

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MEMOIRE DE MAGISTER

Présentée par

MANSOUL BRAHIM

Pour l'obtention du Grade de Magister en Mathématiques

Spécialité : Mathématiques

Option : Probabilités et processus stochastiques

Titre :

Etudes Des Bases Biorthogonales D'Ondelettes

Théorie Et Applications

Devant le jury composé de :

Abdallah Benaisa	Pr.Univ.Batna 2	Président
Khaled Melkemi	Pr.Univ.Batna 2	Directeur de thèse
Boubakeur Labeled	MC.Univ.Biskra	Examineur
Zouhir Mokhtari	MC.Univ.Biskra	Examineur

Mars 2018

Dedicace

Je dédie ce modeste travail à :

A mes parents, aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de

l'amour dont ils ne cessent de mon combler.

Que dieu leur procure bonne santé et langueur vie.

A toute ma famille. A toute mais amis.

Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce

projet soit possible, je vous dis merci.

REMERCIEMENTS

M*es remerciements vont premièrement à DIEU tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience, qu'il m'a donné durant toutes ces années d'étude.*

A l'occasion de notre mémoire nous remercions tout d'abord Mon encadreur :Pr. Khaled MELKEMI pour son suivi tout le long de notre travail avec ses suggestions, conseils, aides et orientations, membres de jury qui ont pris le peine d'évaluer notre travail.

Je ne remercierai jamais assez, ni assez bien, mes parents et tous ma famille .

Enfin, nous formulons nos remerciement chaleureux à Boussaad Abdelmalik, mes chers amis, mes collègues, et tous département de Mathématique.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Introduction	1
1 Analyse multirésolution et orthogonalité	3
1.1 Analyse multirésolution	3
1.2 Les fonctions $\varphi_{j;k}(t)$ et les résultats associées	5
1.3 L'équation dilatation et résultats associées	8
1.4 Projections dans l'espace V_j	11
1.5 La fonction ondelette	12
1.6 Les espaces d'ondelettes W_j	14
1.7 Projection de V_{j+1} dans W_j	15
1.8 algorithme de Mallat	16
1.8.1 Décomposition à différentes échelles	17
1.8.2 reconstruction	18
1.9 Approximation des bases d'ondelettes orthogonales	21
2 Analyse multirésolution et biorthogonalité	24

2.1	Analyse multirésolution biorthogonale	24
2.2	Les Fonctions $\varphi_{j;k}(t)$ et $\tilde{\varphi}_{j;k}(t)$	25
2.3	Projections dans les espaces \tilde{V}_j et V_j	26
2.4	Les fonctions d'ondelettes $\tilde{\psi}(t)$ et $\psi(t)$	27
2.5	Algorithme de Mallat	29
2.5.1	Décomposition à différentes échelles	29
2.5.2	reconstruction	31
2.6	Approximation des bases d'ondelettes biorthogonales	34
3	Comparaison numérique entre les bases d'ondelettes orthogonales et biorthogonales dans la compression d'images	36
3.1	Introduction	36
3.2	Généralités sur la compression	36
3.3	Compression avec perte	38
3.3.1	Transformée discrète	39
3.4	Etude comparative	40
3.4.1	Conclusion	45
4	B-splines et bases d'ondelettes	46
4.1	Les B-splines	46
4.2	Transformé de Fourier de B-spline	50
4.3	ondelettes spline orthogonales	51
4.4	ondelettes spline biorthogonales	58
	Conclusion	61
	Bibliographie	62

Introduction

Les ondelettes sont devenues un outil mathématique important, se sont imposées dans différents domaines d'applications. Par leur aptitude extra ordinaire d'approximation et de concentration de l'énergie, l'implication de la transformée en ondelette dans les différents algorithmes imposant en compression d'images devienne comme un outil essentiel.

Dans ce contexte, la problématique que nous avons fixée au début de notre sujet était la comparaison entre un algorithme de compression qui est basé sur la transformée en ondelettes (orthogonales) et un autre qui est basé sur la transformée en ondelettes (bi-orthogonales), ensuite la construction d'une base d'ondelettes à travers les B-splines . La lecture couvrant plusieurs ouvrages de références et les articles de recherche à ce sujet nous a approuvés de choisir

- La compression avec perte destinée aux images à niveaux de gris, tout en essayant de comparer entre un algorithme de compression qui utilise la transformée en ondelettes orthogonales et un autre qui utilise la transformée en ondelettes bi-orthogonales , et de mettre le point sur la question suivante : quel est l' algorithme de compression qui nous offre un meilleur taux de compression ?
- D'autre part, la construction d'une onde mère qui engendre une base d'ondelettes pour l'espace L^2 à travers les B-splines.

Le présent mémoire est structuré de la manière suivante :

Chapitre01 : Donne une explication théorique détaillée concernant les bases d'ondelettes

orthogonales.

Dans ce chapitre nous décrivons la notion d'analyse multirésolution développée par S.Mallat qui représente un outil indispensable pour la construction d'une base d'ondelettes orthogonales, ensuite nous présentons l'algorithme de Mallat

Chapitre02 : expose avec clarté la notion des bases d'ondelettes bi-orthogonales.

Dans ce contexte nous expliquons la notion d'analyse multirésolution bi-orthogonales qui est introduite par S.Mallat dans le but de construire une base d'ondelettes bi-orthogonales et enfin nous présentons l'algorithme de Mallat associé.

Chapitre03 : présente des définitions concernant la compression avec perte et une étude comparative.

Dans ce volet nous donnons des notions théoriques au sujet de compression avec perte ainsi que quelques mesures de qualité utilisées communément pour évaluer la qualité de compression , par la suite nous proposons une étude comparative entre un algorithme de compression incluant la transformée en ondelettes orthogonales et un autre incluant la transformée en ondelettes bi-orthogonales.

Chapitre04 : Donne une vision générale sur les B-splines et leurs propriétés.

Dans ce dernier chapitre nous donnons la définition des B-splines et quelques propriétés concernant ces derniers dans le domaine temporel et fréquentiel. Finalement nous montrons comment construire à l'aide des B-splines une onde mère qui engendre une base d'ondelettes orthogonales ou bi-orthogonales.

À la fin, une conclusion générale pour une synthèse de ce travail.

Chapitre 1

Analyse multirésolution et orthogonalité

1.1 Analyse multirésolution

Le concept de l'analyse multi-résolution est dû à Stéphane Mallat [14] et Yves Meyer [17]

Définition 1.1 *une analyse multirésolution est une suite de sous espaces vectoriels fermés V_j de $L^2(\mathbb{R})$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

$$1 - \forall j \in \mathbb{Z}; \quad V_j \subset V_{j+1} \quad (1.1)$$

$$2 - \forall j \in \mathbb{Z}; \quad \overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad (1.2)$$

3- Leurs intersections est déduit à la fonction nulle

$$(i; e \quad \cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}) \quad (1.3)$$

4- Les espaces sont attachés entre eux tel que le passage de l'un à l'autre soit le résultat

d'un changement d'échelle (Zoom) . comme le cas dyadique ou aura

$$f \in V_j \iff f(2x) \in V_{j-1} \iff f(2^j x) \in V_0, \quad (1.4)$$

5-Il y a une fonction $\varphi_0 \in V_0$ appelée fonction d'échelle telle que $\varphi_0 = \{\varphi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ où $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \neq 0$ construit une base de Riesz de V_0 : l'ensemble des combinaisons linéaires finale d'élément de φ_0 est une sous espace dense dans V_0 et pour toute fonction de $f \in V_0$ il y a :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(t - k)$$

telle que c_k est suite de $l^2(\mathbb{Z})$

Remarque 1.1 la condition dans la définition tel que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \neq 0$ est une condition nécessaire et il peut être démontré (voir, e. g., Noyer) R [11] que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \right| = 1$$

pour que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt \neq 0$ donné que l'intégrale n'est pas nulle. alors nous pouvons normaliser cependant nous choisir.

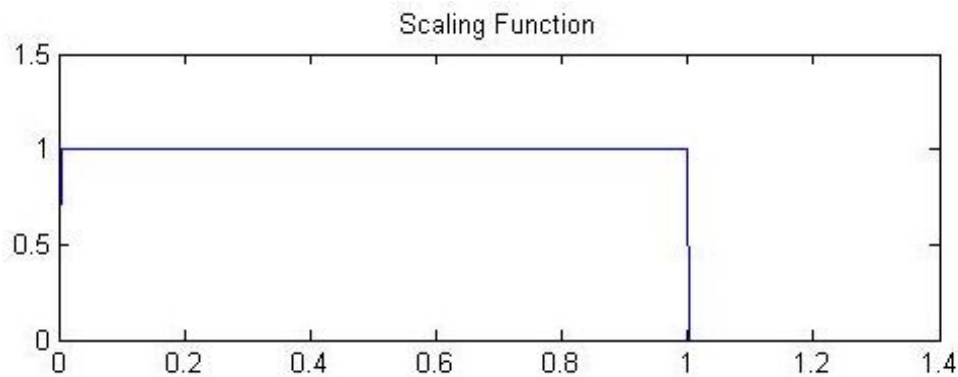
Convention : Nous supposons que toutes les fonctions d'échelle de la définition (1.1) sont fonctions réelles avec

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = \sqrt{2\pi} \widehat{\varphi}(0) = 1 \quad (1.5)$$

Une analyse multirésolution donne une belle façon de décomposer. Nous avons espaces d'approximation V_j imbriqués et la capacité de faire un zoom de l'un à l'autre en utilisant la propriété échelle de (1,1). Nous avons une base orthonormée pour V_0 généré par une fonction d'échelle unique $\varphi(t) \in V_0$ et nous verrons bientôt que nous pouvons utiliser cette base pour former une base orthonormée de V_j . Bien que les espaces V_j sont emboîtés,

ils ne sont pas trop redondant puisque le seul élément commun à tous les espaces est la fonction nulle. Enfin, la propriété de densité nous dit que l'analyse multirésolution couvre tous $L^2(\mathbb{R})$.

Exemple 1.1 (*Analyse Multirésolution de Haar*) les sous espaces V_j de Haar forme d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. Ces espaces sont imbriqués, et les espaces V_j satisfaits de la densité et des propriétés de séparation donnée dans (1.1). La propriété d'échelle dans (1.1) pour les espaces Haar nous avons montré que l'ensemble $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée pour V_0 avec la fonction d'échelle $\varphi(t) = \Pi(t)$ [1]



la fonction d'échelle de Haar

1.2 Les fonctions $\varphi_{j;k}(t)$ et les résultats associées

Dans le reste de cette section nous développons différentes propriétés des analyses multirésolutions. Il est utile de garder à l'esprit que nous apprenons sur ces propriétés. Nous commençons par définir les fonctions suivantes. [4], [3]

Définition 1.2 (*les fonctions $\varphi_{j;k}(t)$*) Supposons que $\varphi(t)$ est une fonction d'échelle de l'analyse multirésolution $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ Pour $k \in \mathbb{Z}$, nous définissons

$$\varphi_{j;k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) \quad (1.6)$$

Proposition 1.1 (*Propriétés associées à $\varphi_{j;k}(t)$*) Soit $\varphi_{j;k}(t)$ être définies par (1.6). Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi_{j;k}(t) \in V_j$ et $\|\varphi_{j;k}(t)\| = 1$.

Proof. : Soit $k \in \mathbb{Z}$. Comme $f(t) = \varphi(t - k)$ est un élément de base pour V_0 , il est en V_0 , donc par la propriété de fonction d'échelle de la définition 11, nous devons avoir $f(2^j t) \in V_j$. Mais $f(2^j t) = \varphi(2^j t - k)$, d'autre part que $\varphi_{j;k}(t) \in V_j$. Nous sommes invité à montrer que $\|\varphi_{j;k}(t)\| = 1$. ■

La propriété de fonction d'échelle est du fait que $\{\varphi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ peut être utilisé en conjonction Définition avec 1,2 à montrer que l'ensemble $\{\varphi_{j;k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée pour V_j .

Proposition 1.2 (*une base orthonormée de V_j*) Supposons que $\{V_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ est une analyse multirésolution pour $L^2(\mathbb{R})$ avec la fonction d'échelle $\varphi(t)$. Supposons que $k \in \mathbb{Z}$ avec $j \neq 0$ et considérer l'ensemble $S = \{\varphi_{j;k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, où $\varphi_{j;k}(t)$ est défini par (1.6). Alors S est une base orthonormale pour V_j .

Proof. : D'après la proposition 1.1 nous savons que $\varphi_{j;k}(t) \in V_j$ et $\|\varphi_{j;k}(t)\| = 1$. Maintenant supposons que $k, l \in \mathbb{Z}$ avec $k \neq l$ et considère le produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j;k}(t), \varphi_{j;l}(t) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) \overline{2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - l)} dt \\ &= 2^j \int_{\mathbb{R}} \varphi(2^j t - k) \varphi(2^j t - l) dt \end{aligned} \tag{1-7}$$

.Nous laissons tomber la conjugaison depuis $\varphi_{j;k}(t)$ est une fonction à valeurs réelles. , on peut écrire (1.7) que.

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j;k}(t), \varphi_{j;l}(t) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) \varphi(u - l + k) du \\ &= \langle \varphi(u), \varphi(u - l + k) \rangle \end{aligned}$$

Mais nous savons que $k - l \neq 0$ et depuis $\varphi(u)$ et $\varphi(u - l + k)$ sont deux éléments distincts d'une base orthonormale pour V_0 , leur produit scalaire est 0. Ainsi $\langle \varphi_{j;k}(t), \varphi_{j;l}(t) \rangle = 0$.

et nous voyons que l'ensemble $\{\varphi_{j;k}(t)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est un repère orthonormé des fonctions de V_j . Pour montrer que S forme une base pour V_j , nous devons montrer que les éléments de S sont linéairement indépendante et que l'on peut écrire toute fonction $f(t) \in V_j$ comme une combinaison linéaire de les éléments de S . Nous prouvons que les éléments de S sont linéairement indépendants.

Pour voir ce que S engendrée V_j , soit $f(t) \in V_j$. Puis par la propriété de fonction d'échelle de la définition 1.1, nous savons que $f(2^{-j}t) \in V_0$. Depuis l'ensemble $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée pour V_0 , nous savons que pour $k \in \mathbb{Z}$ il existe un $a_k \in \mathbb{R}$ telque

$$f(2^{-j}t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(t-k)$$

Remplacement t par $2^{-j}t$ et multiplier et diviser chaque terme de la droite par $2^{\frac{j}{2}}$ donne

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_k}{2^{\frac{j}{2}}} 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_k}{2^{\frac{j}{2}}} \varphi_{j;k}(t)$$

Ainsi, nous avons écrit $f(t) \in V_j$ comme une combinaison linéaire des éléments de S . ■

Le corollaire suivant nous donne une représentation explicite de $f(t) \in V_j$ en termes des fonctions de base $\varphi_{j;k}(t)$.

Corollaire 1.1 (*Forme explicite pour $f(t) \in V_j$*) Supposons que $f(t) \in V_j$, alors ona

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi_{j;k}(t) \tag{1-8}$$

Telque

$$a_k = \langle f(t), \varphi_{j;k}(t) \rangle$$

1.3 L'équation dilatation et résultats associées

Notre prochain résultat montre que la fonction d'échelle $\varphi(t)$ à partir d'une analyse multirésolution satisfait une équation de dilatation.

Proposition 1.3 (*la dilatation équation pour $\varphi(t)$*) *Supposons que $\varphi(t)$ est la fonction d'échelle pour une analyse multirésolution $\{V_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ Puis $\varphi(t)$ satisfait à l'équation de dilatation*

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k) \quad (1-9)$$

Telque

$$h_k = \langle \varphi(t), \varphi_{1;k}(t) \rangle \quad (1-10)$$

Alors, pour $\varphi_{j;k}(t)$ définie en (1.5), nous avons

$$\varphi_{j;k}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} \varphi_{j+1,k}(t) \quad (1-11)$$

Les coefficients $h_k, k \in \mathbb{Z}$ qui apparaissent dans (1,10) forment ce qu'on appelle le filtre de fonction d'échelle. On note généralement ce filtre par $h = (\dots, h_{-1}, h_0, h_1, \dots)$.

Proof. On a V_j sont des espaces emboîtées ; en particulier $V_0 \subset V_1$. soit $\varphi(t) \in V_0$ implique que $\varphi(t) \in V_1$, d'après la proposition (1-2) nous pouvons écrire par une combinaison linéaire d'éléments de base $\{\varphi_{1;k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ donc il existe un $h_k, k \in \mathbb{Z}$ telque

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{1,k}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k)$$

D'après le corollaire (1-1) nous écrivons

$$h_k = \langle \varphi(t), \varphi_{1;k}(t) \rangle = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \varphi(2t - k) dt$$

Et d'après (1-9); si nous remplaçons t par $2^j t - l$ nous obtenent

$$\begin{aligned}\varphi(2^j t - l) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2(2^j t - l) - k) \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2^{j+1} t - (2l + k))\end{aligned}\tag{1-12}$$

Nous posons $m = k + 2l$, donc $k = m - 2l$ et multiple (1-12) par $2^{\frac{j}{2}}$ on obtient

$$\begin{aligned}2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - l) = \varphi_{j;l}(t) &= 2^{\frac{j+1}{2}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2l} \varphi(2^{j+1} t - m) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2l} \varphi_{j+1,m}(t)\end{aligned}$$

■

Proposition 1.4 (les fonctions d'échelle et ces espaces)

Supposons que $V_j = \text{span} \{ \varphi(2^j t - k) \}_{k \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ et que $\varphi(t) \in V_0$ satisfait une équation de dilatation (1-9). Puis $V_j \subset V_{j+1}$ et $f(t) \in V_0$ si et seulement si $f(2^j t) \in V_j$

Proof. : Nous prouvons que $V_j \subset V_{j+1}$. Supposons que $f(t) \in V_j$. Depuis V_j est engendré par $\varphi(2^j t - k)$ $k \in \mathbb{Z}$, nous pouvons écrire

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(2^j t - k)\tag{1-13}$$

Mais $\varphi(t)$ satisfait une équation de dilatation (1,9) , donc nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\varphi(2^j t - k) &= \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \varphi(2(2^j t - k) - l) \\ &= \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \varphi(2^{j+1} t - 2k - l)\end{aligned}\tag{1-14}$$

Insertion (1.13) dans (1.14) donne

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (\sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \varphi(2^{j+1}t - 2k - l)) \\ &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (\sum_{l \in \mathbb{Z}} h_l \varphi(2^{j+1}t - 2k - l)) \end{aligned}$$

Maintenant, nous faisons la substitution $m = 2k+l$ sur la somme intérieure. Puis $l = m-2k$ et nous avons :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (\sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \varphi(2^{j+1}t - m)) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{m-2k}) \varphi(2^{j+1}t - m) \end{aligned}$$

Ainsi nous avons écrit $f(t)$ comme une combinaison linéaire des fonctions $\varphi(2^{j+1}t - m), m \in \mathbb{Z}$, où les coefficients sont $p_m = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{m-2k}$, de sorte que $f(t) \in V_{j+1}$.

Nous pouvons utiliser l'équation de dilatation (1.9) pour obtenir des propriétés satisfaites par des éléments du filtre d'échelle h . ■

Proposition 1.5 (propriétés du filtre d'échelle) *Supposons que $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ avec fonction d'échelle $\varphi(t)$ Soit h est le filtre d'échelle alors les filtres d'échelle $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifient :*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 = 1$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k-2n} = \delta_{0,n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Exemple 1.2 (fonction et filtre d'échelle de Haar). *Rappelons que dans ce cas la fonction d'échelle est construite à partir de la fonction même $\varphi(t)$ déterminée par :*

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq t \end{cases} .$$

On aura donc :

$$\begin{cases} \varphi_{1,0}(t) = \sqrt{2}\varphi(2t) = 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \varphi_{1,0}(t) = \sqrt{2}\varphi(2t) = 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

ce qui confirme la décomposition suivante de $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,0}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,1}(t) .$$

La séquence numérique équivalente à la réponse impulsionnelle du filtre h_k sera donc :

$$h_k = \left\{ \dots, 0, \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots \right\} .$$

L'élément souligné correspond à $k = 0$.

1.4 Projections dans l'espace V_j

Nous voulons penser des espaces V_J pour une analyse multirésolution générale de $L^2(\mathbb{R})$ comme des espaces d'approximation. Ainsi, nous avons besoin pour projeter une fonction arbitraire $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ dans V_J Rappelons que le

$$P_j f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle \varphi_{j,k}(t) \tag{1-15}$$

Depuis les espaces V_J sont imbriquées, nous pouvons passer d'un espace d'approximation

V_{J+1} à V_J . Nous le faisons à travers une projection et le résultat suivant.

Proposition 1.6 (*Projection Fonctions de V_{J+1} dans V_J*) *Supposons que $\{V_J\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ avec $\varphi(t)$ la fonction d'échelle associé. Supposons que $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$ est de la forme*

$$f_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi_{j+1,k}(t) \quad (1-16)$$

où $\varphi_{j+1,k}(t)$ est donnée par (1.5). Si $f_j(t)$ est la projection de $f_{j+1}(t)$ dans V_J , alors $f_j(t)$ a la forme

$$f_j(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \varphi_{j,l}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{k-2l} \right) \varphi_{j,l}(t) \quad (1-17)$$

où $h_k, k \in \mathbb{Z}$ sont les coefficients de filtre d'échelle figurant dans la proposition 1.3

1.5 La fonction ondelette

Définition 1.3 (*la fonction et le filtre d'ondelette*) *Supposons que $\{V_J\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ avec $\varphi(t)$ la fonction d'échelle associé qui satisfait l'équation de dilatation (1,6).[6] Nous définissons la fonction d'ondelette $\psi(t) \in V_1$ par*

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2t - k) \quad (1-18)$$

et plus généralement, les fonctions $\psi_{j,k}(t) \in V_{j+1}$ par

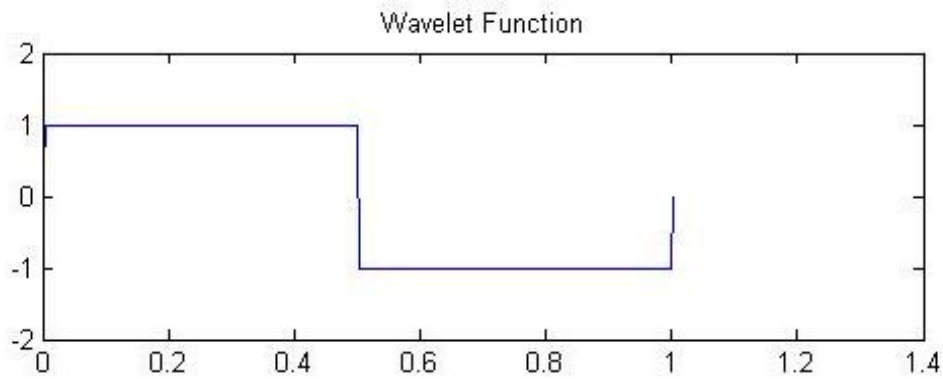
$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \quad (1-19)$$

pour les entiers $k, l \in \mathbb{Z}$. Le filtre d'ondelettes est donné par $g = (\dots, g_{-1}, g_0, g_1, \dots)$, où

$$g_k = (-1)^k h_{1-k} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1-20)$$

Exemple 1.3 (la fonction et filtre d'ondelettes de Haar) D'après l'analyse multirésolution de Haar. Rappelons que dans ce cas la fonction d'ondelette est construite à partir de la fonction mère $\psi(t)$ définie par :

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq t \end{cases}$$



la fonction d'onde mère de Haar

donc la décomposition suivante pour $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t - 1),$$

soit :

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,0}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,1}(t).$$

La séquence numérique équivalente à la réponse impulsionnelle du filtre g_k sera donc :

$$g_k = \left\{ \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots \right\}.$$

Proposition 1.7 (Dilatation équation pour $\psi_{j,k}(t)$) Soit $\psi_{j,k}(t)$ être donné par (1.19), où $j, k \in \mathbb{Z}$. Pour tout entier $l \in \mathbb{Z}$ nous ont

$$\psi_{j,k}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2l} \varphi_{j+1,k}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1+2l-k} \varphi_{j+1,k}(t) \quad (1-21)$$

1.6 Les espaces d'ondelettes W_j

Le résultat suivant, dû à Stéphane Mallat [14] et Yves Meyer [17], identifie le complément orthogonal W_J à V_j dans V_{j+1} et établit une base orthonormée pour W_J .

Théorème 1.1 (L'orthonormalité de W_J) Supposons que $\{V_J\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est un multirésolution analyse de $L^2(\mathbb{R})$ avec $\varphi(t)$ la fonction d'échelle associé qui satisfait l'équation de dilatation

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k)$$

Ici, nous supposons que le filtre d'échelle $h = (\dots, h_{-1}, h_0, h_1, \dots)$ est composé de nombres réels.

Soit la fonction d'ondelettes $\psi(t) \in V_1$ être donné par Définition 1.3. si.

$$W_J = \text{span} \{\psi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (1-22)$$

puis W_J est le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1} . En d'autres termes,

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (1-23)$$

En outre, l'ensemble $\{\psi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée pour W_J

Proof. La preuve de ce théorème est assez technique, et les arguments qui apparaissent dans [14] et [17] utilise la transformée de Fourier. Une très belle démonstration de ce théorème ça n'a pas utiliser la transformée de Fourier apparaît dans le livre de Boggess et Narcowich].

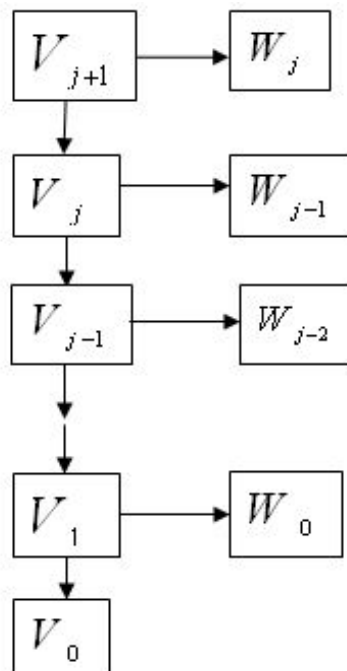


Figure 1 : Schéma d'analyse multirésolution

■

1.7 Projection de V_{j+1} dans W_j

Pour décomposer une fonction $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$, on utilise le fait que $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ et écrire $f_{j+1}(t) = f_j(t) + \omega_j(t)$, où $f_j(t)$, $\omega_j(t)$ sont orthogonales, $f_j(t) \in V_j$ est la projection orthogonale de $f_{j+1}(t)$ dans V_j et $\omega_j(t) \in W_j$ est la projection orthogonale de $f_{j+1}(t)$ dans W_j . Nous avons déjà une formule (1.17) pour $f_j(t)$. Maintenant, nous cherchons une

formule pour $\omega_j(t)$. Nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.8 (Projection Fonctions de V_{j+1} dans W_j) *Supposons que $\{V_J\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ avec $\varphi(t)$ la fonction d'échelle associé. Laissez les espaces W_j être donnés par (1-22) avec la fonction ondelette $\psi(t)$ associé. Supposons que $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$ est de la forme*

$$f_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi_{j+1,k}(t)$$

où $\varphi_{j+1,k}(t)$ donné par (1-5) et $a_k = \langle f_{j+1}(t), \varphi_{j+1;k}(t) \rangle$, si $\omega_j(t)$ est la projection orthogonale de $f_{j+1}(t)$ dans W_j , alors s'écrit de la forme

$$\begin{aligned} \omega_j(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_k \psi_{j,l}(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g_{k-2l} \right) \psi_{j,l}(t) \\ & &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (-1)^k h_{1+2l-k} \right) \psi_{j,l}(t) \end{aligned} \tag{1-24}$$

où $g_k, k \in \mathbb{Z}$ sont les coefficients de filtre d'ondelettes donnés par (1.20) et $\psi_{j,l}(t)$ est donnée par (1.18).

1.8 algorithme de Mallat

Cet algorithme est construit à partir de la projection de la fonction à étudier sur les sous espaces d'approximation V_j et les espaces de détails W_j . [11], [13], [14]

En traitement de signal f , nous ne savons pas en général l'expression de f mais seulement une approximation d'une échelle donnée.

Ainsi l'objectif de l'algorithme est de calculer à partir de cette approximation les détails et les approximations au résolutions inférieurs.

Soit φ la fonction d'échelle qui par translation engendre une base orthonormée de V_j et ψ la fonction d'ondelette associée engendre la même chose une base orthonormée de l'espace W_j , une représentation complète est donnée dans [9].

Par construction, nous avons $\varphi(t)$ est une fonction de V_0 est parceque $V_0 \subset V_1$, alors il est facile et possible de projeter $\varphi(t)$ sur V_1 . Les coefficients de la projection donnent une suite numérique h_n assimilable à la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique.

De la même manière, $\psi(t)$ est une fonction de W_0 et comme $W_0 \subset V_1$ donc, il est possible aussi de projeter $\psi(t)$ sur V_1 . Les coefficients de la projection donnent une suite numérique (g_n) assimilable à la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique.

Finalement, on note a_n^j les coefficients de la projection de la fonction f sur les sous espaces d'approximation et d_n^j les coefficients de la projection de la fonction f sur les sous espaces de détails .[14]

1.8.1 Décomposition à différentes échelles

Proposition 1.9 *Soit $\varphi(t)$ être des fonctions qui génèrent analyse multirésolution avec la fonction ondelette associés $\psi(t)$. Alors pour tout $j, k, \in \mathbb{Z}$ la dilatation suivante équations détiennent :*

$$\varphi_{j,k}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} \varphi_{j+1,l}(t) \quad (1-25)$$

$$\psi_{j,l}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{l-2k} \varphi_{j+1,l}(t) \quad (1-26)$$

où les coefficients h_k et g_k sont .les filtres d'échelle et d'ondelettes

Avec ces équations de dilatation à la main, nous pouvons maintenant trouver les coefficients de projection dans les analyses multirésolution

. Supposons que $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$ ont la forme

$$f_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k} \varphi_{j+1,k}(t) \quad (1-27)$$

En suite, la projection de $f_{j+1}(t)$ dans V_j ,et :

$$f_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \varphi_{j,k}(t) \quad (1-28)$$

et la projection de $f_{j+1}(t)$ dans W_j , et :

$$\omega_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (1-29)$$

où

$$a_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} a_{j+1,l} \quad (1-30)$$

$$d_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{l-2k} a_{j+1,l} \quad (1-31)$$

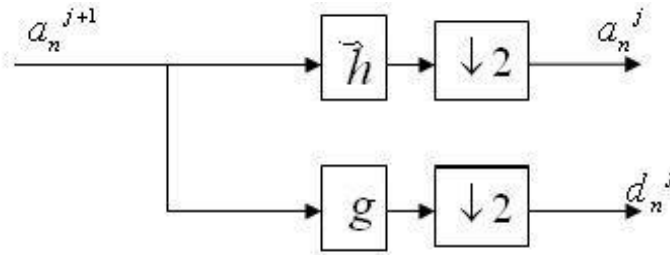


Figure2 :Algorithme d'analyse de Mallat(ondelette orthogonale)

1.8.2 reconstruction

C'est un processus simple pour récupérer $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$ à partir des projections de $f_{j+1}(t)$ dans V_j et W_j . Supposons que $f_j(t)$ et $\omega_j(t)$ sont les projections de $f_{j+1}(t)$ dans V_j et W_j , respectivement. puis

$$f_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k} \varphi_{j+1,k}(t)$$

$$f_j(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \varphi_{j,l}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{k-2l} \right) \varphi_{j,l}(t)$$

$$\omega_j(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} d_k \psi_{j,l}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (-1)^k h_{1+2l-k} \right) \psi_{j,l}(t)$$

avec $f_{j+1}(t) = f_j(t) + \omega_j(t)$. Donc, nous obtenons

$$b_l = \langle f_j(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{k-2l} \quad (1-32)$$

$$d_l = \langle \omega_j(t), \psi_{j,l}(t) \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (-1)^k h_{1+2l-k} \quad (1-33)$$

telque :

$$a_{j+1,k} = \langle f_{j+1}(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle \quad (1-34)$$

Pour la reconstruction, nous supposons que b_k, d_k , sont connus et nous utilisons ces valeurs pour récupérer $a_k, k \in \mathbb{Z}$. Depuis $f_{j+1}(t) = f_j(t) + \omega_j(t)$, nous pouvons utiliser (1-28) au (1-29) pour écrire

$$f_{j+1}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \varphi_{j,l}(t) + d_k \psi_{j,l}(t)$$

Depuis a_k est donnée par (1.34), nous pouvons écrire l'identité ci-dessus avec $\varphi_{j+1,l}(t)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} a_k &= \langle f_{j+1}(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle \\ &= \langle \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \varphi_{j,l}(t) + d_k \psi_{j,l}(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle \\ a_k &= \langle f_{j+1}(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle \\ &= \langle \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \varphi_{j,l}(t) + d_k \psi_{j,l}(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \langle \varphi_{j,l}(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle + d_k \langle \psi_{j,l}(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle \end{aligned}$$

De la preuve de la proposition (1.6) nous savons que $\langle \varphi_{j,l}(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle = h_{k-2l}$, nous avons $\langle \psi_{j,l}(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle = g_{k-2l} = (-1)^k h_{1+k-2l}$, de sorte que

$$a_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l h_{k-2l} + d_k (-1)^k h_{1+k-2l}$$

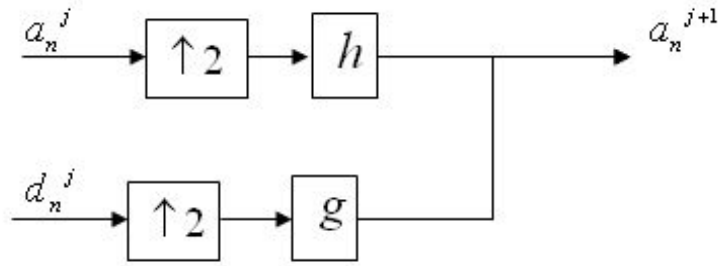


Figure 3 :Algorithme synthèse de Mallat (ondelette orthogonale)

Alors, la conclusion de l'algorithme d'analyse et synthèse de Mallat d'une fonction (signal) dans le cas d'ondelette orthogonal sera comme la suite :

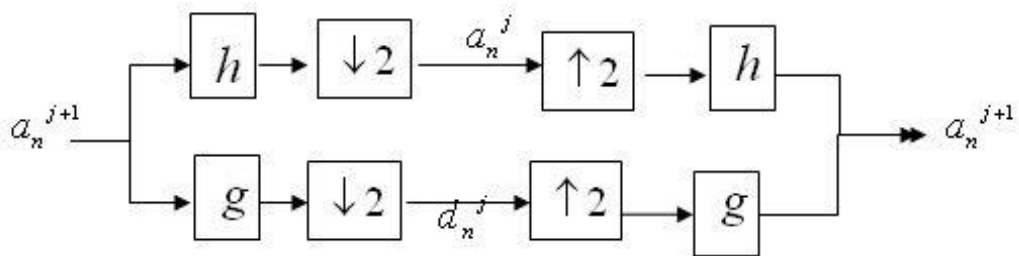


Figure 4 :Algorithme d'analyse et synthèse de Mallat (ondelette orthogonale)

1.9 Approximation des bases d'ondelettes orthogonales

L'approximation d'une fonction f à une résolution 2^{-j} est spécifiée par une grille discrète des échantillons qui fournit des moyennes locales de f sur des quartiers de taille proportionnelle à 2^j . Une approximation multirésolution est ainsi composée des grilles embarquées d'approximation. Plus formellement, l'approximation d'une fonction à une résolution 2^{-j} est définie comme une projection orthogonale sur un espace $V_j \in L^2(\mathbb{R})$. L'espace V_j regroupe toutes les approximations possibles à la résolution 2^{-j} . La projection orthogonale est hors de la fonction $P_j f \in V_j$ qui minimise $\|f - P_j f\|$. Cette définition introduite par Mallat [14] et Meyer [16] précise les propriétés mathématiques des espaces multi-résolutions. Pour éviter toute confusion, nous insistons sur le fait qu'un 2^j du paramètre d'échelle est l'inverse de la résolution 2^{-j} [5].

On peut, à l'aide de la connaissance de l'ordre d'une analyse multirésolution et la régularité d'une fonction $f \in L_2(\mathbb{R})$; déterminer l'erreur de projection entre f et $P_j f$. Supposant que l'on a déjà la fonction d'échelle φ et f de $L_2(\mathbb{R})$, et que l'AMR engendrée par φ est d'ordre m , ψ et l'ondelette est associée. [12]

Exemple 1.4 *La décomposition d'un signal $x(t) = \sin(3t) + \sin(0.3t) + \sin(0.03t)$ sur une base d'ondelettes orthogonales engendrée par l'onde mère db2. Jusqu'au*

niveau 2

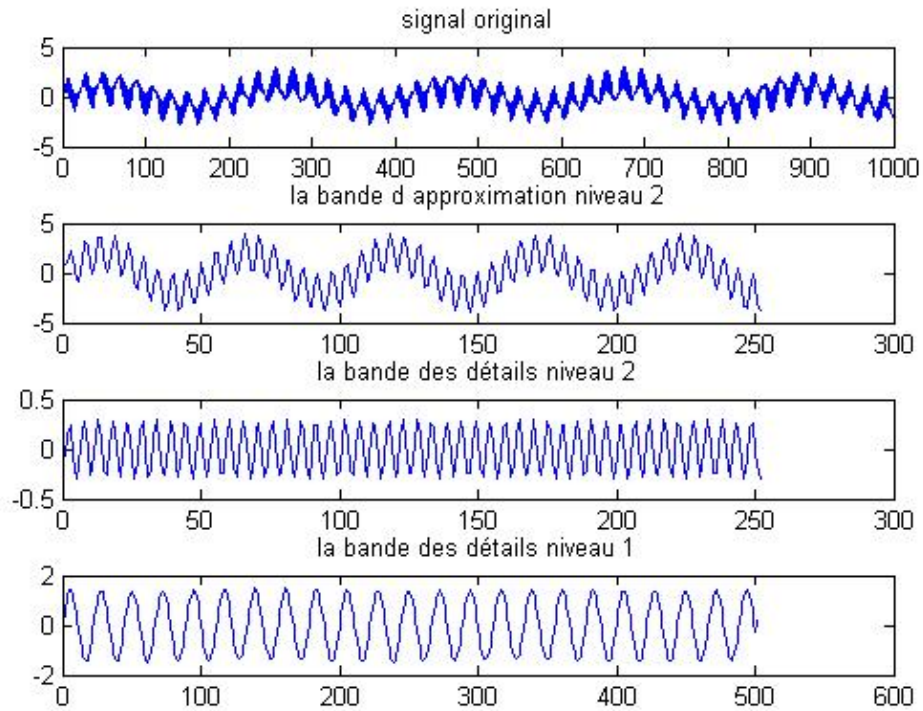


Figure 5 :La décomposition $x(t)$ sur une base d'ondelettes orthogonales engendrée par l'onde mère db2.

Le signal approximé à partir de la bande d'approximation niveau 2

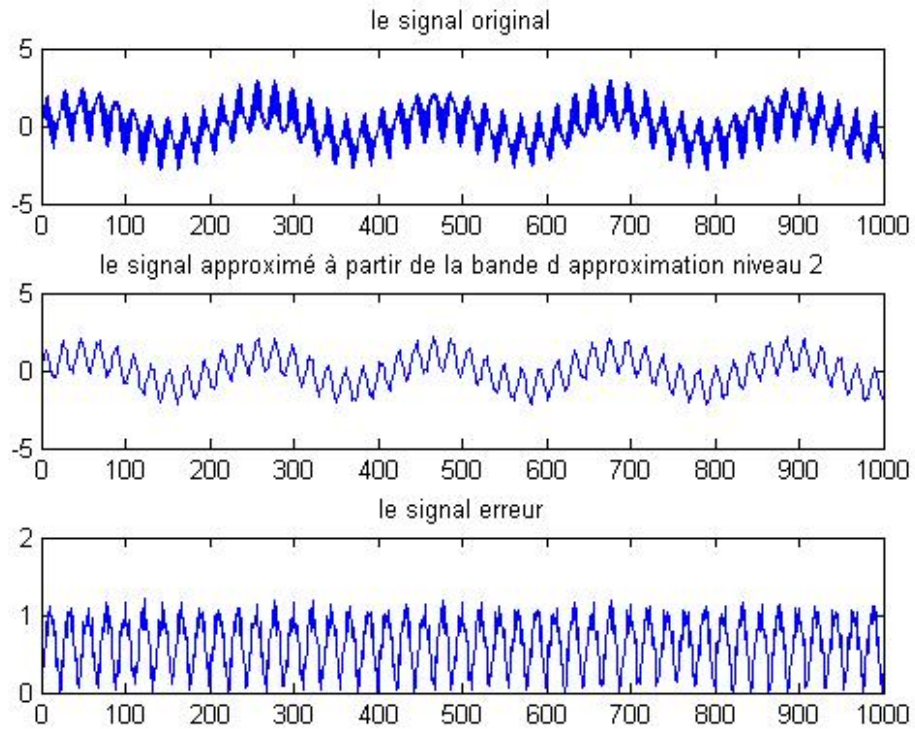


Figure 6 :L'approximation $x(t)$ sur une base d'ondelettes orthogonales engendrée par l'onde mère db2.

Chapitre 2

Analyse multirésolution et biorthogonalité

La biorthogonalité est la généralisation utile d'orthogonalité que nous explorons dans ce chapitre. Dans ce chapitre, nous construisons une structure biorthogonale appelée une analyse multirésolution duale [2]. Nous avons considéré la notion de bases orthogonales qui ont infiniment nombreux éléments et qui peut être utilisé pour représenter fonction arbitraire $L^2(\mathbb{R})$, nous allons examiner. tels systèmes sont appelés base de Riesz. Les propriétés de stabilité et l'exhaustivité des bases d'ondelettes bi-orthogonales sont décrits de reconstruction parfaite des filtres h et \tilde{h} ayant une réponse impulsion finie. L'avantage d'ondelettes biorthogonales est d'introduire une certaine souplesse par-rapport aux ondelettes orthogonales [3].

2.1 Analyse multirésolution biorthogonale

Définition 2.1 (*Ensembles biorthogonales et Espaces dual*) Soit $\tilde{\varphi}(t)$ et $\varphi(t)$ deux fonctions dans $L^2(\mathbb{R})$ et de définir les espaces duales, nous proposons que φ et $\tilde{\varphi}$ sont à

support compact [7]

$$V_0 = \text{span} \{ \varphi(t - k) \}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad \tilde{V}_0 = \text{span} \{ \tilde{\varphi}(t - k) \}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (2-1)$$

L'ensemble $\{ \tilde{\varphi}(t - k) \}_{k \in \mathbb{Z}}$ est biorthogonal à l'ensemble $\{ \varphi(t - k) \}_{k \in \mathbb{Z}}$ si pour tout $k, m \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$\langle \tilde{\varphi}(t - m), \varphi(t - k) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(t - m), \varphi(t - k) dt = \delta_{m,k} \quad (2-2)$$

Nous disons que $\tilde{\varphi}(t)$ et $\varphi(t)$ sont duals générateurs et \tilde{V}_0 et V_0 sont espaces duals

Une conséquence d'être deux générateurs est que les ensembles biorthogonaux $\{ \tilde{\varphi}(t - k) \}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{ \varphi(t - k) \}_{k \in \mathbb{Z}}$ sont automatiquement linéairement indépendants

2.2 Les Fonctions $\varphi_{j;k}(t)$ et $\tilde{\varphi}_{j;k}(t)$

Définition 2.2 (*Les Fonctions $\varphi_{j;k}(t)$ et $\tilde{\varphi}_{j;k}(t)$*) Supposons que $\tilde{\varphi}(t)$ et $\varphi(t)$ sont deux générateurs de \tilde{V}_0 et V_0 Pour tous entiers j et k , nous définissons les fonctions

$$\varphi_{j;k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}_{j;k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \tilde{\varphi}(2^j t - k) \quad (2-3)$$

Le résultat suivant est immédiate

Proposition 2.1 (*biorthogonalité pour $\varphi_{j;k}(t)$ et $\tilde{\varphi}_{j;k}(t)$*) Supposons, j, k et m sont des nombres entiers. puis

$$\langle \varphi_{j;k}(t), \tilde{\varphi}_{j;m}(t) \rangle = \delta_{m,k} \quad (2-4)$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k) \\ \tilde{\varphi}(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_k \tilde{\varphi}(2t - k) \end{aligned} \quad (2-5)$$

Nous pouvons définir les espaces \tilde{V}_j et V_j

Définition 2.3 (Les espaces \tilde{V}_j et V_j) Soit $j, k \in \mathbb{Z}$. Si $\varphi_{j,k}(t)$ et $\tilde{\varphi}_{j,k}(t)$ sont donnés par (2.3), nous définissons les deux espaces

$$V_j = \text{span} \{ \varphi_{j,k}(t) \}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad \tilde{V}_j = \text{span} \{ \tilde{\varphi}_{j,k}(t) \}_{k \in \mathbb{Z}}$$

2.3 Projections dans les espaces \tilde{V}_j et V_j

Définition 2.4 (Projections biorthogonales) Soit $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ et supposons que \tilde{V}_j et V_j sont deux espaces. Les projections de $f(t)$ dans V_j et \tilde{V}_j sont donnés par

$$f_j(t) = P_{f,j}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \varphi_{j,k}(t) \quad \text{et} \quad \tilde{f}_j(t) = \tilde{P}_{f,j}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_{j,k} \tilde{\varphi}_{j,k}(t)$$

respectivement, où

$$a_{j,k} = \langle f(t), \tilde{\varphi}_{j,k}(t) \rangle \quad \text{et} \quad \tilde{a}_{j,k} = \langle f(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle$$

Théorème 2.1 (condition de filtre dual) Supposons que $\tilde{\varphi}(t)$ et $\varphi(t)$ satisfaire l'équations de dilatation (2,5). Ces fonctions sont deux générateurs si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_l h_{l-2k} = \delta_{k,0} \quad (2-7)$$

Proposition 2.2 (Les filtres \tilde{g} et g) les coefficients de filtre \tilde{g} et g sont donnés composante par composante, par

$$\tilde{g}_k = (-1)^k h_{1-k} \quad \text{et} \quad g_k = (-1)^k \tilde{h}_{1-k} \quad (2-8)$$

2.4 Les fonctions d'ondelettes $\tilde{\psi}(t)$ et $\psi(t)$

Définition 2.5 (*Les fonctions d'ondelettes $\tilde{\psi}(t)$ et $\psi(t)$*) Supposons que $\tilde{\varphi}(t)$ et $\varphi(t)$ satisfont les équations de dilatation donnés par (2.5). Nous définissons des fonctions ondelettes $\tilde{\psi}(t)$ et $\psi(t)$ par

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2t - k) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_k \tilde{\varphi}(2t - k) \quad (2-9)$$

où les coefficients \tilde{g} et g sont donnés par (2.8) de la Proposition 2.4.

Définition 2.6 (*Les fonctions d'ondelettes $\tilde{\psi}_{j,k}(t)$ et $\psi_{j,k}(t)$*) Supposons que $\tilde{\psi}(t)$ et $\psi(t)$ sont les fonctions ondelettes données par Définition (2.4.1) Puis pour les entiers j et k nous définissons

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \tilde{\psi}(2^j t - k) \quad (2-10)$$

Nous pouvons maintenant définir les espaces d'ondelettes W_j et \tilde{W}_j .

Définition 2.7 (*Les Espaces ondelettes W_j et \tilde{W}_j*) Soit $j, k \in \mathbb{Z}$. Si $\tilde{\psi}(t)$ et $\psi(t)$ sont donnés par (2.10), alors nous définissent les espaces d'ondelettes

$$W_j = \text{span} \{ \psi_{j,k}(t) \}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad \tilde{W}_j = \text{span} \{ \tilde{\psi}_{j,k}(t) \}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (2-11)$$

Notre objectif est maintenant de développer les relations entre les deux espaces et des espaces d'ondelettes analogues à celles décrites dans le chapitre 1. En particulier, nous montrons que les deux espaces peuvent être décomposées comme

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

$$\tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j$$

et cela conduira à des relations de biorthogonalité $W_j \perp \tilde{V}_j$ et $V_j \perp \tilde{W}_j$

Ces relations permettent les hiérarchies multirésolutions $\{V_j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{V}_j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et leurs séquences d'espaces de complément $\{W_j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{W}_j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ à "s'assemblent comme une fermeture éclair géante», comme Daubechies décrit la structure [20].

Nous affirmons maintenant plusieurs relations d'orthogonalité obéi par les fonctions d'échelle et les fonctions d'ondelettes.

Théorème 2.2 (*Relations d'orthogonalité de fonctions d'echelles et ondelettes*)

Nous supposons que $\tilde{\varphi}(t)$ et $\varphi(t)$ satisfont à la condition de la dualité et les équations de dilatation (2,5). Si $\varphi_{j,k}(t)$ et $\tilde{\varphi}_{j,k}(t)$ sont donnés par définition (2.1) et $\tilde{\psi}_{j,k}(t)$ et $\psi_{j,k}(t)$ sont donnés par définition (2.2), les relations d'orthogonalité puis suivantes sont valables pour tous les entiers j, k, l , et m :

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \tilde{\psi}_{j,l}(t) \rangle = 0$$

$$\langle \tilde{\varphi}_{j,k}(t), \psi_{j,l}(t) \rangle = 0$$

$$\langle \tilde{\psi}_{j,k}(t), \psi_{l,m}(t) \rangle = \delta_{j,m} \delta_{k,l}$$

Définition 2.8 (*biorthogonales fonctions d'échelle*) si deux fonctions $\tilde{\varphi}(t)$ et $\varphi(t)$ satisfaire à la condition de biorthogonalité (2.1), peuvent être construits par des équations de dilatation (2,5), et de satisfaire le théorème 2.2, alors nous disons que $\tilde{\varphi}(t)$ et $\varphi(t)$ sont des fonctions d'échelle biorthogonaux.

Voici une définition formelle de généraliser une analyse multirésolution à notre paramètre biorthogonal.

Définition 2.9 (*Dual Biorthogonal d'Analyse Muliresolution*) Supposons que $\{\tilde{V}_j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{V_j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sont des suites de sous-espaces imbriqués de $L^2(\mathbb{R})$ $V_j \subset V_{j+1}$ et $\tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j+1}$ et que chaque satisfait le critère (1,1) définition de (1,1) d'une analyse multirésolution de

$L^2(\mathbb{R})$. Si $\{\tilde{\varphi}(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sont des bases de Riesz de \tilde{V}_0 et V_0 , respectivement, alors nous disons $\{\tilde{V}_J\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{V_J\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une analyse multirésolution double ou une analyse multirésolution biorthogonale de $L^2(\mathbb{R})$.

2.5 Algorithme de Mallat

2.5.1 Décomposition à différentes échelles

Les idées pour la décomposition en utilisant des fonctions d'échelle et des ondelettes biorthogonales. Nous allons maintenant d'une manière plus systématique, en commençant par une généralisation des équations de dilatation pour relier les espaces V_{j+1} et \tilde{V}_{j+1} avec les espaces V_j , W_j et \tilde{V}_j , \tilde{W}_j , respectivement. [2], [3]

Proposition 2.3 (*Dilatation équations à différentes échelles*) Soit $\tilde{\varphi}(t)$ et $\varphi(t)$ être des fonctions qui génèrent analyse multirésolution biorthogonale avec des fonctions ondelettes biorthogonales associés $\tilde{\psi}(t)$ et $\psi(t)$. Alors pour tout $j, k, \in \mathbb{Z}$ la dilatation suivante équations détiennent :

$$\varphi_{j,k}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} \varphi_{j+1,l}(t)$$

$$\tilde{\varphi}_{j,k}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{l-2k} \tilde{\varphi}_{j+1,l}(t)$$

$$\psi_{j,l}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{l-2k} \varphi_{j+1,l}(t)$$

$$\tilde{\psi}_{j,k}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{l-2k} \tilde{\varphi}_{j+1,l}(t)$$

où les coefficients h_k , \tilde{h}_k et g_k , \tilde{g}_k sont définis par les équations de dilatation (2,7) et (2,8) .

Avec ces équations de dilatation à la main, nous pouvons maintenant trouver les coefficients de projection dans les analyses multirésolution duales.

Proposition 2.4 (projections dans un double analyses multirésolution) Soit $\tilde{\varphi}(t)$ et $\varphi(t)$ être des fonctions qui génèrent analyse multirésolution double échelle $\{\tilde{V}_J\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{V_J\}_{k \in \mathbb{Z}}$ avec associé fonctions ondelettes biorthogonales $\tilde{\psi}(t)$ et $\psi(t)$. Supposons que $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$ et $\tilde{f}_{j+1}(t) \in \tilde{V}_{j+1}$ ont la forme

$$f_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1} \varphi_{j+1,k}(t) \quad \text{et} \quad \tilde{f}_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_{j+1} \tilde{\varphi}_{j+1,k}(t). \quad (2-12)$$

En suite, les projections de $f_{j+1}(t)$ et $\tilde{f}_{j+1}(t)$ dans V_j, \tilde{V}_j , respectivement, sont

$$f_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_j \varphi_{j,k}(t) \quad \text{et} \quad \tilde{f}_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_j \tilde{\varphi}_{j,k}(t), \quad (2-13)$$

et les projections des $ff_{j+1}(t)$ et $\tilde{f}_{j+1}(t)$ dans W_j, \tilde{W}_j respectivement, sont

$$\omega_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_j \psi_{j,k}(t) \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{d}_j \tilde{\psi}_{j,k}(t) \quad (2-14)$$

où

$$a_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{l-2k} a_{j+1,l} \quad \text{et} \quad \tilde{a}_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} \tilde{a}_{j+1,l} \quad (2-15)$$

$$d_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{l-2k} a_{j+1,l} \quad \text{et} \quad \tilde{d}_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{l-2k} \tilde{a}_{j+1,l} \quad (2-16)$$

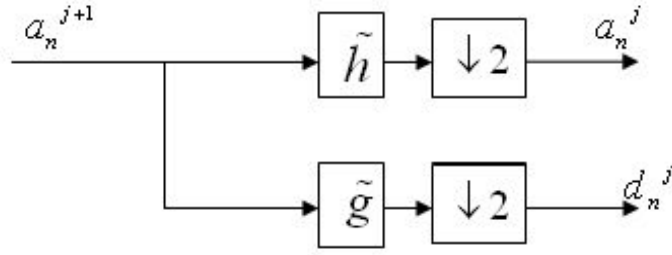


Figure7 :Algorithme d'analyse de Mallat(ondelette biorthogonale)

2.5.2 reconstruction

Supposons maintenant que nous avons une fonction $f(t) \in V_{j+1}$ dont la projection coefficients $a^j = \{a_{j,k}\}$ dans V_j et $d^j = \{d_{j,k}\}$ dans W_j sont connus. Comment pouvons-nous récupérer les coefficients $\{a_{j+1,m}\}$ de $f(t)$ dans V_{j+1} ? Pour résoudre ce problème, nous devons imiter les algorithmes de reconstruction du réglage orthogonale en utilisant les équations de dilatation de la Proposition (2-7) :

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \varphi_{j,k}(t) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (2-17)$$

Multipliez les deux côtés de cette équation par $\tilde{\varphi}_{j+1,m}$ afin que nous puissions profiter de la dualité, et intégrer sur \mathbb{R} pour obtenir

$$\begin{aligned} \langle f(t), \tilde{\varphi}_{j+1,m}(t) \rangle &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \langle \varphi_{j,k}(t), \tilde{\varphi}_{j+1,m}(t) \rangle + \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \langle \psi_{j,k}(t), \tilde{\varphi}_{j+1,m}(t) \rangle \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} \langle \varphi_{j+1,l}(t), \tilde{\varphi}_{j+1,m}(t) \rangle + \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{l-2k} \langle \psi_{j+1,l}(t), \tilde{\varphi}_{j+1,m}(t) \rangle \end{aligned}$$

où la dernière étape utilise des équations de dilatation de la Proposition (2-7). Le principe de la dualité (2-5) nous dit que les produits scalaire ci-dessus est $\delta_{l,m}$. Nous pouvons ainsi

simplifier le produit scalaire et écrire

$$\langle f(t), \tilde{\varphi}_{j+1,m}(t) \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j,k} h_{m-2k} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_{j,k} g_{m-2k}$$

Mais $a_{j+1,m} = \langle f(t), \tilde{\varphi}_{j+1,m}(t) \rangle$, formule que nous avons souhaitée pour la reconstruction

$$a_{j+1,m} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j,k} h_{m-2k} + \sum_{j \in \mathbb{Z}} d_{j,k} g_{m-2k}$$

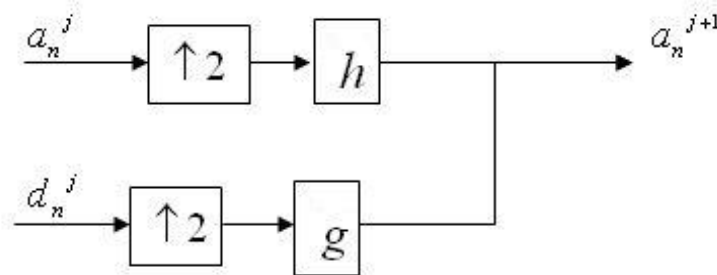


Figure 8 : Algorithme de synthèse de Mallat (ondelette biorthogonale)

En conclusion, on peut présenter l'algorithme d'analyse et de synthèse de Mallat d'une fonction (signal) dans le cas d'ondelette orthogonale comme le schéma suivante :

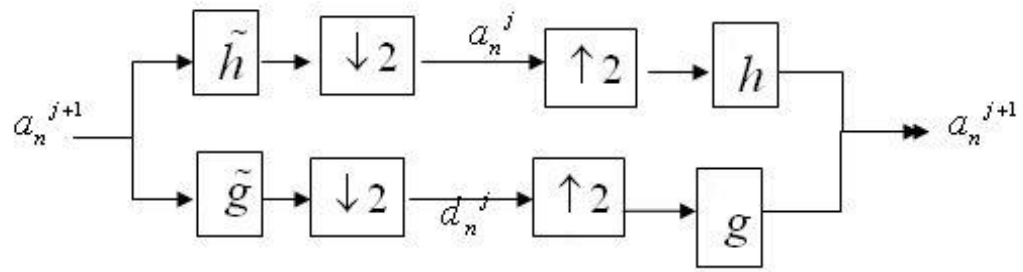


Figure 9 :Algorithme d'analyse et synthèse de Mallat (ondelette biorthogonale)

2.6 Approximation des bases d'ondelettes biorthogonales

Exemple 2.1 La décomposition d'un signal $x(t)$ sur une base d'ondelettes biorthogonales engendrée par l'onde mère bior4.4 . jusqu'au niveau 2.

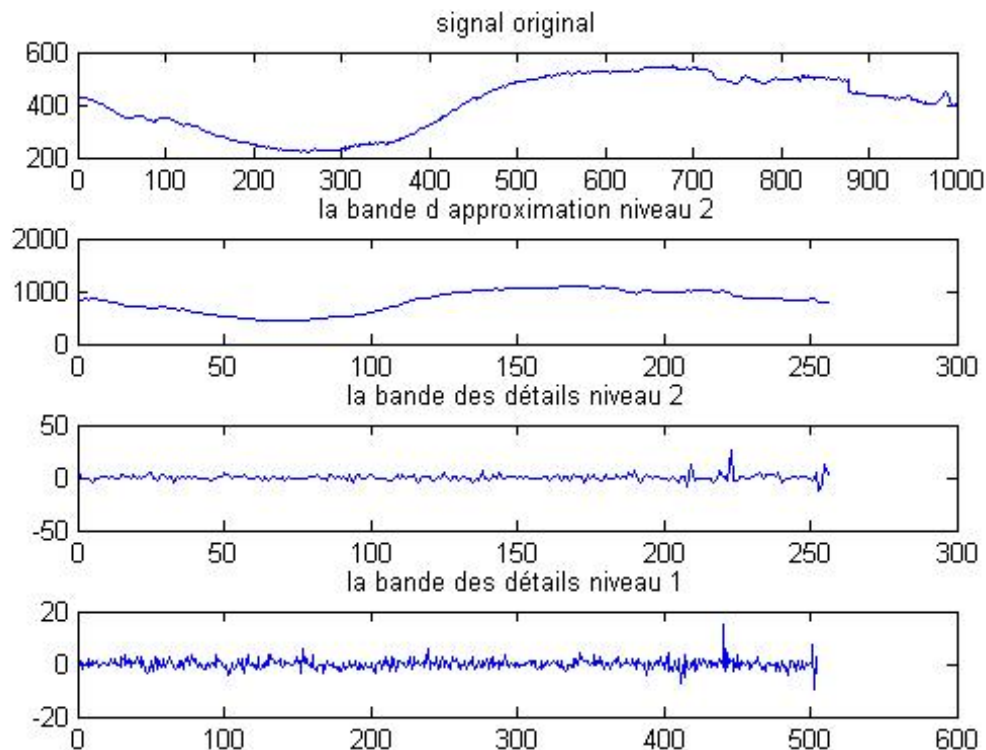


Figure 10 : La décomposition d'un signal $x(t)$ sur une base d'ondelettes biorthogonales engendrée par l'onde mère bior4.4

Le signal approximé à partir de la bande d'approximation niveau 2

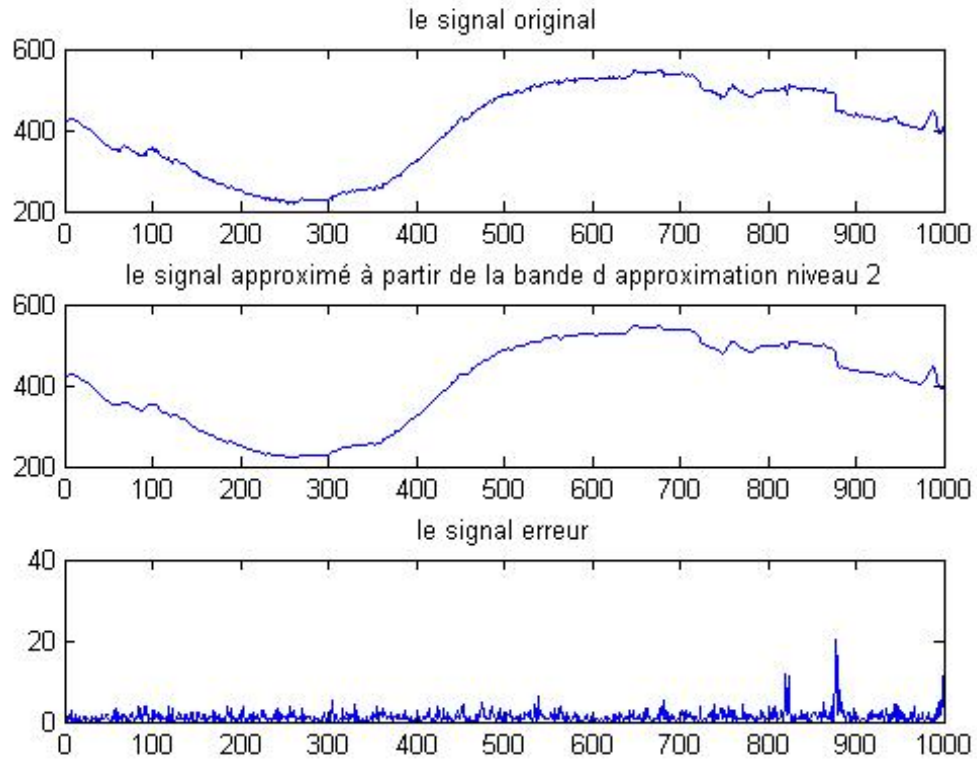


figure 11 : L'approximation d'un signal $x(t)$ sur une base d'ondelettes biorthogonales engendrée par l'onde mère bior4.4

Chapitre 3

Comparaison numérique entre les bases d'ondelettes orthogonales et biorthogonales dans la compression d'images

3.1 Introduction

Ce chapitre focalise l'attention sur le schéma de compression d'images, comment utiliser la DWT pour la compression, finalement nous proposons une étude comparative entre des méthodes de compression qui sont basées sur la DWT avec le type d'onde mère orthogonale et biorthogonale, dans le but de faire une comparaisons entre les deux types d'ondes mères qui nous offre une meilleure compression.

3.2 Généralités sur la compression

La compression de données a pour but de réduire l'espace requis pour le stockage d'une certaine quantité d'information. Généralement le fichier ou l'image traité contient des

informations qui ne sont pas essentielles, la redondance de données est la base essentielle des méthodes de compression. Notons qu'il existe deux types de compression :

Compression sans perte : permet de retrouver exactement toute l'information contenue dans l'image originale. La majorité de ces méthodes sont basées sur le codage ou la prédiction.

Compression avec perte : Ce type de compression comporte une perte de données pendant le processus. Le résultat qu'on peut obtenir est une version dégradée de l'image originale. Le but de ce type de compression est d'éliminer le plus d'information possible sans diminuer la qualité de l'image perçue par le système visuel humain.

Etant donné que l'objectif d'une méthode de compression est de minimiser la quantité d'information qui nécessite à la représentation d'une image, on définit quelques mesures qui sont utilisées par la communauté du traitement d'images dans le cadre d'évaluer une méthode de compression :

Taux de compression :

$$\text{CR} = \frac{\text{Nombre de bits de l'image originale}}{\text{Nombre de bits de l'image compressée}} \quad (3-1)$$

Erreur quadratique moyenne (Mean square Error) :

$$\text{MSE} = \frac{1}{m \times n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (I_0(i, j) - I_1(i, j))^2 \quad (3-2)$$

tel que :

I_0 l'image originale de taille $n \times m$ représentée sur 256 niveaux de gris variant de 0 à 255

I_1 l'image de même taille après reconstruction.

Le rapport signal maximal sur bruit (peak Signal to Noise Ratio) :

$$\text{PSNR} = 20 \log \left(\frac{(255)^2}{\text{MSE}} \right) \quad (3-3)$$

PSNR est une mesure qui permet d'estimer numériquement la qualité de l'image reconstruite.

Dans ce mémoire nous nous intéressons à la compression avec perte.

3.3 Compression avec perte

Un schéma de compression avec perte [10] est composé d'un module de transformation, un module de quantification et enfin un codeur.

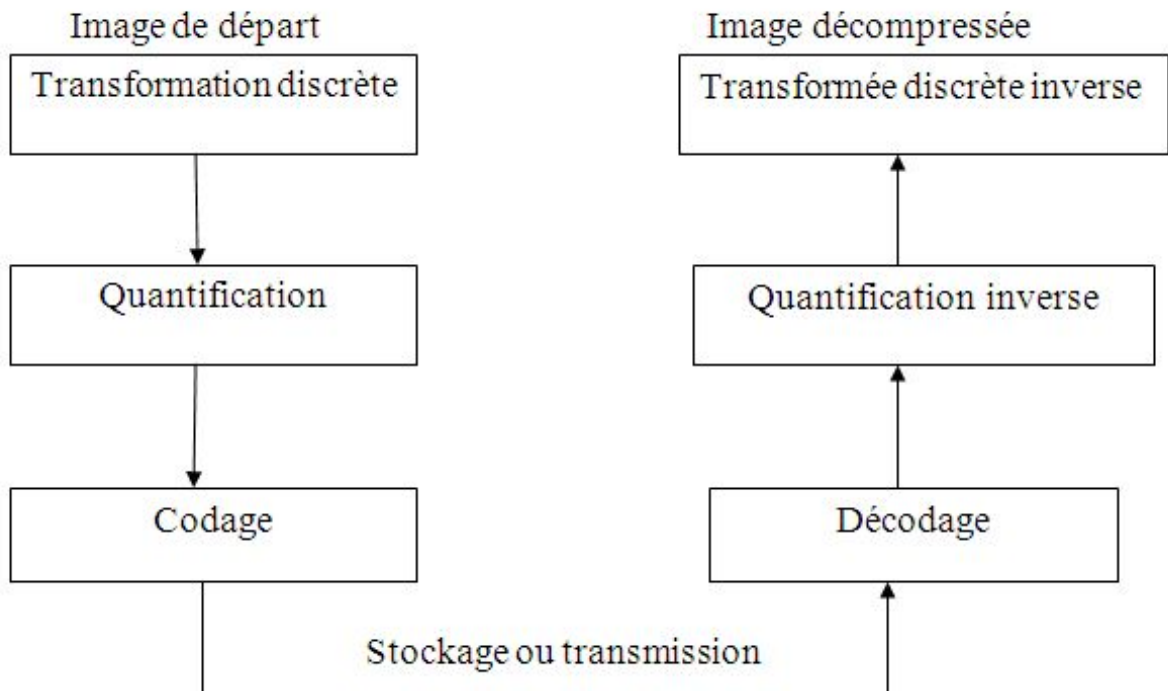


Figure 12 : Schéma de compression d'une image avec perte

Concernant notre exposé, nous nous intéressons à l'application du premier module de ce schéma, puisque la majorité des algorithmes de compression avec perte sont basés sur cette étape.

3.3.1 Transformée discrète

La plus part des méthodes de compression avec perte n'agissent pas directement sur l'image numérique dans sa représentation canonique, mais sur le domaine de sa transformé. Cette transformation peut être linéaire ou non. Il est bien connu qu'une transformation peut permettre de mettre en évidence certaines propriétés de l'image que la représentation originale ou canonique ne laisse pas apparaître. En partant d'un ensemble de valeurs numériques corrélées d'une image, le but est d'obtenir un autre ensemble de valeurs le moins corrélées possible dans l'espace transformé. En général, les schémas de compression par transformation subdivisent l'image de taille $N \times N$ en sous-images de taille plus petites avant de faire subir à chacune de ces sous images une transformation. On privilégie les transformations qui sont unitaires et qui conservent l'énergie. La transformation consiste à décomposer une image selon une base adéquate de fonction telles que :

- les coefficients de la transformée soient indépendants
- un nombre minimum de ces coefficients contienne une proportion importante de l'énergie de l'image

Ainsi, on pourra mettre à zéro certains d'entre eux sans nuire de manière significative ni à la quantité d'énergie, ni à l'aspect visuel de l'image reconstruite.

On peut distinguer plusieurs transformées [11].

- Transformation de Fourier discrète (DFT)
- Transformation de Karhunen-Loeve (KLT)
- Transformation de Hadamard (HT)
- Transformation en cosinus discrète (DCT)
- Transformation par ondelette discrète (DWT)

Concernant notre exposé, nous intéressons par la dernière transformée.

Cette transformée a révolutionné plusieurs domaines de l'imagerie notamment la compression d'images, où elle permet un meilleur taux de compression que les autres et ceci avec une meilleure qualité d'image.

3.4 Etude comparative

Cette partie est consacrée à la simulation d'une comparaison entre les ondelettes orthogonales et biorthogonales dans le but de compression d'images. Dans cette opération nous utilisons les ondelettes orthogonales et biorthogonales qui sont intégrées dans Matlab.

Notre simulation est constituée d'étapes suivantes :

- 1 - Décomposition d'une image niveau de gris par la transformée en ondelette discrète (DWT) ; dans cette étape nous variaisons le type d'onde mère.
- 2 - Seuillage des coefficients d'ondelettes par un seuil $T_H = 15$ fixé.
- 3 - Calcule le pourcentage des coefficients nules obtenue par l'étape précédentes.
- 4 - Réstoration de l'image précédente à partir des coefficients d'ondelettes seuillés avec la transformée en ondelette inverse (IDWT).
- 5 - Calcule de PSNR dans le but mesurer la qualité d'image reconstruite.

Dans ce qui suit nous présentons quelques résultats numériques et visuels concernant notre simulation

***Le cas de type orthogonal :**

onde mère	db2	db3	db4	db5	db6
$\% / 0$ des coefficients nules	79.9468	80.4098	79.8734	79.7607	79.1620
PSNR	34.4928	34.8328	34.7332	34.7304	34.5892

db7	db8	coif1	coif4	coif5
78.7446	78.1933	80.0147	78.7988	78.3918
34.5454	34.5247	34.9125	34.7023	34.6385



image non compressée



image compressée par db2



image compressée par db3



image compressée par db4



image compressée par db5



image compressée par db6



image compressée par db7



image compressée par db8



image compressée par coiflette 1



image compressée par coiflette 4



image compressée par coiflette 5

***Le cas de type biorthogonal :**

onde mère	bior1.3	bior2.2	bior2.4	bior4.4	bior5.5	bior6.8
$^0/0$ des coefficients nuls	78.7703	81.0721	80.4739	81.0721	80.0565	80.0701
PSNR	34.9935	34.5583	34.6872	34.7268	34.2752	34.6769



image compressée par bior1.3



image compressée par bior 2.2



image compressée par bior2.4



image compressée par bior2.4



image compressée par bior5.5



image compressée par bior6.8

3.4.1 Conclusion

D'après les résultats de notre simulation, que nous avons effectué, dans le cadre de comparaison entre les schémas de compression qui sont basées sur la DWT avec l'onde mère type orthogonale et biorthogonale, nous pouvons déduire la remarque suivante :

Le pourcentage des coefficients nuls dans le cas des ondelettes biorthogonales est supérieur que le cas des ondelettes orthogonales, ce qui nous offre une meilleure compression dans le cas des ondelettes biorthogonales. A partir des résultats que nous obtenons de notre simulation, nous pouvons dire que l'onde mère la(bior 4.4) est la meilleure onde mère intégrée la DWT dans le but de compression.

Chapitre 4

B-splines et bases d'ondelettes

4.1 Les B-splines

B-spline joue un important rôle dans la théorie d'approximation, on explique que B-spline d'ordre n , $n \in \mathbb{N}$, est une fonction réelle vérifiant quelques propriétés.

dans ce chapitre nous donnons la définition des B-spline et ses propriétés, après nous expliquons les résultats principaux pour créer une relation de récurrence pour calculer les coefficients de B-spline [9], [10].

Définition 4.1 : La B-spline $B_n(t)$ est définie comme une corrélation de n fonction caractéristique. La B-spline de degré 1 est la fonction $B_0(t)$ qui égale 1 pour $t \in [0, 1]$, 0 ailleurs alors :

$$B_0(t) = \chi_{[0;1]} = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0; 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La B-spline de degré n est obtenue en faisant convolution de $B_0(t)$ par $B_{n-1}(t)$ où bien dit c'est n convolution de $B_1(t)$ par lui-même et

$$\begin{aligned}
 B_n(t) &= B_0(t) * B_0(t) * \dots * B_0(t) & (4-1) \\
 &= *^n B_0(t) = *^n \chi_{[0;1]}
 \end{aligned}$$

On a par exemple :

$$\begin{aligned}
 B_1(t) &= B_0(t) * B_0(t) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0;1]}(x) \chi_{[0;1]}(t-x) dx
 \end{aligned}$$

alors

$$B_1(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } t \in [-1; 0] \\ 1-t & \text{si } t \in [0; 1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$B_2(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{si } 0 < t < 1 \\ -\frac{3}{2} + 3t - t^2 & \text{si } 1 < t < 2 \\ -\frac{9}{2} - 3t + \frac{t^2}{2} & \text{si } 2 < t < 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Alors le B-spline d'ordre n va donner par

$$B_n(t) = \int_{\mathbb{R}} B_0(t-x) B_{n-1}(x) dx = \int_{x-1}^x B_{n-1}(x) dx \quad (4-2)$$

On peut déduire une base de fonction d'échelle orthogonale d'ordre n à partir de cette fonc-

tion mais qui n'est pas à support compact pour $n > 1$ Cohen et Al ont alors construit dans un formalisme biorthogonale des fonctions duales vérifiant une relation à deux d'échelle et à support compact.

Théorème 4.1 : *Cardinale B-spline d'ordre n $n \in \mathbb{N}$ vérifier les propriétés suivantes :*

1- $\text{supp} B_n = [0, n]$,

2- $B_n \in C^{n-2}[0, n]; n \geq 2$,

3- Pour chaque interval $[k, k + 1], 0 \leq k \leq n - 1$, cardinal B-spline d'ordre n est un polynome de degré $n - 1$,

4- $\forall t \in [0, n]$

$$B_n(t) = \frac{t}{n-1} B_{n-1}(t) + \frac{n-t}{n-1} B_{n-1}(t-1), \quad n \geq 2, \quad (4-3)$$

$$B'_n(t) = B_{n-1}(t) - B_{n-1}(t-1), \quad n \geq 2, \quad (4-4)$$

5- pour chaque $f \in C$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) B_m(t) dt = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(t_1 + \dots + t_m) dt_1 \dots dt_m$$

6- pour chaque $g \in C^m$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^{(m)}(t) B_m(t) dt = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} g(k)$$

7- $B_m(t) \geq 0$; pour $0 \leq t \leq m$.

8- $\sum_{k=0}^{+\infty} B_m(t-k) = 1; \forall t$

9- B-spline est symétrique sur l'interval $[0, n]$, i.e, $\forall t \in [0, n]$

$$B_n(t) = B_n(n-t). \quad (4-5)$$

La démonstration de cette théorème est biens détaillée dans le cardinal B- spline on peut

trouver dans [17] ou [18].

Resultats principales Après la simplification d'équations de propriété (4) donne l'équation différentiel suivant :

$$(m - t) B'_m(t) + (m - 1) B_m(t) = m B_{m-1}(t) \quad (4-6)$$

la solution de cette équation dans la forme polynomiale est coefficients de B-spline cardinal d'ordre $m - 1$, soit $t \in [k, k + 1]$, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq m - 1$ et soit :

$$B_m(t) = \sum_{i=0}^{m-2} (i + 1) a_{i+1}^{(m,k)} t^i \quad (4-7)$$

et

$$\begin{aligned} (m - t) B'_m(t) + (m - 1) B_m(t) &= (m - t) \sum_{i=0}^{m-2} (i + 1) a_{i+1}^{(m,k)} t^i + (m - 1) \sum_{i=0}^{m-1} a_i^{(m,k)} t^i \\ &= \sum_{i=0}^{m-2} \left[m(i + 1) a_{i+1}^{(m,k)} + (m - i - 1) a_i^{(m,k)} \right] t^i \end{aligned}$$

d'autre part :

$$m B_{m-1}(t) = m \sum_{i=0}^{m-2} a_i^{(m-1,k)} t^i. \quad (4-8)$$

Nous obtenons la relation suivant :

$$\frac{m(i + 1)}{i + 1 - m} a_{i+1}^{(m,k)} - a_i^{(m,k)} = \frac{m}{i + 1 - m} a_i^{(m-1,k)}; \quad 0 \leq i \leq m - 2.$$

Cette relation est un système de $m - 2$ équation linéaire de $m - 1$ coefficient inconnu.

Ce système peut être écrire comme l'équation suivant :

$$(m - 1) .k .a_{i-1}^{(m,k)} + a_{i-2}^{(m,k)} = (m - 1) .k .a_{i-1}^{(m,k-1)} + a_{i-2}^{(m,k-1)},$$

d'après la continuité de la dérivée d'ordre $m - 2$ de B-spline cardinal en $t = k$; les dernières deux équations sont des sous-système de second ordre et une solution de leurs est donnée comme le suivant :

$$a_{m-1}^{(m,k)} = \frac{1}{(m-1)(m-k)} \left[m \cdot a_{m-2}^{(m-1,k)} - k(m-1) a_{m-1}^{(m,k-1)} - a_{m-2}^{(m,k-1)} \right],$$

donc :

$$a_i^{(m,k)} = \frac{m}{i+1-m} \left[(i+1) a_{i+1}^{(m,k)} - a_i^{(m-1,k)} \right], \quad 0 \leq i \leq m-2 \quad (4-9)$$

Si $k = 0$ est impossible d'appliquer ce procédé, donc dans ce cas elle est une relation spéciale :

$$a_i^{(m,0)} = 0, \quad 0 \leq i \leq m-2, \quad (4-10)$$

pour déterminer les coefficients $a_{m-1}^{(m,0)}$ on retourne à l'équation (16) on obtient :

$$a_{m-1}^{(m,0)} = \frac{1}{m-1} a_{m-2}^{(m-1,0)}, \quad (4-11)$$

4.2 Transformé de Fourier de B-spline

Le transformé de Fourier de B-spline de degré n est le produit $(n+1)$ de transformé de Fourier de B-spline de degré 0 puisque un produit de convolution devenant dans l'espace de Fourier un produit classique c'est-à-dire :

$$F(B_n(t)) = (F(B_0(t)))^{n+1}$$

Or

$$\begin{aligned} F(B_0(t)) &= F\left(\chi_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(t)\right) \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \exp(-2i\pi\omega t) dt \\ &= \frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega} \end{aligned}$$

alors

$$F(B_n(t)) = \left(\frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega}\right)^{n+1} \quad (4-12)$$

l'expression analytique de transformé de Fourier de B-spline

$$F(B_n(t)) = \frac{1}{n} \sum C_{n+1}^k (-1)^k \left(t - k + \frac{n+1}{2}\right)_+^n \quad (4-13)$$

où

$$(t)_+^n = \begin{cases} t^n & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

4.3 ondelettes spline orthogonales

soit $\chi_{[0;1]}$ la fonction caractéristique d'intervall $[0.1]$; et le B-spline d'ordre n qui défini par le suivant

$$B_0(t) = \chi_{[0.1]}$$

et pour $n=2;3;\dots$

$$B_n(t) = (B_{n-1} * B_0)(t) = \int_0^1 B_{n-1}(t-x) dx.$$

clerment que le support de B_n est l'intervall $[0; n]$ et la dérivée d'ordre n de B_n donner par :

$$B_n^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \delta(t-j);$$

telque est la distribution de Dirac. dans ce travail on considère $\varphi = B_n$; qui génère une analyse multirésolution

Pour la définition de l'onde mère relative a la fonction d'échelle qui soit definit ,nous avons besoin du fondamentale interpolatory spline

$$L_{2n}(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j B_{2n}(t + m - j), \quad (4-14)$$

qui vérifie la condition d'interpolation :

$$L_{2n}(k) = \delta_{k,0}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4-15)$$

telque $\alpha_j = \alpha_j^{(n)}$ est la standard notation de Kroneker delta par la considération de polynome

$$A(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j z^j, \quad (4-16)$$

et

$$B(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} L_{2n}(j + n) z^j, \quad (1-17)$$

la condition fondamentale d'interpolation peut être formuler par

$$A(z) B(z) = 1, \quad (1-18)$$

Cette dernière formulation , elle nous permette d'exprimer $B(z)$ par la série de Laurent sous la forme suivante :

$$B(z) = \frac{1}{(2n-1)!} z^{-n+1} \Pi(z), \quad (4-19)$$

telque $\Pi = \Pi_{2n-1}$ sont les polynomes de Eleur-Forbenius de degré $(2n-2)$, nous utilisons notre onde mère $\psi = \psi_n$ relative a $\varphi = B_n$ est donné par

$$\psi(t) = L_{2n}^{(n)}(2t-1). \quad (4-20)$$

Il est clair que pour $n = 1$, $\varphi = \chi_{[0,1]}$ l'onde mère correspond $\psi(t) = \psi_1$ l'onde mère de Haar

Dans ce choix nous vérifions que φ vérifie les conditions de l'analyse multirésolution alors d'après l'inclusion $V_0 \subset V_1$ on a la relation à deux échelles

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^n 2^{-n+1} \binom{n}{j} \varphi(2t - j), \quad (4-21)$$

qui on peut décrire la transformée de Fourier de cette relation

$$\widehat{\varphi}(w) = \frac{1}{2} P(z) \widehat{\varphi}\left(\frac{w}{2}\right), \quad (4-22)$$

telque $z = e^{-i\frac{w}{2}}$ et

$$P(z) = \sum_{j=0}^n 2^{-n+1} z^j = 2^{-n+1} (1+z)^n; \quad (4-23)$$

l'inclusion $W_k \subset W_{k+1}$; pour $k \in \mathbb{Z}$ conséquence le lemme suivant.

Lemme 4.1 *soit z est défini précédemment donc*

$$\widehat{\psi}(w) = \frac{1}{2} Q(z) \widehat{\varphi}\left(\frac{w}{2}\right), \quad (4-24)$$

telque

$$Q(z) = \frac{(1-z)^n}{z^{n-1}} A(z), \quad (4-25)$$

où $A(z)$ est le symbol de $\{\alpha_j\}$ défini en (4-16). D'après l'orthogonalité $W_k \perp W_j$ pour $j \neq k$ en \mathbb{Z}

Donc pour conclure que ψ est une base d'ondelette à φ , en ordre de donner un algorithme de calcul pour la réalisation de la décomposition d'ondelettes, nous devons la règle explicite qui décrit la décomposition (2,18), qui si nous devons déterminer les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$

de l^2 est d'expression que chacun $\varphi_{1l}, l \in \mathbb{Z}$ en terme de $\{\varphi_{0n}\}$ et $\{\psi_{0n}\}$ comme suit :

$$\varphi(2t - l) = \sum_n a_{l-2n} \varphi(t - n) + \sum_n b_{l-2n} \psi(t - n). \quad (4-26)$$

Les résultats principaux de cette étude est de déterminer ces deux suites a facilitant l'énoncé de ce théorème , il est plus commode d'introduire deux séries de Laurent

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{(2m-1)!2^m} \cdot \frac{(1+z)^{m\pi(z)}}{z^{2m-1}} A(z^2) \\ &= \frac{1}{(2m-1)!2^m} \cdot \frac{(1+z)^{m\pi(z)}}{z^{2m-1}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j z^{2j} \end{aligned}, \quad (4-27)$$

et

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{-1}{[(2m-1)!]^2 2^{2m-1}} \cdot \frac{(1-z)^{m\pi(z)\pi(-z)}}{z^{2m-1}} A(z^2) \\ &= \frac{-1}{[(2m-1)!]^2 2^{2m-1}} \cdot \frac{(1-z)^{m\pi(z)\pi(-z)}}{z^{2m-1}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j z^{2j} \end{aligned}. \quad (4-28)$$

Rappelons que $\pi(z)$ est les polynomes de Euler-Frobus de degré $2m - 2$ de coefficients $(2m - 1)!B_{2m}(j) ; j = 1; 2m - 1$.

Théorème 4.2 soient $G(z)$ et $H(z)$ soit definit que dans (2,20) et (2,21) .En suite, les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ qui donnent la décomposition d'ondelettes, sont les coefficients des séries de Laurent suivi de $G(z)$ et $H(z)$

$$G(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n}, \quad (4-29)$$

et

$$H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^{-n}. \quad (4-30)$$

On remarque que depuis $\pi(z)$ est seulement un polynome, il découle que le taux de décroissance exponentielle des suite $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ ne dépasse pas celui de $\left\{a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right\}$. Pour donner ce taux de décroissance , laisser les racines de $\pi = \pi_{2m-1}$ seront désignés par $r_j, j = 1; 2m - 2$,

étiqueté et baisse ordre ,c'est

$$r_{2m-2} < r_{2m-1} < \dots r_m < -1 < r_{m-1} < \dots < r_1 < 0,$$

telque $r_1 r_{2m-2} = \dots = r_{m-1} r_m = 1$. Puis nous avons

$$a_n = O\left(|r_m|^{-|n|}\right), n \longrightarrow \pm\infty. \quad (4-31)$$

Par conséquent , d'après de formulations (2,20) et (2,23), nous avons

$$a_n b_n = O\left(|r_m|^{-\frac{|n|}{2}}\right), n \longrightarrow \pm\infty. \quad (4-32)$$

Proof. Nous remarquons que le lemme 1 peut être facilement verifiée en utilisant des transformées de Fourier et de l'identité

$$N_{2m}^{(m)} = \sum (-1)^j \binom{m}{j} N_m(t-j),$$

pour établir le théorème, nous avons besoin du lemme suivant. ■

Lemme 4.2 *2* soit $\square = \square_{2m-1}$ est les polynomes des Euler-Frobuis, puis

$$\square(z)(1+z)^{2m} - \square(-z)(1-z)^{2m} = 2^{2m} z \square(z^2), \text{ pour tout } z.$$

Pour vérifier ce lemme, nous rappelons l'identité

$$\frac{\square(z)}{(1-z)^{2m}} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^{2m-1} \left(z^j - (-1)^j z^j \right),$$

([8]) Par conséquent, on s'ensuite que

$$\begin{aligned} \frac{\Pi(z)}{(1-z)^{2m}} - \frac{\Pi(-z)}{(1+z)^{2m}} &= \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^{2m-1} \left(z^j - (-1)^j z^j \right) \\ &= 2^{2m} z \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^{2m-1} z^{2m} \quad , \\ &= 2^{2m} z \frac{\Pi(z)}{(1-z)^{2m}} \end{aligned}$$

qui est équivalent à (3,1).

D'établir le théorème, nous notons d'abord que (2,19) est équivalent à

$$\frac{1}{2} \widehat{\varphi} \left(\frac{w}{2} \right) e^{-ilw/2} = \sum a_{l-2n} e^{-inw} \widehat{\varphi}(w) + \sum b_{l-2n} e^{-inw} \widehat{\psi}(w) ,$$

qui compte tenu de l'identité de deux échelles (2,12) et (2,13) a tout est équivalent à

$$P(z) \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{l-2n} z^{2n-l} + Q(z) \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{l-2n} z^{2n-l} = 1,$$

où P et Q sont donnés en (2,12) et (2,16) et la notation (2,13) est utilisé par changement d'indices, il est clair que (3,3), et conséquent (2,19) est équivalent des deux identités

$$\begin{cases} P(z) \frac{G(z)+G(-z)}{2} + Q(z) \frac{H(z)+H(-z)}{2} = 1 \\ P(z) \frac{G(z)-G(-z)}{2} + Q(z) \frac{H(z)-H(-z)}{2} = 1 \end{cases} . \quad (4-33)$$

Maintenant, on applique le lemme 2 et rappelant (2,7), (2,8), (2,20) et (2,21), il est facile d'arriver à 2

Décomposition et reconstruction d'algorithmes :

les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ qui ont au moins le taux de décroissance exponentielle (2,25) peut

maintenant être utilisé pour obtenir la décomposition d'ondelette (1,1). En effet, l'écriture

$$\begin{cases} f_j := \sum_m c_m^j \varphi_{jm}, & j = k - l, \dots, k \\ g_j := \sum_m d_m^j \psi_{jm}, & j = k - l, \dots, k \end{cases}, \quad (4-34)$$

nous notons que, comme conséquence de la décomposition(2,19), la décomposition

$$f_j = f_{j-1} + g_{j-1}, \quad j = k - l, \dots, k,$$

est équivalent aux relations récursives

$$\begin{cases} c_l^{j-1} = \sum_n a_{n-2l} c_n^j, & j = k - l + 1, \dots, k, \\ d_l^{j-1} = \sum_n b_{n-2l} c_n^j, & j = k - l + 1, \dots, k, \end{cases} \quad (4-35)$$

Ainsi, (4,3) peut être utilisée pour arriver à la décomposition wavelate (1,1), à savoir (4,4)

$$f_k = g_{k-1} + \dots + g_{k-l} + f_{k-l},$$

où $f_{k-l} \in V_{k-l}$ et $g_j \in W_j ; j = k - l, \dots, k - 1$ sont formulés en (4,1)

De même, la(2,11) et de la relation à deux échelles (2,16) peut être utilisé pour reconstruire f_k de f_{k-l} et g_{k-1}, \dots, g_{k-l} . Bien sûr, dans l'application, ces wavelats g_{k-1}, \dots, g_{k-l} , ont probablement été traitées et sont nécessairement différent de ceux de (4,4) Pour simplifier la notation, écrivons

$$P(z) = \sum_{j=0}^m p_j z^j,$$

qui est, $p_j = 2^{-m+1} \binom{m}{j}$ et

$$Q(z) = \sum_{j=0}^m q_j z^j$$

Ensuite, compte tenu des (2,11) et (2,16) du deconposition (4,2) équivaut à (4,7)

$$c_l^j = \sum_n p_{l-2n} c_n^{j-1} + \sum_n q_{l-2n} d_n^{j-1} \quad (4-36)$$

Notez que $\{p_n\}$ est une séquence finie, et compte tenu des (2,17) et (2,24), nous avons

$$q_n = O(|r_m|^{-|n|}), \quad n \longrightarrow \pm\infty.$$

4.4 ondelettes spline biorthogonales

Proposition 4.1 Proposition 4.2 :soit $(V_j), (\tilde{V}_j)$ une analyse multi résolution biorthogonale avec des fonctions d'échelle duales à support compact $\varphi, \tilde{\varphi}$ et des filtres associés h_0, \tilde{h}_0 . On suppose de plus que $\varphi \in H^1$.

(i) Alors la dérivée φ' de φ peut s'écrire $\varphi' = \varphi^*(t) - \varphi^*(t-1)$; où φ^* est une fonction d'échelle de support compact, de filtre d'échelle $h_0^*(\zeta) = \frac{2}{1+\exp-i\zeta} h_0(\zeta)$.

(ii) La primitive $\int_{-\infty}^t \tilde{\varphi}(x) dx$ satisfait $\int_t^{t+1} \tilde{\varphi}(x) dx = \tilde{\varphi}^*(t)$, où $\tilde{\varphi}^*$ est une fonction d'échelle de support compact, de filtre d'échelle associé $\tilde{h}_0^*(\zeta) = \frac{1+\exp i\zeta}{2} \tilde{h}_0(\zeta)$.

(iii) φ^* et $\tilde{\varphi}^*$ sont des fonctions d'échelle à support compact duales pour une analyse multirésolution biorthogonal $(V_j), (\tilde{V}_j)$. De plus, les projecteurs P_j sur V_j dans la direction de $(\tilde{V}_j)^\perp$ et P_j^* sur V_j^* dans la direction de $(\tilde{V}_j^*)^\perp$ satisfont :

$$\frac{d}{dt} \circ P_j = P_j^* \circ \frac{d}{dt}. \quad (4-37)$$

(iv) Les ondelettes biorthogonales $\psi^*, \tilde{\psi}^*$ associées à φ^* et $\tilde{\varphi}^*$ satisfont :

$$\psi^* = \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \psi \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}^* = -4 \int_{-\infty}^t \tilde{\psi}(x) dx. \quad (4-38)$$

Grace à la proposition (01), on peut maintenant construire les fonctions d'échelle duales

associées aux B-spline $B_n(t)$.

Proposition 4.3 : soit $n \in \mathbb{N}$; B_n le B-spline de degré n ,

$$\widehat{B}_n(\zeta) = \left(\frac{1 - e^{-\zeta}}{i\zeta} \right)^{n+1},$$

et $\varphi \in L^2$ à support compact. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) φ est une fonction d'échelle associée à B_n
- (ii) La fonction $\Delta^{n+1}\varphi$ (où $\Delta f = f(t+1) - f(t)$ et $\Delta^{k+1}f = \Delta(\Delta^k f)$) peut s'écrire $\Delta^{n+1}\phi$, où ϕ est une fonction d'échelle interpolante à support compact telle que $\phi \in H^{n+1}$

Si ϕ est de la forme $\phi = \varphi_N(t) * \varphi_N(-t)$ pour une fonction de daubechies φ_N , alors ϕ est symétrique, de centre de symétrie en $t = 0$, tandis que φ est symétrique, de centre de symétrie en $t = \frac{n+1}{2}$.

Nous voyons donc que si φ est une fonction d'échelle associée à B_n , alors la longueur de $\text{Supp}\varphi$ est au moins $n+1$ (puisque $\phi \in H^{n+1}$ et est interpolant, nous savons que le filtre H_0 associée à ϕ contient un facteur $\left(\frac{1+e^{-i\zeta}}{2}\right)^{n+2}$, et donc le support de ϕ est de longueur au moins $m+2+m=2m+2$), alors que nous savons qu'un peut trouver une solution φ à support de longueur $O\left(m\frac{\log 12}{\log 4/3}\right)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Nous obtenons donc approximativement une longueur de support de φ neuf fois plus grand que celle de B_n ; il serait évidemment très intéressant d'obtenir un support beaucoup plus petit.

Une propriété très agréable de ces fonctions d'échelle duales est que le filtre associé sont très faciles à calculer (si φ est telle que $\Delta^{n+1}\varphi = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n+1}\phi_N$, alors le filtr associé h_0 est simplement

$$h_0(\zeta) = \left(\frac{1 + e^{-i\zeta}}{2}\right)^N \left(\frac{1 + e^{i\zeta}}{2}\right)^{N-m-1} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} \left(\frac{1 - \cos \zeta}{2}\right)^k,$$

et il n'est pas nécessaire d'utiliser le lemme de Riesz ou tout autre algorithme algébrique

pour obtenir les coefficients).

Exemple 4.1 *La plus courte fonction d'échelle duale associée à $B_1(t)$ est associée au filtre*

$$\left(\frac{1 + e^{-i\zeta}}{2}\right)^2 (2 - \cos \zeta) = -\frac{1}{8}e^{-3i\zeta} + \frac{1}{4}e^{-2i\zeta} + \frac{3}{4}e^{-i\zeta} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}e^{i\zeta}.$$

Conclusion

Pendant la préparation de ce travail que nous nous sommes fixé, plusieurs questions qui se pose sur la théorie des ondelettes, telles que : comment construire une base d'ondelettes orthogonales et biorthogonales? Qu'elle est la meilleure base d'ondelettes utilisée dans le domaine de la compression d'images? Et est ce qu'il y a des fonctions dans L^2 qui engendre une base d'ondelettes? En essayant de répondre à ces questions nous nous avons pu englober d'une façon suffisante, les notions fondamentales de la théorie des ondelettes, telle que la construction d'une base d'ondelettes orthogonales et biorthogonales. Concernant la meilleure base d'ondelettes à choisir dans le domaine de la compression d'images nous avons effectués une étude comparative entre un algorithme de compression qui est basé sur la transformée en ondelettes orthogonales et un autre qui est basé sur la transformée en ondelettes biorthogonales, elle nous a conduit à un résultat important qui est : la meilleure onde mère qui engendre une base d'ondelettes utilisée dans les algorithmes de compression d'images c'est la bior 4.4, c'est une onde mère qui engendre une base d'ondelettes biorthogonale. Finalement nous avons exposé quelques notions théoriques concernant les fonctions bisplines et nous avons expliqué comment construire une base d'ondelettes orthogonales et biorthogonales à l'aide des bisplines .

A la fin, nous considérons heureux d'avoir eu cette opportunité de s'introduire au domaine de la recherche scientifique. Nous espérons avoir la capacité de continuer à approfondir dans le vaste domaine des ondelettes

Bibliographie

- [1] A. Cohen. «*Numerical Analysis of Wavelet Methods*». North-Holland. Studies in Mathematics and its Application. 32, 2003. 53, 55, 58, 60
- [2] A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau.« *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets.*» Commun. Pure Appl. Math., 45(5) :485–560, 1992. 55, 56, 57, 68.
- [3] C.Chui,«*An Introduction to wavelets*»,Academic Press,Boston ,1992.
- [4] C.Chui,«*wavelets A Mathematical Tool for Signal Analysis,*» SIAM,Philadelphia,1997.44. Yves Meyer, Wavelets and Operators, Advanced Mathematics, Cambridge University.
- [5] F. Truchetet, « *Ondelettes pour le signal numérique* », Hermes, 1998.
- [6] G. Donovan, J. Geronimo, D. Hardin, P. Massopust, «*Construction of orthogonal wavelets using fractal interpolation functions*», SIAM J. Math. Anal., vol. 27, N 4,pp. 1158-1192, 1996
- [7] I. Daubechies. «*Ten Lectures on Wavelets*». SIAM, 1992. 14, 54, 55, 58, 62, 64, 71.
- [8] M.J. Shensa, «*The Discrete Wavelet Transform : Wedding the à Trous and Mallat Algorithms*», IEEE Transactions on signal processing, vol.40, n 10, pp. 2464-2482,oct. 1992.
- [9] M. Unser, A. Aldroubi, M. Eden,«*B-spline signal processing : part I-theory*»,IEEE trans. on PAMI, vol. 41, n 2, pp. 821-832, 1993
- [10] M. Unser, A. Aldroubi, M. Eden,«*B-spline signal processing : part II-Efficient design and applications*»,IEEE trans. on PAMI, vol. 41, n 2, pp. 821-832, 1993.

- [11] O. Rioul, P. Duhamel, «*Fast Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transform*», IEEE Transaction on information theory, vol.38, n 2, pp. 569-586, mar.1992.
- [12] P.Abry,A. Aldroubi,«*Designing Multirésolution analysis-type Waveletes and their Fast A, algorithms*»,The journal of Fourier Analysis and Application, vol 2, n^o2,pp.135-159, 1995
- [13] S. Mallat, «*Une exploration des signaux en ondelettes* », Ellipses-Les éditions de l'école Polytechnique, 2000.
- [14] S. Mallat, «*A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation*», IEEE, PAMI, vol.11, N 7, pp. 674-693, july 1989
- [15] S. Mallat. «*Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of L_2* ». Trans.Amer. Math.Soc., 315(1) :69–87, 1989. 14, 54, 56..
- [16] S. Mallat, «*Multifrequency channel decomposition of images and wavelet models*»,IEEE Trans. on Accoustic Speech and Signal Proc., vol.37, N 12, pp. 2091-2110,dec. 1989
- [17] S. Mallat, «*A Wavelet Tour of Signal Processing*», 3rd ed., Academic Press, San Diego, 2008.
- [18] Y. Meyer. «*Ondelettes et opérateurs, Tome 1 et 2*». Hermann, 1990. 14, 54, 56.