale, citons les ondelettes de Daubechies [18] et celles de Coifman [16]. Ensuite, il n'y a qu'un petit nombre des coefficients pour représenter les informations nécessaires de l'image. La compétence de base d'ondelettes revient à quelques propriétés sur les ondelettes, telles que : la compacité du support, le nombre des moments nuls et la régularité. Mais, si l'image a une grande singularité, alors nous serons obligés d'augmenter le nombre de coefficients non nuls d'ondelettes pour reconstruire cette image. En réalité, cette situation a conduit à l'émergence de l'ondelette non stationnaire [9] et paquets d'ondelettes [12].

D'autre part, tous les différents types d'ondelettes sont liés aux propriétés précédentes d'ondelettes, d'où la réduction du nombre des coefficients d'ondelettes dépend de la singularité de l'image. En outre, dans le cas où la singularité est assez grande, nous aurons un grand nombre de grands coeffi-

cients d'ondelettes nécessaires à la représentation d'image. Par conséquent, ces ondelettes ne sont pas suffisantes pour résoudre le problème de compression. Pour cela, notre but dépend de réponse à une des questions suivantes :

1. Y a-t-il des bases d'ondelettes dont on peut réduire le nombre de coefficients d'ondelettes indépendamment de la singularité de l'image ?
2. Y a-t-elle une fonction de seuillage des coefficients d'ondelettes peut donner une meilleure performance par rapport aux seuillages dur et doux ?

En effet, l'hybridation de l'espace de détail ou en anglais HDS (Hybridization of Detail Space), c'est une nouvelle méthode visée à réduire le nombre de coefficients d'ondelettes indépendamment de la singularité du signal ou de l'image. Son principe est de choisir des matrices orthogonales suivent d'un nombre quelconque des nombres premiers, pour construire des nouvelles bases d'ondelettes vérifiant notre but.

D'une autre part, la fonction du seuillage qui utilise la fonction d'erreur de Gauss et le paramètre de forme dans sa expression mathématique, c'est une nouvelle technique du seuillage des coefficients d'ondelettes. Cette technique donne une meilleure performance par rapport aux seuillages dur et doux.

Cette thèse est structurée comme suit :

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions de base sur la théorie des signaux, puis on introduit deux techniques de traitement du signal telles que, l'analyse de Fourier et la transformée en ondelettes.

Dans le deuxième chapitre, on étudie le concept théorique de l'analyse multirésolution et les propriétés principales de sa fonction d'échelle, ensuite on démontre la méthode de construction d'une base orthonormée d'ondelettes à partir d'une analyse multirésolution.

Le troisième chapitre contient d'une part, des différentes ondelettes couramment utilisées dans la pratique telles que, l'ondelette de Haar, les ondelettes de Daubechies, Les ondelettes de Coifman, les ondelettes biorthogonales et les paquets d'ondelettes. Et d'une autre part, une justification du choix des ondelettes.

Dans le quatrième chapitre, dans un premier temps on généralise la définition d'analyse multirésolution et ses propriétés au cas multidimensionnel, et dans un deuxième temps on décrit l'algorithme de Mallat pour un signal de dimension deux.

Dans le cinquième chapitre, on présente une nouvelle méthode de construction des bases adaptatives d'ondelettes (HDS), caractérisée par son algorithme de compression. Les résultats de la simulation sous Matlab ont prouvé

la surperformance de cette méthode par rapport aux autres méthodes.

Dans le sixième chapitre, on propose une nouvelle fonction de seuillage caractérisée par un paramètre de forme et des propriétés mathématiques. D'après ces caractéristiques, cette fonction peut vérifier un compromis entre le seuillage dur et doux. Les résultats expérimentaux ont justifié la meilleure performance de ce nouveau seuillage.

Le dernier chapitre, débute par la définition d'une image numérique et ses différents types et différents formats, ensuite on définit la compression d'images et quelques critères de la performance de ses techniques, de plus on cite des techniques de compression et de débruitage d'images fixes telles que, JPEG, JPEG 2000, HDS et la nouvelle fonction de seuillage, enfin on compare premièrement les techniques JPEG 2000 et HDS en utilisant une expérimentation sur une image contenant des singularités. Deuxièmement, on compare la performance de seuillage proposé avec le seuillage dur et doux.

Finalement, on complète cette thèse par une conclusion générale et des références principales.

# Chapitre 1

## Généralités sur la théorie des signaux

Puisque la représentation des résultats mesurés de n'importe quel phénomène s'interprète comme un signal, la théorie des signaux englobe l'ensemble des études sur le signal dans nombreuses disciplines comme la physique, l'électronique, l'informatique, les mathématiques appliquées, ... en vue d'atteindre un objectif. Le traitement du signal et des images est l'une de ces études, en ceci qu'il se concentre sur les méthodes qui permettent d'extraire et d'analyser les informations contenues dans le signal, afin que nous puissions de le débruiter et de le reconstituer. L'analyse d'un signal ou d'une image fait l'appel à un espace vectoriel caractérisé par une base orthonormée dont le signal est vu comme une superposition d'éléments de sa base. Parmi les méthodes à cet égard, citons d'une part celles de Fourier qui sont DFT, DCT, elles permettent de représenter un signal en composantes fréquentielles. D'autre part, c'est l'autre d'ondelette, qui est basée sur le paramètre de la translation et celui de la dilatation pour décomposer ce signal.

### 1.1 Définitions et quelques notions de base

On introduit dans cette section les définitions principales et des notions de base concernant les signaux, et pour plus de détail et d'une étude approfondie sur les signaux, on peut consulter [25].

### 1.1.1 Signal unidimensionnel

**Définition 1.1 :** On appelle *signal unidimensionnel*, toute fonction  $s$  à une seule variable de  $E$  vers  $\mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} s : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto s(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

où  $E$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 1.2 :** Dans notre vie quotidienne, les exemples sont nombreux et variés comme : un courant, une tension, une température, un son, ...

Les signaux unidimensionnels se classent en quatre types :

1. Le signal analogique : Si  $E$  est un intervalle, le signal est dit analogique ou continu.

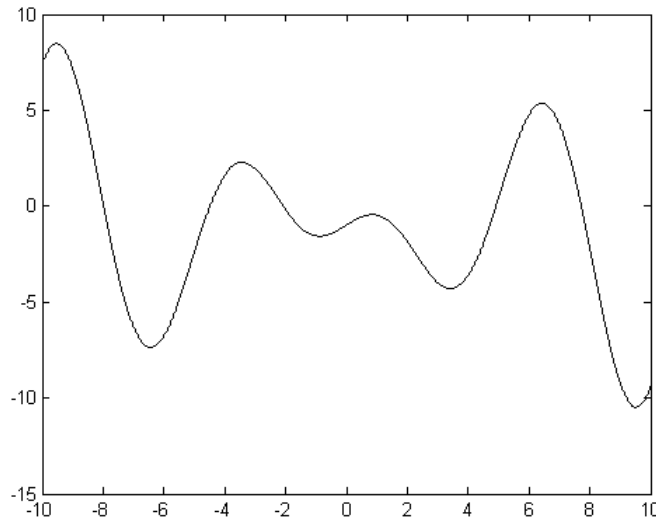


FIGURE 1.1 – Signal analogique

2. Le signal discret : Si  $E = \mathbb{Z}$ , le signal est dit discret ou numérique.

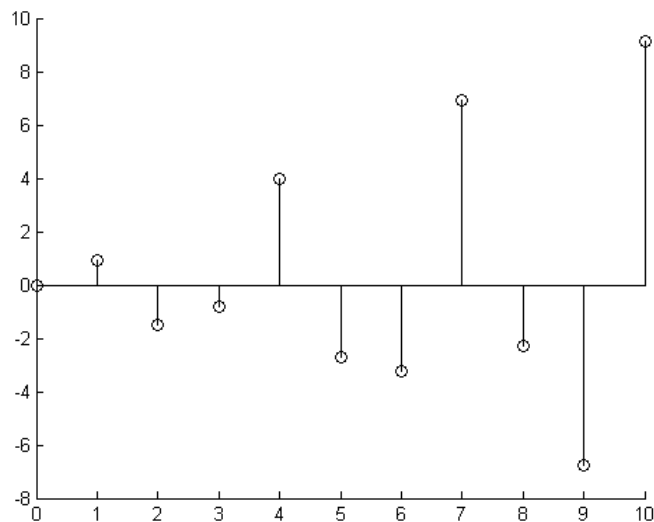


FIGURE 1.2 – Signal discret

3. Le signal échantionné : Si  $E = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ , le signal est appelé échantionné

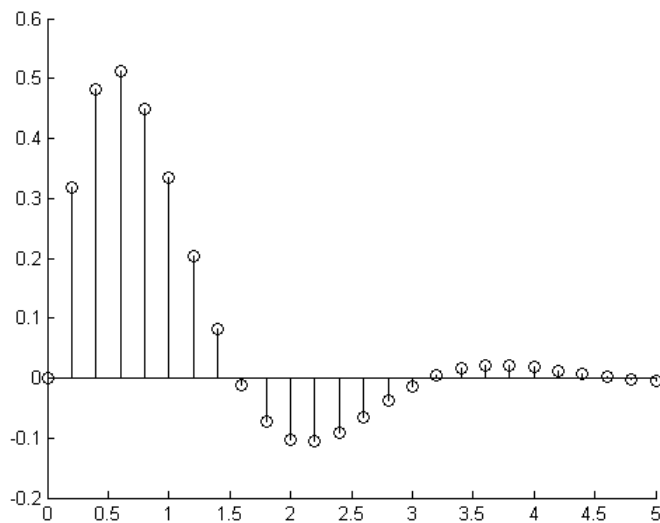


FIGURE 1.3 – Signal échantionné



4. Le signal causal : Si  $E = \mathbb{R}$  et  $s(t) = 0$  pour  $t < 0$ , on dira que le signal est causal.

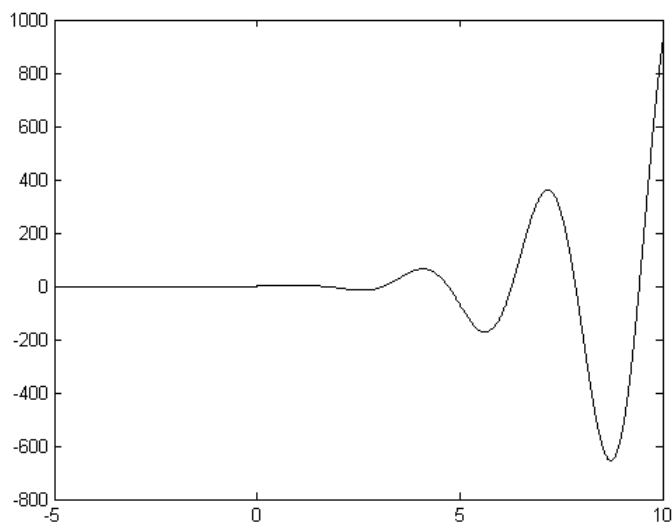


FIGURE 1.4 – Signal causal

## 1.1.2 Signal multidimensionnel

**Définition 1.3 :** On appelle *signal multidimensionnel*, toute fonction  $s$  à  $n$  variable ( $n \geq 2$ ) de  $E$  vers  $\mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} s : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto s(t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

où  $E$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple 1.4 :** Un cas le plus simple pour  $n = 2$ , c'est l'image numérique au niveau de gris définie de  $I \times J$  vers l'intervalle  $[0, 255]$ , où  $I$  et  $J$  sont les dimensions de cette image.



FIGURE 1.5 – Image numérique

## 1.2 Quelques techniques pour le traitement du signal

Les importantes techniques de traitement du signal sont celles qui sont basées sur deux étapes (l'analyse et la reconstruction). Dans l'analyse, on décompose le signal sous forme d'une somme (finie ou infinie) de fonctions élémentaires, qui constituent une base orthonormée de l'espace d'approximation. Dans la reconstruction, on retrouve ce signal d'après un seuillage de coefficients de l'analyse. Cette section présente deux techniques de traitement du signal, l'analyse de Fourier et la transformation en ondelettes.

### 1.2.1 Analyse de Fourier

L'analyse de Fourier c'est le premier outil de traitement d'un signal, en ceci qu'elle permet de représenter d'un signal comme une superposition des signaux simples (fonctions en cosinus et sinus), où si le signal est périodique, on parle d'une série de Fourier, dans l'autre cas pour un signal non périodique, on parle de la transformée de Fourier.

### 1.2.1.1 Série de Fourier

Les séries de Fourier ont été introduites par Joseph Fourier en 1822. Il a démontré qu'une fonction périodique peut être décomposée sous forme de série trigonométrique, chaque terme est une fonction de fréquence multiple d'une fréquence fondamentale.

**Définition 1.5 :** Soient  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et  $P$  un réel strictement positif, on dit que  $f$  est  $P$ -périodique, si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + P) = f(x) \quad (1.3)$$

où  $P$  est le plus petit nombre vérifie (1.3).

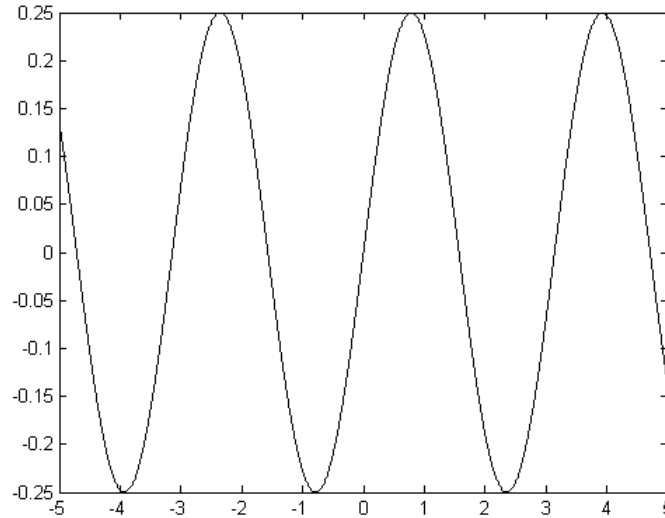


FIGURE 1.6 – Une fonction périodique

**Exemple 1.6 :** Les fonctions sinusoidales,  $x \mapsto \cos(2\pi \frac{n}{T}x)$  et  $x \mapsto \sin(2\pi \frac{n}{T}x)$  sont périodiques d'une période  $P = \frac{T}{n}$ .

**Définition 1.7 :** La série de Fourier d'une fonction périodique sur le segment  $[-L, L]$ , est une série trigonométrique de la forme :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in \frac{\pi}{L} x} \quad (1.4)$$

où les coefficients  $c_n(f)$  appelés coefficients de Fourier de  $f$ , définis par

$$c_n(f) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-in\frac{\pi}{L}t} dt \quad (1.5)$$

**Théorème 1.8 :** L'ensemble  $\{e^{in\frac{\pi}{L}x}, n \in \mathbb{Z}\}$  constitue une base orthonormée de  $L^2_{\text{pér}}[-L, L]$ , ainsi toute fonction  $f \in L^2[-L, L]$  et  $2L$ -périodique peut s'écrire au sens de  $L^2$  comme :

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in\frac{\pi}{L}x} \quad (1.6)$$

**Remarque 1.9 :** Si la fonction  $f$  à valeurs réelles, alors sa série de Fourier définie dans (1.4) devient comme suit :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\frac{\pi}{L}x) + b_n \sin(n\frac{\pi}{L}x) \quad (1.7)$$

avec

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos(n\frac{\pi}{L}y) dy, \quad n \geq 0 \quad (1.8)$$

et

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \sin(n\frac{\pi}{L}y) dy, \quad n \geq 1 \quad (1.9)$$

### 1.2.1.2 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est une extension pour les fonctions non périodiques, elle s'exprime comme une somme infinie des fonctions trigonométriques de toutes fréquences. Une telle sommation se présente sous forme d'intégrale. En ce qui suit, on va présenter la définition et des propriétés de la transformée de Fourier.

**Définition 1.10 :** Pour toute fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , sa transformée de Fourier  $\hat{f}$  est définie par :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (1.10)$$

**Remarque 1.11 :** La transformée de Fourier se prolonge à  $L^2(\mathbb{R})$  par la densité de l'espace de Schwartz  $S(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

Rappelons qu'une fonction  $f \in S(\mathbb{R})$ , si et seulement si elle est indéfiniment dérivable et à décroissance rapide, c'est-à-dire elle vérifie la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1 + |x|^n} = 0 \quad (1.11)$$

**Remarque 1.12 :** Certains scientifiques utilisent d'autre façon pour définir la transformée de Fourier, on trouve parfois l'expression :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx \text{ ou } \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi\omega x} dx \quad (1.12)$$

**Remarque 1.13 :** La transformée de Fourier se généralise pour les fonctions de  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , par la formule suivante :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle \omega, x \rangle} dx \quad (1.13)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire canonique dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple 1.14 :** En traitement d'images, on considère la transformée de Fourier à deux dimensions, telle que :

$$\hat{f}(\omega_1, \omega_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy$$

**Proposition 1.15 :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , on a la formule de Parseval :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle \quad (1.14)$$

d'où en particulier,  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ .

**Proposition 1.16 :** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , on a la formule d'inversion suivante :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega) e^{i\langle x, \omega \rangle} d\omega \quad (1.15)$$

Le théorème suivant relie entre deux sommes infinies, la première construite par une fonction et la deuxième par sa transformée de Fourier. Ce théorème présente une formule appelée formule sommatoire de Poisson.

**Théorème 1.17 :** Soient  $a$  un réel strictement positif et  $\omega_0 = \frac{2\pi}{a}$ . Si  $f$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et intégrable telle que :

$$\exists C > 0, \exists \alpha > 1, \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha}$$

et

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left| \hat{f}(m\omega_0) \right| < \infty,$$

alors, on a la formule sommatoire de Poisson suivante

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + na) = \frac{1}{a} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(m\omega_0) e^{im\omega_0 x} \quad (1.16)$$

Avant aller à la proposition suivante, on a le besoin de rappeler la définition suivante.

**Définition 1.18 :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{C}$ , la convolution de  $f$  par  $g$  quand elle existe, est définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - t)g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(x - u)du \quad (1.17)$$

si l'on prend  $f$  et  $g$  de  $L^1(\mathbb{R})$  ou de  $L^2(\mathbb{R})$ , la convolution est définie.

**Proposition 1.19 :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^1(\mathbb{R})$ , alors la fonction  $h$  définie par :

$$h = f * g \quad (1.18)$$

appartient à  $L^1(\mathbb{R})$  et on a

$$\hat{h} = \hat{f}\hat{g} \quad (1.19)$$

Des propriétés supplémentaires et des démonstrations concernant la transformée de Fourier se trouvent dans [24].

## 1.2.2 Standards algorithmes utilisés au traitement du signal

Dans la pratique, on a deux standards algorithmes utilisent les résultats de l'analyse de Fourier : Le premier c'est DFT (Discrete Fourier Transform), le deuxième est DCT (Discrete Cosine Transform). Ces algorithmes sont prouvés n'importe quelle la dimension du signal.

### 1.2.2.1 Pour un signal $f$ unidimensionnel à $N$ valeurs

#### Méthode de DFT :

Formule de décomposition :

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-2\pi i \frac{kn}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1.20)$$

Formule de la reconstruction :

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k)e^{2\pi i \frac{kn}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (1.21)$$

#### Méthode de DCT :

Puisque la DFT contient des coefficients complexes, on préfère la transformée en cosinus discrète DCT dont les coefficients sont réels.

Formule de décomposition :

$$F(k) = \omega(k) \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right), \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1.22)$$

où

$$\omega(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & si \quad k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & si \quad 1 \leq k \leq N-1 \end{cases}$$

Formule de la reconstruction :

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \omega(k) F(k) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)k}{2N}\right), \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (1.23)$$

### 1.2.2.2 Pour une image à M lignes et N colonnes

#### Méthode de DFT :

Formule de décomposition :

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-2\pi i \left( \frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)}, \quad (1.24)$$

où  $u = 0, \dots, M - 1, v = 0, \dots, N - 1$

Formule de la reconstruction :

$$f(m, n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi i \left( \frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)}, \quad (1.25)$$

où  $m = 0, \dots, M - 1, n = 0, \dots, N - 1$

**Méthode de DCT :** Cette méthode est le principe de la norme JPEG (Joint Photographic Experts Group) pour la compression d'images fixes, une telle norme a été adoptée en 1992 et repose sur la DCT appliquée à chaque bloc carré de dimension  $8 \times 8$  pixels dans l'image originale.

Formule de décomposition :

$$F(p, q) = \alpha_p \alpha_q \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cos \left( \frac{\pi (2m + 1) p}{2M} \right) \cos \left( \frac{\pi (2n + 1) q}{2N} \right), \quad (1.26)$$

où  $0 \leq p \leq M - 1, 0 \leq q \leq N - 1$  et

$$\alpha_p = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M}} & \text{si } p = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{M}} & \text{si } 1 \leq p \leq M - 1 \end{cases}, \quad \alpha_q = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & \text{si } q = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{si } 1 \leq q \leq N - 1 \end{cases}$$

Formule de la reconstruction :

$$f(m, n) = \sum_{p=0}^{M-1} \sum_{q=0}^{N-1} \alpha_p \alpha_q F(p, q) \cos \left( \frac{\pi (2m + 1) p}{2M} \right) \cos \left( \frac{\pi (2n + 1) q}{2N} \right), \quad (1.27)$$

où  $0 \leq m \leq M - 1, 0 \leq n \leq N - 1$

**Remarque 1.20 :** En pratique, l'algorithme DFT se calcule à l'aide d'un algorithme rapide appelé FFT (Fast Fourier Transform), où pour un signal de  $N$  points, la complexité de calcul pour DFT est de  $O(N^2)$ , alors que celle de FFT est de  $O(N \log N)$ .



### 1.2.3 La transformation en ondelettes

Bien que la transformée de Fourier ait obtenu un grand succès tout au long du XIX<sup>e</sup> siècle dans le domaine du traitement du signal, elle ne donne que des informations fréquentielles sur le signal, où on a la nécessité d'une analyse en temps et en fréquence. Pour cet effet, la transformée d'ondelette est conçue pour être adaptative, elle permet d'analyser un signal à l'aide d'une fonction (petite onde) bien localisée appelée ondelette, que l'on peut translater sur tout le signal et que l'on peut dilater. En fait, cette ondelette est apparue en 1909 par Alfréd Haar, qui l'a définie comme une fonction à deux courtes impulsions alternatives, et avec les travaux de Jean Morlet et Alex Grossmann en 1984, le mot (ondelette) est devenue des définitions mathématiques et la transformée d'ondelette a été adoptée comme une nouvelle transformation d'analyse des signaux.

#### 1.2.3.1 Définitions et quelques exemples sur les ondelettes

**Définition 1.21 :** Une ondelette  $\psi$  est une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  vérifie la relation suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0 \quad (1.28)$$

**Définition 1.22 :** Une ondelette  $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  vérifie la condition d'admissibilité, si et seulement si :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty \quad (1.29)$$

**Définition 1.23 :** On dit qu'une ondelette  $\psi$  a  $N$  moments nuls si et seulement si :

$$\int_{\mathbb{R}} x^\ell \psi(x) dx = 0, \quad \forall \ell = 0, \dots, N-1 \quad (1.30)$$

ce qui équivaut dans l'espace de Fourier à :

$$\hat{\psi}^{(\ell)}(0) = 0, \quad \forall \ell = 0, \dots, N-1 \quad (1.31)$$

**Définition 1.24 :** Soit  $f$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$ , la transformée continue en ondelette associée à  $f$  est définie comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0, Wf(x, a) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi\left(\frac{t-x}{a}\right)} dt \quad (1.32)$$

où  $x$  est le paramètre de la translation et  $a$  est le paramètre de la dilatation.

**Exemple 1.25 :** L'ondelette de Haar, c'est la première et la plus simple des ondelette définie comme suit :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[ \\ -1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[ \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$$

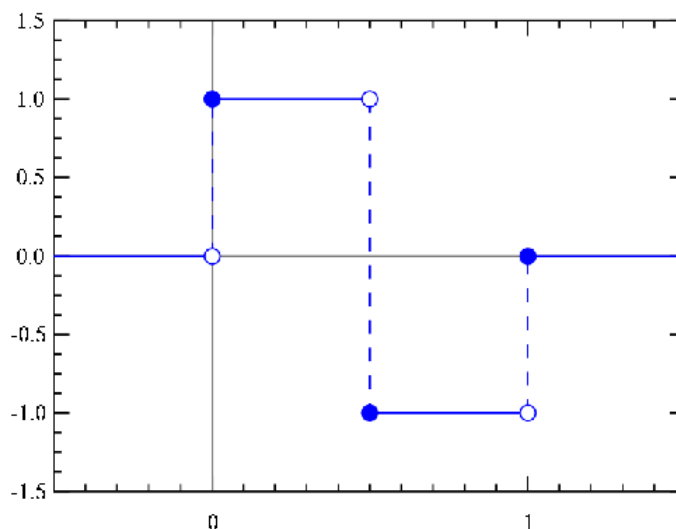


FIGURE 1.7 – L'ondelette de Haar

**Exemple 1.26 :** Soit une gaussienne  $G(x) = e^{-\pi x^2}$ , ses dérivées  $G^{(n)}$  ( $n \geq 1$ ) sont des ondelettes à  $n$  moments nuls.

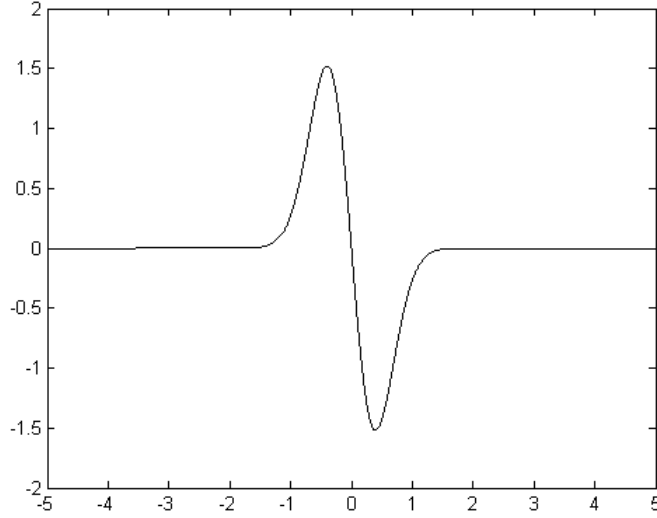


FIGURE 1.8 – La première dérivée de G

### 1.2.3.2 Propriétés

**Proposition 1.27 :** Soit  $\psi$  une ondelette de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , alors la condition :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)| dx < +\infty \quad (1.33)$$

équivalent à

$$C_\psi < +\infty \quad (1.34)$$

**Proposition 1.28 :** Considérons une ondelette  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ . Alors pour toute  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on a :

- La formule de conservation d'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Wf(x, a)|^2 dx \frac{da}{a^2} \quad (1.35)$$

- La formule d'inversion :

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(y, a) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-y}{a}\right) dy \frac{da}{a^2} \quad (1.36)$$

*cette égalité est dans  $L^2(\mathbb{R})$ .*

Plus de détail et des propriétés sur la transformée continue en ondelette, on peut les trouver dans [18]

# Chapitre 2

## Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$

L'analyse multirésolution (AMR) est une notion mathématique apparue depuis 1985 par Stéphane Mallat et Yves Meyer. Cette notion a été considérée comme un outil à extraire des bases orthonormées d'ondelettes, dont le signal peut être représenté par une limite de ses approximations à différents niveaux ou à des échelles successives. En effet, l'analyse multirésolution a donné le soutien au développement de théorie des signaux tel que, la plupart des algorithmes de traitement du signal et de l'image se basent basiquement sur la décomposition en ondelettes, citons par exemple l'algorithme de Mallat pour la compression d'un signal (voir [36]), et celui de Donoho (voir [13]). Dans ce chapitre, nous allons savoir le concept et les propriétés principales de l'analyse multirésolution.

### 2.1 Définitions et des exemples

Commençons par des définitions, puis on cite des exemples bien connus.

**Définition 2.1 :** *Une analyse multirésolution est une famille croissante de sous-espaces vectoriels fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  notée  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , qui ont les propriétés suivantes :*

- (a)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$  et  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ .
- (b) Pour tout  $f \in V_0$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $f(\cdot - k) \in V_0$ .

(c) Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on a  $f \in V_j$  si et seulement si  $D_2 f \in V_{j+1}$ ; où on a posé  $D_a f(x) = f(ax)$ .

(d) Il existe une fonction  $\theta \in V_0$ , telle que la suite  $\{\theta(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base de Riesz de  $V_0$ .

Rappelons la définition de la base de Riesz.

**Définition 2.2 :** Une suite  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  d'éléments indépendants d'un espace de Hilbert  $H$ , constituent une base de Riesz de  $H$ , si les propriétés suivantes sont satisfaites :

i) L'ensemble de combinaisons linéaires finies de  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est dense dans  $H$ . i.e.

$$\left\{ \sum_{k \in K} \alpha_k e_k, \quad |K| < +\infty \quad \text{et} \quad \alpha_k \in \mathbb{C} \right\} \quad (2.1)$$

est dense dans  $H$ .

ii) Il existe deux constantes  $A$  et  $B$  avec  $B > A > 0$ , telle que :

Pour toute suite finie  $\{\alpha_k\}_{k \in K}$ , on a ;

$$A \left( \sum_{k \in K} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{k \in K} \alpha_k e_k \right\|_H \leq B \left( \sum_{k \in K} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

**Définition 2.3 :** Une analyse multirésolution est dite  $r$ -régulière ( $r \in \mathbb{N}$ ), si l'on peut choisir la fonction  $\theta$  soit  $r$ -régulière. i.e.

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0; \forall 0 \leq k \leq r, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$|\theta^{(k)}(x)| \leq C_m (1 + |x|)^{-m} \quad (2.3)$$

Dans toute la suite, on utilise l'expression (une analyse multirésolution régulière) au lieu de l'analyse multirésolution 0-régulière.

**Remarque 2.4 :** La condition (d) exprime qu'il existe un isomorphisme continu entre  $V_0$  et  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

**Exemple 2.5 :** La fonction  $\theta = \mathbf{1}_{[0,1]}$  et ses translatées entières engendrent l'analyse multirésolution définie par :

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z} \quad f|_{\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]} = c^{te} \right\}$$

**Exemple 2.6 :** La fonction  $\theta$  définie par :

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

et ses translatées entières engendrent l'analyse multirésolution définie par :

$$V_j = \left\{ \begin{array}{l} f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z} \quad f|_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}[} = P_k \\ \text{où } P_k \text{ est un polynôme de degré } 1 \end{array} \right\}$$

**Exemple 2.7 : (Spline d'ordre m)** La fonction  $\theta$  définie par :

$$\theta = \mathbf{1}_{[0,1[} * \mathbf{1}_{[0,1[} * \dots * \mathbf{1}_{[0,1[} \quad ((m+1) \text{ convolutions})$$

et ses translatées entières engendrent l'analyse multirésolution définie par :

$$V_j = \left\{ \begin{array}{l} f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^{m-1}(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z} \quad f|_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}[} = P_m \\ \text{où } P_m \text{ est un polynôme de degré } m \end{array} \right\}$$

## 2.2 La fonction d'échelle et la base orthonormée

Dans cette section, nous allons définir la fonction d'échelle et décrire une méthode pour trouver les bases orthonormées.

**Définition 2.8 :** Etant donnée une analyse multirésolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  et une fonction  $\varphi$  de  $V_0$ , on dit que  $\varphi$  est une fonction d'échelle associée à  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , si et seulement si l'ensemble  $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_0$ .

D'une analyse multirésolution, on peut construire une fonction d'échelle à partir du théorème ci-dessous.

**Théorème 2.9 :** Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution régulière de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Alors, il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  avec  $C_2 \geq C_1 > 0$ , telle que :

$$C_1 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \leq C_2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

où  $\hat{\theta}$  est la transformée de Fourier de  $\theta$ .

Supposons que  $\hat{\theta} \in L^1(\mathbb{R})$  et on définit ensuite  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  par :

$$\hat{\varphi}(\omega) = \hat{\theta}(\omega) \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.5)$$

alors la suite  $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_0$ .

Si  $\vartheta$  est une autre fonction de  $V_0$  telle que la suite  $\{\vartheta(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_0$ , alors la relation qui existe entre  $\hat{\varphi}$  et  $\hat{\vartheta}$  est :

$$\hat{\vartheta}(\omega) = \Theta(\omega) \hat{\varphi}(\omega), \quad (2.6)$$

pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , où  $\Theta \in L^\infty(\mathbb{R})$  est  $2\pi$ -périodique et  $|\Theta(\omega)| = 1$ .

Pour démontrer ce théorème on a besoin de lemmes suivants :

**Lemme 2.10 :** Soit  $v$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ .

Alors, la suite  $\{v(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée si et seulement si :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{v}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

**Lemme 2.11 :** Soit  $\theta$  une fonction régulière, alors la série :  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, 2\pi]$  et on a :

$$\frac{d^\ell}{d\omega^\ell} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{d^\ell}{d\omega^\ell} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2, \quad \forall \omega \in [0, 2\pi] \quad (2.8)$$

et

$$\sup_{\omega \in [0, 2\pi]} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 < \infty$$



**Démonstration du lemme 2.10 :** Remarquons d'abord que :

Pour tout  $k, \ell \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$\int_{\mathbb{R}} v(x-k)v(x-\ell)dx = \delta_{k,\ell} \Leftrightarrow \forall k, \int_{\mathbb{R}} v(x)v(x-k)dx = \delta_{0,k}$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} v(x-k)v(x-\ell)dx = \delta_{k,\ell} \Leftrightarrow q(k) = \delta_{0,k};$$

où  $q = v * \tilde{v}$ ,  $\tilde{v}(x) = v(-x)$ .

D'après la formule de sommation de Poisson, les coefficients de Fourier de la série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{q}(\omega + 2k\pi)$  sont  $\{q(-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , ainsi :  $\{v(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée si et seulement si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{v}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

**Démonstration du théorème 2.9 :**

Soit  $f_n \in V_0$  telle que

$$f_n = \sum_{k=-n}^n \alpha_k \theta(\cdot - k), \quad n \in \mathbb{N} \text{ et } \alpha_k \in \mathbb{C}$$

La transformée de Fourier de  $f_n$  sera donnée par :

$$\hat{f}_n(\omega) = M_n(\omega) \hat{\theta}(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

où  $M_n(\omega) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{-ik\omega}$ .

D'après (2.9), la formule :  $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$  devient :

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |M_n(\omega)|^2 |\hat{\theta}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{(2k+2)\pi} |M_n(\omega)|^2 |\hat{\theta}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |M_n(\omega)|^2 |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Si on a posé :

$$S_m(\omega) = \sum_{k=-m}^m |M_n(\omega)|^2 \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2$$

On a :

$$|S_m(\omega)| \leq |M_n(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2$$

d'après le lemme 2.11 :

$$|S_m(\omega)| \leq C |M_n(\omega)|^2$$

où  $C = \sup_{\omega \in [0, 2\pi]} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2$ .

Comme  $\int_0^{2\pi} |M_n(\omega)|^2 d\omega < \infty$ , le théorème de la convergence dominée montre que

$$\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |M_n(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 d\omega$$

Supposons que  $M_n$  tend vers  $M$  dans  $L^2_{\text{pér}}([0, 2\pi])$  tel que :

$$M(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\omega}$$

on a :  $|M_n(\omega)|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < \infty$ .

D'après le théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |M_n(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 d\omega = \int_0^{2\pi} |M(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 d\omega$$

donc, pour tout  $f \in V_0$ , telle que

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \theta(\cdot - k)$$

on a :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |M(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 d\omega$$

Grâce à l'équivalence entre  $V_0$  et  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , on trouve que

$$A^2 \int_0^{2\pi} |M(\omega)|^2 d\omega \leq \int_0^{2\pi} |M(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 d\omega \leq B^2 \int_0^{2\pi} |M(\omega)|^2 d\omega \quad (2.10)$$

D'autre part, supposons qu'il existe  $\omega_0 \in \mathbb{R}$ , tel que

$$B^2 < \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega_0 + 2k\pi) \right|^2 \quad (2.11)$$

dans ce cas, soit  $E$  le plus grand ensemble des éléments de  $\mathbb{R}$  qui vérifie (2.11) et l'on définit  $M \in L^2_{\text{per}}([0, 2\pi])$  par :

$$M(\omega) = \chi_E(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

alors, d'après (2.11), on a :

$$B^2 |M(\omega)|^2 \leq |M(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (2.12)$$

Comme,  $\int_0^{2\pi} |M(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 d\omega = \int_{[0, 2\pi] \cap E} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 d\omega$  et  $B^2 \int_0^{2\pi} |M(\omega)|^2 d\omega = B^2 \int_{[0, 2\pi] \cap E} d\omega$ , alors l'inégalité (2.12) devient :

$$B^2 \int_0^{2\pi} |M(\omega)|^2 d\omega < \int_0^{2\pi} |M(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 d\omega \quad (2.13)$$

Comparons les deux inégalités (2.13) et (2.10), on trouve que  $B^2 < B^2$  (c'est une contradiction).

donc,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \leq B^2, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

de manière similaire, on peut montrer que :

$$A^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Par conséquent,

$$C_1 = A^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \leq C_2 = B^2, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Maintenant on va montrer que la suite  $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_0$ .

d'après cette dernière inégalité, la fonction  $\sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2}$  de  $L^2_{\text{pér}}([0, 2\pi])$ ,

il vient :

$$\sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \beta_\ell e^{-i\ell\omega}$$

alors, on a besoin de démontrer que  $|\beta_\ell| = O(1 + \ell^2)^{-1}$ .

$$\beta_\ell = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(\zeta + 2k\pi)|^2} e^{i\ell\zeta} d\zeta$$

en vertu du lemme 2.11,  $\beta_\ell$  peut s'écrire :

$$\beta_\ell = \frac{-1}{2\pi\ell^2} \int_0^{2\pi} e^{i\ell\zeta} \frac{d^2}{d\zeta^2} \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(\zeta + 2k\pi)|^2} d\zeta, \quad \forall \ell \neq 0.$$

ce qui prouve que  $|\beta_\ell| = O(1 + \ell^2)^{-1}$ .

Ainsi, d'après (2.5),

$$\theta(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \beta_\ell \varphi(x - \ell), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

remarquons aussi que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

Par conséquent,  $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_0$ .

. Soit  $\vartheta$  une autre fonction telle que, la suite  $\{\vartheta(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_0$ ,

$$\vartheta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \varphi(\cdot - k), \quad \{\beta_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}). \quad (2.15)$$

En prenant la transformée de Fourier de (2.15), on a

$$\hat{\vartheta}(\omega) = \Theta(\omega) \hat{\varphi}(\omega), \quad (2.16)$$

pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , où  $\Theta(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k e^{-ik\omega}$ .

D'après à l'orthonormalité de  $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $\{\vartheta(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\vartheta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \\ &= |\Theta(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 \\ &= |\Theta(\omega)|^2 \end{aligned}$$

Enfin,  $\Theta \in L^\infty(\mathbb{R})$  est  $2\pi$ -périodique et  $|\Theta(\omega)| = 1$ .

### Exemples 2.12 :

1. La fonction  $\theta$  définie dans l'exemple (2.5) est une base orthonormée de  $V_0$  car :

Pour tout  $f \in V_0$ , on a

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \chi_{[k, k+1[}$$

et

$$\hat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega} - 1) & \text{si } \omega \neq 0 \\ 1 & \text{si } \omega = 0 \end{cases}$$

2. Dans l'exemple (2.6) la fonction  $\theta$  est une base de Riesz de  $V_0$  mais elle n'est pas une base orthonormée.

Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\theta(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 1 \\ 1 & \text{si } k = 1 \end{cases},$$

en suite :

Pour tout  $f \in V_0$ ,  $f$  s'écrit de manière unique sous la forme :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k+1) \theta(\cdot - k), \text{ ponctuellement.}$$

Sur  $[k, k+1]$ , on a

$$f = f(k) \theta(\cdot - (k-1)) + f(k+1) \theta(\cdot - k)$$

et

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \theta^2(x - (k - 1)) dx &= \int_0^1 (1 - x)^2 dx = \frac{1}{3}. \\ \int_k^{k+1} \theta(x - (k - 1)) \theta(x - k) dx &= \int_0^1 (1 - x) x dx = \frac{1}{6} \\ \int_k^{k+1} \theta^2(x - k) dx &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} |f(k) \theta(x - (k - 1)) + f(k + 1) \theta(x - k)|^2 dx$$

En utilisant les égalités précédentes, on obtient :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{6} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (|f(k)|^2 + |f(k + 1)|^2 + |f(k) + f(k + 1)|^2)$$

Puisque

$$|f(k) + f(k + 1)|^2 \leq 2(|f(k)|^2 + |f(k + 1)|^2)$$

on en déduit que

$$\frac{1}{3} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k + 1)|^2 = \frac{1}{6} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (|f(k)|^2 + |f(k + 1)|^2) \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k + 1)|^2$$

Ce qui montre que  $\{\theta(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base de Riesz de  $V_0$ .

D'autre part,

$$\hat{\theta}(\omega) = \begin{cases} \frac{-1}{\omega^2} (e^{-i\omega} - 1)^2 & \text{si } \omega \neq 0 \\ 1 & \text{si } \omega = 0 \end{cases}$$

et

$$|\hat{\theta}(\omega)| = \frac{4 \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\omega^2}$$

$$\text{Par suite, } \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 = \frac{1 + 2 \cos^2 \frac{\omega}{2}}{3} \neq 1$$

**Proposition 2.13 :** Soit  $\varphi$  une fonction d'échelle de  $C^r(\mathbb{R})$  à support compact. Alors,  $\varphi$  est  $r$ -régulière.

**Démonstration de la proposition 2.13 : Posons**

$$\begin{aligned} \text{supp}\varphi &\subset [-K, K], \quad K > 0 \text{ et} \\ \|\varphi^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= M_k, \quad \forall 0 \leq k \leq r \end{aligned}$$

il vient :

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq C_{m,k} (1 + |x|)^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall 0 \leq k \leq r$$

où  $C_{m,k} = M_k (1 + K)^m$ .

Si on a posé  $C_m = \sup_{0 \leq k \leq r} C_{m,k}$ , on trouve que

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq C_m (1 + |x|)^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall 0 \leq k \leq r$$

et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

La proposition suivante montre qu'on peut obtenir une base orthonormée de  $V_j$  à partir d'une fonction d'échelle.

**Proposition 2.14 :** *Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution et  $\varphi$  une fonction d'échelle associée à  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ .*

*Alors, la suite  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_j$ , où*

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k) \tag{2.17}$$

**Démonstration de la proposition 2.14 :**

Pour tout  $k, m \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,m} \rangle = \int_{\mathbb{R}} 2^j \varphi(2^j x - k) \overline{\varphi(2^j x - m)} dx$$

En faisant le changement de variable ( $y = 2^j x$ ), il vient :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,m} \rangle &= \langle \varphi_{0,k}, \varphi_{0,m} \rangle \\ &= \delta_{k,m} \end{aligned}$$

d'où  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont éléments orthonormés de  $V_j$ .

D'autre part,

Pour tout  $f \in V_j$ , la fonction  $D_{2^{-j}} f \in V_0$  et :

$$D_{2^{-j}} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(2^{-j} x) \overline{\varphi(x - k)} dx \right) \varphi(\cdot - k),$$

d'où

$$D_{2^j} D_{2^{-j}} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} = f,$$

donc,  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  engendre  $V_j$ .

Par conséquent, la suite  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_j$ .

**Remarque 2.15 :** L'approximation d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  au niveau  $j$  est obtenue par la projection orthogonale de  $f$  sur  $V_j$ .

Ceci peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} \quad (2.18)$$

**Corollaire 2.16 :** Soit  $\varphi$  une fonction d'échelle associée à une analyse multirésolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ .

Alors, il existe une suite des coefficients  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  appelées réponses impulsionnelles, telle que

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \varphi(2x - k) \quad (2.19)$$

**Démonstration du corollaire 2.16 :**

On a d'abord,  $V_0 \subset V_1$ .

D'après la proposition précédente,

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle \sqrt{2} \varphi(2x - k), \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc, il suffit de prendre

$$h_k = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle, \forall k \in \mathbb{Z}$$

**Exemple 2.17 :** Dans l'exemple (2.5), la fonction  $\varphi$  est une fonction d'échelle dont les coefficients  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont :

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 0, 1 \end{cases}$$



La proposition suivante caractérise la décroissance des réponses impulsionnelles à partir d'une fonction d'échelle régulière.

**Proposition 2.18 :** *Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution régulière, alors les réponses impulsionnelles  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  vérifiant :*

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ |h_k| \leq C_m (1 + |k|)^{-m} \end{aligned} \quad (2.20)$$

**Démonstration de la proposition 2.18 :** Remarquons d'abord que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on a  $(1 + |x|)^m \varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ , il vient :

Pour tout  $A > 0$ ,

$$\int_{|x|>A} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{|x|>A} (1 + |x|)^{-2m} (1 + |x|)^{2m} |\varphi(x)|^2 dx$$

d'où

$$\int_{|x|>A} |\varphi(x)|^2 dx \leq C_m (1 + A)^{-2m} \quad (2.21)$$

D'autre part, on a

$$h_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \overline{\varphi(x - k)} dx$$

et pour tout  $k \neq 0$ ,

$$|h_k| \leq C_1 \left( \int_{|x|>\frac{|k|}{4}} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + C_2 \left( \int_{|x|<\frac{|k|}{2}} |\varphi(x - k)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'après l'inégalité (2.21), on trouve que

$$\left( \int_{|x|>\frac{|k|}{4}} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_m (1 + |k|)^{-m}$$

D'ailleurs,

$$\begin{aligned}
\int_{|x| < \frac{|k|}{2}} |\varphi(x-k)|^2 dx &\leq C_m \int_{|x| < \frac{|k|}{2}} (1+|x-k|)^{-2m} dx \\
&\leq C_m \int_{|x| < \frac{|k|}{2}} (1+||x|-|k||)^{-2m} dx \\
&\leq C_m \int_0^{\frac{|k|}{2}} (1-x+|k|)^{-2m} dx \\
&\leq C_m (1+|k|)^{-2m+2}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\left( \int_{|x| < \frac{|k|}{2}} |\varphi(x-k)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_m (1+|k|)^{-m+1} \quad \forall m \geq 1,$$

il vient :

$$|h_k| \leq C_m (1+|k|)^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Si  $k = 0$ , on a

$$|h_0|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 = 1,$$

on en déduit que,

$$|h_0| \leq 1$$

Par conséquent,

$$|h_k| \leq C_m (1+|k|)^{-m}$$

pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 2.3 Propriétés fréquentielles de la fonction d'échelle

Le théorème ci-dessous caractérise la fonction d'échelle par sa transformée de Fourier :

**Théorème 2.19 :** *Etant donnée une analyse multirésolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  régulière*

et une fonction d'échelle  $\varphi$  associée à  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ .

Alors, il existe une fonction  $H$  de  $L^2_{\text{pér}}([0, 2\pi])$  s'appelle filtre d'échelle, telle que

Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , on a

$$\hat{\varphi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.22)$$

Pour démontrer ce théorème, on a le besoin d'introduire le lemme suivant :

**Lemme 2.20 :** Soient  $h$  et  $g$  deux fonctions de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  et  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ , telle que

$$h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k g(x - k) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) \quad (2.23)$$

Supposons aussi que

$$|\alpha_k| = O(1 + k^2)^{-1}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (2.24)$$

Alors,

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \int_{\mathbb{R}} g(x - k) dx \quad (2.25)$$

**Démonstration du lemme 2.20 :**

Tout d'abord, on va appliquer le théorème de convergence dominée.

Définissons la somme partielle  $S_n$ , telle que

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k g(x - k)$$

Remarquons que,

$$|S_n(x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| |g(x - k)|$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| |g(x - k)| dx \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| < +\infty, \text{ (lemme de Fatou).}$$

Donc, le théorème de Lebesgue montre que,

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \int_{\mathbb{R}} g(x - k) dx$$

**Démonstration du théorème 2.19 :**

D'après la relation (2.19), on a

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \varphi(2x - k)$$

En prenant la transformée de cette égalité et en tenant compte du lemme précédent, on obtient :

$$\hat{\varphi}(\omega) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\frac{\omega}{2}} \right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ .

Donc, il suffit de prendre

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$$

**Exemple 2.21 :** Dans l'exemple (2.5), on a

$$\hat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 0 \\ \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega} - 1) & \text{si } \omega \neq 0 \end{cases}$$

et

$$H(\omega) = \frac{1}{2} (e^{-i\omega} + 1)$$

Considérons une suite d'espaces de Hilbert  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  vérifie les conditions (b,c,d) de la définition (2.1), telle que la fonction  $\theta$  est régulière

Sous quelles conditions a-t-on  $V_j \subset V_{j+1} \forall j \in \mathbb{Z}$  ?

La réponse est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 2.22 :** *Sous les conditions ci-dessus, on suppose qu'il existe une fonction  $2\pi$ - périodique de  $L^2([0, 2\pi])$  notée  $H$  et régulière (ses coefficients de Fourier vérifient (2.20)), telle que*

$$\hat{\theta}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\theta}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (2.26)$$

Alors, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $V_j \subset V_{j+1}$ .

**Démonstration de la proposition 2.22 :** Il suffit en fait de prouver la proposition pour  $j = 0$  car  $V_0 \subset V_1 \Rightarrow \forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}$ .

On suppose qu'il existe une fonction  $H \in L^2_{\text{pér}}([0, 2\pi])$  régulière, telle que la relation (2.26) est vérifiée.

Alors, il existe une suite  $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , telle que

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\omega},$$

par suite,

$$\hat{\theta}(\omega) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\frac{\omega}{2}} \right) \hat{\theta}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de cette égalité, on obtient

$$\theta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \sqrt{2} \theta(2x - k),$$

d'où  $V_0 \subset V_1$ .

**Exemple 2.23 :** Dans l'exemple (2.6), on a

$$\hat{\theta}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 0 \\ -\frac{1}{\omega^2} (e^{-i\omega} - 1)^2 & \text{si } \omega \neq 0 \end{cases}$$

et

$$H(\omega) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}e^{-i\omega} + \frac{1}{4}e^{-2i\omega}$$

où les conditions de la proposition (2.22) sont vérifiées.

En admettant les hypothèses de la proposition (2.22), sous quelles conditions

$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  est-elle dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ ?

La proposition ci-dessous peut répondre à notre question :

**Proposition 2.24 :** Sous les conditions de la proposition (2.22), on a

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad (2.27)$$

si et seulement si

$$|\hat{\varphi}(0)| = 1 \quad (2.28)$$

où  $\hat{\varphi}$  est définie par (2.5).

Commençons par les lemmes suivants :

**Lemme 2.25 :** *Etant donnée une fonction régulière  $\theta \in L^2(\mathbb{R})$ , on définit une autre fonction  $A$ , telle que*

$$A(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta(x - k) \overline{\theta(y - k)}, \quad (2.29)$$

Alors,  $A$  vérifie :

$$|A(x, y)| \leq C(1 + |x - y|)^{-2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (2.30)$$

**Lemme 2.26 :** *Sous les hypothèses du lemme précédent, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i)

$$\int_{\mathbb{R}} A(x, y) dy = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.31)$$

ii) *Pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , la suite  $\{T_j f\}_{j \in \mathbb{Z}}$  tend vers  $f$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , où  $T_j f$  définie par :*

$$T_j f(x) = \int_{\mathbb{R}} 2^j f(y) A(2^j x, 2^j y) dy \quad (2.32)$$

**Démonstration de la proposition 2.24 :**

On sait que dans le cas orthonormal ( $\theta = \varphi$ ), on a  $T_j f = P_j f$ .

Par ailleurs,

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

si et seulement si

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|f - P_j f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0,$$

pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

Ce qui est aussi équivalent à

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x - k) \overline{\varphi(y - k)} dy = 1,$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  
 Cette égalité entraîne

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x - k) \overline{\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy} = 1,$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  
 Il vient :

$$\int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x - k) dx \overline{\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy} = |\hat{\varphi}(0)|^2 = 1,$$

d'où  $|\hat{\varphi}(0)| = 1$ .

Réciproquement :

si  $|\hat{\varphi}(0)| = 1$ , d'après le lemme 2.10, on a

$$\hat{\varphi}(2\ell\pi) = 0, \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}^*$$

Par ailleurs,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x - k) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2\pi\ell) e^{2\pi i \ell x} = \hat{\varphi}(0),$$

Multiplions par  $\overline{\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy}$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(x - k) \overline{\varphi(y - k)} dy = 1$$

**Corollaire 2.27 :** *Si la fonction d'échelle  $\varphi$  est régulière. Alors nous avons :*

$$\hat{\varphi}(2k\pi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^* \tag{2.33}$$

**Démonstration du corollaire 2.27 :** Comme la famille  $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormale et en vertu du lemme (2.10), on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1,$$

et pour  $\omega = 0$ , on a

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2k\pi)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |\hat{\varphi}(2k\pi)|^2 + 1 \end{aligned}$$

On déduit que

$$\hat{\varphi}(2k\pi) = 0, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}^*$$

**Théorème 2.28 :** *Le filtre d'échelle  $H$  satisfait les deux relations :*

$$H(0) = 1 \tag{2.34}$$

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{2.35}$$

**Démonstration du théorème 2.28 :**

1. D'après la relation (2.19) et la proposition précédente, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = H(0) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \neq 0.$$

Par conséquent,  $H(0) = 1$ .

2. D'après la relation (2.22), on obtient :

$$|\hat{\varphi}(2\omega + 2k\pi)|^2 = |H(\omega + k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\omega + k\pi)|^2$$

En appliquant le lemme (2.10), il vient :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(\omega + 2k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(\omega + \pi + 2k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\omega + \pi + 2k\pi)|^2 \\ &= |H(\omega)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + \pi + 2k\pi)|^2 \end{aligned}$$

D'où

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

**Corollaire 2.29 :** *La fonction  $H$  est nulle aux points  $\{(2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .*

**Démonstration du corollaire 2.29 :** il suffit d'appliquer la relation (2.35)



et la périodicité de  $H$ .

**Remarque 2.30 :** *En général, les conditions (2.34) et (2.35) ne sont pas suffisantes pour obtenir une analyse multirésolution. En effet, pour*

$$H(\omega) = \cos\left(\frac{3\omega}{2}\right)$$

dont :

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\zeta) &= \prod_{j=1}^{+\infty} H\left(\frac{\zeta}{2^j}\right) \\ &= \prod_{j=1}^{+\infty} \cos\frac{3\zeta}{2 \cdot 2^j} \\ &= \frac{\sin\frac{3}{2}\zeta}{\frac{3}{2}\zeta}\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } -\frac{3}{2} < x \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si } x \notin \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \end{cases}$$

vérifie les conditions (2.34) et (2.35), mais  $\varphi$  n'engendre pas une famille orthonormale.

On peut réécrire les propriétés précédentes en fonctions de la suite  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

**Théorème 2.31 :** *Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution régulière. Alors, les réponses impulsionnelles  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  vérifient :*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 = 1 \tag{2.36}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2} \tag{2.37}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k-2n} = \delta_{0,n} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{2.38}$$

**Démonstration du théorème 2.31 :**

1. On a d'abord la formule :

$$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2,$$

il vient :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 = 1.$$

2. D'après la définition de  $H$ , on a

$$\begin{aligned} H(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \\ &= 1 \end{aligned}$$

On déduit que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}$$

3. D'après l'orthonormalité de  $\{\varphi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $\{\varphi_{1,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ,

$$\begin{aligned} \delta_{0,n} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\varphi(x-n)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{k,m \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_m} \varphi_{1,k}(x) \overline{\varphi_{1,m}(x-n)} \right) dx \\ &= \sum_{k,m \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_m} \delta_{k,2n+m} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \overline{h_{k-2n}} \end{aligned}$$

Un grand problème, soulevé par S. Mallat [36], A.Cohen [4], est alors le suivant :

Soit  $H$  une fonction  $2\pi$ -périodique et régulière vérifiant (2.34) et (2.35). L'égalité  $\hat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{+\infty} H(2^{-j}\omega)$  nous permet-elle de reconstituer une analyse multirésolution ?

En général, la réponse est non ; un contre exemple a été exhibé, le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes.

**Théorème 2.32 :** Une fonction  $H$  engendre une analyse multirésolution régulière si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes :

$P_1$ )  $H$  est  $2\pi$ -périodique et régulière.

$P_2$ )  $H(0) = 1$ .

$P_3$ )  $|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1, \forall \omega \in \mathbb{R}$

$P_4$ ) Il existe un compact  $K$  congru à  $P = [-\pi, \pi]$ ,  $0 \in \text{intérieure}(K)$ , tel que

$$\forall \omega \in K, \forall j \geq 1; H(2^{-j}\omega) \neq 0.$$

**Définition 2.33 :** Un compact est dit congru à  $P = [-\pi, \pi]$  modulo  $2\pi$  si et seulement si

$$\forall \omega \in P, \exists ! \zeta \in K, \text{ tel que : } (\omega - \zeta) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

Une propriété immédiate de  $K$  est alors le fait que si  $f$  est dans  $L_{loc}^1$  et  $2\pi$ -périodique, alors  $\int_K f = \int_P f$ .

La démonstration de ce théorème nécessite le lemme suivant :

**Lemme 2.34 :** Sous les hypothèses du théorème ci-dessus et nous posons :

$$h_k(\omega) = \prod_{j=1}^k H(2^{-j}\omega) \chi_{2^k K}$$

et

$$M_k(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\omega| > 2^k \pi \\ \prod_{j=1}^k M(2^{-j}\omega) & \text{si } |\omega| \leq 2^k \pi \end{cases}$$

où  $M(\omega) = |H(\omega)|^2$ .

Alors,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  :

$$I_k^n = \int_{\mathbb{R}} |h_k(\omega)|^2 e^{in\omega} d\omega = \int_{\mathbb{R}} M_k(\omega) e^{in\omega} d\omega = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

## 2.4 Construction d'une base d'ondelette

Le théorème suivant assure l'existence d'une base orthonormée d'ondelette à l'aide d'une analyse multirésolution.

**Théorème 2.35 : (Mallat, Meyer)** *Etant donnée une analyse multirésolution régulière.*

*Alors, il existe une ondelette  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  telle que si l'on introduit les fonctions  $\psi_{j,k}$  définie par :*

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (2.39)$$

*la famille  $\{\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .*

*Par conséquent, pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , il existe une unique décomposition :*

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k} \quad (2.40)$$

où  $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$

Donnons d'abord les deux lemmes suivants :

**Lemme 2.36 :** *Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution.*

*Alors, on a les propriétés suivantes :*

i) *Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , il existe un sous-espace de  $V_{j+1}$  notée  $W_j$ , tel que*

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

ii)  $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} W_k}$ .

iii) *Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on a  $f \in W_j$  si et seulement si  $D_2 f \in W_{j+1}$ .*

iv) *Pour tout  $f \in W_0$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $f(\cdot - k) \in W_0$ .*

**Lemme 2.37 :** *Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution régulière.*

*On définit  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  par :*

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \sqrt{2} \varphi(2x - k), \quad g_k = (-1)^k h_{1-k}. \quad (2.41)$$

*Alors, la suite  $\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_0$ .*

**Démonstration du lemme 2.36 :**

*i)* Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , il existe d'après le théorème de la projection un sous-espace vectoriel fermé noté  $W_j$  tel que,

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j,$$

où on a posé  $W_j = V_j^\perp$ .

*ii)* Il est tout d'abord clair que les  $W_j$  sont deux à deux orthogonaux, on a alors  $V_j = \bigoplus_{k \leq j-1} W_k$  car si  $f \in V_j$  est orthogonale à tous les  $W_k$  pour  $k \leq j-1$ ,

on a  $f \in V_k$ .

Donc,  $f \in \bigcap_{k \leq j-1} V_k = \{0\}$ .

Par conséquent,  $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} W_k}$ .

*iii)*

Condition nécessaire : Pour tout  $f \in W_j$ , on a

$$f \in V_{j+1} \text{ et } f \perp \varphi_{j,k}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

On sait que si  $f \in V_{j+1}$ ,  $D_2 f \in V_{j+2}$  et

$$\langle D_2 f, \varphi_{j+1,k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle = 0$$

Donc,  $D_2 f \in W_{j+1}$ .

Condition suffisante : Supposons que  $D_2 f \in W_{j+1}$ , alors

$$D_2 f \in V_{j+2} \text{ et } D_2 f \perp V_{j+1}$$

D'après la condition (c) de définition 2.1,  $f \in V_{j+1}$ .

Aussi

$$\langle f, \varphi_{j,k} \rangle = \sqrt{2} \langle D_2 f, \varphi_{j+1,k} \rangle = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Par conséquent,  $f \in W_j$ .

*iv)* Pour tout  $f \in W_0$ , on a

$$f \in V_1 \text{ et } f \perp \varphi(\cdot - \ell), \forall \ell \in \mathbb{Z}$$

Connaissons que si  $f \in V_1$ ,  $f(\cdot - k) \in V_1$  et

$$\langle f(\cdot - k), \varphi(\cdot - \ell) \rangle = \langle f, \varphi(\cdot, \ell - k) \rangle = 0$$

Donc,  $f(\cdot - k) \in W_0$ .

**Démonstration du lemme 2.37 :**

On a tout d'abord,

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \sqrt{2} \varphi(2x - k),$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

En prenant la transformée de Fourier de cette égalité et en tenant compte du lemme 2.20, on obtient :

$$\hat{\psi}(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

En calculant  $G$  :

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} e^{-ik\omega} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{1-k} h_k e^{-i(1-k)\omega} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{i(\pi-\omega)} e^{-ik(\pi-\omega)} \end{aligned}$$

Donc,  $G(\omega) = e^{i(\pi-\omega)} H(\pi - \omega)$ .

Par suite on a besoin de démontrer des points :

1.  $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(2\omega + 2k\pi) \right|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |G(\omega + k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\omega + k\pi)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(\pi - \omega - 2k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(\pi - \omega - \pi - 2k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\omega + \pi + 2k\pi)|^2 \\ &= |H(\pi - \omega)|^2 + |H(-\omega)|^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.10, la famille  $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée.

2.  $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthogonale à  $\{\varphi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  :  
Remarquons d'abord qu'il suffit de prouver

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \langle \varphi, \psi_{0,k} \rangle = 0,$$

par ailleurs,

$$\langle \varphi, \psi_{0,k} \rangle = 0 \Leftrightarrow \Phi(k) = 0,$$

où  $\Phi = \varphi * \tilde{\psi}$  et  $\tilde{\psi}(x) = \psi(-x)$ .

Soit  $S(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\Phi}(2\omega + 2k\pi)$ , alors d'après la formule de sommation de

Poisson les coefficients de Fourier de  $S$  sont  $\{\Phi(-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

En calculant  $S$  :

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\Phi}(2\omega + 2k\pi) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2\omega + 2k\pi) \overline{\hat{\psi}(2\omega + 2k\pi)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + k\pi)|^2 H(\omega + k\pi) \overline{H(\pi - \omega - k\pi)} e^{-i(\pi - \omega - k\pi)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + \pi + 2k\pi)|^2 H(\omega + \pi + 2k\pi) \overline{H(-\omega - 2k\pi)} e^{-i(-\omega - 2k\pi)} \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 H(\omega + 2k\pi) \overline{H(\pi - \omega - 2k\pi)} e^{-i(\pi - \omega - 2k\pi)} \\ &= e^{i\omega} \overline{H(-\omega)} H(\omega + \pi) - e^{i\omega} H(\omega) \overline{H(\pi - \omega)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où,  $\Phi(k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

3. Toute fonction  $f \in V_1$  a une unique représentation de la forme :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi_{0,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \psi_{0,k}.$$

On a d'abord,

$$\hat{f}(\omega) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{1,k} \rangle e^{-ik\frac{\omega}{2}} \right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (2.42)$$

et

$$\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \left[ H\left(-\frac{\omega}{2}\right) \overline{H\left(-\frac{\omega}{2}\right)} + G\left(\frac{\omega}{2}\right) \overline{G\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right].$$

Remplaçons  $\overline{H\left(-\frac{\omega}{2}\right)}$  par  $H\left(\frac{\omega}{2}\right)$ , il vient :

$$\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \hat{\varphi}(\omega) H\left(-\frac{\omega}{2}\right) + \hat{\psi}(\omega) \overline{G\left(\frac{\omega}{2}\right)}. \quad (2.43)$$

Remplaçons  $\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$  de (2.42) par (2.43) et en prenant la transformée de Fourier inverse de l'égalité (2.42), on a

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{0,k} \rangle \varphi_{0,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{0,k} \rangle \psi_{0,k}.$$

**Démonstration du théorème 2.35 :** D'après le lemme 2.37  $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_0$ , ensuite nous utilisons le lemme 2.36, on trouve que la suite  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Notons que  $\psi$  n'est pas unique, il existe une autre ondelette  $\psi_0$  associée à  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  définie par :

$$\psi_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{1-k} h_{1-k} \sqrt{2} \varphi(2x - k)$$

dont,  $\hat{\psi}_0(\omega) = G_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$  où  $G_0(\omega) = e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)}$ . Cette ondelette se trouve dans [36] et utilisée beaucoup dans la pratique.

**Théorème 2.38 :** Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution régulière. Alors, les éléments  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  vérifient :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |g_k|^2 = 1 \quad (2.44)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k = 0 \quad (2.45)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k g_{k-2n} = \delta_{0,n} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.46)$$



**Démonstration du théorème 2.38 :**

1. En effet :

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{Z}} |g_k|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| (-1)^k h_{1-k} \right|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2\end{aligned}$$

D'après (2.36), il vient :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |g_k|^2 = 1$$

2. D'après la définition de  $g_k$ , on a

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} \\ &= -\sqrt{2}H(\pi)\end{aligned}$$

D'après le corollaire 2.29, on obtient :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k = 0.$$

3. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k g_{k-2n} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1-k} (-1)^k h_{1-(k-2n)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{1-k} h_{1-k+2n} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k+2n}\end{aligned}$$

D'après (2.38), on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k g_{k-2n} = \delta_{0,n}$$

**Théorème 2.39 :** Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution et  $\varphi, \psi$  la fonction d'échelle et l'ondelette associées.

On pose :

$$\begin{aligned}c_{j,k} &= \langle f, \varphi_{j,k} \rangle, \quad d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \\ a_k &= h_{-k}, \quad b_k = (-1)^k h_{k+1}\end{aligned}$$

pour tout  $j, k \in \mathbb{Z}$  et  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

On a les égalités suivantes :

$$c_{j,k} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_{\ell-2k} c_{j+1,\ell} \quad (2.47)$$

$$d_{j,k} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^\ell h_{1-\ell+2k} c_{j+1,\ell} \quad (2.48)$$

$$c_{j,k} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} a_{2\ell-k} c_{j-1,\ell} + b_{2\ell-k} d_{j-1,\ell} \quad (2.49)$$

**Démonstration du théorème 2.39 :**

En effet,

$$\varphi(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_\ell \sqrt{2} \varphi(2x - \ell),$$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k}(x) &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_\ell 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1}x - (2k + \ell)) \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_{\ell-2k} \varphi_{j+1,\ell}(x). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$c_{j,k} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_{\ell-2k} c_{j+1,\ell}.$$

De même,

$$d_{j,k} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^\ell h_{1-\ell+2k} c_{j+1,\ell}$$

D'autre part,

$$\varphi_{j,k} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} a_{2\ell-k} \varphi_{j-1,\ell} + b_{2\ell-k} \psi_{j-1,\ell},$$

donc

$$c_{j,k} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} a_{2\ell-k} c_{j-1,\ell} + b_{2\ell-k} d_{j-1,\ell}$$

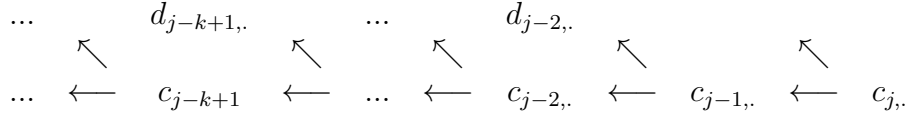


FIGURE 2.1 – Schéma d’algorithme de décomposition

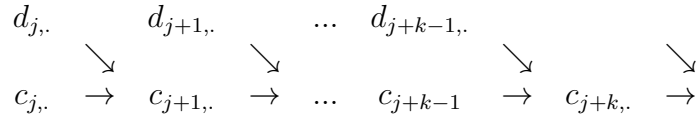


FIGURE 2.2 – Schéma d’algorithme de reconstruction

Pour que la décroissance des coefficients des ondelettes soit rapide, il faut d’ajouter quelques propriétés sur les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$ .

**Théorème 2.40 :** *Soit  $\psi$  une ondelette a  $N$  moments nuls telle que  $\text{supp}\psi \subset I$ ,  $I$  est un intervalle.*

*Pour tout  $f \in C^N(\mathbb{R})$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$|d_{j,k}| \leq C2^{-j(N+\frac{1}{2})}, \quad d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad (2.50)$$

pour tout  $j, k \in \mathbb{Z}$ .

**Démonstration du théorème 2.40 :** Pour montrer cette majoration il nous suffit d’appliquer la formule de Taylor à la fonction  $f$  autour du centre de l’ondelette  $\psi_{j,k}$ .

Si on a posé  $x_0 = \frac{k}{2^j}$ , on trouve que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}\left(\frac{k}{2^j}\right) \left(x - \frac{k}{2^j}\right)^\ell + \frac{1}{N!} f^{(N)}(y_0) \left(x - \frac{k}{2^j}\right)^N \\
&= \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{\ell! 2^{j\ell}} f^{(\ell)}\left(\frac{k}{2^j}\right) (2^j x - k)^\ell + \frac{1}{N! 2^{jN}} f^{(N)}(y_0) (2^j x - k)^N.
\end{aligned}$$

Quand on a fait le produit scalaire de  $f$  avec  $\psi_{j,k}$ , la somme de termes polynômiaux disparaît, et il ne reste que

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \frac{1}{N!2^{jN}} \int_{\mathbb{R}} f^{(N)}(y_0) (2^j x - k)^N 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) dx$$

En faisant le changement de variable ( $y = 2^j x - k$ ), on obtient :

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \frac{1}{N!2^{j(N+\frac{1}{2})}} \int_I f^{(N)}(y_1) y^N \psi(y) dy.$$

Si on a posé :  $I = [-K, K]$   $K > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \int_I f^{(N)}(y_1) y^N \psi(y) dy \right| &\leq \sup_{x \in I} |f^{(N)}(x)| \int_I |y|^N |\psi(y)| dy \\ &\leq \sup_{x \in I} |f^{(N)}(x)| \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} K^N \sqrt{2K} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|d_{j,k}| \leq C 2^{-j(N+\frac{1}{2})},$$

où  $C = \frac{K^N \sqrt{2K}}{N!} \sup_{x \in I} |f^{(N)}(x)|$ .

**Théorème 2.41 :** *Etant donnée une analyse multirésolution régulière et  $\psi$  l'ondelette associée.*

*Alors, les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) L'ondelette  $\psi$  a  $N$  moments nuls.*
- ii)  $\hat{\psi}^{(\ell)}(0) = 0, \forall \ell = 0, \dots, N-1$ .*
- iii)  $H^{(\ell)}(\pi) = 0, \forall \ell = 0, \dots, N-1$ .*

**Démonstration du théorème 2.41 :**

*i)  $\Rightarrow$  ii) Supposons que*

$$\int_{\mathbb{R}} x^\ell \psi(x) dx = 0, \forall \ell = 0, \dots, N-1.$$

D'après la formule :

$$\hat{\psi}^{(\ell)}(\omega) = (-i)^\ell \int_{\mathbb{R}} x^\ell \psi(x) e^{-i\omega x} dx, \forall \ell = 0, \dots, N-1.$$

Il vient :

$$\begin{aligned}\hat{\psi}^{(\ell)}(0) &= (-i)^\ell \int_{\mathbb{R}} x^\ell \psi(x) dx \\ &= 0, \forall \ell = 0, \dots, N-1\end{aligned}$$

*ii) ⇒ iii)* Par récurrence :

Pour  $n = 0$ ,  $H(\pi) = 0$ , vérifiée.

Pour  $n = 1$ , on a

$$\hat{\psi}^{(1)}(0) = \frac{1}{2} \hat{\varphi}(0) H^{(1)}(\pi) + \left[ \left( e^{i(\pi - \frac{\omega}{2})} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right)^{(1)} \right]_{\omega=0} H(\pi) = 0.$$

Donc,  $H^{(1)}(\pi) = 0$ .

On suppose que la relation est vérifiée pour  $0, 1, \dots, n-1$ . ( $n \leq N-1$ ) et on la prouvera pour  $n$ .

Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned}\hat{\psi}^{(n)}(\omega) &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \left( H\left(\pi - \frac{\omega}{2}\right) \right)^{(\ell)} \left( e^{i(\pi - \frac{\omega}{2})} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right)^{(n-\ell)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n}{\ell} \left( H\left(\pi - \frac{\omega}{2}\right) \right)^{(\ell)} \left( e^{i(\pi - \frac{\omega}{2})} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right)^{(n-\ell)} \\ &\quad + \left( H\left(\pi - \frac{\omega}{2}\right) \right)^{(n)} e^{i(\pi - \frac{\omega}{2})} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).\end{aligned}$$

Pour  $\omega = 0$ , d'après l'hypothèse de récurrence la somme disparaît et il ne reste que

$$0 = \hat{\psi}^{(n)}(0) = - \left( -\frac{1}{2} \right)^n H^{(n)}(\pi) \hat{\varphi}(0).$$

Il vient :

$$H^{(n)}(\pi) = 0.$$

On en déduit que,

$$H^{(\ell)}(\pi) = 0, \forall \ell = 0, \dots, N-1.$$

Réciproquement, pour démontrer que *iii)* implique *ii)* et *ii)* implique *i)* il suffit d'utiliser les expressions de  $\hat{\psi}^{(\ell)}$  et  $H^{(\ell)}$ .

**Corollaire 2.42 :** *Sous les conditions du théorème précédent, on suppose que  $\psi$  a  $N$  moments nuls.*

*Alors, la fonction d'échelle  $\varphi$  vérifie la condition de Strang-Fix :*

$$\hat{\varphi}^{(\ell)}(2k\pi) = 0, \quad \forall \ell = 0, \dots, N-1 \text{ et } k \in \mathbb{Z}^*. \quad (2.51)$$

**Démonstration du corollaire 2.42 :** D'après la dernière propriété :

$$H^{(\ell)}(\pi) = 0, \quad \forall \ell = 0, \dots, N-1.$$

La fonction  $H$  peut s'écrire :

$$H(\omega) = \left( \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N R(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

où  $R(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{-ik\omega}$ .

Ce qui entraîne, pour tout  $m \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\omega) &= \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^m}\right) \prod_{j=1}^m H(2^{-j}\omega) \\ &= \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^m}\right) \prod_{j=1}^m \left( \frac{1 + e^{-i2^{-j}\omega}}{2} \right)^N \prod_{j=1}^m R(2^{-j}\omega) \end{aligned}$$

Connaïssons que

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \exists n \in \mathbb{N}, \exists p \text{ (impair)} : |k| = 2^n p.$$

Si l'on pose,  $m = n + 1$ , Clairement,  $\hat{\varphi}^{(\ell)}$  est nulles aux points  $\omega = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ , pour tout  $\ell = 0, \dots, N-1$ .

**Théorème 2.43 :** *Soit  $(V_j)_j$  une analyse multirésolution régulière. On suppose que la condition de Strang-Fix vérifiée, alors*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^\ell \varphi(x - k) = q_\ell(x), \quad \forall \ell = 0, \dots, N-1, \quad (2.52)$$

où  $q_\ell$  est polynôme de degré exactement  $\ell$ .

On a besoin du lemme :

**Lemme 2.44 :** *Sous les conditions du théorème ci-dessus, on a l'égalité suivante :*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (x - k)^\ell \varphi(x - k) = M_\ell = \int_{\mathbb{R}} x^\ell \varphi(x) dx. \quad \forall \ell = 0, \dots, N - 1. \quad (2.53)$$

**Démonstration du lemme 2.44 :** On pose

$$\theta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x - k)^\ell \varphi(x - k).$$

La fonction  $\theta$  est 1-périodique, on peut la développer en série de Fourier sous la forme :

$$\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}.$$

Calculons  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  :

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 \theta(x) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 (x - k)^\ell \varphi(x - k) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-k}^{-k+1} y^\ell \varphi(y) e^{-2\pi i n y} dy \\ &= i^\ell \hat{\varphi}^{(\ell)}(2n\pi). \end{aligned}$$

D'après la condition de Strang-Fix, on obtient

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ M_\ell & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

**Démonstration du théorème 2.43 :** on a

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^\ell \varphi(x - k) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^\ell (x - k - x)^\ell \varphi(x - k) \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^j x^{\ell-j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x - k)^j \varphi(x - k) \end{aligned}$$

En utilisant la relation (2.53), on a

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^\ell \varphi(x - k) &= \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^j M_j x^{\ell-j} \\ &= M_0 x^\ell + \sum_{j=1}^{\ell} \binom{\ell}{j} (-1)^j M_j x^{\ell-j}.\end{aligned}$$

Il suffit de prendre :

$$q_\ell(x) = M_0 x^\ell + \sum_{j=1}^{\ell} C_\ell^j (-1)^j M_j x^{\ell-j},$$

Comme  $M_0 \neq 0$ , alors  $q_\ell$  est un polynôme de degré exactement  $\ell$ .



# Annexe 2.A

## Démonstration du lemme 2.11

Avant de démontrer le lemme 2.11, on a besoin du théorème suivant :

**Théorème A.1 :** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I = [a, b]$  et  $g$  une fonction continue sur  $I$  telle que :

- i)  $f_n$  converge simplement vers  $f$  sur  $I$ .
- ii)  $\frac{df_n}{d\omega}$  converge uniformément sur tout compact de  $I$  vers  $g$ .

Alors,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $\frac{df}{d\omega} = g$ . Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{df_n}{d\omega} = \frac{df}{d\omega}$$

### Démonstration du lemme 2.11 :

Tout d'abord, d'après la régularité de  $\theta$  et la formule :

$$(1 + |x|)^m \theta(x) \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \hat{\theta} \in H^m(\mathbb{R}), \forall m \in \mathbb{N}$$

On a :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

et

$$\frac{d^\ell}{d\omega^\ell} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \in L^1(\mathbb{R}), \forall \ell \in \mathbb{N} \quad (\text{A.2})$$

Maintenant on va montrer ce lemme par récurrence sur  $\ell$ .

Pour  $\ell = 1$ , on définit une suite  $f_n$  par :

$$f_n(\omega) = \sum_{k=-n}^n \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2, \quad \omega \in [0, 2\pi]$$

Comme  $\left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \in L^1(\mathbb{R})$ , alors la formule de sommation de Poisson montre que  $f_n$  converge simplement vers  $f$  telle que :

$$f(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2$$

de plus, d'après (A.1),  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 2\pi]$  et on a :

$$\frac{df_n}{d\omega} = \sum_{k=-n}^n \frac{d}{d\omega} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2$$

D'ailleurs, Soit  $K$  un compact quelconque de  $[0, 2\pi]$ , la fonction

$$\left| \frac{d}{d\omega} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \right|$$

est continue sur  $K$ , alors le théorème de Heine prouve qu'il existe  $\omega_0 \in K$  tel que :

$$\sup_{\omega \in K} \left| \frac{d}{d\omega} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \right| = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left| \frac{d}{d\omega} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \right| \in L^1(\mathbb{R})$$

ainsi, grâce à la formule de sommation de Poisson ;

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left| \frac{d}{d\omega} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \right| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\omega \in K} \left| \frac{d}{d\omega} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \right| < +\infty.$$

Ce qui déduit la convergence uniforme de  $\frac{df_n}{d\omega}$  sur  $K$  vers  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{d}{d\omega} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2$ .

Enfin,  $f_n$  vérifie les conditions du théorème A.1 et l'égalité est juste pour  $\ell = 1$ .

Supposons maintenant que la propriété est vérifiée pour tout  $\ell \leq N$ , et on la montrera pour  $\ell = N + 1$ .

Considérons  $f_n$  comme :

$$f_n(\omega) = \sum_{k=-n}^n \frac{d^N}{d\omega^N} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2, \quad \omega \in [0, 2\pi]$$

La fonction  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I = [0, 2\pi]$  et d'après l'hypothèse de récurrence, elle converge simplement vers  $f$  telle que :

$$f(\omega) = \frac{d^N}{d\omega^N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2$$

De plus,

$$\frac{df_n}{d\omega} = \sum_{k=-n}^n \frac{d^{N+1}}{d\omega^{N+1}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2$$

La relation (A.2) et le théorème de Heine montrent que  $\frac{df_n}{d\omega}$  converge uniformément sur tout compact de  $[0, 2\pi]$  vers  $g$  telle que :

$$g(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{d^{N+1}}{d\omega^{N+1}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2$$

Par conséquent,

$$\frac{df}{d\omega} = \frac{d^{N+1}}{d\omega^{N+1}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\theta}(\omega + 2k\pi) \right|^2 = g(\omega)$$

## Annexe 2.B Démonstration du lemme 2.25

On a d'abord,

$$A(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta(x - k) \overline{\theta(y - k)},$$

d'après la régularité de  $\theta$ , on a

$$|A(x, y)| \leq C_m \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |x - k|)^m (1 + |y - k|)^m}, \quad \forall m > 3.$$

on va montrer que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(1 + |x - y|)^2}{(1 + |x - k|)^m (1 + |y - k|)^m} \leq C.$$

remarquons que

$$|x - y| \leq |x - k| + |y - k| + |x - k| |y - k|$$

il vient :

$$(1 + |x - y|)^2 \leq (1 + |x - k|)^2 (1 + |y - k|)^2$$

donc,  $\forall m > 3$

$$\frac{(1 + |x - y|)^2}{(1 + |x - k|)^m (1 + |y - k|)^m} \leq \frac{1}{(1 + |x - k|)^{m-2} (1 + |y - k|)^{m-2}},$$

aussi on a,  $\forall m > 3$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |x - k|)^{m-2} (1 + |y - k|)^{m-2}} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |x - k|)^{m-2}},$$

parailleurs ;  $\forall m > 3$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |x - k|)^{m-2}} = \sum_{k=-\infty}^{[x]} \frac{1}{(1 + x - k)^{m-2}} + \sum_{k=[x]+1}^{+\infty} \frac{1}{(1 + k - x)^{m-2}},$$

Maintenant, on va montrer que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1 + |x - k|)^{m-2}} < \infty, \quad \forall m > 3.$$

Définissons alors deux fonctions  $f, g$  par :

$$f(z) = \frac{1}{(1 + x - z)^{m-2}}, \quad z \leq [x]$$

et

$$g(z) = \frac{1}{(1 + z - x)^{m-2}}, \quad z \geq [x] + 1$$

La fonction  $f$  est croissante et on a :

$$f(n) \leq f(z) < f(n+1), \quad \forall z \in [n, n+1[, n \leq [x] - 1$$

par integration,

$$f(n) \leq \int_n^{n+1} f(z) dz < f(n+1)$$

par sommation,

$$\sum_{n=-\infty}^{[x]-1} f(n) \leq \int_{-\infty}^{[x]} f(z) dz < \sum_{n=-\infty}^{[x]-1} f(n+1)$$

Cette inégalité montre que

$$\sum_{k=-\infty}^{[x]} \frac{1}{(1 + x - k)^{m-2}} \leq \frac{1}{(m-3)(1 + x - [x])^{m-3}} + \frac{1}{(1 + x - [x])^{m-2}}$$

de manière similaire,  $g$  est décroissante et on a ;

$$g(n+1) < g(z) \leq g(n), \quad \forall z \in [n, n+1[, n \geq [x] + 1$$

par integration,

$$g(n+1) < \int_n^{n+1} g(z) dz \leq g(n)$$

par sommation,

$$\sum_{n=[x]+1}^{+\infty} g(n+1) < \int_{[x]+1}^{+\infty} g(z) dz \leq \sum_{n=[x]+1}^{+\infty} g(n)$$

Cette inégalité montre que  $\forall m > 3$

$$\sum_{k=[x]+1}^{+\infty} \frac{1}{(1+k-x)^{m-2}} < \frac{1}{(m-3)(1+[x]+1-x)^{m-3}} + \frac{1}{(1+[x]+1-x)^{m-2}},$$

donc,  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|x-k|)^{m-2}} \leq \frac{2}{(m-3)} + 2, \forall m > 3$

Par conséquent ;

$$|A(x, y)| \leq C_m \left( \frac{2}{(m-3)} + 2 \right) (1+|x-y|)^{-2}, \forall m > 3, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

## Annexe 2.C

### Démonstration du lemme 2.26

Condition nécessaire : d'après (2.29), on a

$$T_j f(x) = \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^j f(y) \theta(2^j x - k) \overline{\theta(2^j y - k)} \right) dy$$

Si on a posé :

$$S_n(y) = \sum_{k=-n}^n 2^j f(y) \theta(2^j x - k) \overline{\theta(2^j y - k)}$$

alors,

$$|S_n(y)| \leq C 2^j |f(y)| (1 + 2^j |x - y|)^{-2}, \quad C > 0.$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(y)| (1 + 2^j |x - y|)^{-2} dy \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + 2^j |x - y|)^2} dy < \infty$$

donc, d'après le théorème de la convergence dominée,  $T_j f$  peut s'écrire :

$$T_j f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \theta_{j,k} \rangle \theta_{j,k}(x)$$

comme  $\theta_{j,k}$  est dans  $L^2(\mathbb{R})$ ,  $T_j f$  soit alors dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

Maintenant, pour démontrer que

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \|f - T_j f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0 \quad (\text{C.1})$$

il suffit de considérer pour les fonctions indicatrices des intervalle car les combinaisons linéaires finies des ces éléments sont denses dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

Soit  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$$

On a,

$$T_j f(x) = \int_a^b 2^j A(2^j x, 2^j y) dy \quad (\text{C.2})$$

L'inégalité (2.30) implique

$$|T_j f(x)| \leq C \int_a^b 2^j (1 + 2^j |x - y|)^{-2} dy \quad (\text{C.3})$$

Si  $x \notin [a, b]$ , alors on peut distinguer deux cas :

1.  $x > b$

$$\begin{aligned} \int_a^b 2^j (1 + 2^j |x - y|)^{-2} dy &= \int_a^b 2^j (1 + 2^j (x - y))^{-2} dy \\ &= (1 + 2^j (x - b))^{-1} - (1 + 2^j (x - a))^{-1} \end{aligned}$$

Il vient :

$$\int_a^b 2^j (1 + 2^j |x - y|)^{-2} dy \leq (1 + 2^j (x - b))^{-1} \quad (\text{C.4})$$

2.  $x < a$

$$\begin{aligned} \int_a^b 2^j (1 + 2^j |x - y|)^{-2} dy &= \int_a^b 2^j (1 - 2^j (x - y))^{-2} dy \\ &= (1 + 2^j (a - x))^{-1} - (1 + 2^j (b - x))^{-1} \end{aligned}$$

Il vient :

$$\int_a^b 2^j (1 + 2^j |x - y|)^{-2} dy \leq (1 + 2^j (a - x))^{-1} \quad (\text{C.5})$$

On en déduit que,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} T_j f(x) = 0$$

Si  $x \in ]a, b[$ , alors on va montrer que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} T_j f(x) = 1$$

Remarquons que la formule

$$T_j f(x) = \int_{2^j a}^{2^j b} A(2^j x, y) dy$$

entraîne

$$T_j f(x) = 1 - \int_{-\infty}^{2^j a} A(2^j x, y) dy - \int_{2^j b}^{+\infty} A(2^j x, y) dy.$$



Comme  $x \in ]a, b[$ ,  $2^j a < 2^j x < 2^j b$ , ensuite

$$\left| \int_{-\infty}^{2^j a} A(2^j x, y) dy \right| \leq C_1 \int_{-\infty}^{2^j a} (1 + |2^j x - y|)^{-2} dy$$

et

$$\int_{-\infty}^{2^j a} (1 + |2^j x - y|)^{-2} dy = \int_{-\infty}^{2^j a} (1 + 2^j x - y)^{-2} dy$$

donc

$$\int_{-\infty}^{2^j a} (1 + |2^j x - y|)^{-2} dy = (1 + 2^j (x - a))^{-1} \quad (\text{C.6})$$

D'où

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{2^j a} A(2^j x, y) dy = 0$$

De même

$$\left| \int_{2^j b}^{+\infty} A(2^j x, y) dy \right| \leq C_2 \int_{2^j b}^{+\infty} (1 + |2^j x - y|)^{-2} dy$$

et

$$\int_{2^j b}^{+\infty} (1 + |2^j x - y|)^{-2} dy = \int_{2^j b}^{+\infty} (1 - (2^j x - y))^{-2} dy$$

donc

$$\int_{2^j b}^{+\infty} (1 + |2^j x - y|)^{-2} dy = (1 + 2^j (b - x))^{-1} \quad (\text{C.7})$$

D'où

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{2^j b}^{+\infty} A(2^j x, y) dy = 0$$

On déduit que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} T_j f(x) = 1$$

Par suite,

$$\|f - T_j f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_a^b |1 - T_j f(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^a |T_j f(x)|^2 dx + \int_b^{+\infty} |T_j f(x)|^2 dx$$

D'après les égalités (C.6) et (C.7), on trouve que

$$|1 - T_j f(x)|^2 \leq C.$$

Alors, le théorème de convergence dominée montre que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_a^b |1 - T_j f(x)|^2 dx = 0$$

D'ailleurs, en utilisant les inégalités (C.4) et (C.5), on obtient :

$$\forall x < a, |T_j f(x)|^2 \leq C (1 + 2^j (a - x))^{-2} \leq C (1 + a - x)^{-2}$$

et

$$\forall x > b, |T_j f(x)|^2 \leq C (1 + 2^j (x - b))^{-2} \leq C (1 - b + x)^{-2}$$

De plus,

$$\int_{-\infty}^a (1 + a - x)^{-2} dx < +\infty \text{ et } \int_b^{+\infty} (1 - b + x)^{-2} dx < +\infty$$

Alors, le théorème de Lebesgue prouve que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{x \notin [a,b]} |T_j f(x)|^2 dx = 0$$

Par conséquent,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|f - T_j f(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$$

Condition suffisante :

Posons

$$\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} A(x, y) dy,$$

alors, la fonction  $\alpha$  est 1-périodique et elle est dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ .

Soit  $f = \chi_{[-1,1]}$ ,  $T_j f$  tend vers  $f$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ ,

ensuite, pour tout  $0 < r < 1$  et  $x \in [-r, r]$

$$\begin{aligned} T_j f(x) &= \int_{\mathbb{R}} A(2^j x, y) dy - \int_{-\infty}^{-2^j} A(2^j x, y) dy - \int_{2^j}^{+\infty} A(2^j x, y) dy \\ &= \alpha(2^j x) + \varepsilon(2^{-j}) \end{aligned}$$

La fonction  $D_{2^j} \alpha$  est  $2^{-j}$ -périodique et elle tend vers 1 dans  $L^2([-r, r])$ .

On en déduit que  $\alpha(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

## Annexe 2.D

### Démonstration du lemme 2.34

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$I_k^n = \int_{\mathbb{R}} |h_k(\omega)|^2 e^{in\omega} d\omega = \int_{2^k K} \prod_{j=1}^k |H(2^{-j}\omega)|^2 e^{in\omega} d\omega$$

En faisant le changement de variable :  $(\omega = 2^k \zeta)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} I_k^n &= 2^k \int_K \prod_{j=0}^{k-1} |H(2^j \zeta)|^2 e^{in2^k \zeta} d\zeta \\ &= 2^k \int_P \prod_{j=0}^{k-1} |H(2^j \zeta)|^2 e^{in2^k \zeta} d\zeta \\ &= \int_{2^k P} \prod_{j=1}^k |H(2^{-j}\omega)|^2 e^{in\omega} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} M_k(\omega) e^{in\omega} d\omega \end{aligned}$$

Donc ;

$$I_k^n = \int_{-2^k \pi}^{2^k \pi} M_k(\omega) e^{in\omega} d\omega = \int_{-2^k \pi}^0 M_k(\omega) e^{in\omega} d\omega + \int_0^{2^k \pi} M_k(\omega) e^{in\omega} d\omega$$

Comme

$$M(2^{-j}\omega + 2^{k-j}\pi) = M(2^{-j}\omega) \quad \forall 0 \leq j \leq k-1$$

et

$$M(2^{-k}\omega) + M(2^{-k}\omega + \pi) = 1$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-2^k \pi}^0 M_k(\omega) e^{in\omega} d\omega &= \int_{-2^k \pi}^0 M_{k-1}(\omega) e^{in\omega} d\omega \\ &\quad - \int_{-2^k \pi}^0 M_{k-1}(\omega) M(2^{-k}\omega + \pi) e^{in\omega} d\omega \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_{-2^k\pi}^0 M_{k-1}(\omega) M(2^{-k}\omega + \pi) e^{in\omega} d\omega &= \int_{-2^k\pi}^0 \prod_{j=1}^k M(2^{-j}(\omega + 2^k\pi)) e^{in\omega} d\omega \\ &= \int_0^{2^k\pi} M_k(\omega) e^{in\omega} d\omega, \quad \zeta = \omega + 2^k\pi \end{aligned}$$

donc

$$I_k^n = \int_{-2^k\pi}^0 M_{k-1}(\omega) e^{in\omega} d\omega = \int_{-2^{k-1}\pi}^{2^{k-1}\pi} M_{k-1}(\omega) e^{in\omega} d\omega,$$

par suite,  $I_k^n = I_{k-1}^n = \dots = I_1^n$  et

$$I_1^n = \int_{-2\pi}^{2\pi} \left( \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq m} h_k \bar{h}_m e^{i(m-k)\frac{\omega}{2}} \right) e^{in\omega} d\omega = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

## Annexe 2.E Démonstration du théorème 2.32

Condition suffisante :

Posons

$$P_N(\omega) = \prod_{j=1}^N H(2^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Le produit converge dans  $\mathbb{C}$  si et seulement si :

$$\lim_{(N,M) \rightarrow +\infty} |P_M(\omega) - P_N(\omega)| = 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$|P_M(\omega) - P_N(\omega)| = \left| \prod_{j=1}^N H(2^{-j}\omega) \right| \left| \prod_{j=N+1}^M H(2^{-j}\omega) - 1 \right| \quad \forall M > N$$

D'après (2.35),  $|H(\omega)| \leq 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$  et on a :

$$|P_M(\omega) - P_N(\omega)| \leq \left| \prod_{j=N+1}^M H(2^{-j}\omega) - 1 \right|$$

En utilisant La formule :

$$z_1 z_2 \dots z_L - 1 = \sum_{i=1}^{L-1} (z_i - 1) z_{i+1} \dots z_L + (z_L - 1)$$

on trouve que,

$$\begin{aligned} |P_M(\omega) - P_N(\omega)| &\leq \left| \sum_{j=N+1}^{M-1} (H(2^{-j}\omega) - 1) H(2^{-(j+1)}\omega) \dots H(2^{-M}\omega) \right| \\ &\quad + |H(2^{-M}\omega) - 1| \\ &\leq \sum_{j=N+1}^M |H(2^{-j}\omega) - 1| \end{aligned}$$

Remarquons aussi que,

$$|H(2^{-j}\omega) - 1| = |H(2^{-j}\omega) - H(0)| \leq C 2^{-j} |\omega|, \quad C > 0$$

Il vient ;

$$|P_M(\omega) - P_N(\omega)| \leq C \frac{|\omega|}{2^N} \rightarrow 0, \text{ quand } N, M \rightarrow +\infty$$

Par conséquent,  $P_N$  converge simplement dans  $\mathbb{C}$ .

Si on a posé :

$$h_k(\omega) = \prod_{j=1}^k H(2^{-j}\omega) \chi_{2^k K}$$

et en tenant compte que  $0 \in \text{intérieure}(K)$ , alors  $h_k$  converge aussi vers la même limite de  $P_N$ . Ce qui nous permet d'écrire :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} |P_N(\omega)|^2 = \lim_{k \rightarrow +\infty} |h_k(\omega)|^2 = |h_\infty(\omega)|^2$$

d'après le lemme de Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}} |h_\infty(\omega)|^2 d\omega \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |h_k(\omega)|^2 d\omega = 2\pi.$$

Il vient :  $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ .

D'ailleurs, la continuité de  $H$  implique que  $|h_\infty|^2$  est continue, soit  $\omega \in \mathbb{R}$  tel que  $\omega \in K$ , alors d'après le fait que

$$\begin{aligned} \forall j \geq 1 \quad H(2^{-j}\omega) &\neq 0 \text{ et} \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} |h_\infty(\omega)|^2 &\neq 0 \end{aligned}$$

Il vient :

$$\exists C > 0, \forall \omega \in K; \quad |h_\infty(\omega)|^2 \geq C$$

Si  $\omega \in 2^k K$ , alors

$$|h_\infty(\omega)|^2 = |h_k(\omega)|^2 \left| h_\infty\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \right|^2,$$

ce qui entraîne

$$|h_k(\omega)|^2 \leq \frac{1}{C} |h_\infty(\omega)|^2.$$

Cette inégalité est vérifiée pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , puisque

$$|h_k(\omega)|^2 = 0 \text{ si } \omega \notin 2^k K$$

D'après le théorème de convergence dominée, on trouve que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |h_k(\omega)|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}} |h_\infty(\omega)|^2 d\omega = 2\pi.$$

et

$$\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$$

Aussi

$$\langle \varphi, \varphi_{0,k} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |h_\infty(\omega)|^2 e^{ik\omega} d\omega = \delta_{0,k}$$

Parailleurs, si on définit la suite  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  comme :

$$V_j = \overline{\left\{ \sum_{k \in K} \alpha_{j,k} \varphi_{j,k} \quad |K| < \infty \right\}}$$

Alors,  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multirésolution régulière de  $L^2(\mathbb{R})$ . En effet, la régularité de  $\varphi$  se déduit d'après le fait que  $\hat{\varphi} \in H^m(\mathbb{R})$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$  (voir Cohen [4]).

Condition nécessaire :

Soit une analyse multirésolution régulière, nous savons déjà à propos de la fonction  $H$ , que les propriétés  $P_1), P_2), P_3)$  sont réalisées. Il nous reste à trouver que  $P_4)$  est vérifiée. Ceci s'avère être une conséquence des propriétés  $\hat{\varphi} \in H^m(\mathbb{R})$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$  et  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$ .

Comme  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2$  converge uniformément sur  $[-\pi, \pi]$ , alors on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*; \forall n \geq N(\varepsilon), \forall \omega \in [-\pi, \pi]$$

$$\left| \sum_{k=-n}^n |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 - 1 \right| < \varepsilon$$

et pour  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , on a

$$\forall \omega \in [-\pi, \pi], \quad \sum_{|k| \leq N(\frac{1}{2})} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 > \frac{1}{2}$$

il vient aussi,

$$\forall \omega \in [-\pi, \pi], \quad \sum_{|\omega+2k\pi| \leq \pi(2N(\frac{1}{2})+1)} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 > \frac{1}{2}$$

Cette inégalité montre que, pour tout  $\omega \in [-\pi, \pi]$ ,  
il existe  $\zeta = \omega + 2k_\omega\pi$  dans  $B(0, \pi(2N(\frac{1}{2})+1))$  tel que,

$$|\hat{\varphi}(\omega + 2k_\omega\pi)| \geq C > 0$$

Cette inégalité reste vraie dans un voisinage ouvert  $U_\omega$  de  $\omega$ , puisque  $\hat{\varphi}$  est continue.

Comme  $\hat{\varphi}(0) = 1$ , on peut choisir  $k_0 = 0$ . Recouvrons maintenant  $P = [-\pi, \pi]$  de manière suivante ;  $P \subset \bigcup_{\omega \in P} U_\omega$  ce qui entraîne que  $P = \bigcup_{i=0}^L (U_{\omega_i} \cap P)$ .

à partir de ce recouvrement  $\{U_{\omega_i} \cap P\}_{i=0}^L$ , nous pouvons extraire une partition de  $[-\pi, \pi]$  quand on l'a défini par :

$$\begin{aligned} R_0 &= U_0 \cap P \\ R_j &= (U_{\omega_j} \cap P) - \bigcup_{\ell=0}^{j-1} R_\ell \end{aligned}$$

un résultat immédiat que, pour tout  $\omega$  dans  $R_j$  on a ;  $|\hat{\varphi}(\omega + 2k_j\pi)| \geq C > 0$ , où  $k_j = k_{\omega_j}$ .

la propriété  $P_4$  est par conséquent mise en évidence en définissant le compact  $K$  par :  $K = \bigcup_{j=0}^L \overline{(R_j + 2k_j\pi)}$ . En effet,  $0 \in \text{int}(U_0 \cap P) \subset \text{int}(K)$  et pour tout  $j \geq 1$  et tout  $\zeta$  dans  $K$ ,  $|H(2^{-j}\zeta)| \geq |\hat{\varphi}(\zeta)| \geq C > 0$ .



# Chapitre 3

## Familles des ondelettes fréquemment utilisées

Il existe des familles des ondelettes orthogonales fréquemment utilisées dans la pratique. Les plus connues sont les ondelettes à support compact comme (Ondelette de Haar, ondelettes de Daubechies, ondelettes de Coifman), les ondelettes biorthogonales et paquets d'ondelettes.

### 3.1 Ondelettes à support compact

#### 3.1.1 Ondelette de Haar

C'est la première ondelette, qui a été utilisée par les chercheurs pour le traitement du signal à cause de son intérêt dans la simplicité du filtre et de l'algorithme de calcul. Sa forme est écrite comme suit :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[ \\ -1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[ \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$$

#### 3.1.2 Ondelettes de Daubechies

Elles ont été construites par Ingrid Daubechies en 1988 de telle sorte qu'elles aient le support le plus petit pour un nombre de moments nuls

$N$  ( $N \geq 1$ ) et elles sont notées  $D_{2N}$ , dans ce cas les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont vérifiant :

$$\int_{\mathbb{R}} x^\ell \psi(x) dx = 0, \quad \forall \ell = 0, \dots, N-1 \quad (3.1)$$

$$\text{supp}\varphi \subset [0, 2N-1] \quad (3.2)$$

$$\text{supp}\psi \subset [-N+1, N] \quad (3.3)$$

Cette ondelette est vue comme une généralisation de l'ondelette de Haar ( $N = 1$ ), telle que sa construction (ondelettes de Daubechies) se fait à partir du filtre  $H$  en vertu du théorème (2.32), où le théorème suivant montre l'existence de telles ondelettes.

**Théorème 3.1 (Daubechies) :** *Un filtre discret  $H$  a  $N$  zéros à  $\omega = \pi$  et à coefficients réels, possède au moins  $2N$  coefficients non nuls. Les filtres de Daubechies ont exactement  $2N$  coefficients non nuls.*

La démonstration de ce théorème nécessite les théorèmes suivants.

**Théorème 3.2 :** *La fonction d'échelle  $\varphi$  a un support compact si et seulement si le support de  $H$  est compact.*

*Dans ce cas, leurs supports seront les mêmes. Si le support de  $H$  et  $\varphi$  est  $[N_1, N_2]$  alors le support de  $\psi$  est :*

$$\left[ \frac{N_1 - N_2 + 1}{2}, \frac{N_2 - N_1 + 1}{2} \right]$$

**Théorème 3.3 (Bezout) :** *Soit  $Q_1$  et  $Q_2$  deux polynômes de degrés  $n_1$  et  $n_2$  qui ont des zéros différents, il existe alors deux polynômes uniques  $P_1$  et  $P_2$  de degrés  $n_1 - 1$  et  $n_2 - 1$  tel que*

$$P_1(y) Q_1(y) + P_2(y) Q_2(y) = 1 \quad (3.4)$$

**Démonstration du théorème 3.1 :**

On pose

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{L-1} h_k e^{-ik\omega}$$

Pour assurer que  $H$  a  $N$  zéros à  $\omega = \pi$ , il doit satisfaire :

$$H(\omega) = \left( \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N R(e^{-i\omega})$$

Lorsque  $\{h_k\}_{k=0}^{L-1}$  sont réels,  $|H(\omega)|^2$  est une fonction paire, elle peut être décomposée en série de  $\cos \omega$ .

Ainsi,  $R$  est un polynôme en  $\cos \omega$  qui peut également être écrit comme un polynôme  $P(\sin^2 \frac{\omega}{2})$  :

$$|H(\omega)|^2 = \cos^{2N} \frac{\omega}{2} P\left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right)$$

Dans ce cas, la condition de quadrature (2.35) devient :

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1,$$

pour tout  $y = \sin^2 \frac{\omega}{2} \in [0, 1]$ .

Pour minimiser le nombre des coefficients non nuls de  $H(\omega)$ , il faut trouver la solution  $P(y) > 0$  de degré minimal. D'après le théorème de Bezout (3.3) et en posant :

$Q_1(y) = (1 - y)^N$  et  $Q_2(y) = y^N$ , alors ces deux polynômes ont  $N$  zéros différents et il existe deux polynômes  $P_1$  et  $P_2$  telle que :

$$(1 - y)^N P_1(y) + y^N P_2(y) = 1$$

où  $P_2(y) = P_1(1 - y) = P(1 - y)$  avec

$$P(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1+k}{k} y^k$$

Il faut maintenant construire le polynôme de degré minimal

$$R(e^{-i\omega}) = \sum_{k=0}^m r_k e^{-ik\omega} = r_0 \prod_{k=0}^m (1 - a_k e^{-i\omega})$$

tel que  $|R(e^{-i\omega})|^2 = P(\sin^2 \frac{\omega}{2})$ .

Lorsque les coefficients sont réels,  $\bar{R}(e^{-i\omega}) = R(e^{i\omega})$ , on peut écrire :

$$|R(e^{-i\omega})|^2 = R(e^{-i\omega}) R(e^{i\omega}) = P\left(\frac{2 - e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{4}\right) = Q(e^{-i\omega})$$

Cette factorisation est résolue par la généralisation de cette relation dans tout le plan complexe, avec la variable  $z = e^{-i\omega}$  :

$$R(z) R(z^{-1}) = r_0^2 \prod_{k=0}^m (1 - a_k z) (1 - a_k z^{-1}) = Q(z) = P\left(\frac{2 - z - z^{-1}}{4}\right)$$

Le calcul de  $R$  revient à calculer les racines  $c_k$  de  $Q(z)$ . Comme les coefficients de  $Q(z)$  sont réels et comme  $Q(z)$  est une fonction de  $z + z^{-1}$ ,  $(\overline{c_k}, \frac{1}{c_k}$  et  $\frac{1}{\overline{c_k}})$  sont aussi les racines de  $Q(z)$ . Pour construire  $R(z)$ , chaque racines  $a_k$  de  $R(z)$  sera soit  $c_k$ , soit  $\frac{1}{\overline{c_k}}$ .

Cette procédure fournit un polynôme de degré  $m = N - 1$  avec  $r_0^2 = Q(0) = P\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{N-1}$ . Le filtre correspondant  $H$  de taille minimale et il a  $L = N + m + 1 = 2N$  coefficients non nuls.

### 3.1.3 Ondelettes de Coifman (coiflets)

Les coiflets sont un cas particulier d'ondelettes de Daubechies, elles ont été construites par Coifman, telle que la fonction d'échelle elle ait aussi des moments nuls : on a dès lors la relation (3.1) vérifiée pour  $\psi$ , et la fonction d'échelle vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1 \quad (3.5)$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^\ell \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \ell = 1, \dots, N - 1 \quad (3.6)$$

Dans ce cas, Tian and Wells Jr en 1997 ont démontré le théorème suivant.

**Théorème 3.4 :** *Soient  $\varphi$  la fonction d'échelle de Coifman possède  $N$  moments nuls et  $f$  une fonction de  $C^N(\mathbb{R})$  à support compact, on définit :*

$$S_j f(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2^j}\right) \varphi_{j,k}(x), \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad (3.7)$$

alors,

$$\|f - S_j f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C 2^{-jN} \quad (3.8)$$

où la constante  $C$  depend seulement de  $f$  et  $\varphi$ .

**Démonstration du théorème 3.4 :**

Tout d'abord, le développement de Taylor correspondant à  $f$  au point  $x$  produit,

$$f(y) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{f^{(\ell)}(x)}{\ell!} (y-x)^\ell + \frac{f^{(N)}(\theta)}{N!} (y-x)^N$$

et pour  $y = \frac{k}{2^j}$ , on a

$$f\left(\frac{k}{2^j}\right) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{f^{(\ell)}(x)}{\ell!} \left(\frac{k}{2^j} - x\right)^\ell + \frac{f^{(N)}(\theta_k)}{N!} \left(\frac{k}{2^j} - x\right)^N$$

en multipliant par  $\varphi_{j,k}(x)$ , on trouve

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x) &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{f^{(\ell)}(x)}{\ell!} \left(\frac{k}{2^j} - x\right)^\ell \varphi_{j,k}(x) + \frac{f^{(N)}(\theta_k)}{N!} \left(\frac{k}{2^j} - x\right)^N \varphi_{j,k}(x) \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{f^{(\ell)}(x)}{\ell!} \frac{(-1)^\ell}{2^{j(\ell-\frac{1}{2})}} (2^j x - k)^\ell \varphi(2^j x - k) \\ &\quad + \frac{f^{(N)}(\theta_k)}{N!} \left(\frac{k}{2^j} - x\right)^N \varphi_{j,k}(x) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x) &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{f^{(\ell)}(x)}{\ell!} \frac{(-1)^\ell}{2^{j(\ell-\frac{1}{2})}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^j x - k)^\ell \varphi(2^j x - k) \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{f^{(N)}(\theta_k)}{N!} \left(\frac{k}{2^j} - x\right)^N \varphi_{j,k}(x) \end{aligned}$$

d'après la relation (2.53), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k}{2^j}\right)\varphi_{j,k}(x) &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{f^{(\ell)}(x)}{\ell!} \frac{(-1)^\ell}{2^{j(\ell-\frac{1}{2})}} \int_{\mathbb{R}} x^\ell \varphi(x) dx \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{f^{(N)}(\theta_k)}{N!} \left(\frac{k}{2^j} - x\right)^N \varphi_{j,k}(x) \\ &= 2^{\frac{j}{2}} f(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{f^{(N)}(\theta_k)}{N!} \left(\frac{k}{2^j} - x\right)^N \varphi_{j,k}(x) \end{aligned}$$

donc,  $S_j f(x)$  s'exprime par

$$S_j f(x) = f(x) + 2^{-\frac{j}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{f^{(N)}(\theta_k)}{N!} \left( \frac{k}{2^j} - x \right)^N \varphi_{j,k}(x)$$

ce qui permet d'écrire

$$\|f(x) - S_j f(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{2^{-j(\frac{1}{2}+N)}}{N!} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^{(N)}(\theta_k) (2^j x - k)^N \varphi_{j,k}(x) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

D'autre part, supposons que  $\text{supp} f$  et  $\text{supp} \varphi \subset [-K, K]$ , tel que  $K \in \mathbb{N}$ , alors

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^{(N)}(\theta) (2^j x - k)^N \varphi_{j,k}(x) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \\ & \sum_{|k|, |\acute{k}| \leq (1+2^j)K} \int_{\mathbb{R}} \left( f^{(N)}(\theta_k) f^{(N)}(\theta_{\acute{k}}) (2^j x - k)^N \varphi_{j,k}(x) (2^j x - \acute{k})^N \varphi_{j,\acute{k}}(x) \right) dx \\ & \leq \sum_{|k|, |\acute{k}| \leq (1+2^j)K} \int_{\mathbb{R}} \left( |f^{(N)}(\alpha_k) f^{(N)}(\beta_{\acute{k}})| g(y, k) g(y, \acute{k}) \right) dy \end{aligned}$$

où  $g(y, z) = (1 + |y - z|)^N |\varphi_{0,z}(y)|$   
en vertu de la régularité de  $\varphi$ , il vient

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^{(N)}(\theta) (2^j x - k)^N \varphi_{j,k}(x) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 & \leq \sum_{|k|, |\acute{k}| \leq (1+2^j)K} C_1 \\ & \leq C_2 2^j \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\|f(x) - S_j f(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C 2^{-jN}$$

## 3.2 Ondelettes biorthogonales

Étant données  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ ,  $(\tilde{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  deux analyses multirésolutions régulières caractérisées par leurs fonctions d'échelles  $\varphi, \tilde{\varphi}$  respectivement, vérifient la condition de la biorthogonalité :

$$\langle \varphi_{0,k}, \tilde{\varphi}_{0,\ell} \rangle = \delta_{k,\ell} \quad \forall k, \ell \in \mathbb{Z} \quad (3.9)$$

alors, les fonctions  $\psi, \tilde{\psi}$  définies par :

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_k \sqrt{2} \varphi(2x - k) \quad (3.10)$$

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \sqrt{2} \tilde{\varphi}(2x - k) \quad (3.11)$$

où  $g_k = (-1)^k h_{1-k}$  et  $\tilde{g}_k = (-1)^k \tilde{h}_{1-k}$ .

engendrent par translation des bases orthonormées de  $W_0, \tilde{W}_0$ . Les ondelettes  $\psi, \tilde{\psi}$  sont appelées ondelette primale, duale respectivement.

D'après ces relations, on peut déduire le théorème ci-dessous.

**Théorème 3.5 : (Cohen, Daubechies, Feauveau)**

On dispose deux AMR régulières  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}, (\tilde{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  et biorthogonales, on a :

1. Les coefficients des filtres vérifient entre eux :

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_{2n+\ell} \tilde{h}_\ell = \delta_{0,n} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.12)$$

2. Les filtres d'ondelettes vérifient aussi :

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{2n+\ell} g_\ell = \delta_{0,n} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.13)$$

3. Les ondelettes  $\psi, \tilde{\psi}$  sont biorthogonales.

4. Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on a,  $W_j \perp \tilde{V}_j, \tilde{W}_j \perp V_j, W_j \perp \tilde{W}_k \quad \forall k \neq j$ .

5. Pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on a

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \psi_{j,k} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k} \quad (3.14)$$

### 3.3 Paquets d'ondelettes

Les paquets d'ondelettes ont été construites par Coifman, Meyer et Wickerhauser, qui sont considérées comme une généralisation des autres ondelettes, l'avantage principal des paquets d'ondelettes est qu'on a la liberté du choix de la base de la décomposition du signal, le théorème suivant présente les paquets d'ondelettes à partir du filtre  $H$ .

**Théorème 3.6 (Coifman, Meyer et Wickerhauser) :**

Soit  $\{\theta(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$  une base orthonormée d'un espace vectoriel  $U$  de  $L^2(\mathbb{R})$  et  $H$  est un polynôme trigonométrique vérifiant :

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (3.15)$$

on définit :

$$\hat{u}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\theta}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (3.16)$$

$$\hat{v}(\omega) = e^{-i\frac{\omega}{2}} \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \hat{\theta}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (3.17)$$

alors,  $\{u_{-1,k}, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{v_{-1,k}, k \in \mathbb{Z}\}$  constitue une base orthonormée de  $U$ .

Pour bien de détail sur les paquets d'ondelettes, on peut revenir à la référence [12].

### 3.4 Justification du choix des ondelettes

Dans la compression et le débruitage d'un signal, notre but est de représenter ce signal dans une base d'ondelette avec les moins de coefficients possibles. En effet, il existe des propriétés spécifiques des ondelettes, qui permettent de réduire du nombre des coefficients des ondelettes et de là, il ne reste qu'un nombre petit de ces coefficients nécessaire à la reconstruction, citons : La localisation, l'oscillation et la régularité. On va les étudier dans cette section pour un signal 1-D, et pour le cas d'une image (signal 2-D s'en déduit) facilement.

**-La localisation :** Elle permet en général, d'éviter du problème de la singularité, qui peut se traduire en terme mathématique à la taille du support de la fonction d'échelle et à celle de l'ondelette. En fait, si la taille est petite, alors le nombre des points de la singularité soit faible.

**-L'oscillation :** Ceci se traduit graphiquement par plusieurs passages par zéro de l'ondelette, elle peut s'exprimer en terme de nombre de moments nuls  $N$  de la fonction  $\psi$ . Si l'on considère une fonction régulière, les coefficients d'ondelettes  $d_{j,k}$  vérifiant :

$$|d_{j,k}| \leq C 2^{-j(N+\frac{1}{2})}$$



Cette relation montre qu'on peut mettre à zéro une grande quantité des coefficients d'ondelettes pour reconstruire le signal.

**-La régularité :** Elle peut se présenter dans la régularité de la fonction d'échelle est la même que celle de l'ondelette associée. Cette propriété est utile lors de la reconstruction comme dans l'utilisation des ondelettes biorthogonales, en ce qu'elle permet d'obtenir des coefficients d'ondelettes plus petits.

# Chapitre 4

## Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$

La notion d'analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  se prolonge d'une manière analogue à  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , telle que l'énonce Y. Meyer (voir [41]).

### 4.1 Définitions et propriétés

**Définition 4.1 :** On appelle analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , une suite croissante  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de sous-espaces vectoriels fermés de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ayant les propriétés suivantes :

- (a)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$  et  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .
- (b) Pour tout  $f \in V_0$  et  $k \in \mathbb{Z}^n$ , on a  $f(\cdot - k) \in V_0$ .
- (c) Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on a  $f \in V_j$  si et seulement si  $D_2 f \in V_{j+1}$ .
- (d) Il existe une fonction  $\theta \in V_0$ , telle que la suite  $\{\theta(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$  est une base de Riesz de  $V_0$ .

**Définition 4.2 :** Une analyse multirésolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est  $r$ -régulière ( $r \in \mathbb{N}$ ), si la fonction  $\theta$  de la définition ci-dessus satisfait :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0, \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ et } |\alpha| \leq r$$
$$|\partial^\alpha \theta(x)| \leq C_m (1 + |x|)^{-m}, \quad (4.1)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Le théorème suivant montre l'existence d'une analyse multirésolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  à partir d'une analyse multirésolution régulière  $(V_j^1)_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Théorème 4.3 :** *Etant donnée une analyse multirésolution régulière  $(V_j^1)_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , caractérisée par sa fonction d'échelle  $\varphi$ .*

*On définit une suite  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de manière suivante :*

*Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ ,*

$$V_j = V_j^1 \otimes V_j^1 \otimes \dots \otimes V_j^1 \quad (n \text{ fois}) \quad (4.2)$$

*Alors,  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multirésolution régulière de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  caractérisée par sa fonction d'échelle  $\phi$ , telle que :*

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(x) = \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n). \quad (4.3)$$

**Démonstration du théorème 4.3 :** On a d'abord  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une suite croissante de sous-espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Par suite, on va montrer les propriétés de la définition générale :

(a) En effet, La densité se déduit d'après la formule :

$$\left| \hat{\phi}(0) \right| = 1, \quad (\text{voir [4]})$$

et

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0, \quad \text{toujours vérifiée.}$$

(b) Pour tout  $f \in V_0$  et  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ , il existe une suite  $\{f_i\}_{i=1}^n \in V_0^1$  telle que :

pour tout  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$f(x - k) = f_1(x_1 - k_1) f_2(x_2 - k_2) \dots f_n(x_n - k_n).$$

comme chaque  $f_i(\cdot - k_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  appartient à  $V_0^1$ , on a  $f(\cdot - k) \in V_0$ .

(c) Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on a

$$f \in V_j \Leftrightarrow \exists \{f_i\}_{i=1}^n \in V_j^1; \quad f = f_1 f_2 \dots f_n$$

Nous avons déjà su que,

pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $f_i \in V_j^1$  si et seulement si  $D_2 f_i \in V_{j+1}^1$ .

Ce qui signifie que,

$$f \in V_j \Leftrightarrow D_2 f \in V_{j+1}$$

(d) Pour tout  $f \in V_0$ , il existe une suite des fonctions  $\{f_i\}_{i=1}^n \in V_0^1$  telle que,

$$f = f_1 f_2 \dots f_n,$$

d'où

$$f = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} \alpha_{1, k_1} \alpha_{2, k_2} \dots \alpha_{n, k_n} \varphi(\cdot - k_1) \varphi(\cdot - k_2) \dots \varphi(\cdot - k_n),$$

d'après la définition de  $\phi$ , on trouve que la suite  $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$  engendre  $V_0$ .

Maintenant, on va montrer l'orthonormalité.

Pour tout  $k, m \in \mathbb{Z}^n$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \phi_{0, k}, \phi_{0, m} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x - k) \overline{\phi(x - m)} dx \\ &= \prod_{i=1}^n \langle \varphi_{0, k_i}, \varphi_{0, m_i} \rangle \\ &= \delta_{k, m} \end{aligned}$$

On en déduit que  $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$  est une base orthonormée de  $V_0$ .

**Théorème 4.4 :** Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution régulière de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  telle que sa fonction d'échelle  $\phi$  donnée par la relation (4.3).

Alors, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , la suite de fonctions  $\{\phi_{j, k}\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$  où

$$\phi_{j, k}(x) = 2^{n \frac{j}{2}} \phi(2^j x - k) \quad (4.4)$$

est une base orthonormée de  $V_j$ .

**Démonstration du théorème 4.4 :** Pour tout  $f \in V_j$ , la fonction  $D_{2^{-j}} f \in V_0$  et

$$D_{2^{-j}} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(2^{-j} x) \overline{\phi(x - k)} dx \phi_{0, k},$$

en faisant le changement de variable  $y = 2^{-j}x$ , on obtient :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k},$$

D'ailleurs, pour tout  $k, m \in \mathbb{Z}^n$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j,m} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} 2^{nj} \phi(2^j x - k) \overline{\phi(2^j x - m)} dx \\ &= \prod_{i=1}^n \langle \varphi_{j,k_i}, \varphi_{j,m_i} \rangle \\ &= \delta_{k,m} \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$  est une base orthonormée de  $V_j$ .

Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , si l'on note  $W_j$  le complément orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ , on a en terme ensembliste

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

ce qui peut se traduire sur les opérateurs par la relation :

$$P_{j+1} = P_j + Q_j,$$

où  $Q_j$  est l'opérateur de projection orthogonale de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  sur  $W_j$ . De la définition de l'analyse multirésolution, on a

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j},$$

ce qui signifie qu'une base de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  peut être constituée des bases des différents sous-espaces  $W_j$ .

Dans un cadre assez général, Y. Meyer [41] a démontré l'existence d'une base orthonormale d'ondelettes.

Notons qu'il s'agit en fait d'un cas particulier, mais très important obtenue par produit tensoriel, c'est d'ailleurs le cas le plus souvent utilisé dans la pratique.

Nous allons rappeler ici le théorème d'existence :

**Théorème 4.5 :** Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution régulière de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  telle que sa fonction d'échelle est donnée par la relation (4.3).

Alors, il existe  $q = 2^n - 1$  fonctions  $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots, \psi^{(2^n-1)}$  appartenant à  $V_1$  et ayant les propriétés suivante :

(i) les fonctions  $\{\psi^{(\ell)}(\cdot - k), 1 \leq \ell \leq q, k \in \mathbb{Z}^n\}$  forment une base orthonormée de  $W_0$ .

(ii) Les fonctions  $\{\psi_{j,k}^{(\ell)}, 1 \leq \ell \leq q, k \in \mathbb{Z}^n, j \in \mathbb{Z}\}$  forment une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Démonstration du théorème 4.5 :**

(i) Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_{j+1}^1 \otimes V_{j+1}^1 \otimes \dots \otimes V_{j+1}^1 \quad (n \text{ fois}) \\ &= \left( V_j^1 \oplus W_j^1 \right) \otimes \left( V_j^1 \oplus W_j^1 \right) \otimes \dots \otimes \left( V_j^1 \oplus W_j^1 \right) \quad (n \text{ fois}) \\ &= V_j \oplus W_j \end{aligned}$$

où  $W_j$  est le complément orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ .

Si on définit la famille  $\{\psi^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{2^n-1}$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^{(\ell)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n \psi_{\varepsilon_j, \ell}(x_j) \\ \{\varepsilon_{j, \ell}\}_{j=1}^n \in \{0, 1\}^n - \{0\}^n \\ \psi_0 = \varphi \\ \psi_1 = \psi \end{array} \right.$$

La suite  $\{\psi^{(\ell)}(\cdot - k)\}_{\ell=1}^{2^n-1}$  est une base orthonormée de  $W_0$ .

Par suite,  $\{\psi_{j,k}^{(\ell)}, k \in \mathbb{Z}^n, \ell = 1, \dots, 2^n - 1\}$  est une base orthonormée de  $W_j$ , puisque on a les mêmes résultats en dimension  $n$ , sur la base d'ondelettes.

(ii) D'après la relation :

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j}$$

on trouve que la suite  $\{\psi_{j,k}^{(\ell)}, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n, \ell = 1, \dots, 2^n - 1\}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

En dimension 2, une construction peut se faire par le théorème suivant :

**Théorème 4.6 :** Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution régulière de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Soit  $\phi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$  la fonction d'échelle 2-D associée et  $\psi$  l'ondelette 1-D associée à  $\varphi$ .

On peut alors construire les trois ondelettes suivantes :

$$\psi^{(1)}(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \quad (4.5)$$

$$\psi^{(2)}(x, y) = \psi(x)\varphi(y) \quad (4.6)$$

$$\psi^{(3)}(x, y) = \psi(x)\psi(y) \quad (4.7)$$

Pour tout  $j, n, m \in \mathbb{Z}$ , on a le système :

$$\left\{ \psi_{j,(n,m)}^{(1)}, \psi_{j,(n,m)}^{(2)}, \psi_{j,(n,m)}^{(3)} \right\}_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$$

qui forme une base orthonormée de  $W_j$ .

De plus, le système :

$$\left\{ \psi_{j,(n,m)}^{(1)}, \psi_{j,(n,m)}^{(2)}, \psi_{j,(n,m)}^{(3)} \right\}_{(j,n,m) \in \mathbb{Z}^3}$$

qui constitue une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

**Démonstration du théorème 4.6 :**

Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_{j+1}^1 \otimes V_{j+1}^1 \\ &= (V_j^1 \oplus W_j^1) \otimes (V_j^1 \oplus W_j^1) \\ &= (V_j^1 \otimes V_j^1) \oplus (V_j^1 \otimes W_j^1) \oplus (W_j^1 \otimes V_j^1) \\ &\quad \oplus (W_j^1 \otimes W_j^1) \end{aligned}$$

d'où

$$W_j = (V_j^1 \otimes W_j^1) \oplus (W_j^1 \otimes V_j^1) \oplus (W_j^1 \otimes W_j^1)$$

ce qui montre que la suite

$$\left\{ \psi_{j,(n,m)}^{(1)}, \psi_{j,(n,m)}^{(2)}, \psi_{j,(n,m)}^{(2)} \right\}_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$$

est une base orthonormée de  $W_j$ .

Par conséquent,

$$\left\{ \psi_{j,(n,m)}^{(1)}, \psi_{j,(n,m)}^{(2)}, \psi_{j,(n,m)}^{(3)} \right\}_{(j,n,m) \in \mathbb{Z}^3}$$

est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

## 4.2 Algorithmes de Mallat pour ( $n = 2$ )

Nous décrivons ici l'algorithme de S. Mallat, pour une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

On considère une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  et  $P_j$  (*resp.*  $Q_j$ ) la projection de  $f$  dans  $V_j$  (*resp.*  $W_j$ ), alors :

$$P_j f = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,(n,m)} \rangle \phi_{j,(n,m)} \quad (4.8)$$

et on désigne par  $AI_j f = \{ \langle f, \phi_{j,(n,m)} \rangle \}_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$  : l'approximation de  $f$  à la résolution  $2^{-j}$ , on trouve que :

$$\begin{aligned} \langle f, \phi_{j,(n,m)} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) 2^j \phi(2^j x - n, 2^j y - m) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) 2^j \phi[-2^j((2^{-j}n, 2^{-j}m) - (x,y))] dx dy \\ &= f * \phi_{2^j}(2^{-j}n, 2^{-j}m) \end{aligned}$$

où on a posé  $\phi_a(x,y) = a\phi(-ax, -ay)$ .

L'approximation de  $f$  à la résolution  $2^{-j}$  peut donc être obtenue comme produit de convolution.

De même, la projection de  $f$  dans  $W_j$  se décompose en :

-Projection dans  $V_j^1 \otimes W_j^1$  :

$$Q_j^{(1)} f = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,(n,m)}^{(1)} \rangle \psi_{j,(n,m)}^{(1)} \quad (4.9)$$



-Projection dans  $W_j^1 \otimes V_j^1$  :

$$Q_j^{(2)} f = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,(n,m)}^{(2)} \rangle \psi_{j,(n,m)}^{(2)} \quad (4.10)$$

-Projection dans  $W_j^1 \otimes W_j^1$  :

$$Q_j^{(3)} f = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,(n,m)}^{(3)} \rangle \psi_{j,(n,m)}^{(3)} \quad (4.11)$$

Ces projections se caractérisent par les coefficients qui peuvent s'écrire de la même manière que  $\langle f, \phi_{j,(n,m)} \rangle$ .

**-Formule de la décomposition :**

Comme  $V_j \subset V_{j+1}$ , il vient

$$\phi_{j,(n,m)} = \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j,(n,m)}, \phi_{j+1,(k,\ell)} \rangle \phi_{j+1,(k,\ell)} \quad (4.12)$$

d'où

$$\langle f, \phi_{j,(n,m)} \rangle = \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j,(n,m)}, \phi_{j+1,(k,\ell)} \rangle \langle f, \phi_{j+1,(k,\ell)} \rangle \quad (4.13)$$

D'autre part,

$$\langle \phi_{j,(n,m)}, \phi_{j+1,(k,\ell)} \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} 2^{2j+1} \phi(2^j x - n, 2^j y - m) \phi(2^{j+1} x - k, 2^{j+1} y - \ell) dx dy$$

En faisant le changement de variable,

$$X = 2^{j+1} x - k, \quad Y = 2^{j+1} y - \ell$$

on obtient,

$$\langle \phi_{j,(n,m)}, \phi_{j+1,(k,\ell)} \rangle = \phi * \phi_{2^{-1}}(2n - k, 2m - \ell),$$

(4.13) devient,

$$AI_{j,(n,m)} f = \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \phi * \phi_{2^{-1}}(2n - k, 2m - \ell) AI_{j+1,(k,\ell)} f \quad (4.14)$$

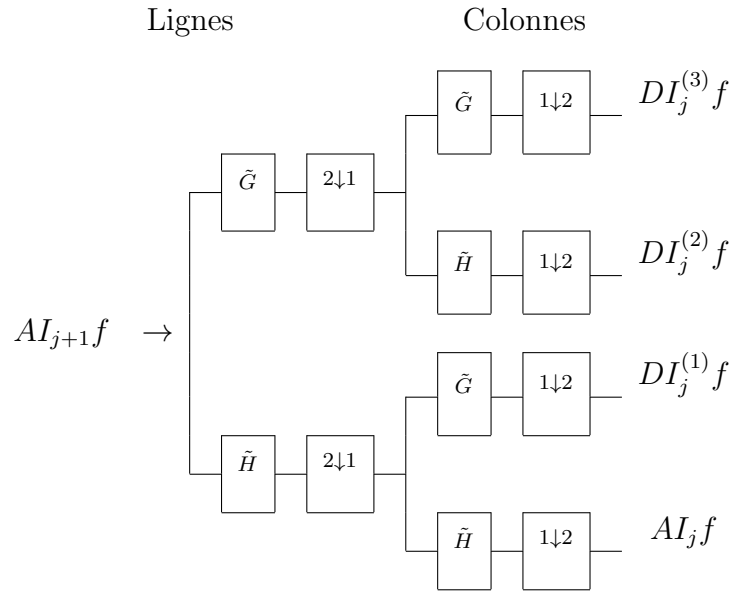
On montre aussi que si l'on note  $DI_j^{(1)}$ ,  $DI_j^{(2)}$  et  $DI_j^{(3)}$  les coefficients des projections de la fonction  $f$  respectivement dans :  $V_j^1 \otimes W_j^1$ ,  $W_j^1 \otimes V_j^1$ ,  $W_j^1 \otimes W_j^1$ , alors on a les équations suivantes :

$$DI_{j,(n,m)}^{(1)} f = \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \phi * \psi_{2^{-1}}^{(1)}(2n - k, 2m - \ell) AI_{j+1,(k,\ell)} f \quad (4.15)$$

$$DI_{j,(n,m)}^{(2)} f = \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \phi * \psi_{2^{-1}}^{(2)}(2n - k, 2m - \ell) AI_{j+1,(k,\ell)} f \quad (4.16)$$

$$DI_{j,(n,m)}^{(3)} f = \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \phi * \psi_{2^{-1}}^{(3)}(2n - k, 2m - \ell) AI_{j+1,(k,\ell)} f \quad (4.17)$$

Le schéma d'algorithme de Mallat associé à cette décomposition est représenté dans la Figure 4.1 :



- $\boxed{X}$  : Convolution (lignes ou colonnes) avec le filtre  $X$
- $\boxed{1 \downarrow 2}$  : Conserver une ligne sur deux
- $\boxed{2 \downarrow 1}$  : Conserver une colonne sur deux

FIGURE 4.1 – Schéma de décomposition

**-Formule de la reconstruction :** En fait, l'espace  $V_{j+1}$  peut s'exprimer comme une somme directe de  $V_j$  et  $W_j$ , on trouve alors,

$$\begin{aligned}
\phi_{j+1,(n,m)} &= \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j+1,(n,m)}, \phi_{j,(k,\ell)} \rangle \phi_{j,(k,\ell)} \\
&+ \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j+1,(n,m)}, \psi_{j,(k,\ell)}^{(1)} \rangle \psi_{j,(k,\ell)}^{(1)} \\
&+ \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j+1,(n,m)}, \psi_{j,(k,\ell)}^{(2)} \rangle \psi_{j,(k,\ell)}^{(2)} \\
&+ \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j+1,(n,m)}, \psi_{j,(k,\ell)}^{(3)} \rangle \psi_{j,(k,\ell)}^{(3)} \\
&= P_j \phi_{j+1,(n,m)} + Q_j^{(1)} \phi_{j+1,(n,m)} + Q_j^{(2)} \phi_{j+1,(n,m)} + Q_j^{(3)} \phi_{j+1,(n,m)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\langle f, \phi_{j+1,(n,m)} \rangle &= \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j+1,(n,m)}, \phi_{j,(k,\ell)} \rangle \langle f, \phi_{j,(k,\ell)} \rangle \\
&+ \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j+1,(n,m)}, \psi_{j,(k,\ell)}^{(1)} \rangle \langle f, \psi_{j,(k,\ell)}^{(1)} \rangle \\
&+ \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j+1,(n,m)}, \psi_{j,(k,\ell)}^{(2)} \rangle \langle f, \psi_{j,(k,\ell)}^{(2)} \rangle \\
&+ \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \langle \phi_{j+1,(n,m)}, \psi_{j,(k,\ell)}^{(3)} \rangle \langle f, \psi_{j,(k,\ell)}^{(3)} \rangle
\end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
AI_{j+1,(n,m)}f &= \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \phi * \phi_{2^{-1}}(2k - n, 2\ell - m) AI_{j,(k,\ell)}f \\
&+ \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \phi * \psi_{2^{-1}}^{(1)}(2k - n, 2\ell - m) DI_{j,(k,\ell)}^{(1)} \\
&+ \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \phi * \psi_{2^{-1}}^{(2)}(2k - n, 2\ell - m) DI_{j,(k,\ell)}^{(2)} \\
&+ \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} \phi * \psi_{2^{-1}}^{(3)}(2k - n, 2\ell - m) DI_{j,(k,\ell)}^{(3)}
\end{aligned}$$

Le schéma d'algorithme de Mallat associé à cette reconstruction est représenté dans la Figure 4.2 :



# Chapitre 5

## Nouvelles bases adaptatives des ondelettes

L'hybridation d'espace de détail en anglais HDS (hybridization of detail space) est une nouvelle méthode construite en 2016 pour éviter du problème de singularité des signaux (voir [7]), elle est basée sur la construction d'une nouvelle base de chaque espace de détail, dont on peut réduire le nombre des coefficients d'ondelettes indépendamment de la singularité du signal. Dans ce chapitre, on va donner une étude approfondie sur cette nouvelle méthode.

### 5.1 L'espace de détail hybride

**Définition 5.1 :** Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution  $r$ -régulière de  $L^2(\mathbb{R})$  caractérisée par sa fonction d'ondelette  $\psi$ , l'espace de détail hybride est un sous-espace de  $W_j$  noté  $(W_j^H)$  défini comme suit :

$$W_j^H = \overline{\text{span} \left\{ \Psi_{j,p}^{(i)}, 1 \leq i \leq N_{j,p}, p \text{ est un nombre premier} \right\}}$$

tel que

$$\begin{pmatrix} \Psi_{j,p}^{(1)} \\ \Psi_{j,p}^{(2)} \\ \vdots \\ \Psi_{j,p}^{(k)} \\ \vdots \\ \Psi_{j,p}^{(N_{j,p})} \end{pmatrix} = A_{j,p} \begin{pmatrix} \psi_{j,p} \\ \psi_{j,2p} \\ \vdots \\ \psi_{j,2^{k-1}p} \\ \vdots \\ \psi_{j,2^{N_{j,p}-1}p} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

où  $A_{j,p}$  est une matrice orthogonale de  $M_{N_{j,p}}(\mathbb{R})$  et  $N_{j,p}$  est nombre entier.

**Remarque 5.2 :** D'après la formule (5.1), on peut écrire les éléments  $\{\Psi_{j,p}^{(i)}\}_{i=1}^{N_{j,p}}$  de manière suivante :

$$\Psi_{j,p}^{(i)} = \sum_{k=1}^{N_{j,p}} r_{(j,p)}^{(i)}(k) \psi_{j,2^{k-1}p}; \quad 1 \leq i \leq N_{j,p} \quad (5.2)$$

**Théorème 5.3 :** La famille  $\{\Psi_{j,p}^{(i)}; 1 \leq i \leq N_{j,p}, p \text{ est un nombre premier}\}$  définie dans (5.1) constitue une base orthonormée de  $W_j^H$ .

**Démonstration du théorème 5.3 :** Il suffit de prouver l'orthonormalité entre les vecteurs  $\{\Psi_{j,p}^{(i)}\}$ .

$p$  et  $q$  deux nombres premiers et pour  $i, \varrho$  tel que  $1 \leq i \leq N_{j,p}, 1 \leq \varrho \leq N_{j,q}$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{j,p}^{(i)}, \Psi_{j,q}^{(\varrho)} \rangle &= \sum_{k,l=1}^{N_{j,p}, N_{j,q}} r_{(j,p)}^{(i)}(k) r_{(j,q)}^{(\varrho)}(l) \langle \psi_{j,2^{k-1}p}, \psi_{j,2^{l-1}q} \rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^{N_{j,p}, N_{j,q}} r_{(j,p)}^{(i)}(k) r_{(j,q)}^{(\varrho)}(l) \delta_{2^{k-1}p, 2^{l-1}q} \end{aligned}$$

On veut prouver que  $2^{k-1}p = 2^{l-1}q$  si et seulement si  $k = l$  et  $p = q$ , pour tout  $k, l, p, q$ . Pour cela, on suppose que  $2^{k-1}p = 2^{l-1}q$  et  $k \neq l$ , dans ce cas, le nombre premier  $p$  ou  $q$  divisera l'autre premier nombre. Par conséquent, cela est une contradiction avec le fait que  $p$  et  $q$  sont des nombres premiers. On ob-

tient alors,

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{j,p}^{(i)}, \Psi_{j,q}^{(\varrho)} \rangle &= \sum_{k,l=1}^{N_{j,p}, N_{j,q}} r_{(j,p)}^{(i)}(k) r_{(j,q)}^{(\varrho)}(l) \delta_{k,l} \delta_{p,q} \\
&= \sum_{k,l=1}^{N_{j,p}, N_{j,q}} r_{(j,p)}^{(i)}(k) r_{(j,q)}^{(\varrho)}(l) \delta_{k,l} \delta_{p,q} \\
&= \delta_{p,q} \delta_{i,\varrho}
\end{aligned}$$

Enfin, la famille  $\left\{ \Psi_{j,p}^{(i)}; 1 \leq i \leq N_{j,p}, p \text{ est un nombre premier} \right\}$  est une base orthonormée de  $W_j^H$ .

**Théorème 5.4 :** Soit  $W_j^H$  un hybride espace de détail de  $W_j$ , alors

$$W_j = W_j^H \oplus (W_j^H)^\perp \quad (5.3)$$

où

$$(W_j^H)^\perp = \overline{\text{span} \left\{ \psi_{j,l}; l \notin \left\{ \begin{array}{l} 2^{k-1}p, 1 \leq k \leq N_{j,p} \text{ et} \\ p \text{ est un nombre premier} \end{array} \right\} \right\}}$$

Ainsi, la famille

$$\begin{aligned}
&\left\{ \Psi_{j,p}^{(i)}; 1 \leq i \leq N_{j,p}, p \text{ est un nombre premier} \right\} \cup \\
&\left\{ \psi_{j,l}; l \notin \left\{ \begin{array}{l} 2^{k-1}p, 1 \leq k \leq N_{j,p} \text{ et} \\ p \text{ est un nombre premier} \end{array} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

est une base orthonormée de  $W_j$ .

**Démonstration du théorème 5.4 :** Puisque  $W_j^H$  est un espace fermé d'un espace d'Hilbert  $W_j$ , alors selon le théorème de la projection orthogonale, on obtient la relation(5.3). D'autre part, la formule (5.1) donne

$$\begin{pmatrix} \psi_{j,p} \\ \psi_{j,2p} \\ \vdots \\ \psi_{j,2^{k-1}p} \\ \vdots \\ \psi_{j,2^{N_{j,p}-1}p} \end{pmatrix} = A_{j,p}^{-1} \begin{pmatrix} \Psi_{j,p}^{(1)} \\ \Psi_{j,p}^{(2)} \\ \vdots \\ \Psi_{j,p}^{(k)} \\ \vdots \\ \Psi_{j,p}^{(N_{j,p})} \end{pmatrix}$$

ceci implique que tout élément de la famille

$\{\psi_{j,2^{k-1}p}; 1 \leq k \leq N_{j,p}, p \text{ est un nombre premier}\}$  peut être écrit sous forme de combinaisons linéaires de vecteurs,

$$\left\{ \Psi_{j,p}^{(i)}; 1 \leq i \leq N_{j,p}, p \text{ est un nombre premier} \right\}.$$

De plus, pour  $l \notin \left\{ \begin{array}{l} 2^{k-1}p, 1 \leq k \leq N_{j,p} \text{ et} \\ p \text{ est un nombre premier} \end{array} \right\}$  et  $1 \leq i \leq N_{j,q}, q$  est un nombre premier, on a

$$\left\langle \Psi_{j,q}^{(i)}, \psi_{j,l} \right\rangle = 0$$

Ainsi la famille

$$\left\{ \Psi_{j,p}^{(i)}; 1 \leq i \leq N_{j,p}, p \text{ est un nombre premier} \right\} \cup \left\{ \psi_{j,l}; l \notin \left\{ \begin{array}{l} 2^{k-1}p, 1 \leq k \leq N_{j,p} \text{ et} \\ p \text{ est un nombre premier} \end{array} \right\} \right\}$$

est une base orthonormée de  $W_j$ .

Grâce à ce théorème, nous observons que la projection orthogonale de tout signal de  $L^2(\mathbb{R})$  sur  $W_j$  peut être exprimée comme une somme de deux projections orthogonales sur  $W_j^H$  et  $(W_j^H)^\perp$ .

**Corollaire 5.5 :** Soit  $(W_j^H)_{j \geq 0}$  une suite d'hybride d'espace de détail de  $L^2(\mathbb{R})$ , alors on peut décomposer  $L^2(\mathbb{R})$  comme :

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \bigoplus \left( \bigoplus_{j \geq 0} \left( W_j^H \bigoplus (W_j^H)^\perp \right) \right) \quad (5.4)$$



Ainsi, pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on a

$$f = P_{V_0}f + \sum_{\substack{j \geq 0 \\ p \text{ est un nombre premier} \\ l \notin \{2^{k-1}p, 1 \leq k \leq N_{j,p}\}}} d_{j,l} \psi_{j,l} + \sum_{\substack{j \geq 0 \\ p \text{ est un nombre premier} \\ 1 \leq i \leq N_{j,p}}} D_{j,p}^{(i)} \Psi_{j,p}^{(i)} \quad (5.5)$$

où  $P_{V_0}f$  est la projection orthogonale de  $f$  sur  $V_0$ ,  $d_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_{j,k}(x) dx$  et  $D_{j,p}^{(i)} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \Psi_{j,p}^{(i)}(x) dx$ .

**Démonstration du corollaire 5.5 :** Si l'on applique le théorème précédent et en tenant compte du fait que  $L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus \left( \bigoplus_{j \geq 0} W_j \right)$ , ce corollaire sera immédiat.

**Remarque 5.6 :** On peut définir  $W_j^H$  pour un nombre fini de nombres premiers comme :

$$W_j^H = \overline{\text{span} \left\{ \Psi_{j,p}^{(i)}; 1 \leq i \leq N_{j,p}, p \text{ est un nombre premier tel que } N_1 \leq p \leq N_2 \right\}}$$

Le théorème suivant caractérise l'espace de détail hybride.

**Théorème 5.7 :** Soit  $W_j^H$  un espace de détail hybride de  $W_j$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , alors pour tout nombre premier  $p$ , elle existe une matrice orthogonale  $A_{j,p,\alpha}$  de  $M_{N_{j,p}}(\mathbb{R})$  vérifie :

$$A_{j,p,\alpha} \begin{pmatrix} d_{j,p} \\ d_{j,2p} \\ \dots \\ \dots \\ d_{j,2^{N_{j,p}-1}p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{j,p}^{(1)} \\ D_{j,p}^{(2)} \\ \dots \\ \dots \\ D_{j,p}^{(N_{j,p})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{j,p}^{(1)} \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

La preuve de ce théorème a besoin d'introduire le lemme suivant.

**Lemme 5.8 :** Soit  $U = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$  un vecteur de  $M_{N,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , alors elle existe une matrice orthogonale  $A_\alpha$  de  $M_N(\mathbb{R})$  vérifie :

$$A_\alpha U = V_\alpha$$

où  $V_\alpha = (v_{\alpha,1}, v_{\alpha,2}, \dots, v_{\alpha,N})^T$  est un vecteur de  $M_{N,1}(\mathbb{R})$  tel que  $v_{\alpha,1} \neq 0$  et  $v_{\alpha,i} = 0$  pour tout  $i = 2, \dots, N$

**Démonstration du Lemme 5.8 :**

Soit  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$  un vecteur de  $M_{N,1}(\mathbb{R})$  tel que  $x_1 = \alpha$  et  $x_i = 0$  pour tout  $i = 2, \dots, N$ .

On pose  $B = XU^T \in M_N(\mathbb{R})$ , on a alors

$$B = \begin{pmatrix} \alpha u_1 & \alpha u_2 & \dots & \alpha u_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

D'après la décomposition en valeurs singulières,  $B$  peut s'écrire comme :

$$B = PQR^T$$

où  $P, R$  sont les matrices orthogonales et  $Q$  est la matrice diagonale de  $M_N(\mathbb{R})$  telles que les  $N - 1$  dernières colonnes de  $R$  sont obtenues de manière suivante :

$$B^T B Y_i = 0, \quad \forall i = 2, \dots, N$$

parce que  $rg(B) = rg(B^T B) = rg(B B^T) = 1$ .

D'autre part, on a

$$B^T B = \alpha^2 \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \dots & u_1 u_N \\ u_2 u_1 & u_2^2 & \dots & u_2 u_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_N u_1 & \dots & \dots & u_N^2 \end{pmatrix}$$

Si on a posé  $Y_i = (\beta_1^i, \beta_2^i, \dots, \beta_N^i)$ ,  $\forall i = 2, \dots, N$ , on va obtenir

$$B^T B Y_i = \alpha^2 \begin{pmatrix} u_1 \sum_{k=1}^N u_k \beta_k^i \\ \dots \\ \dots \\ u_N \sum_{k=1}^N u_k \beta_k^i \end{pmatrix} = 0, \quad \forall i = 2, \dots, N$$

Comme  $U \neq 0$ , alors il existe  $u_{j_0} \neq 0$  tel que :

$$u_{j_0} \sum_{k=1}^N u_k \beta_k^i = 0 \text{ pour tout } i = 2, \dots, N$$

D'où  $\sum_{k=1}^N u_k \beta_k^i = 0, \forall i = 2, \dots, N$

Par conséquent, si on a pris  $A_\alpha = R^T$ , on obtient  $v_{\alpha,i} = 0$  pour tout  $i = 2, \dots, N$  et  $v_{\alpha,1} \neq 0$  car  $\|A_\alpha U\| = \|U\| \neq 0$ .

**Démonstration du théorème 5.7 :**

Pour  $U = \left( d_{j,p}, d_{j,2p}, \dots, d_{j,2^{N_{j,p}-1}p} \right)^T$ , on suppose que  $U \neq 0$ . Grâce au lemme précédent le théorème est vérifié.

Dans le cas où  $U = 0$ , toutes les matrices orthogonales vérifient :

$$A_{j,p,\alpha} U = 0$$

Donc, le théorème est vérifié pour tout  $U \in \mathbb{R}$ .

### 5.1.1 Les avantages de la technique HDS

La méthode (HDS) possède des avantages par rapport à la méthode de la transformée discrète en ondelettes ou en anglais DWT (Discrete Wavelet Transform), qui sont :

1. En choisissant une matrice orthogonale appropriée pour chaque nombre premier comme dans le théorème (5.7), la méthode de l'hybridation de l'espace de détail peut mettre un grand nombre d'hybrides coefficients d'ondelettes sont égaux à zéro dans la décomposition du signal indépendamment de la singularité de ce signal, alors que la méthode (DWT) ne peut pas mettre à zéro les coefficients d'ondelettes qui sont liés aux zones où le signal a des grandes singularités.
2. La méthode (HDS) peut calculer le nombre de non nuls hybrides coefficients d'ondelettes en choisissant le nombre des nombres premiers comme dans la remarque (5.6), mais la méthode (DWT) n'a pas cette propriété pour ses coefficients d'ondelettes.

## 5.2 Décomposition dans le cas bidimensionnel

Avant de présenter la nouvelle décomposition d'un signal dans le cas bidimensionnel, on a le besoin du théorème suivant.

**Théorème 5.9 :** Soit  $(V_j^1)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution  $r$ -régulière de  $L^2(\mathbb{R})$  caractérisée par ses fonction d'échelle et celle d'ondelette  $\varphi$ , respectivement  $\psi$ . On considère le séparable analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  associée à  $(V_j^1)_{j \in \mathbb{Z}}$ , alors la famille

$$\begin{aligned} & \left\{ \varphi_{j,k}(x) \Psi_{j,p}^{(i)}(y); 1 \leq i \leq N_{j,p}, p \text{ est un nombre premier}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \\ & \left\{ \varphi_{j,k}(x) \psi_{j,l}(y); l \notin \left\{ \begin{array}{l} 2^{n-1}p, 1 \leq n \leq N_{j,p} \text{ et} \\ p \text{ est un nombre premier} \end{array} \right\}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \\ & \left\{ \Psi_{j,p}^{(i)}(x) \varphi_{j,k}(y); 1 \leq i \leq N_{j,p}, p \text{ est un nombre premier}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \\ & \left\{ \psi_{j,l}(x) \varphi_{j,k}(y); l \notin \left\{ \begin{array}{l} 2^{n-1}p, 1 \leq n \leq N_{j,p} \text{ et} \\ p \text{ est un nombre premier} \end{array} \right\}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \\ & \left\{ \psi_{j,k}(x) \Psi_{j,p}^{(i)}(y); 1 \leq i \leq N_{j,p}, p \text{ est un nombre premier}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \\ & \left\{ \psi_{j,k}(x) \psi_{j,l}(y); l \notin \left\{ \begin{array}{l} 2^{n-1}p, 1 \leq n \leq N_{j,p} \text{ et} \\ p \text{ est un nombre premier} \end{array} \right\}, k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

est une base orthonormée de  $W_j$ .

**Démonstration du théorème 5.9 :** Il est bien connu que de [41], tous les espaces de détail dans le cas bidimensionnel pour une séparable analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  sont décomposés comme :

$$W_j = \left( V_j^1 \otimes W_j^1 \right) \oplus \left( W_j^1 \otimes V_j^1 \right) \oplus \left( W_j^1 \otimes W_j^1 \right)$$

En outre, après les décompositions suivantes :

$$\begin{aligned} V_j^1 \otimes W_j^1 &= V_j^1 \otimes \left( W_j^{1H} \oplus (W_j^{1H})^\perp \right) \\ &= \left( V_j^1 \otimes W_j^{1H} \right) \oplus \left( V_j^1 \otimes (W_j^{1H})^\perp \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_j^1 \otimes V_j^1 &= (W_j^{1H} \oplus (W_j^{1H})^\perp) \otimes V_j^1 \\
&= (W_j^{1H} \otimes V_j^1) \oplus ((W_j^{1H})^\perp \otimes V_j^1) \\
W_j^1 \otimes W_j^1 &= W_j^1 \otimes (W_j^{1H} \oplus (W_j^{1H})^\perp) \\
&= (W_j^1 \otimes W_j^{1H}) \oplus (W_j^1 \otimes (W_j^{1H})^\perp)
\end{aligned}$$

le théorème est satisfait.

**Corollaire 5.10 :** *La projection orthogonale d'un signal  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  sur  $V_j$  est exprimée par la formule de décomposition suivante :*

$$\begin{aligned}
P_{V_j} f &= P_{V_{j-1}} f + P_{V_{j-1}^1 \otimes W_{j-1}^{1H}} f + P_{V_{j-1}^1 \otimes (W_{j-1}^{1H})^\perp} f + P_{W_{j-1}^{1H} \otimes V_{j-1}^1} f \\
&\quad + P_{(W_{j-1}^{1H})^\perp \otimes V_{j-1}^1} f + P_{W_{j-1}^1 \otimes W_{j-1}^{1H}} f + P_{W_{j-1}^1 \otimes (W_{j-1}^{1H})^\perp} f \quad (5.6)
\end{aligned}$$

Le schéma de décomposition correspondant à la méthode d'hybridation d'espace de détail au niveau  $j$  est représenté ci-dessous dans la Figure 5.1 :

$V_{j-1}$		$W_{j-1}^{1H} \otimes V_{j-1}^1$	$(W_{j-1}^{1H})^\perp \otimes V_{j-1}^1$
$V_{j-1}^1 \otimes W_{j-1}^{1H}$	$V_{j-1}^1 \otimes (W_{j-1}^{1H})^\perp$	$W_{j-1}^1 \otimes W_{j-1}^{1H}$	$W_{j-1}^1 \otimes (W_{j-1}^{1H})^\perp$

FIGURE 5.1 – Schéma de décomposition au niveau  $j$  avec la méthode (HDS)

### 5.3 Algorithme de compression basé sur la méthode (HDS)

Cette section illustre le travail de l'algorithme de la méthode (HDS).

### 5.3.1 Caractérisation des hybrides coefficients d'ondelettes

Dans cette sous-section, on caractérise les hybrides coefficients d'ondelettes pour un signal  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$  en les décomposant dans les coefficients d'ondelettes classiques.

Soient  $DI_j^{(1)}$ ,  $DI_j^{(2)}$ ,  $DI_j^{(3)}$  les classiques coefficients d'ondelettes des espace de détail, respectivement :  $V_j^1 \otimes W_j^1$ ,  $W_j^1 \otimes V_j^1$ ,  $W_j^1 \otimes W_j^1$  tels que :

$$\begin{aligned} DI_{j,(n,m)}^{(1)} &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \varphi_{j,n}(x) \psi_{j,m}(y) dx dy \\ DI_{j,(n,m)}^{(2)} &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \psi_{j,n}(x) \varphi_{j,m}(y) dx dy \\ DI_{j,(n,m)}^{(3)} &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \psi_{j,n}(x) \psi_{j,m}(y) dx dy \end{aligned}$$

alors les hybrides coefficients d'ondelettes,  $DH_j^{(i,1)}$ ,  $DH_j^{(i,2)}$ ,  $DH_j^{(i,3)}$  respectivement de  $V_j^1 \otimes W_j^{1H}$ ,  $W_j^{1H} \otimes V_j^1$ ,  $W_j^1 \otimes W_j^{1H}$  peuvent être écrits comme suit :

$$DH_{j,(k,p)}^{(i,1)} = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \varphi_{j,k}(x) \Psi_{j,p}^{(i)}(y) dx dy = \sum_{n=1}^{N_{j,p}} r_{j,p}^{(i)}(n) DI_{j,(k,2^{n-1}p)}^{(1)} \quad (5.7)$$

$$DH_{j,(k,p)}^{(i,2)} = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \Psi_{j,p}^{(i)}(x) \varphi_{j,k}(y) dx dy = \sum_{n=1}^{N_{j,p}} s_{j,p}^{(i)}(n) DI_{j,(2^{n-1}p,k)}^{(2)} \quad (5.8)$$

$$DH_{j,(k,p)}^{(i,3)} = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \psi_{j,k}(x) \Psi_{j,p}^{(i)}(y) dx dy = \sum_{n=1}^{N_{j,p}} t_{j,p}^{(i)}(n) DI_{j,(k,2^{n-1}p)}^{(3)} \quad (5.9)$$

où le hybride espace de détail  $W_j^{1H}$  est changé dans chaque espace de détail, qui sont :  $V_j^1 \otimes W_j^1$ ,  $W_j^1 \otimes V_j^1$ ,  $W_j^1 \otimes W_j^1$  pour atteindre la réduction des hybrides coefficients d'ondelettes. Cela signifie que, pour un nombre entier choisi  $k_0$ , en appliquant le théorème (5.7), les coefficients

$$\left\{ DH_{j,(k_0,p)}^{(i,1)}, DH_{j,(k_0,p)}^{(i,2)}, DH_{j,(k_0,p)}^{(i,3)}; 1 \leq i \leq N_{j,p} \right\}$$

seront réduits à  $\left\{ DH_{j,(k_0,p)}^{(1,1)}, DH_{j,(k_0,p)}^{(1,2)}, DH_{j,(k_0,p)}^{(1,3)} \right\}$ .

D'après les relations (5.7), (5.8), (5.9), il semble que, chaque nombre premier  $p$  est caractérisé par ses matrices des hybrides coefficients ondelettes :  $M_{j,p}^{(1)}, M_{j,p}^{(2)}, M_{j,p}^{(3)}$ , respectivement dans  $V_j^1 \otimes W_j^{1H}, W_j^{1H} \otimes V_j^1, W_j^1 \otimes W_j^{1H}$  tel que :

$$\begin{aligned} M_{j,p}^{(1)}(i, k) &= DH_{j,(k,p)}^{(i,1)}; \quad 1 \leq i \leq N_{j,p} \\ M_{j,p}^{(2)}(i, k) &= DH_{j,(k,p)}^{(i,2)}; \quad 1 \leq i \leq N_{j,p} \\ M_{j,p}^{(3)}(i, k) &= DH_{j,(k,p)}^{(i,3)}; \quad 1 \leq i \leq N_{j,p} \end{aligned}$$

d'où, les matrices  $M_{j,p}^{(1)}, M_{j,p}^{(2)}, M_{j,p}^{(3)}$  peuvent être écrites comme :

$$\begin{aligned} M_{j,p}^{(1)} &= A_{j,p} L_{j,p}^{(1)} \\ M_{j,p}^{(2)} &= B_{j,p} L_{j,p}^{(2)} \\ M_{j,p}^{(3)} &= C_{j,p} L_{j,p}^{(3)} \end{aligned}$$

où  $A_{j,p}, B_{j,p}, C_{j,p}$  sont les différentes orthogonales matrices associées à  $W_j^{1H}$ , respectivement dans :  $V_j^1 \otimes W_j^1, W_j^1 \otimes V_j^1, W_j^1 \otimes W_j^1$  et  $L_{j,p}^{(1)}, L_{j,p}^{(2)}, L_{j,p}^{(3)}$  sont les matrices des classiques coefficients d'ondelettes respectivement dans :  $V_j^1 \otimes W_j^1, W_j^1 \otimes V_j^1, W_j^1 \otimes W_j^1$  tel que leurs colonnes sont respectivement :

$$\left( \begin{array}{c} DI_{j,(k,p)}^{(1)} \\ DI_{j,(k,2p)}^{(1)} \\ \dots \\ \dots \\ DI_{j,(k,2^{N_{j,p}-1}p)}^{(1)} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{c} DI_{j,(p,k)}^{(2)} \\ DI_{j,(2p,k)}^{(2)} \\ \dots \\ \dots \\ DI_{j,(2^{N_{j,p}-1}p,k)}^{(2)} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{c} DI_{j,(k,p)}^{(3)} \\ DI_{j,(k,2p)}^{(3)} \\ \dots \\ \dots \\ DI_{j,(k,2^{N_{j,p}-1}p)}^{(3)} \end{array} \right)$$

Notant que, les matrices orthogonales  $A_{j,p}, B_{j,p}, C_{j,p}$  sont construites d'une manière de réaliser la réduction des hybrides coefficients d'ondelettes. Cette réduction est obtenue en appliquant le théorème (5.7) sur une seule colonne dans  $L_{j,p}^{(1)}, L_{j,p}^{(2)}$  et  $L_{j,p}^{(3)}$ . En plus de cette note, les coefficients d'ondelettes de  $V_j^1 \otimes (W_j^{1H})^\perp, (W_j^{1H})^\perp \otimes V_j^1, W_j^1 \otimes (W_j^{1H})^\perp$  sont respectivement arrangés dans les matrices :  $DI_j^{(1)} \setminus L_{j,p}^{(1)}, DI_j^{(2)} \setminus L_{j,p}^{(2)}, DI_j^{(3)} \setminus L_{j,p}^{(3)}$ .

### 5.3.2 Les étapes de l'algorithme et le diagramme associé

Cette sous-section donne les étapes détaillées de l'algorithme de (HDS) avec le diagramme correspondant.

**Étape 1 :** Chargement de l'image.

**Étape 2 :** Décomposition de l'image avec (DWT) au niveau  $j$  produit les matrices :  $DI_j^{(1)}$ ,  $DI_j^{(2)}$ ,  $DI_j^{(3)}$ .

**Étape 3 :** Cette étape se compose de cinq sous étapes comme suit :

- Présentation des nombres premiers et les rangs  $N_{j,p}$  des correspondantes matrices orthogonales.

- De l'étape 2, on extrait les matrices :  $L_{j,p}^{(1)}$ ,  $L_{j,p}^{(2)}$ ,  $L_{j,p}^{(3)}$ , pour chaque nombre premier  $p$ .

- Pour chaque nombre premier  $p$ , nous trouvons les matrices orthogonales associées :  $A_{j,p}$ ,  $B_{j,p}$ ,  $C_{j,p}$  en appliquant le théorème (5.7) sur la première colonne qui a la plus grande norme de  $\ell^1$  par rapport à d'autres colonnes, respectivement de  $L_{j,p}^{(1)}$ ,  $L_{j,p}^{(2)}$ ,  $L_{j,p}^{(3)}$ .

- Pour chaque nombre premier  $p$ , nous composons les matrices :  $M_{j,p}^{(1)}$ ,  $M_{j,p}^{(2)}$ ,  $M_{j,p}^{(3)}$ .

- Nous arrangeons tous les coefficients d'ondelettes, qui sont contenus dans  $M_{j,p}^{(1)}$ ,  $M_{j,p}^{(2)}$ ,  $M_{j,p}^{(3)}$ ,  $DI_j^{(1)} \setminus L_{j,p}^{(1)}$ ,  $DI_j^{(2)} \setminus L_{j,p}^{(2)}$ ,  $DI_j^{(3)} \setminus L_{j,p}^{(3)}$ .

**Étape 4 :** Le seuillage  $T(\epsilon, x)$  est appliqué à tous les coefficients d'ondelettes tels que les coefficients qui leurs valeurs absolues sont inférieurs à  $\epsilon$  seront égaux à zéro, sinon il n'y a pas de changement.

**Étape 5 :** Reconstruire l'image grâce à des nouveaux coefficients d'ondelettes, qui sont produits du seuillage.

**Étape 6 :** Le codeur entropique utilise une technique pour déterminer la probabilité pour chaque valeur de l'image reconstruite, il produit un code basé sur ces probabilités comme le codeur de Huffman, où les symboles les plus courants sont généralement représentés en utilisant moins de bits que les symboles moins fréquents

**Étape 7 :** Dans cette étape, on obtient l'image compressée pour la transmission ou le stockage.



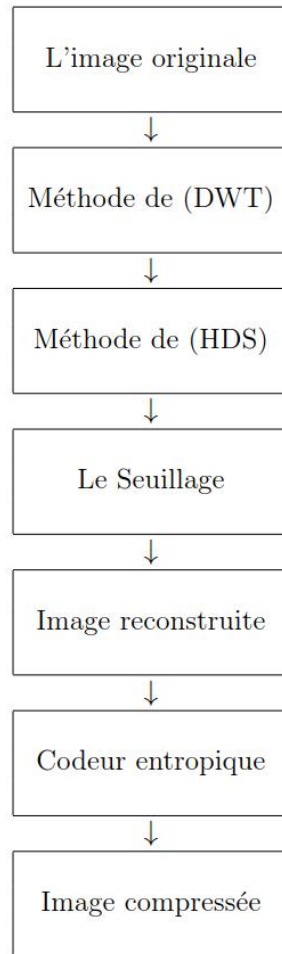


FIGURE 5.2 – Le diagramme correspondant à l'algorithme de (HDS)

## Chapitre 6

# Nouvelle technique pour le seuillage des coefficients d'ondelettes

Dans une approche par ondelettes, le seuillage des coefficients d'ondelettes est une basique étape pour l'algorithme de la compression et du débruitage. La procédure du seuillage s'applique directement aux coefficients d'ondelettes à l'aide d'une fonction  $\eta$  qui doit être caractérisée par le paramètre du seuillage  $\lambda$  et deux propriétés fondamentales telles que, l'élimination des petits coefficients d'ondelettes et la réduction de l'effet des gros coefficients. Donoho et Johnstone [13] ont introduit les deux premières méthodes du seuillage, qui sont le seuillage dur et le seuillage doux. La fonction du seuillage dur est discontinue et celle du seuillage doux est continue avec une dérivée constante et discontinue. En raison de ces caractéristiques, chaque méthode souffrit de quelques inconvénients au niveau de l'image comprimée ou débruitée. Dans ce chapitre nous proposons une alternative technique pour la compression et le débruitage d'images basée sur une nouvelle fonction du seuillage  $\eta$ , dont nous pouvons éviter les défauts de méthodes précédentes.

## 6.1 Principe du débruitage d'images par seuillage des coefficients d'ondelettes

Considérons une image originale  $f$  de taille  $N \times M$  pixels, qui sera récupérée. Supposons que cette image est bruitée par un bruit blanc gaussien  $n$  qui a une moyenne 0 et de variance notée  $\sigma^2$ . L'image observée  $g$  sera donnée par la relation suivante :

$$g(i, j) = f(i, j) + n(i, j), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M \quad (6.1)$$

L'objectif du débruitage est de supprimer le bruit contenu dans  $g$  en estimant  $\tilde{f}$ , qui minimise l'erreur moyenne quadratique ou en anglais Mean Square Error (MSE) définie comme suit :

$$MSE = \frac{1}{N \times M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left( \tilde{f}(i, j) - f(i, j) \right)^2 \quad (6.2)$$

Dans le domaine d'ondelettes, le débruitage traite chaque coefficient d'ondelettes des espaces de détail LH, HL, HH à l'aide de la fonction du seuillage  $\eta$  pour obtenir  $\bar{g}$ . Ainsi, l'image débruitée  $\tilde{f}$  sera l'inverse de la transformation en ondelette discrète de  $\bar{g}$ . i.e,  $\tilde{f} = IDWT(\bar{g})$ .

## 6.2 Rappel sur les traditionnelles techniques de seuillage

Il existe plusieurs types des seuillages. Nous pouvons d'abord distinguer les seuillage dur et seuillage doux.

### 6.2.1 Seuillage dur (Hard Thresholding)

Le seuillage dur est celui qui est le plus intuitif. On se fixe un seuil  $\lambda > 0$ . On ne conserve que les coefficients d'ondelettes supérieurs à  $\lambda$  et on met à zéro les autres, sa fonction  $\eta$  est donnée par :

$$\eta_H(x, \lambda) = \begin{cases} x & \text{if } |x| > \lambda \\ 0 & \text{if } |x| \leq \lambda \end{cases} \quad (6.3)$$

En raison de la discontinuité de cette fonction, l'image débruitée sera motivée par des artefacts.

## 6.2.2 Seuillage doux (Soft Thresholding)

Dans le cas du seuillage dur, on met toujours à zéro les coefficients inférieurs à un seuil  $\lambda$ . Par contre, pour ceux supérieurs à  $\lambda$ , on atténue l'amplitude des coefficients par la valeur du seuil afin de s'assurer d'enlever l'effet du bruit même pour les forts coefficients, la fonction du seuillage ici est exprimée par :

$$\eta_S(x, \lambda) = \begin{cases} x - \lambda & \text{if } x > \lambda \\ 0 & \text{if } |x| \leq \lambda \\ x + \lambda & \text{if } x < -\lambda \end{cases} \quad (6.4)$$

Dans ce cas, la fonction du seuillage est continue et le coefficient seuillé sera donc plus petit que le coefficient du signal. Ce type de seuillage garantit que le signal obtenu sera toujours plus régulier que le signal de départ.

Notant que la valeur du paramètre de seuillage est soumise aux règles du seuillage. Donoho et Johnstone [13] ont proposé la règle Visu Shrink, où la valeur de seuillage est définie comme suit :

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(N \times M)} \quad (6.5)$$

où  $N \times M$  représente la taille de l'image et  $\sigma$  est l'écart type correspondant au bruit. De plus, le niveau du bruit  $\sigma$  peut être estimé selon cette formule :

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{Median}(|y_{i,j}|)}{0.6745}, \quad y_{i,j} \in \text{sous-bande (HH}_1\text{)} \quad (6.6)$$

## 6.3 Nouvelle fonction de seuillage des coefficients d'ondelettes

La nouvelle fonction de seuillage que nous avons proposé dans [8] se caractérise par un paramètre de forme  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) et elle est construite pour être continue et graphiquement située entre les traditionnelles fonctions de seuillage (dur et doux). Cette fonction vérifie un compromis entre le seuillage

dur et le seuillage doux, où sa expression mathématique est donnée par :

$$\eta_{New,\alpha}(x, \lambda) = \begin{cases} x - \lambda + \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha(\frac{x-\lambda}{\lambda})} e^{-t^2} dt & \text{if } x > \lambda \\ 0 & \text{if } |x| \leq \lambda \\ x + \lambda - \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha(\frac{x+\lambda}{\lambda})} e^{-t^2} dt & \text{if } x < -\lambda \end{cases} \quad (6.7)$$

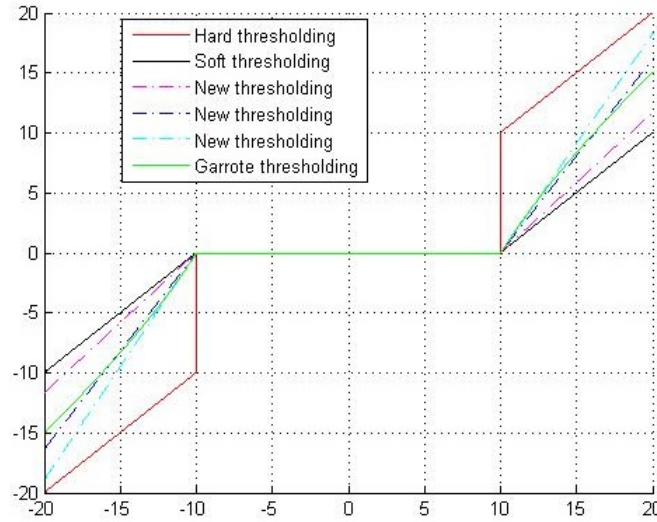


FIGURE 6.1 – Graphe de fonctions de seuillage dur, doux, Garrote et la nouvelle fonction pour  $\lambda = 10$  et avec  $\alpha = 0.05$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\alpha = 0.3$ .

D'après (6.7), quand  $\alpha \rightarrow 0$ , la fonction  $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda) \rightarrow \eta_S(\cdot, \lambda)$  et quand  $\alpha \rightarrow +\infty$ , la fonction  $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda) \rightarrow \eta_H(\cdot, \lambda)$ . Cette propriété montre qu'on peut accéder au seuillage dur et doux par un simple ajustement du paramètre de forme  $\alpha$ . De plus, la fonction  $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$  possède les propriétés suivantes :

**Théorème 6.1 :** *La fonction  $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$  est graphiquement située entre les traditionnelles fonctions de seuillage (dur et doux).*

**Démonstration du théorème 6.1 :**

Pour tout  $x$ , on pose

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

remarquons que  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  et elle a les propriétés suivantes :

$$0 \leq f(x) \leq 1, \quad \forall x \geq 0$$

$$-1 \leq f(x) \leq 0, \quad \forall x \leq 0$$

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x > 0$$

alors, pour  $x > \lambda$  on a,

$$0 \leq f\left(\alpha\left(\frac{x-\lambda}{\lambda}\right)\right) \leq 1$$

d'où

$$x - \lambda \leq \eta_{New,\alpha}(x, \lambda) \leq x$$

Pour  $x < -\lambda$ , on a

$$\alpha\left(\frac{x+\lambda}{\lambda}\right) < 0$$

et

$$\frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha\left(\frac{x+\lambda}{\lambda}\right)}^0 e^{-t^2} dt = f\left(\alpha\left(\frac{x+\lambda}{\lambda}\right)\right) = -f\left(-\alpha\left(\frac{x+\lambda}{\lambda}\right)\right)$$

d'où

$$-1 \leq \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha\left(\frac{x+\lambda}{\lambda}\right)}^0 e^{-t^2} dt \leq 0$$

par conséquent,

$$x \leq \eta_{New,\alpha}(x, \lambda) \leq x + \lambda$$

Pour  $|x| = \lambda$ , toutes les fonctions  $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$ ,  $\eta_H(\cdot, \lambda)$  et  $\eta_S(\cdot, \lambda)$  sont égales à zéro.

**Théorème 6.2 :** *La fonction  $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$  est continue, croissante sur  $\mathbb{R}$  et infiniment différentiable sur  $]-\infty, -\lambda[ \cup ]\lambda, +\infty[$ .*

**Démonstration du théorème 6.2 :**

Comme la fonction  $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$  est continue aux points  $|x| = \lambda$ , alors elle est continue sur  $\mathbb{R}$ . D'autre part, pour  $x < -\lambda$  on a

$$\eta'_{New,\alpha}(x, \lambda) = 1 + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 \left(\frac{x+\lambda}{\lambda}\right)^2} > 0$$

et pour  $x > \lambda$  on a aussi

$$\eta'_{New,\alpha}(x, \lambda) = 1 + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 \left(\frac{x-\lambda}{\lambda}\right)^2} > 0$$

Donc,  $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

D'ailleurs, d'après les formules de  $\eta'_{New,\alpha}(x, \lambda)$  pour  $x < -\lambda$  et  $x > \lambda$ , la fonction  $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$  est infiniment différentiable sur  $]-\infty, -\lambda[ \cup ]\lambda, +\infty[$ .

**Théorème 6.3 (Estimation d'erreur d'approximation) :** *Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution régulière de  $L^2(\mathbb{R})$  et  $\psi$  l'ondelette associée. Pour toute  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $J \in \mathbb{N}^*$ , on définit*

$$\begin{aligned} P_{V_J}^{Hard} f &= P_{V_0} f + \sum_{j=0}^{J-1} Q_j^{Hard} f \\ P_{V_J}^{Soft} f &= P_{V_0} f + \sum_{j=0}^{J-1} Q_j^{Soft} f \\ P_{V_J}^{New} f &= P_{V_0} f + \sum_{j=0}^{J-1} Q_j^{New} f \end{aligned}$$

où  $P_{V_0} f$  est la projection orthogonale de  $f$  sur  $V_0$  et  $Q_j^{Hard} f$ ,  $Q_j^{Soft} f$  et  $Q_j^{New} f$  sont la projection orthogonale de  $f$  sur  $W_j$  en utilisant le seuillage dur, doux et nouveau seuillage respectivement. Alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|f - P_{V_J}^{New} f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \|f - P_{V_J}^{Soft} f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = C_{J,\lambda}(f) \lambda^2 + \|f - P_{V_J}^{Hard} f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (6.8)$$

où

$$C_{J,\lambda}(f) = \text{card} \{(j, k), j = 0, \dots, J-1, k \in \mathbb{Z}, |d_{j,k}| > \lambda\} \quad (6.9)$$

**Démonstration du théorème 6.3 :**

Tout d'abord, on sait que toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  peut se décomposer sous la forme

$$f = P_{V_0}f + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}$$

d'une autre part, on a aussi

$$P_{V_J}^{Hard} f = P_{V_0}f + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_H(d_{j,k}, \lambda) \psi_{j,k}$$

$$P_{V_J}^{Soft} f = P_{V_0}f + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_S(d_{j,k}, \lambda) \psi_{j,k}$$

et

$$P_{V_J}^{New} f = P_{V_0}f + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_{New,\alpha}(d_{j,k}, \lambda) \psi_{j,k}$$



d'où

$$\begin{aligned}
\|f - P_{V_J}^{New} f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \left\| \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (d_{j,k} - \eta_{New,\alpha}(d_{j,k}, \lambda)) \psi_{j,k} + \sum_{j=J}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&= \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_{j,k} - \eta_{New,\alpha}(d_{j,k}, \lambda)|^2 + \sum_{j=J}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_{j,k}|^2 \\
&= \sum_{\substack{j=0, \dots, J-1, \\ d_{j,k} < -\lambda}} \lambda^2 \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha(\frac{d_{j,k}+\lambda}{\lambda})}^0 e^{-t^2} dt \right)^2 \\
&\quad + \sum_{\substack{j=0, \dots, J-1, \\ d_{j,k} > \lambda}} \lambda^2 \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha(\frac{d_{j,k}-\lambda}{\lambda})} e^{-t^2} dt \right)^2 \\
&\quad + \sum_{\substack{j=0, \dots, J-1, \\ |d_{j,k}| \leq \lambda}} |d_{j,k}|^2 + \sum_{j=J}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_{j,k}|^2 \\
&< \sum_{\substack{j=0, \dots, J-1, \\ d_{j,k} < -\lambda}} \lambda^2 + \sum_{\substack{j=0, \dots, J-1, \\ d_{j,k} > \lambda}} \lambda^2 \\
&\quad + \sum_{\substack{j=0, \dots, J-1, \\ |d_{j,k}| \leq \lambda}} |d_{j,k}|^2 + \sum_{j=J}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_{j,k}|^2
\end{aligned}$$

Le côté droit de dernière inégalité est égal à  $\|f - P_{V_J}^{Soft} f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ , de plus comme

$$\|f - P_{V_J}^{Hard} f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{\substack{j=0, \dots, J-1, \\ |d_{j,k}| \leq \lambda}} |d_{j,k}|^2 + \sum_{j=J}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_{j,k}|^2$$

on trouve que

$$\begin{aligned} \left\| f - P_{V_J}^{Soft} f \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \left( \sum_{\substack{j=0, \dots, J-1, k \in \mathbb{Z} \\ |d_{j,k}| > \lambda}} \right) \lambda^2 + \left\| f - P_{V_J}^{Hard} f \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &= C_{J,\lambda}(f) \lambda^2 + \left\| f - P_{V_J}^{Hard} f \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

donc

$$\left\| f - P_{V_J}^{New} f \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \left\| f - P_{V_J}^{Soft} f \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = C_{J,\lambda}(f) \lambda^2 + \left\| f - P_{V_J}^{Hard} f \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

Dans ce qui suit, on va introduire les étapes de l'algorithme correspondant à la nouvelle technique de seuillage.

**Étape 1 :** Charger l'image.

**Étape 2 :** Décomposer l'image avec (DWT) au niveau  $j$  produit les sous-bandes : LL, LH, HL, HH.

**Étape 3 :** Estimer le niveau du bruit  $\sigma$  en utilisant (6.6).

**Étape 4 :** Appliquer la règle du choix de paramètre de seuillage aux coefficients d'ondelettes avec la nouvelle fonction de seuillage  $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$ .

**Étape 5 :** Reconstruire l'image en appliquant (IDWT) pour les nouveaux coefficients d'ondelettes.

**Étape 6 :** Obtenir l'image débruitée.

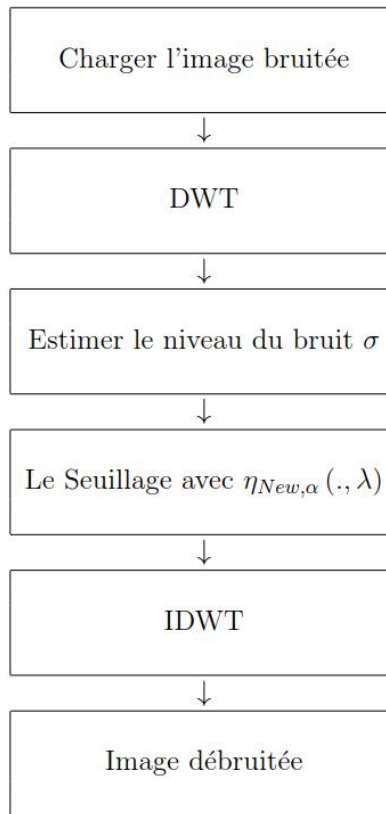


FIGURE 6.2 – Le diagramme correspondant à l’algorithme de débruitage

# Chapitre 7

## Application au traitement des images numériques

L'image numérique est un moyen plus important pour la communication entre les personnes, quelqu'un peut la débruiter, l'autre peut la compresser ou décompresser. Toutes ces opérations sont classées dans le domaine du traitement d'images. En effet, le traitement d'images numériques est une discipline très vaste de la théorie des signaux, elle détermine l'ensemble des techniques et des méthodes qui permettent d'opérer sur l'image numérique pour d'améliorer l'aspect visuel de celle-ci, la compresser, et d'en extraire des informations. Dans ce chapitre, on s'intéresse à la compression et le débruitage d'images.

### 7.1 Notions sur les images numériques

Pour comprendre bien l'image numérique, nous devons donner quelques notions principales comme sa définition, ses différents types et ses différents formats.

#### 7.1.1 Définition d'une image numérique

L'image numérique est une grille constituée d'un nombre fini de points  $(x, y)$  appelés pixels (Abréviation de Picture Element). Le pixel ici est le plus petit élément constitue l'image numérique, et représente une couleur déterminée.

## 7.1.2 Différents types d'images

Il existe plusieurs types des images selon la méthode du codage de chaque pixel, on cite l'image en mode monochrome, l'image en mode niveaux de gris, et l'image en mode couleur.

### 7.1.2.1 Le mode monochrome

Avec ce mode, chaque pixel est codé par 1 bit (0 ou 1), ainsi la couleur associée soit blanche, soit noire. Figure 7.1 :



FIGURE 7.1 – Image monochromatique

### 7.1.2.2 Le mode niveaux de gris

Dans ce cas, chaque pixel est codé par 8 bits et il prend une valeur entière de 0 jusqu'à 255, chacune des valeurs représente une couleur au niveau du gris, où la valeur 0 représente la couleur noire et 255 représente la couleur blanche. Figure 7.2 :



FIGURE 7.2 – Image aux niveaux de gris

### 7.1.2.3 Le mode couleur

Le pixel ici est codé par 24 bits, il a trois composantes de niveau de gris : R (le rouge), V (le vert) et B (le bleu), ainsi la couleur de chaque pixel est un mélange des trois couleurs précédentes. Ce mode est nommée RVB ou en anglais RGB (Red, Green, Blue). Figure 7.3 :



FIGURE 7.3 – Image couleur

Notons qu'il existe un autre type des images en mode couleur comme : le mode TSV (Teinte, Saturation, Valeur) ou en anglais HSV (Hue, Saturation, Value).

### **7.1.3 Différents formats d'images**

On cite ici les différents formats d'images les plus utilisés, qui sont : BMP, TIFF, JPEG ou JPG, GIF et PNG.

#### **7.1.3.1 Format BMP**

Le format BMP ou Bitmap est un format d'image développé par Microsoft et IBM (International Business Machines), il est utilisé pour la programmation, où la plupart des interfaces graphiques utilisent ce dernier format en fonctionnement.

#### **7.1.3.2 Format TIFF**

Le format TIFF (Tagged Image File Format) a été mis au point en 1987 par la société Adobe, son principe est à faire des balises dont on peut extraire les caractéristiques de l'image.

### 7.1.3.3 Format JPEG

Le format JPEG (Joint Photographic Experts Group) est une norme d'enregistrement des images fixes à l'aide de l'algorithme de compression d'images (DCT).

### 7.1.3.4 Format GIF

Le format GIF (Graphics Interchange Format) utilise la compression sans perte et permet d'utiliser les couleurs transparentes. De plus, il contient une technique d'animation des images, ce qui le rend fréquemment utilisé sur l'internet.

### 7.1.3.5 Format PNG

Le format PNG (Portable Network Graphics) (PNG) a été construit pour remplacer le format GIF, il permet d'enregistrer les images avec différentes couleurs de 2 jusqu'à 281 474 976 710 656 couleurs.

## 7.2 Compression d'images

La compression d'images est un processus permet de réduire la quantité de mémoire nécessaire à la représentation de l'image pour le stockage ou la transmission de celle-ci. Cette compression peut se classer en deux groupes selon la qualité de l'image reconstruite (conforme à l'image originale ou non). Le premier groupe contient des techniques de compression sans perte (dites aussi réversibles), qui agissent directement sur la codification de chaque pixel, ainsi l'aspect visuel de l'image compressée est identique à celui de l'image originale, citons par exemple des algorithmes du codage : RLE, LZW, Shannon-Fano, Huffman et codage arithmétique. Le deuxième groupe englobe des techniques de compression avec perte (dites aussi irréversibles), leur principe est d'augmenter la fréquence des valeurs associées aux pixels sans dégrader l'aspect visuel de l'image reconstruite, citons quelques méthodes : JPEG, JPEG 2000. D'autre part, il est évident de réfléchir à des critères qui peuvent mesurer la performance des groupes de compression précédents. En effet, on a des critères spécifiques, qui sont le critère d'évaluation de la qualité de l'image comprimée et celui d'évaluation de la méthode de compression. Dans cette section, nous allons expliquer tout ce qui précède.



## 7.2.1 Quelques critères de la performance des techniques de compression

### 7.2.1.1 Taux de compression

Le taux de compression  $\tau$  ou en anglais (compression ratio) est un critère permet de mesurer la compétence d'une méthode de compression par rapport aux plusieurs méthodes, en comparant la taille de l'image compressée à la taille de l'image originale, où le plus grand  $\tau$  signifie que la taille de l'image compressée est plus moins de celle de l'image originale, ainsi la meilleure méthode.

$$\tau = \frac{\text{Nombre de bits de l'image originale}}{\text{Nombre de bits de l'image compressée}} \quad (7.1)$$

### 7.2.1.2 Le rapport signal sur bruit

Le rapport signal sur bruit  $PSNR$  ou en anglais (peak signal to noise ratio) est un indicateur de la qualité de l'image reconstruite, il s'exprime en décibels (dB) et défini comme suit :

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{(\text{dynamique de l'image})^2}{MSE} \quad (dB) \quad (7.2)$$

où pour une image de niveau de gris, sa dynamique est 255, d'où la relation (7.2) devient :

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{255^2}{MSE} \quad (dB) \quad (7.3)$$

et  $MSE$  c'est l'erreur moyenne quadratique entre l'image originale  $f$  et l'image reconstruite  $\tilde{f}$  ou en anglais (mean squared error), qui est définie comme :

$$MSE = \frac{1}{N \times M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left( f(i, j) - \tilde{f}(i, j) \right)^2 \quad (7.4)$$

tel que, le plus élevé (PSNR) produit généralement la meilleure qualité de l'image reconstruite avec le plus moins (MSE).

## 7.2.2 Différents types de la compression

Dans le domaine de la compression d'images, on a deux types différents de compression : Sans perte et avec perte.

### 7.2.2.1 Compression sans perte

Tous les algorithmes de la compression d'images sans perte produisent une image identique à l'originale d'un terme de visualisation. On s'intéresse ici par les algorithmes du codage statistique, où leur but est la réduction de nombre de bits pour les caractères les plus fréquents. Il existe plusieurs algorithmes quant à ce codage comme : Shanno-Fano, Huffman, arithmétique, LZ77, LZ78, LZW... Rappelons la méthode de construction du codage de Huffman :

En 1952, Huffman a construit son code structuré en arbre pour un alphabet de taille finie, tel que le code est décodé par une seule façon. L'algorithme associé à ce codage considère d'abord un alphabet  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , où ses symboles  $a_i$  sont arrangés en ordre décroissant de fréquence, ça signifie que

$$P(a_1) \geq P(a_2) \geq \dots \geq P(a_n)$$

telle que les longueurs associées vérifient

$$L(a_1) \leq L(a_2) \leq \dots \leq L(a_n)$$

ensuite, il pose les étapes suivantes :

- On prend les deux noeuds de plus faible fréquence et créer un noeud parent pour ces deux noeuds.
- On effectue la somme des deux fréquences au noeud parent.
- On effectue les codes 0, 1 respectivement aux deux branches de l'arbre.
- On répète l'étape 2 jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul noeud de probabilité 1.

### Exemple sur le codage de Huffman :

<i>Lettre</i>	<i>Fréquence</i>	<i>Code de Huffman associé</i>
a	6	00
b	5	01
c	4	10
d	2	110
e	1	111

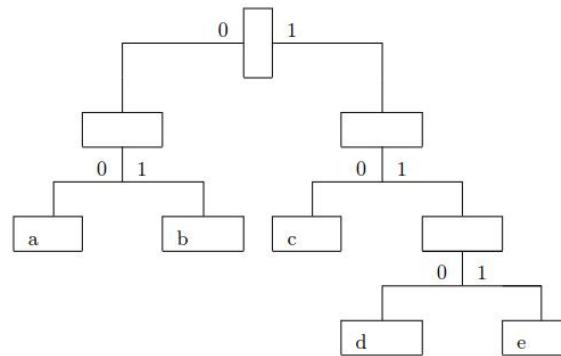


FIGURE 7.4 – Schéma du codage de Huffman pour cet exemple.

#### 7.2.2.2 Compression avec perte

Dans ce type de compression, l'image reconstruite est différente de l'image originale à cause des modifications faibles, citons les techniques de compression par transformation comme : DCT, Ondelettes, ... Ces techniques s'appliquent sur l'image dans son domaine transformé, où les informations de l'image sont contenues dans les coefficients de fréquence spatiale. Pour cela, le principe de telles techniques est de décomposer l'image dans une base orthogonale, dont les coefficients sont décorrélés, ainsi on peut mettre à zéro une grande quantité des coefficients sans nuire de manière significative l'aspect visuel de l'image reconstruite.

## 7.3 Quelques techniques de compression et débruitage d'images

Nous allons présenter ici quelques techniques de compression et débruitage d'images par transformation.

### 7.3.1 Technique JPEG

JPEG en anglais (Joint Photographic Experts Group) est une norme de compression et de débruitage d'images fixes, qui est introduite et adoptée en 1992 par de groupe d'experts internationaux. Elle est basée sur l'algorithme de DCT en l'appliquant sur des blocs de taille  $8 \times 8$  pixels, ainsi on en déduit des caractéristiques intéressantes. En fait, la technique JPEG perd la qualité exacte de l'image originale et souvent présente un zigzag sur l'entourage des blocs. Par contre, elle donne un taux de compression raisonnable, dont la taille de l'image compressée est petite, ce qui la rend couramment utilisée sur l'internet.

### 7.3.2 Technique JPEG 2000

JPEG 2000 en anglais est une norme de compression et de débruitage d'images fixes produite durant l'année 2000 par le même groupe de la technique JPEG, elle utilise la technique de la transformée en ondelettes discrète ou en anglais DWT (Discrete Wavelet Transform). Cette technique produit un taux de compression supérieur à celui de la technique JPEG, ce qui permet d'obtenir une image compressée d'un poids inférieur à celui pour la technique JPEG. En outre, la qualité de l'image compressée par la technique JPEG 2000 est plus nette que celle par JPEG. En revanche, la technique JPEG 2000 s'influence par les grandes singularités de l'image.

### 7.3.3 Technique HDS

L'HDS est une nouvelle technique de compression et de débruitage par transformation d'images fixes comme JPEG et JPEG 2000, son principe est de traiter l'inconvénient de la technique JPEG 2000 (problème de singularité) par construire une nouvelle base pour chaque espace de détail, dont on peut mettre à zéro une grande quantité des coefficients indépendamment de

singularité de l'image. De plus, la technique HDS produit un taux de compression plus élevé par rapport à celui de JPEG 2000, même la qualité de l'image compressée est meilleure que celle produite par JPEG 2000.

### 7.3.4 Technique de seuillage avec une nouvelle fonction

La nouvelle technique de compression et de débruitage d'images qui est présentée ici, c'est une technique utilise la fonction  $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$  au lieu des fonction de seuillage dur et doux pour compresser et débruiter à la fois l'image. Les propriétés mathématiques de cette fonction telles que la continuité, la monotonie, la différentiabilité et le paramètre de forme peuvent mettre un compromis entre le seuillage dur et doux.

## 7.4 Résultats expérimentaux et discussion

### 7.4.1 Comparaison de JPEG 2000 par HDS

Dans cette sous-section, on va comparer la compétence de deux techniques de compression d'images fixes : JPEG 2000 et HDS par une évaluation de leur performance. Pour cela, on choisit l'image aux niveaux de gris ('barbara.png') de taille 73.8 KB, et de  $240 \times 240$  pixels. Où, on considère que les algorithmes s'effectuent sous MATLAB à la résolution  $j = 1$  avec de l'ondelette de Haar, en prenant tous les nombres premiers  $p$  vérifiant l'inégalité suivante :

$$2^{N_{0,p}-1}p \leq 240$$

où  $N_{0,p}$  est le rang de la matrice orthogonale  $A_{0,p}$  associée à  $p$ . Ce rang a été choisi de manière à ce qu'il est le plus grand nombre vérifie l'inégalité précédente.

Les résultats de compression avec JPEG 2000 et HDS sont arrangés respectivement dans le tableau 7.1, le tableau 7.2 :

Seuillage	PSNR (dB)	La taille de l'image compressée (KB)	CR
$\epsilon = 20$	27.61	9.09	8.12 :1
$\epsilon = 30$	31.20	8.55	8.63 :1
$\epsilon = 40$	35.94	8.25	8.95 :1
$\epsilon = 50$	42.70	8.15	9.06 :1
$\epsilon = 60$	53.62	8.13	9.08 :1

TABLE 7.1 – Résultats de compression avec JPEG 2000

Seuillage	PSNR (dB)	La taille de l'image compressée (KB)	CR
$\epsilon = 20$	30.96	8.81	8.38 :1
$\epsilon = 30$	35.66	8.35	8.84 :1
$\epsilon = 40$	40.39	8.19	9.01 :1
$\epsilon = 50$	49.09	8.13	9.08 :1
$\epsilon = 60$	56.88	8.12	9.09 :1

TABLE 7.2 – Résultats de compression avec HDS

À partir des résultats présentés à ces tableaux, on remarque d'abord que, la croissance successive des valeurs du seuillage a mené à une croissance similaire aux PSNR et CR pour chaque technique, où pour chaque seuil, le PSNR et le CR correspondant à la technique HDS, sont supérieurs aux autres pour la technique JPEG 2000, dont on constate une monotonie positive (respectivement négative) à la qualité (respectivement à la taille) de l'image reconstruite jusqu'au dernier seuil, où le CR ici pour la technique HDS est égal à 9.09. Cette grande valeur (CR), signifie que l'image compressée avec la technique HDS occupe seulement 11% de l'espace du stockage de l'image originale. D'autre part, l'excellence de la technique HDS par rapport à JPEG 2000 est représentée au seuil  $\epsilon = 30$ , telle que la figure 7.7 et la figure 7.8 représentent respectivement les images reconstruites et les images différence à ce seuil, dont les singularités contenues dans l'image originale ont été interprétées à un nuage des points blancs accumulés dans les images reconstruites et les images différence, où ce nuage des points semble moins dense et moins clair pour les images correspondant à la technique HDS. Par conséquent, la technique HDS est plus adaptative et plus résistante aux singularités des images.



FIGURE 7.5 – Image originale



FIGURE 7.6 – Décomposition de l'image originale au niveau  $j = 1$



FIGURE 7.7 – Images reconstruites, (a) avec HDS et (b) avec JPEG 2000



FIGURE 7.8 – Images différence, (c) avec HDS et (d) avec JPEG 2000

#### 7.4.2 Comparaison de seuillage dur et doux par la nouvelle technique de seuillage

Afin de vérifier l'efficacité de notre méthode de la compression et de débruitage, nous comparons cette nouvelle méthode avec les méthodes de seuillage classiques telles que Hard, Soft et Garrote à l'aide de la règle Visu Shrink. Ces méthodes de seuillage sont appliquées aux diverses images de test de taille  $512 \times 512$  pixels, qui sont bruitées par un bruit gaussien avec différents niveaux de bruit. L'ondelette utilisée dans toutes les méthodes est l'ondelette de Haar au niveau de décomposition  $J = 1$ , où le paramètre de forme est déterminé par une méthode d'approximation stochastique (algorithme de Robbins-Monro). Alors, les résultats de simulation en utilisant



Matlab sont présentés dans le tableau 7.3 :

Images	$\sigma$	Hard	Soft	Garrote	Méthode proposée	$\alpha$
Barbara	10	28.0440	27.7677	27.7094	28.1019	0.009
	15	24.6469	24.6132	24.5666	25.2104	0.01
	20	22.3580	22.4018	22.5437	22.6088	0.05
	25	20.0717	19.6226	20.1902	20.4312	0.1
	30	18.1999	18.1438	18.3651	18.5197	1
Boat	10	25.7620	27.7896	27.3350	27.8906	0.009
	15	24.6985	24.2036	24.7721	25.0008	0.15
	20	21.8492	22.1981	21.4785	22.2295	0.15
	25	19.9245	20.0176	20.1240	20.4384	1
	30	18.0349	18.6323	18.5476	18.7409	0.05
Cameraman	10	27.8897	28.1068	28.0274	28.1492	0.09
	15	22.9283	22.4868	22.8450	23.1930	0.9
	20	19.2072	18.9017	18.8856	19.2539	0.09
	25	16.1831	16.0629	15.7873	16.2988	0.25
	30	13.5814	13.2885	13.4052	13.6726	1

TABLE 7.3 – Comparaison de résultats de PSNR (dB) entre les méthodes classiques et la méthode proposée

Apparemment, les résultats expérimentaux montrent qu'à chaque niveau de bruit, le PSNR qui correspond à notre méthode proposée est le plus élevé par rapport à toutes les autres méthodes pour chaque image. En outre, la performance de la méthode de Garrote pour chaque image par rapport à la méthode Hard et Soft apparaît aux niveaux élevés de bruit. Alors que, notre méthode proposée évite ce problème en raison de l'existence du paramètre de forme. Ainsi, notre méthode de la compression et de débruitage est supérieure à toutes les autres méthodes en termes de qualité visuelle de l'image débruitée.



FIGURE 7.9 – Originale and image bruitée correspondant à Barbara pour  $\sigma = 20$ .



(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 7.10 – Images débruitées, (a), (b), (c), (d) en utilisant dur, doux, Garrote et méthode proposée respectivement pour  $\sigma = 20$ .

# Conclusion

Dans cette thèse, nous avons présenté d'une part, une étude approfondie et détaillée sur les techniques classiques de compression d'images fixes telles que, JPEG et JPEG 2000. D'une autre part, deux nouvelles techniques de compression et de débruitage d'images, où la première est basée sur l'hybridation de l'espace de détail et caractérisée par des avantages par rapport aux méthodes classiques. À partir de ces avantages, les résultats expérimentaux ont justifié la meilleure performance de celle-ci telle que, les taux de compression sont très élevés sans d'une dégradation remarquable pour la qualité de l'image compressée. La deuxième méthode propose une nouvelle fonction de seuillage caractérisée par un paramètre de forme et quelques propriétés mathématiques par rapport aux seuillage dur et doux, les résultats expérimentaux ont démontré l'efficacité de cette dernière en termes de qualité visuelle de l'image débruitée. En conséquence, nous pouvons adopter ces deux nouvelles techniques pour la compression et le débruitage d'images.

# Bibliographie

- [1] Abderrazek. Karoui, A technique for the construction of compactly supported biorthogonal wavelets of  $L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $n \geq 2$ . Journal of Mathematical Analysis and Applications 249, 367-392, 2000.
- [2] Albert. Boggess, Francis J. Narcowich, A first course in wavelets with Fourier analysis, second edition, John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey 2009.
- [3] Albert. Cohen, Numerical analysis of wavelet methods, North Holland, Elsevier 2003.
- [4] Albert. Cohen, Ondelettes, analyses multirésolutions et filtres miroirs en quadrature ; Annales de l'institut Poincaré, Analyse non linéaire, Vol. 7 ; 1990.
- [5] Ali N. AKANSU, Richard A. Haddad, Multiresolution signal decomposition, second edition, Academic Press 2001.
- [6] Arne. Jensen, Ripples in Mathematics The Discrete Wavelet Transform, Springer. Verlag Berlin Heidelberg 2001.
- [7] Bachir Dehda, Khaled Melkemi, Novel method for reduction of wavelet coefficients number and its applications in images compression, International journal of applied mathematics and machine learning, Vol 5-1 page 43-65, September 2016.
- [8] Bachir Dehda, Khaled Melkemi, Image Denoising using New Wavelet Thresholding Function. Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics, 2017, 16(2).
- [9] Cédric Vonesch, Thierry Blu and Michael Unser, Generalized Daubechies Wavelet Families, IEEE Transactions on Signal Processing 55(9) (2007).
- [10] Charles K. Chui, An introduction to wavelets, Academic Press, 1992.
- [11] Dariush Ghorbanzadeh, Pierre Marry, Nelly Point, Denise Vial, Mathématiques du Signal 3e édition, Dunod, Paris, 2008.

- [12] David F. Walnut, An Introduction to Wavelet Analysis, Birkhauser Boston (ISBN0-8176-3962-4) 2002.
- [13] David L. Donoho, Iain M. Johnstone, Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage, Journal of the American Statistical Association, Vol. 90, pp. 1200-1224, American Statistical Association, 1995.
- [14] Eleanor Chu, Discrete and Continuous Fourier Transforms, Taylor & Francis Group, LLC, 2008.
- [15] Eric Séré, Bases orthonormées de paquets d'ondelettes, Revista Matemática Iberoamericana Vol 10. N02,1994.
- [16] Fritz Keinert, Wavelets and Multiwavelets, A CRC Press Company, 2004.
- [17] G. K. Kharate et al, Color Image Compression Based On Wavelet Packet Best Tree, International Journal of Computer Science Issues, Vol. 7, Issue 2, No 3, March 2010.
- [18] Ingrid Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [19] Jean -Luc Starck et al, Sparse image and signal processing, Cambridge university press, 2010.
- [20] Khaled Melkemi, Ondelettes sur l'intervalle. Mémoire de DEA, univ de Grenoble 1995.
- [21] Luc Jolivet, Rabah Labbas, Théorie élémentaire du signal, Lavoisier, 2005.
- [22] Maarten Jansen, Patrick Oonincx, Second Generation Wavelets and Applications, Springer 2005.
- [23] Marie BABEL-FOUQUET, Compression d'images avec et sans perte par la méthode LAR Locally Adaptive Resolution, Thèse présentée devant : l'institut national des sciences appliquées de Rennes, 2005.
- [24] Mark A. Pinsky, Introduction to Fourier Analysis and Wavelets, Wadsworth Group 2002.
- [25] Maurice Bellanger, Traitement numérique du signal, Theorie et pratique 8e edition, Dunod, Paris, 1998, 2002,2006 pour la 8e edition.
- [26] Messaoud Benidir, Théorie et traitement du signal, Dunod, Paris, 2002.
- [27] Michael Unser, Fellow, IEEE, and Thierry Blu, Member, IEEE, Mathematical Properties of the JPEG2000 Wavelet Filters, IEEE Transactions on image processing, VOL. 12, NO. 9, September 2003.

- [28] Michel Misiti, Yves Misiti, Georges Oppenheim and Jean-Michel Poggi, Wavelets and their Applications published in France by Hermes Science/Lavoisier in 2003. ISBN-13 : 978-1-905209-31-6.
- [29] M. Mozammel Hoque Chowdhury, Amina Khatun, Image Compression Using Discrete Wavelet Transform, International Journal of Computer Science Issues, Vol. 9, Issue 4, No 1, July 2012.
- [30] Md. Rafiqul Islam, Farhad Bulbul et Shewli Shamim Shanta, Performance analysis of Coiflet-type wavelets for a fingerprint image compression by using wavelet and wavelet packet transform, International Journal of Computer Science & Engineering Survey (IJCSSES) Vol.3, No.2, April 2012.
- [31] Neeraj Kumar, Atul Kumar, Image Denoising Techniques in Spatial Domain and Wavelet Domain, International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT) Vol. 3 Issue 2, February - 2014.
- [32] Olivier RIOUL, Ondelettes régulières, Application à la compression d'images fixes, Thèse présentée devant l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Mars 1993.
- [33] Pierre-Gilles, Lemarié-Rieusset, Ondelettes généralisées et fonctions d'échelle à support compact, Revista Matemática Iberoamericana, Vol 9. N02, 1993.
- [34] Ronald A. DeVore et al, Image compression Through Wavelet Transform Coding, IEEE Transactions on information theory, Vol 38. N02, March 1992.
- [35] Stéphane Mallat, A wavelet tour in signal processing, Third Edition, Academic Press 2009.
- [36] Stéphane Mallat, Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $L_2$ , Trans. Amer. Math. Soc. 315 (1989), 69-87.
- [37] Willard Miller, Lecture Notes and Background Materials for Math 5467 : Introduction to the Mathematics of Wavelets, May 3, 2006.
- [38] Wim Sweldens, The Lifting Scheme : A Custom-Design Construction of Biorthogonal Wavelets, Applied and Computational Harmonic Analysis 3, 186 200 (1996).
- [39] Yehoshua Zeevi, Ronald Coifman, Signal and Image Representation in Combined Spaces, Academic Press, 1998.
- [40] YuanYanTang et al, Wavelet analysis and its applications, World Scientific, 2003.

- [41] Yves Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U. K, 1992.