

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : Génie Mécanique  
Ref :.....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة الميكانيكية  
المرجع:.....

Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du diplôme de  
**Magister en : Génie Mécanique**

**Option : Systèmes énergétiques et maîtrise de l'énergie**

**Etude de l'écoulement instationnaire d'un fluide  
Newtonien dans un domaine cartésien en présence  
d'un gradient de pression**

Présenté par :  
**HAMDI Omar**

Soutenu publiquement le 04/07/2012

**Devant le jury composé de :**

Dr. ATMANI Rachid	Professeur	Président	Université de Biskra
Dr. BRIMA Abdelhafid	Maitre de Conférences 'A'	Rapporteur	Université de Biskra
Dr. MOUMI Noureddine	Professeur	Examineur	Université de Biskra
Dr. MOUMI Abdelhafid	Maitre de Conférences 'A'	Examineur	Université de Biskra

**Résumé :** Les équations de Navier-Stokes en leur forme complète sont très compliquées du fait de la présence des termes non linéaires. La résolution de ces équations exige des hypothèses spécifiques pour chaque situation. Dans cette contribution, on essayera d'étudier l'écoulement non stationnaire d'un fluide incompressible dans un domaine cartésien en présence d'un gradient de pression. L'étude portera sur l'effet du temps et du gradient de pression sur l'évolution de la vitesse d'écoulement. Pour résoudre le problème, les méthodes analytiques et numériques seront utilisées.

**Mots clés :** Ecoulement instationnaire, Fluide visqueux, Tube rectangulaire, Solution analytique, Méthode des volumes finis.

**Abstract :** The Navier-Stokes equations in their complete form are very complicated due to the presence of nonlinear terms. The solution of these equations requires specific assumptions for each situation. In this contribution, we try to study the non stationary flow of the incompressible fluid in a Cartesian domain with presence of a gradient pressure. The study will investigate the effect of time and pressure gradient on the evolution of the flow velocity. To solve the problem, the analytical and numerical methods are used.

**Keywords:** Unsteady flow, Viscous fluid, Rectangular channel, Analytic solution, Finite volumes method.

**ملخص:** إن معادلات نافير و ستوكس في شكلها التام معقدة للغاية وهذا راجع إلى وجود المعاملات غير الخطية. إن حل هذه المعادلات يستوجب افتراضات محددة لكل حالة. في هذه المساهمة، سنحاول دراسة الجريان غير المستقر لمائع غير منضغط في مجال ديكارتي و بوجود تدرج الضغط. سنكرس هذه الدراسة لبيان تأثير الزمن وتدرج الضغط على تطور سرعة الجريان. لحل هذه المشكلة، سنستخدم طرقاً تحليلية و عددية.

**الكلمات الدالة:** جريان غير مستقر، سائل لزج، أنبوب مستطيل، الحل التحليلي، طريقة الأحجام المنتهية.

## REMERCIEMENTS

*Le remerciement infini revient avant tous à dieu le plus puissant qui m'a comblé des bienfaits de l'Islam et de la Science.*

*J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur **BRIMA Abdelhafid**, Maitre de Conférences à l'Université de Biskra, encadreur de ce mémoire, pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience et son soutien favorable pour l'aboutissement de ce travail.*

*Je tiens aussi à adresser, mes vifs remerciements à Monsieur **ATMANI Rachid** Professeur à l'Université de Biskra, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance de ce mémoire.*

*Je désire aussi adresser mes remerciements les plus respectueux à Monsieur **MOUMI Noureddine**, Professeur à l'université de Biskra et Monsieur **MOUMI Abdelhafid**, Maitre de Conférences à l'Université de Biskra qui m'ont fait l'honneur de bien vouloir accepter de juger ce travail.*

*J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur **BENCHAAABANE Adel**, Maitre de Conférences à l'Université de Biskra et à Monsieur **BENMACHICHE Abdelhakim**, Maitre de Conférences à l'Université de Biskra pour toute l'aide qu'ils m'ont apportée durant la réalisation de ce travail.*

*Je souhaite remercier aussi tous mes enseignants en post graduation au niveau du département de Mécanique à l'Université de Biskra, ainsi que mes collègues pour leur sympathie et leur soutien.*

*Je termine par remercier toute autre personne qui a contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce modeste travail.*

## *DEDICACES*

*Je dédie ce mémoire à*

*ma grande famille*

*qui m'a poussé à poursuivre mes études.*



## Chapitre II : FORMULATION MATHEMATIQUE

2.1 : Introduction.....	28
2.2 : Modèle physique.....	28
2.3 : Formulation mathématique.....	29
2.3.1 : Hypothèses simplificatrices.....	29
2.3.2 : Mise en équations du problème.....	29
2.4 : Conditions initiales et aux limites.....	30
2.4.1 : Conditions initiales.....	30
2.4.2 : Conditions aux limites.....	31
2.5 : Adimensionnalisation de l'équation.....	31
2.6 : Conclusion.....	32

## Chapitre III : RESOLUTION ANALYTIQUE

3.1 : Introduction.....	34
3.2 : Différentes méthodes de résolution analytiques.....	35
3.3 : Résolution de l'équation.....	37
3.3.1 Détermination de la vitesse.....	37
3.3.2 Détermination du débit.....	40
3.3.3 Détermination de la vitesse moyenne.....	41
3.3.4 Détermination de la contrainte de cisaillement.....	42
3.3.5 Détermination du nombre de Poiseuille.....	43
3.4 : Expressions compactes.....	44

## Chapitre IV : RESOLUTION NUMERIQUE

4.1 : Introduction.....	47
4.2 : Méthode des volumes finis.....	47
4.3 : Maillage du domaine de calcul.....	48
4.4 : Discrétisation de l'équation en volume finis.....	49
4.5 : Méthode de résolution du système d'équations.....	51
4.6 : Critère de convergence.....	52

## Chapitre V : RESULTATS ET DISCUSSIONS

5.1 : Introduction.....	54
5.2 : Choix du maillage.....	54
5.3 : Résultats et discussions.....	55
5.3.1 Vitesse.....	55
5.3.2 Contrainte de cisaillement.....	61
5.3.3 Nombre de Poiseuille.....	62

## CONCLUSION

Conclusion générale.....64

**REFERENCES**.....65

## ANNEXES

Annexe A : Résolution des équations différentielles par la méthode des fonctions de Green.....	72
Annexe B : Méthode de résolution utilisée par M. Emin Erdogan.....	77
Annexe C : Analyse de l'ordre (de l'échelle).....	79
Annexe D : Analyse asymptotique.....	84

## LISTE DES FIGURES

Figure	Page
<b>Fig. 1.1</b> : Schéma de l'écoulement de couette plan.....	19
<b>Fig. 1.2</b> : Elaboration des profils de vitesse et les changements de pression à l'entrée d'un écoulement dans un conduit.....	25
<b>Fig. 1.3</b> : Variation du nombre de Poiseuille théorique en fonction du rapport de forme pour une section rectangulaire.....	30
<b>Fig.2.1</b> : Représentation schématique de l'écoulement.....	32
<b>Fig.4.1</b> : Volume de contrôle typique.....	52
<b>Fig. 4.2</b> : Maillage choisi.....	53
<b>Fig.5.1</b> : Vitesse au centre de la section transversale $W(1/2, 1/2)$ en fonction des différents maillages.....	59
<b>Fig.5.2</b> : Profils des vitesses évaluées analytiquement ou numériquement en fonction de $X$ et de $Y$ .....	60
<b>Fig5.3</b> : Contours des vitesses.....	60
<b>Fig.5.4</b> : Profil des vitesses en fonction de $X$ dans un plan $Y = 0.1$ et pour $\alpha = 0.8$ .....	61
<b>Fig.5.5.a</b> : Comparaison entre les résultats (vitesse) analytiques et les résultats numériques.....	62
<b>Fig.5.5.b</b> : Comparaison entre la vitesse calculée par les deux expressions analytiques et la vitesse calculée numériquement.....	62
<b>Fig.5.6</b> : Influence de $\alpha$ sur le profil des vitesses.....	63
<b>Fig.5.7</b> : Effet du nombre de Poiseuille sur le profil des vitesses.....	63
<b>Fig.5.8</b> : Evolution du profil des vitesses en fonction du temps.....	64
<b>Fig.5.9</b> : Effet de $\alpha$ sur le temps d'établissement de l'écoulement.....	64
<b>Fig.5.10</b> : La contrainte $\tau_{xz}$ au sein du fluide.....	65

<b>Fig.5.11:</b> <i>La contrainte <math>\tau_{YZ}</math> au sein du fluide.....</i>	65
<b>Fig.5.12 :</b> <i>Effet de <math>\alpha</math> sur la contrainte <math>\tau_{XZ}</math> à la paroi.....</i>	65
<b>Fig.5.13 :</b> <i>Effet de <math>\alpha</math> sur la contrainte <math>\tau_{YZ}</math> à la paroi.....</i>	65
<b>Fig.5.14 :</b> <i>Diminution du nombre de Poiseuille en fonction de <math>\alpha</math>.....</i>	66
<b>Fig. A.1 :</b> <i>Fonction de Heaviside.....</i>	71
<b>Fig. A.2 :</b> <i>Fonction Delta de Dirac.....</i>	72
<b>Fig. A.3 :</b> <i>Fonction Delta de Dirac, forme générale.....</i>	72
<b>Fig. D.1 :</b> <i>Modèle de développement asymptotique.....</i>	85

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
Tab. 3.1 : <i>Sommaire des variables</i> .....	38
Tab. 5.1 : <i>Vitesse au centre de la section transversale <math>W(1/2, 1/2)</math> pour les différents maillages</i> .....	58

# ***NOMENCLATURE***

## NOMENCLATURE

### Caractères usuels

$A$ :	aire de la section transversale du tube, $A=ab$	$(m^2)$
$a$ :	longueur de la section transversale du tube	$(m)$
$b$ :	largeur la section transversale du tube	$(m)$
$C_p$ :	chaleur spécifique à pression constante	$(m^2/s^2k)$
$D_h$ :	diamètre du tube	$(m)$
$\bar{D}$ :	tenseur de taux de déformation	$(1/s)$
$F$ :	force extérieure	$(N)$
$f$ :	coefficient de frottement	$(...)$
$\vec{f}$ :	vecteur des forces appliquées au fluide	$(kg\ m/s^2)$
$G(...)$ :	fonction de Green	$(...)$
$K$ :	conductivité thermique	$(w/m\ s\ k)$
$L$ :	longueur de la plaque	$(m)$
$l$ :	longueur de la conduite	$(m)$
$\mathcal{L}$ :	longueur caractéristique de la géométrie	$(m)$
$L_e$ :	longueur hydraulique	$(m)$
$m$ :	la masse	$(kg)$
$\vec{n}$ :	vecteur unitaire normal à un élément de surface	$(...)$
$p$ :	pression dans le fluide	$(kg/ms^2)$
$Po$ :	nombre de Poiseuille	$(...)$
$Pr$ :	périmètre de la section transversale du tube	$(m)$
$\bar{p}$ :	tenseur de contraintes totales	$(kg/ms^2)$

$Q$ :	débit volumique à travers la transversale du tube	$(m^3/s)$
$q$ :	flux de chaleur	$(w/ms^2)$
$Re$ :	nombre de Reynolds	(...)
$S$ :	distance entre deux plans parallèles	$(m)$
$T$ :	temps adimensionnel, $T = vt/a^2$	(...)
$Temp$ :	température	$(k)$
$t$ :	temps	$(s)$
$u, v, w$ :	composante de la vitesse suivant $x, y$ et $z$ respectivement	$(m/s)$
$\vec{V}$ :	vecteur vitesse	(...)
$\vec{v}$ :	vecteur unitaire tangent à un élément de surface	(...)
$W$ :	composante adimensionnelle de la vitesse suivant $z$	(...)
$x, y, z$ :	coordonnées primitives	(...)
$X, Y, Z$ :	coordonnées réduites	(...)

### Caractères grecs.

$\alpha$ :	rapport géométrique $\alpha = b/a$	(...)
$\alpha_a$ :	diffusivité thermique	$(m^2/s)$
$\lambda$ :	coefficient de frottement de Darcy	(...)
$\mu$ :	viscosité dynamique	$(kg/m s)$
$\nu$ :	viscosité cinématique	$(m^2/s)$
$\xi, \eta, \theta$ :	coordonnées relatives à la fonction de Green	(...)
$\rho$ :	masse volumique	$(kg/m^3)$
$\bar{\tau}$ :	tenseur des contraintes visqueuses	$(kg/m s^2)$
$\tau$ :	contrainte locale	$(kg/m s^2)$
$\tau_p$ :	contrainte à la paroi	$(kg/m s^2)$
$\tau_{xz}$ :	contrainte dans le plan $xz$	$(kg/m s^2)$



$\tau_{yz}$ :	contrainte dans le plan $yz$	$(kg/m s^2)$
$\tau_{xz}^*$ :	contrainte adimensionnelle dans le plan $XZ$	(...)
$\tau_{yz}^*$ :	contrainte adimensionnelle dans le plan $YZ$	(...)
$\Omega$	volume de contrôle	$(m^3)$

## Indices

$e$ :	relatif à l'entrée
$h$ :	relatif à l'hydraulique
$moy$ :	relatif à la moyenne
$p$ :	relatif à la parois
$SS$ :	l'état stationnaire
$xz$ :	relatif au plan $xz$
$yz$ :	relatif au plan $yz$

# ***INTRODUCTION GENERALE***

# INTRODUCTION GENERALE

## 1.1 Introduction

L'écoulement des fluides à l'intérieur des canaux, de différentes section, est d'une grande importance, cela est dû au fait qu'il est rencontré dans diverses applications concernant les échangeurs de chaleur destinés au chauffage ou au refroidissement des fluides visqueux dans les procédés chimiques et les industries alimentaires, les échangeurs de chaleur compacts pour les écoulements de gaz ainsi que ceux intervenant dans les applications biomédicales. En outre, le transfert thermique par convection qui accompagne ce type d'écoulement ne se limite pas au cas des échangeurs, car on le retrouve aussi dans le transport des huiles par pipelines, l'évacuation de la chaleur dans les réacteurs nucléaires et le refroidissement des composants électroniques qui représente un cas concret de nos jours où l'on rencontre l'écoulement des fluides dans les micro-canaux. D'autres champs d'applications peuvent être aussi considérés, il s'agit entre autres des collecteurs solaires, sachant que dans ce type d'appareils, l'écoulement s'effectue généralement aux faibles nombres de Reynolds ce qui donne l'occasion au transfert thermique par convection.

La connaissance approfondie ainsi que le contrôle de ce genre d'écoulement s'avère indispensables dans la maîtrise des principaux paramètres conduisant, par exemple, à l'amélioration du transfert de chaleur ou le diminuer. Cela peut expliquer l'importante accumulation d'études de ce sujet rencontrée dans la littérature.

La classification des canaux en fonction de leur diamètre hydraulique ( $D_h$ ) peut être résumée comme suit:

Canaux conventionnels	:	$D_h > 3 \text{ mm}$
Mini canaux	:	$3 \text{ mm} > D_h > 200 \text{ m } \mu$
Micro canaux	:	$200 \text{ m } \mu > D_h > 10 \text{ m } \mu$
Canaux transitoires	:	$10 \text{ m } \mu > D_h > 0.1 \text{ m } \mu$
Nano canaux	:	$0.1 \text{ m } \mu > D_h$

## 1.2 Travaux antécédents

L'étude de l'écoulement à l'intérieur d'une conduite, dont l'importance est dictée par le rôle que joue ce dernier dans divers secteurs industriels, a conduit à une importante bibliographie spécialisée qui s'est accumulée au fur des années.

Les premiers pas dans l'étude semblent commencer au 19<sup>ème</sup> siècle, ceci apparaît bien dans les travaux de **Stokes (1851)** [1,2], **E. Hagenbach (1860)** [1,3] et **H. Lamb (1879)** [4]. Depuis cette époque les travaux réalisés sur le sujet n'ont pas cessé d'être publiés jusqu'à nos jours. Les études analytiques, numériques et expérimentales s'y rattachant sont en fait si nombreuses et variées qu'il devient difficile de les citer tous. De plus malgré cette abondance apparente, le problème reste loin d'être épuisé.

**E.G. Richardson et E. Tyler (1929)** [5] : ont été les premiers à mettre en évidence par des mesures expérimentales l'existence de l'une des principales caractéristiques des écoulements oscillatoires ; l'effet annulaire (dit de **Richardson**) sur les profils des vitesses. Ceci est caractérisé par la présence d'un maximum près de la paroi et non pas au centre comme c'est le cas pour l'écoulement laminaire permanent (écoulement de Poiseuille). Par la traversée d'un anémomètre à fil chaud à travers le tube, ils ont fait une comparaison de l'écoulement oscillatoire et direct de l'air près de l'embouchure de tubes de différentes sections. Ils ont comparé les gradients théoriques et observés de la vitesse moyenne à travers les sections. Dans l'écoulement oscillatoire un maximum de la vitesse moyenne est trouvé à proximité des parois du conduit, mais dans un écoulement moyen (*wavy flow*) ce pic annulaire est absent, la vitesse chute en continu du centre du tube jusqu'à une courte distance des murs. Ils ont pu démontrer l'existence d'une couche d'écoulement laminaire près des murs, lorsque le corps principal de l'air est en mouvement turbulent.

**G. Szymanski (1932)** [6] a présenté une étude analytique d'un écoulement visqueux d'un fluide incompressible à travers une conduite cylindrique lorsque le gradient de pression axiale est une fonction arbitraire de temps. Il a pu aboutir à une solution exacte de l'équation du mouvement

**J.R. Womersley (1955) [7]** et **S. Uchida (1956) [8]** ont étudié, séparément, l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux et incompressible à l'intérieur d'une conduite cylindrique horizontale, à section transversale circulaire. Le gradient de pression est considéré comme une fonction périodique du temps. Ils ont pu aboutir à une solution exacte des équations du mouvement : Ils ont obtenu une expression de vitesse écrite sous forme d'une série de fonction de Bessel de première espèce. Et en fonction de la vitesse, ils ont déterminé le flux massique traversant la section perpendiculaire à la direction de l'écoulement, les contraintes de cisaillement qu'exerce le fluide sur les parois, le coefficient de frottement et d'autres paramètres caractérisant l'écoulement. Ils ont montré qu'il existe une phase de décalage entre le mouvement du liquide et le gradient de pression qui le provoque (déphasage entre le gradient de pression et la vitesse).

**C. Fan et B. T. Chao (1965) [9]** Ont présenté une étude analytique d'un écoulement parallèle, visqueux, incompressible à travers de longs conduits rectangulaires lorsque le gradient de pression axiale est une fonction arbitraire de temps. La solution pour un gradient de pression impulsif est d'abord cherchée en rendant l'équation gouvernante le mouvement homogènes avec les modifications appropriées dans les conditions initiales. Des solutions pour d'autres gradients de pression dépendants de temps sont ensuite obtenues grâce à l'intégration appropriée de la réponse impulsionnelle. La méthode utilisée est celle des fonctions de Green pour le calcul de l'écoulement sous un gradient de pression arbitraire, où la réponse transitoire de la vitesse d'un gradient de pression d'impulsion a été définie comme sa fonction de Green et sa solution en vertu d'un gradient de pression arbitraire peut être obtenue par convolution. D'autres caractéristiques de l'écoulement telles que le taux de dissipation d'énergie par unité de longueur du conduit et le coefficient de frottement sont déduites.

**A. N. Darus (2000) [10]** a présenté une étude numérique de l'écoulement de fluide dans un conduit rectangulaire. L'écoulement étudié est considéré stationnaire, laminaire et rotationnel. L'analyse de l'écoulement est menée en trois dimensions spatiales en utilisant les coordonnées cartésiennes. La formulation mathématique du problème a produit une équation aux dérivées partielles non linéaire pour la vitesse, qui a été résolue numériquement en utilisant la méthode "*marching technique*". L'autre formulation est une équation aux dérivées partielles de type elliptique, pour laquelle la fonction de courant a été calculée en utilisant la méthode de sur-relaxation successive. Les résultats obtenus sont investigués pour déterminer la distribution de la vitesse dans une section transversale du conduit et le

développement de la vitesse à travers le long du conduit. Il a montré que les résultats obtenus pour la longueur d'entrée sont adéquats on comparant la solution de son modèle avec celles d'autres modèles plus exacts. Il a pu conclure que la formulation du problème de l'écoulement à l'entrée en fonction de courant est au moins possible pour l'écoulement à l'entrée du conduit rectangulaire.

**J. Majdalani et H. A. Chibli (2002) [11]** ont mené une étude de caractérisation de l'écoulement pulsé avec un gradient de pression arbitraire. Ils ont déterminé une solution exacte des équations de Navier-Stokes pour l'écoulement d'un fluide visqueux dans un canal (à section transversale rectangulaire) sous l'influence d'une pression pulsatile. Une généralisation est poursuivie pour une répartition arbitraire de la pression exprimée en termes de coefficients de Fourier. L'écoulement est caractérisé par deux principaux paramètres: le paramètre de pulsation en fonction de gradient de pression périodique, et le nombre équivalent de Stokes, de Womersley, ou de Reynolds cinétique basé sur la fréquence pulsatile. Pour un nombre de Reynolds cinétique élevé, l'écoulement de Poiseuille est facilement récupéré. Inversement, la solution purement oscillatoire présentée par Rott est retrouvée pour un paramètre de pulsation grand. Pour des pulsations sinusoïdales, le débit induit par un mouvement pulsatile est calculé et comparé à son analogue de l'écoulement stationnaire ayant le même gradient de pression. Le montant de l'atténuation d'écoulement est déterminé en fonction de la fréquence et du paramètre de la pulsation. Pour des fréquences élevées, l'écoulement maximal possible est obtenu pour un paramètre donné de pulsation. En caractérisant la vitesse, la vorticité, et les distributions des contraintes de cisaillement, des cas d'inversion de l'écoulement sont identifiés. Les conditions conduisant à l'inversion d'écoulement sont quantifiés pour les petits et les grands nombres de Reynolds cinétiques. Pour un taux de pulsation appréciable, ils ont constaté que l'écoulement s'inverse lorsque le paramètre de pulsation est augmenté au point de dépasser le nombre de Stokes. En caractérisant les coefficients de frottement et sa valeur limite, les critères de conception pour minimiser les pertes visqueuses sont rendues possibles. Pour mieux comprendre l'effet de courbure ou de l'absence de celui-ci, des comparaisons entre les résultats des écoulements plans et ceux des écoulements axisymétriques sont réalisées.

**M. Emin Erdogan (2002, 2003) [12,13]** a réalisé une étude analytique de la solution des équations de Navier-Stokes de quelques écoulements laminaires d'un fluide Newtonien, visqueux et incompressible dans des canaux. Il a donné Certaines propriétés pour des écoulements non stationnaires impulsivement commencé du repos par l'application soudaine

d'un gradient de pression constant ou par le mouvement d'impulsion d'une frontière ou deux frontières. Il a illustré cinq exemples, à savoir : l'écoulement non stationnaire dans un cylindre circulaire se déplaçant parallèlement à sa longueur, le départ de l'écoulement dans un tube circulaire, l'écoulement non stationnaire dans un cylindre tournant, le départ de l'écoulement dans un canal à section rectangulaire se déplaçant parallèlement à sa longueur et l'écoulement non stationnaire dans un canal à section rectangulaire. Il a trouvé que les expressions des quantités telles que la vitesse, le débit volumique et le coefficient de frottement sont en formes de séries qui peuvent être rapidement convergentes pour les grandes valeurs du temps, mais lentement convergentes pour les petites valeurs du temps, ou vice versa. Il a démontré que si leurs expressions peuvent être trouvées pour l'un des cas : les grandes valeurs du temps ou les petites valeurs du temps, ces expressions peuvent être utilisées pour l'autre cas.

**Y. S. Muzychka et M. M. Yovanovich (2002, 2006) [14 ,15]** ont examiné les solutions de l'équation non stationnaire de poisson pour l'écoulement dans le tube circulaire, le canal plan, le tube rectangulaire et le tube annulaire circulaire. Ces solutions sont utilisées pour modéliser soit la conduction thermique non stationnaire due à une source de chaleur uniforme ou le transport du moment visqueux non stationnaire dû à un gradient de pression soudainement imposé. Les solutions sont en forme de séries infinies simples ou doubles dont quelques unes exigent de solutions numériques pour les valeurs propres. Pour faciliter le calcul du potentiel (vitesse ou température) moyen et du flux surfacique (contrainte de cisaillement ou flux de chaleur) moyen, ils ont proposés des modèles simples et compacts qui permettent la détermination rapide de ces paramètres, ainsi qu'un modèle simple pour le produit « $f.Re$ » (coefficient de frottement  $\times$  nombre de Reynolds) pour l'écoulement laminaire non stationnaire. Mieux que les modèles existant déjà dans la littérature et qui exigent trois et plus de paramètres, ce dernier modèle de « $f.Re$ » est fonction seulement de deux paramètres : le rapport d'aspect géométrique du conduit et sa longueur adimensionnelle. Ces modèles sont développés en utilisant l'analyse de l'échelle (de l'ordre '*scale analysis*') et l'analyse asymptotique des équations gouvernantes. Les modèles proposés sont comparés aux données produites à partir de solutions exactes. Un accord entre les modèles proposés et la théorie est tout à fait bon avec une erreur (*RMS*) entre 2 et 6 pour cent pour toutes les données examinées, à l'exception du modèle de « $f.Re$ » qui peut provoquer une erreur de 10 pour cent. On a montré que les modèles sont aussi applicables pour n'importe quelle géométrie non circulaire pourvue d'une valeur exacte ou approximative du nombre de Poiseuille stationnaire.

On a conclu que la racine carrée de la surface transversale est la longueur caractéristique la mieux valide que le diamètre hydraulique en matière résultats numériques pour des géométries ayant le même rapport d'aspect géométrique.

**M. Emin Erdogan et C. Erdem Imrak (2004, 2009) [16-18]** ont examiné analytiquement quelques propriétés de plusieurs écoulements non stationnaires et unidirectionnels des fluides visqueux. Ces écoulements sont : l'écoulement provoqué par le mouvement impulsif d'une plaque, l'écoulement dû à l'oscillation d'une plaque, l'écoulement induit par une accélération constante de la plaque, l'écoulement imposés par une plaque qui applique une contrainte tangentielle constante sur le fluide, l'écoulement de Couette non stationnaire, l'écoulement non stationnaire entre deux plaques parallèles soudainement mises en mouvement avec la même vitesse et l'écoulement non stationnaire dans un cylindre circulaire se déplaçant parallèlement à sa longueur. Pour résoudre les quatre premiers cas, ils ont utilisé des transformations en sinus et en cosinus, et ils ont obtenu des solutions exactes pour la distribution de vitesse en termes d'intégrales définies. Les cas pour lesquels le temps tend vers l'infini et la distance entre les deux parois latérales tend vers l'infini sont comparées avec les cas pour les écoulements sur une paroi plane en l'absence des parois latérales. Ceux-ci les ont amenés à connaître le temps nécessaire pour atteindre l'état stationnaire et quelle est la distance entre les parois latérales dont la valeur mesurée de la vitesse ou de la contrainte ne serait pas affectée par la présence des parois latérales. Ils ont étudié aussi les effets des parois latérales sur l'écoulement non stationnaire dans une conduite de section rectangulaire pour deux cas différents. L'un d'eux est l'écoulement transitoire en raison d'un gradient de pression appliqué dans un conduit de section transversale rectangulaire. L'autre est l'écoulement non stationnaire dans un conduit de section transversale rectangulaire se déplaçant parallèlement à sa longueur. Ils ont montré que ces effets dépendent de la valeur du rapport d'aspect géométrique. Les variations de la vitesse et le débit volumique en fonction du rapport d'aspect géométrique montre qu'il s'agit d'effets appréciables des parois sur l'écoulement. Il se trouve que le temps nécessaire pour atteindre l'état permanent pour l'écoulement avec des parois latérales est plus court que celui de l'écoulement sans parois latérales.

**Yu-Tang Chen, Shung-Wen Kang, Wen-Chian Tuh et Tsung-Hsin Hsiao (2004) [19]** ont mené des analyses théoriques et des essais expérimentaux pour étudier les caractéristiques d'écoulement du fluide et de transfert de chaleur dans l'évier de chaleur à micro-canaux, en particulier dans le mécanisme de nucléation de bulles. Le méthanol a été

utilisé comme fluide de travail et a coulé à travers des micro-canaux avec différents diamètres hydrauliques allant de 57 à 267  $\mu\text{m}$  dans les expériences. Les résultats expérimentaux des caractéristiques de l'écoulement ont indiqué que le comportement de l'écoulement est en régime laminaire où  $Re = 50-850$ , les phénomènes de transition précoce n'existaient pas. Le phénomène a montré que la rugosité de surface, la viscosité et la géométrie du canal ont de grands effets sur les caractéristiques de l'écoulement dans les micro-canaux. En outre, il est démontré que les effets du coefficient de frottements et de la viscosité du fluide dans les micro-canaux sont beaucoup plus importants que dans les macro-canaux. Les résultats expérimentaux en matière de transfert de chaleur ont mis en accusation que la convection forcée dans l'évier de chaleur à micro-canaux a présenté d'excellentes performances de refroidissement, en particulier dans le régime de changement de phase. Elle pourrait être appliquée comme évacuateur efficace de la chaleur et dispositif de contrôle de la température dans les composants électroniques de puissance élevée. Lorsque l'état critique nucléé du flux de chaleur est apparu, le mécanisme de l'écoulement a changé en bouillante nucléée pleinement développée et accompagné d'une température de paroi qui diminue rapidement et la chute de pression a fortement augmenté. Les résultats expérimentaux ont également indiqué que le changement de phase dans le processus de micro-canaux absorbe de la chaleur et réduit la température de fonctionnement de l'environnement. En outre, le diamètre hydraulique des micro-canaux de plus de 83  $\mu\text{m}$  est possible pour la nucléation des bulles tandis que la nucléation des bulles critique pour le méthanol est obtenue entre 57-83  $\mu\text{m}$

**R. Hadj Ali , A.Ghezal , Z. Ouchiha , J. C. Loraud (2007) [20]** Ont étudié analytiquement et numériquement l'influence d'un débit pulsé sur le comportement dynamique d'un écoulement de fluide dans une conduite cylindrique. Ils ont considéré deux approches. Ils ont commencé d'abord par la recherche de la position radiale du maximum de la vitesse axiale à partir de l'expression analytique du profil de vitesse pour un écoulement oscillatoire établi par Uchida (1956) et ceux trouvés par J .Majdalani (2002) dans le cas de l'écoulement rectangulaire. Ces maximums sont ensuite comparés avec ceux trouvés par la méthode des différences finies basée sur le schéma de Nicolson utilisant le maillage décalé qui est défini par la cellule de M.A.C (*Marker And Cell*). L'étude analytique a permis d'établir une expression théorique déterminant la position du maximum de la vitesse en fonction de la fréquence et du temps, ce résultat est confirmé numériquement. Elle a montré, d'une part, que l'effet annulaire s'accroît avec la fréquence et diminue avec la phase et

d'autre part, que l'influence des oscillations commence à partir d'une fréquence située au delà de  $Re\omega = 128$  contrairement à la fréquence 16 donnée dans la littérature. Ces résultats sont aussi comparés au cas d'un écoulement plan dans une conduite rectangulaire où l'effet annulaire n'est présent que pour certaines phases, contrairement au cas cylindrique. Ils ont trouvé analytiquement, aussi, que la position du maximum de la vitesse se situe proche beaucoup plus de la paroi dans le cas du cylindre que dans le cas du rectangle. Contrairement à certains travaux, ils ont opté pour le choix d'une vitesse d'entrée sinusoïdale au lieu d'un gradient de pression sinusoïdal.

**A.S.R. Duartea, A.I.P. Mirandab et P.J. Oliveira (2008) [21]** ont abordé une modélisation numérique et analytique pour l'écoulement non stationnaire du fluide viscoélastique. En particulier, un cas test important pour l'évaluation des programmes de calculs de simulation a été proposé et sa solution analytique établie. Initialement, le cas test de démarrage de l'écoulement de Poiseuille plan est analysé. Une comparaison entre le fluide Newtonien et le fluide de type UCM a montré un comportement différent durant le régime transitoire avant d'atteindre l'état stationnaire, avec une réponse oscillatoire pour le fluide UCM. Il a été également vérifié que le fluide de Maxwell a pris plus de temps pour atteindre l'état stationnaire, d'autant plus que le nombre d'élasticité a été augmenté et la période des oscillations physiques a diminué. De petites oscillations numériques étaient présentes près de l'endroit où une discontinuité de la dérivée temporelle serait physiquement produite. En outre, les résultats obtenus sont suffisamment précis pour prévoir la propagation des ondes de cisaillement dans le temps avec une prévision à peu près exacte des instants où ces "chocs" générés à chaque paroi traversent la ligne médiane du canal et interfèrent les uns avec les autres, donnant lieu à de fortes oscillations d'erreur. Avec le modèle Oldroyd-B, ils ont observé un développement lisse de l'évolution transitoire et de la variation spatiale du champ d'écoulement, comme déjà signalé dans les études antérieures. Le taux réel de convergence de leur méthode a été vérifié et égale à 2 pour tous les cas Oldroyd-B étudiés et en diminuant à 1 pour le modèle UCM. Pour le modèle PTT sans viscosité du solvant, un comportement similaire à celui produit par le fluide UCM a été observé, mais dû à la viscosité rhéofluidifiante impliquée dans l'équation PTT, l'état a été atteint plus rapidement. Pour le fluide FENE-CR le comportement observé est similaire à celui trouvé pour le fluide Oldroyd-B, mais dans ce cas il y'a eu une réduction de la fréquence d'oscillation de la réponse ainsi que d'une atténuation du pic de l'oscillation. Pour le cas d'écoulement viscoélastique pulsatile, le plus intéressant des deux considérés, certaines conclusions

similaires et d'autres nouvelles pourraient être tirées. Un bon accord entre les solutions théoriques et numériques a pu être observé pour le fluide Newtonien soumis à des régimes stationnaires et non stationnaires, mais les fluides viscoélastiques ont montré un comportement très différent. Alors que pour le fluide Oldroyd-B, on n'a aucun mal à obtenir des résultats précis en utilisant des maillages raisonnables et des pas de temps (de l'ordre de 0,01), en dépit d'avoir établi le deuxième taux de convergence pour tous les cas d'écoulement pulsatile (y compris le UCM). Pour ce dernier modèle des maillages très fins ont été nécessaires ( $\Delta y = 1 / 1000$ ) avec des pas de temps très petits ( $\Delta t = 1 / 1000$ ). Même pour un certain nombre faible d'élasticité  $E = 1$ , le modèle UCM, ne possédant pas de dissipation purement visqueuse, eu tendance à développer des impulsions à ondes courtes se propageant à travers le canal et des phénomènes locaux semblent avoir besoin d'une résolution très serrée. Le problème du canal plan pulsatile avec le modèle UCM est donc un cas test le plus adéquat pour l'évaluation des codes viscoélastiques dans des conditions d'un écoulement non permanent. Cet écoulement test offre certains avantages par rapport au démarrage d'écoulement (*start-up flow*) :

- il est 'périodiques' au lieu de 'transitoire', donc être moins sensible aux conditions exactes initiale et permettant ainsi de vérifier la répétitivité de la solution numérique à chaque période;
- il ne génère pas de "chocs" qui conduisent à la propagation des discontinuités de vitesse-gradient, qui sont préjudiciables car les régimes numériques d'ordre élevé ont tendance à perdre la précision à proximité de ces points;
- par conséquent, le contrôle des erreurs de discrétisation et le taux de convergence de la méthode peut être fait beaucoup plus efficacement.

**Ali Tamayol** et **Majid Bahrami** (2010) [22] ont présenté des solutions analytiques pour un écoulement laminaire complètement développé dans des micro-/mini-canaux de sections régulières hyper elliptiques et polygonales sous forme d'expressions compactes. Les géométries considérées couvrent un large éventail de formes communes simplement connexe, y compris cercle, ellipse, rectangle, rectangle avec coins-rond, losange, forme d'étoile, triangle équilatéral, carré, pentagone, et l'hexagone. Une technique d'harmonisation du point (*point matching technique*) est utilisée pour calculer des solutions de forme fermée pour les distributions de vitesse dans les sections des canaux mentionnés ci-dessus. L'approche était basée sur l'utilisation de la solution générale de l'équation de Poisson sous

forme de développement en série trigonométrique. Par conséquent, les coefficients nécessaires ont été déclarés pour une large gamme de géométries. En utilisant la solution développée pour la distribution des vitesses, des chutes de pression et des nombres de Poiseuille ont été déterminées pour une variété de coupes transversales. Les relations développées pour la distribution de vitesse et les chutes de pression sont comparées avec succès avec les solutions analytiques et les données expérimentales recueillies auprès de différentes sources pour diverses géométries, y compris des sections polygonales, rectangulaires, circulaires, elliptiques, et rhombiques. Les solutions compactes obtenues constituent un outil pratique et de puissance pour effectuer des analyses hydrodynamiques dans une variété d'applications fondamentales et l'ingénierie tels que de la micro fluidique, les phénomènes de transport, et les milieux poreux.

### **1.3. Contenu du mémoire**

Après une introduction générale dans laquelle on a montré l'importance du sujet et ses différentes applications, on a exposé en bref une revue des différents travaux réalisés pour l'étude de l'écoulement d'un fluide à l'intérieur des canaux.

On abordera au premier chapitre l'état de connaissances sur les écoulements visqueux non stationnaires, ainsi que les écoulements laminaires dans les conduites est les canaux.

La formulation mathématique du problème fera l'objet du deuxième chapitre dans lequel nous présenterons, après démonstration, les équations de conservation qui régissent ce type d'écoulement, à savoir, l'équation de continuité et l'équation de quantité de mouvement.

Au troisième chapitre, on exposera la résolution analytique de l'équation régissant notre problème. Pour cela on se réfèrera aux travaux réalisés par C. Fan et B.T. Chao [29] et ceux de M. Emin Erdogan [12,13] et [16-18].

La résolution numérique fera l'objet du quatrième chapitre. La méthode des volumes finis sera utilisée pour discrétiser l'équation gouvernante exprimée en variables adimensionnelles. C'est ainsi que nous aurons développé un code de calcul en configuration bidimensionnelle permettant la résolution de l'équation.

En dernier lieu, le cinquième chapitre contiendra les résultats des calculs effectués en vue de déterminer les différentes caractéristiques de l'écoulement à savoir le profil des vitesses, la contrainte de cisaillement, le coefficient de frottement et le nombre de Poiseuille.

On montrera aussi l'influence de certains paramètres sur quelques caractéristiques de l'écoulement.

Finalement, nous terminerons ce mémoire par une conclusion générale qui résumera les principaux résultats obtenus lors de cette étude et qui tracera les perspectives et les extensions à donner à ce travail.

***CHAPITRE I***  
***ETAT DE CONNAISSANCES SUR***  
***LES ECOULEMENTS VISQUEUX***  
***NON STATIONNAIRES***

# ETAT DE CONNAISSANCES SUR LES ÉCOULEMENTS VISQUEUX NON STATIONNAIRES

## 1.1. Introduction

En mécanique des fluides, on suppose que le fluide est un milieu continu, ce qui permet d'utiliser les lois classiques de conservation, à savoir

- Conservation de la masse
- Conservation de la quantité de mouvement
- Conservation de l'énergie

Dans ce chapitre on exposera la notion et quelques propriétés du fluide ainsi que les équations mathématiques générales gouvernant l'écoulement de ce dernier, illustrées dans plusieurs ouvrages de mécanique des fluides [23-26]. On termine par l'illustration de quelques notions et propriétés des écoulements dans les canaux et dans les conduites.

## 1.1. Notion d'un fluide

Un fluide peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. Un fluide est donc un milieu continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.

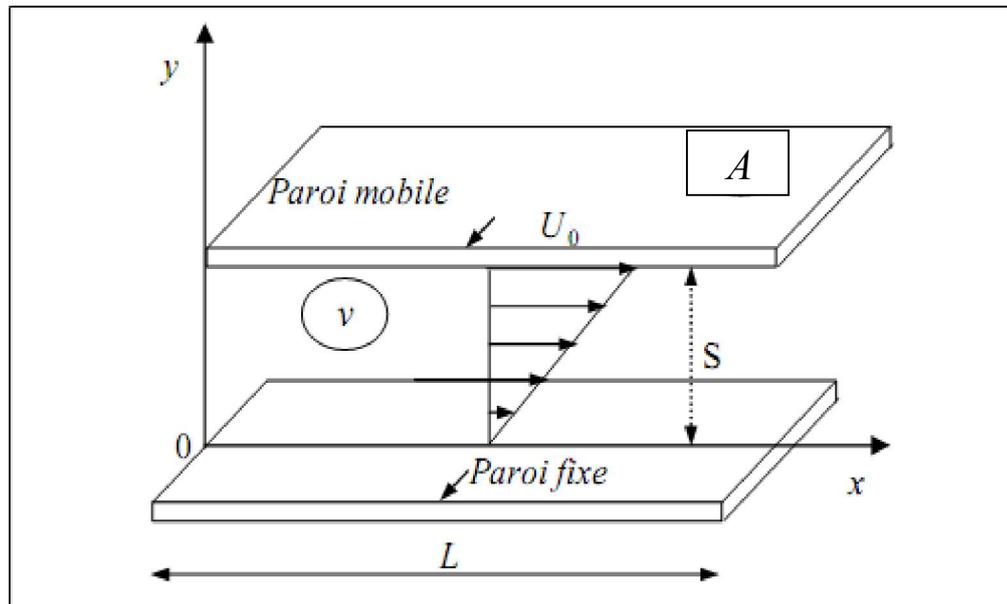
Le fluide considéré durant cette étude est isotrope, incompressible et visqueux.

- L'isotropie assure que les propriétés sont identiques dans toutes les directions de l'espace.

- La compressibilité définit la variation relative du volume sous l'effet d'une pression appliquée. Elle est très grande pour les gaz, faible pour les liquides
- la viscosité caractérise le fait que tout changement de forme d'un fluide réel s'accompagne d'une résistance (frottements).

### 1.3. Viscosité

La notion de viscosité est associée à la résistance qu'oppose tout fluide à sa mise en mouvement. Pour préciser cette propriété de façon plus quantitative, nous considérons l'expérience de "Couette" en écoulement plan. Telle qu'elle est schématisée à la figure Fig.1.1, cette expérience concerne un fluide visqueux disposé entre deux plans parallèles distants d'une hauteur  $S$ . Elle consiste à déplacer relativement à l'autre, l'une des deux parois d'un mouvement permanent de translation rectiligne dans son propre plan. Pour simplifier, on suppose la paroi inférieure fixe et la paroi supérieure mobile à la vitesse  $U_0$ .



**Fig.1.1** : Schéma de l'écoulement de Couette plan.

En l'absence de toute autre force extérieure (gravité, pression), le mouvement du fluide résulte exclusivement du déplacement du plan mobile.

En régime permanent, l'expérience révèle, pour certains fluides, que le profil de vitesses qui s'établit entre les deux plaques est linéaire. En outre pour maintenir le mouvement uniforme de la paroi supérieure, il faut exercer sur une aire  $A$  de celle-ci une force tangentielle dont le module  $F$  est tel que :

$$F/A \propto U_0 / S$$

En désignant par  $\mu$  le coefficient de proportionnalité appelé *viscosité dynamique* du fluide, on écrira :

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{U_0}{S} \quad (1.1)$$

Cette relation s'applique bien aux fluides usuels. Elle est à l'origine d'un comportement *rhéologique* que nous qualifierons de *Newtonien*.

On introduit également le coefficient de *viscosité cinématique* :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.2)$$

#### 1.4. Ecoulement laminaire

Reynolds en 1883 a découvert l'apparition soudaine d'un changement de la structure de l'écoulement permanent dans un tube lorsque la vitesse était augmentée, Couette fit une constatation du même genre pour un fluide contenu entre deux cylindres concentriques dont l'un tourne à vitesse constante. Et par la suite, l'observation de l'existence de deux régimes a été faite sur toute circonstance d'écoulement. Le régime à vitesse modérée est dit *laminaire* tandis que l'autre est dit *turbulent*.

On établit un critère qui permet de classer a priori les écoulements, c'est la valeur du nombre de Reynolds.

- Dans un écoulement à faible valeur de "Reynolds" «  $Re \ll 1$  », les écoulements sont observés aux faibles vitesses. Il s'agit en général d'écoulements très stables, aux profils bien définis, appelés écoulement *rampant* ou *écoulement de Stokes*. Dans ce cas les forces d'inertie liées aux vitesses étant négligeables, les forces visqueuses et les forces de pression s'équilibrent.

- L'écoulement est *laminaire* lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à une valeur critique, (jusqu'à 2000 - 2300), pour laquelle se produit une transition assez brutale vers le turbulent. Dans ce type d'écoulement l'effet de la viscosité s'atténue à mesure que l'on s'éloigne des parois, les vitesses du fluide tendant à s'homogénéiser.
- À partir de valeur critique de Reynolds se produit une *transition* qui fait apparaître des instabilités dues à l'amplification des perturbations. La valeur du Reynolds de transition et la nature des instabilités dépendent essentiellement du type d'écoulement considéré.
- Dans les écoulements à grand nombre de "Reynolds", les instabilités augmentent au point de donner naissance à un phénomène chaotique dans lequel il est difficile de voir une organisation. Les écoulements correspondants sont beaucoup moins stables, ils sont observés aux fortes vitesses, sont des écoulements *turbulents*.

## 1.5. Ecoulement non-stationnaire

On dit qu'un écoulement est *stationnaire* si toutes les variables décrivant le mouvement sont indépendantes du temps. Ainsi la pression  $p$ , la vitesse  $V$ , la densité  $\rho$ , l'énergie  $E$  d'un écoulement *stationnaire* sont des quantités indépendantes du temps. Un écoulement est dit *non-stationnaire* si les variables décrivant le mouvement dépendent du temps.

## 1.6. Equations fondamentales.

Dans son ensemble, la mécanique des fluides est gouvernée par trois équations fondamentales : l'équation de continuité, l'équation de quantité de mouvement et l'équation d'énergie. Du fait que notre étude s'intéressera du côté dynamique, on se limitera, donc, à l'équation de continuité et l'équation de quantité de mouvement.

### 1.6.1. Equation de continuité.

Considérons un volume matériel  $\Omega$ . La masse contenue dans ce volume est :

$$m = \int_{\Omega} \rho \, dv$$

où  $\rho$  désigne la densité locale. Si le volume matériel ne contient ni sources ni puits, la masse qui se trouve dans  $\Omega$  est constante et on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho dv = 0 \quad (1.3)$$

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de transport au volume  $\Omega$  :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho dv = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \iint_A \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) ds$$

$A$  est la surface de contrôle. D'après (1.3) on peut écrire :

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \iint_A \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (1.4)$$

Si le volume  $\Omega$  ne contient pas de surface de discontinuité, l'intégrale sur  $A$  peut être remplacée par une intégrale de volume et "le théorème de *Green-Ostrogradsky*" permet d'écrire :

$$\iint_A \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{V}) dv$$

dans ces conditions, l'équation (1.4) devient :

$$\iiint_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{V}) \right] dv = 0$$

Le volume d'intégration est arbitraire et par conséquent l'intégrale doit être identiquement nulle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) est souvent appelée équation de continuité (forme différentielle).

### 1.6.2. Equation de quantité de mouvement.

Pour un volume arbitraire  $\Omega$ , la quantité de mouvement, définie pour une particule de fluide par le produit, ' $mV$ ' doit être conservée. Cette conservation, sous sa forme générale, peut être exprimée par l'équation suivante, sous forme intégrale :

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot \vec{V}) dv + \iint_A (\rho \vec{v} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{V} ds = \iiint_{\Omega} \rho \cdot \vec{f} dv + \iint_A \vec{n} \cdot \bar{\vec{p}} ds \quad (1.6)$$

où  $\vec{v}$  est le vecteur unité tangent à la surface  $A$ , et  $\bar{\vec{p}}$  définit le tenseur des contraintes totales appliquées en un point du fluide et qui s'écrit de la manière suivante :

$$\bar{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

L'équation (1.6) s'écrit sous la forme différentielle comme suit :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \cdot \vec{V} = \vec{f} - \nabla \cdot \bar{\vec{p}} \quad (1.7)$$

Où  $\vec{f}$  représente le vecteur des forces appliquées au fluide (forces massiques).

Dans le cas d'un écoulement idéal, donc sans frottements internes, ou pour un fluide au repos, le tenseur des contraintes totales se réduit uniquement à l'effet de la pression hydrostatique  $p$ , et cela devient :

$$\bar{\vec{p}}_{idéal} = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Pour un fluide incompressible, newtonien et visqueux, le tenseur ci-dessus présente alors des contraintes visqueuses, dont le tenseur est,  $\bar{\vec{\tau}}$  et cela devient :

$$\bar{\vec{p}}_{visq} = \bar{\vec{p}}_{idéal} + \bar{\vec{\tau}} \quad (1.8)$$

Le tenseur des contraintes visqueuses, selon l'hypothèse de "Newton", est une fonction linéaire du taux de déformation  $\bar{D}$ :

$$\bar{\tau} = 2 \mu \bar{D} \quad (1.9)$$

avec  $\bar{D}$  défini de la manière suivante :

$$\bar{D} = \left[ \nabla \otimes \vec{V} + (\nabla \otimes \vec{V})^T \right] \quad (1.10)$$

En tenant compte de la condition d'incompressibilité, défini par  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ , on aboutit aux *équations de Navier-Stokes*, qui expriment la conservation de la quantité de mouvement d'un fluide incompressible, newtonien et visqueux et dont l'expression est :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \cdot \vec{V} = \vec{f} - \nabla \cdot p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (1.11)$$

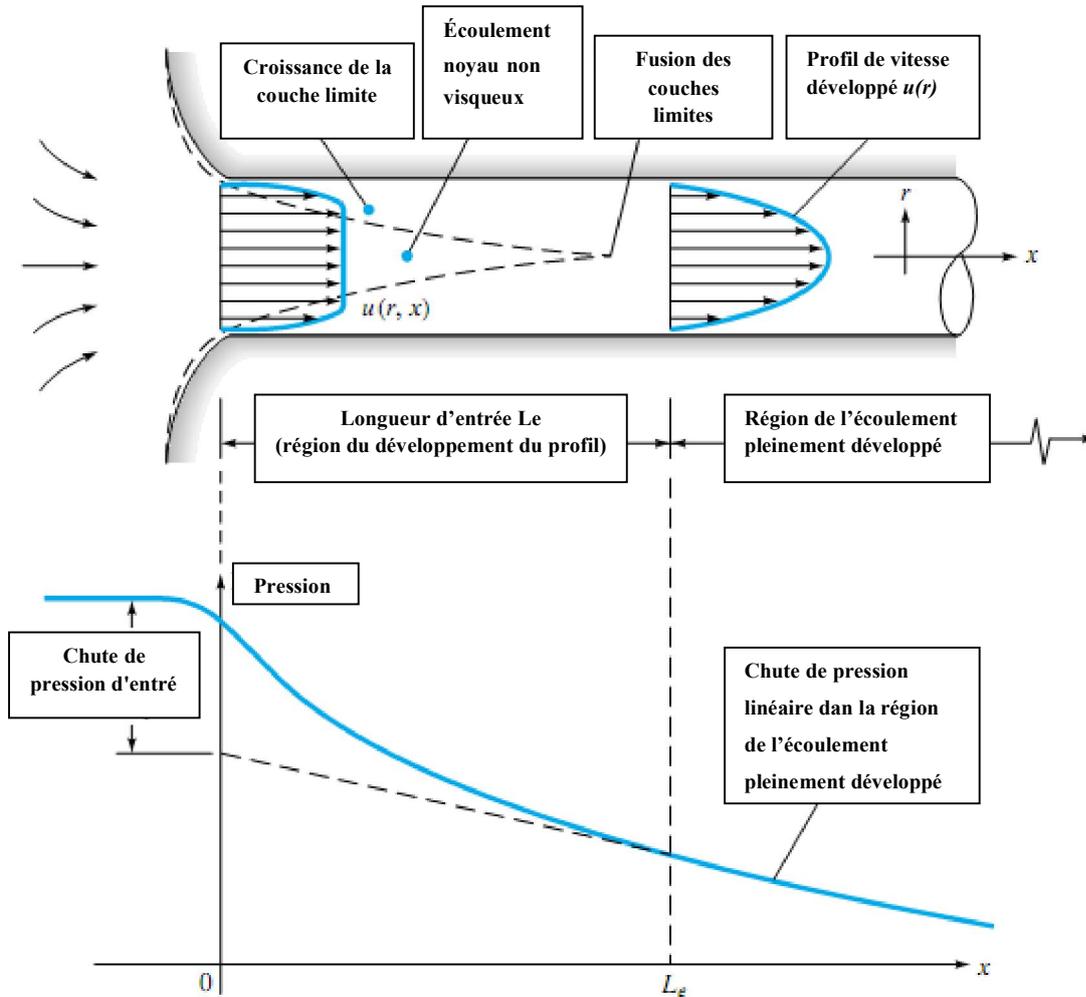
## 1.7. Ecoulements dans les conduites et les canaux

Parmi les écoulements internes, qui sont des écoulements délimités par des parois fixes ou mobiles, on trouve les écoulements dans les conduites ou les canaux. C'est un important problème pratique d'ingénierie des fluides: écoulement de différents types de fluides dans les conduits avec différentes formes et de diverses vitesses. Les tuyauteries sont rencontrées dans presque tous les designs de l'ingénierie.

La figure 6.6 montre un écoulement interne dans un long conduit. En amont, on trouve une *zone d'entrée* (entrance flow) où un écoulement de près non visqueux qui converge et pénètre dans le tube. Une couche limite visqueuse se développe en aval, ce qui retarde l'écoulement axial  $u(r, x)$  sur la paroi et accélère ainsi l'écoulement noyau du centre pour maintenir les exigences incompressibles de la continuité.

À une distance finie de l'entrée, les couches limites se fusionnent et le noyau non visqueux disparaît. La vitesse s'ajuste peu à peu jusqu'à «  $x = L_e$  : *longueur de développement hydraulique* », l'écoulement dans le tube est alors entièrement visqueux, il ne change plus avec  $x$  et on dit qu'il est *pleinement développé*, «  $u \approx u(r)$  » seulement. En

aval de «  $x = L_e$  » le profil de vitesse est constant, le cisaillement à la paroi est constant et la pression baisse de façon linéaire avec  $x$ , soit pour l'écoulement laminaire ou turbulent.



**Fig.1.2** L'élaboration des profils de vitesse et les changements de pression à l'entrée d'un écoulement dans un conduit. [26]

### 1.7.1. Vitesse moyenne

Pour déterminer toutes les caractéristiques de l'écoulement, il faut connaître en premier lieu la vitesse du fluide. Cela peut se faire expérimentalement ou par la résolution des équations (1.5) et (1.11) soit analytiquement, si c'est possible, ou numériquement.

La vitesse moyenne dans une section transversale  $A$  est donnée par la relation :

$$w_{moy} = \frac{1}{A} \iint w \, ds \quad (1.12)$$

avec  $w$  est la vitesse de l'écoulement.

### 1.7.2. Débit volumique.

Le débit volumique  $Q$  à travers une surface  $A$  perpendiculaire à la direction de l'écoulement est donné par l'expression :

$$Q = \iint w \, ds \quad (1.13a)$$

ou bien par :

$$Q = w_{moy} \cdot A \quad (1.13b)$$

### 1.7.3. Contrainte de cisaillement.

La contrainte de cisaillement pour un fluide Newtonien se calcul comme suit :

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.14a)$$

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.14b)$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide

et  $\tau_{xz}$  est la contrainte de cisaillement dans le plan  $xy$

on peut déduire, donc, la contrainte de cisaillement aux parois comme suit :

$$\tau_{p1} = \mu \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (1.15a)$$

$$\tau_{p2} = \mu \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (1.15b)$$

### 1.7.4. Coefficient de frottement.

#### a) Coefficient de frottement de Fanning.

Le coefficient de frottement de Fanning, nommé d'après J.T. Fanning (1837-1911), est un nombre sans dimension utilisé dans les calculs d'écoulement de fluide. Il est lié à la contrainte de cisaillement à la paroi comme suit:

$$f = \frac{\bar{\tau}_p}{(1/2)\rho w_{moy}^2} \quad (1.16)$$

avec :  $\bar{\tau}_p$  est la contrainte de cisaillement moyenne à la paroi.

#### b) Coefficient de frottement de Darcy

Appelé par certains auteurs le coefficient de frottement de Darcy-Weisbach, il est 4 fois plus grand que le coefficient de frottement de Fanning :

$$\lambda = 4 f \quad (1.17)$$

### 1.7.5. Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds  $Re$  est calculé à partir de l'équation suivante :

$$Re = \frac{\rho w_{moy} D_h}{\mu} \quad (1.18)$$

où  $D_h$  représente le diamètre hydraulique de la conduite. Pour la conduite circulaire il est égal au diamètre de la conduite, tandis que pour les tubes non circulaires, il est donné par :

$$D_h = 4 A/Pr \quad (1.19)$$

avec :  $A$  c'est la section du tube

$Pr$  c'est le périmètre de la section.

Pour un tube rectangulaire de dimensions  $a \times b$ , on aura :

$$D_h = \frac{2 a \cdot b}{(a + b)} \quad (1.20)$$

Il est à noter que certains auteurs affirment que l'utilisation de la dimension  $\mathcal{L} = \sqrt{A}$  au lieu de  $D_h$  donne des résultats plus avantageux dans la prédiction du nombre de Poiseuille pour des géométries complexes. [14] [15]

### 1.7.6. Nombre de Poiseuille

Il est défini comme le rapport entre les forces de pression et les force de viscosité.

#### a) Nombre de Poiseuille expérimental

Lorsqu'un écoulement est étudié, les grandeurs facilement mesurables sont la pression et le débit. A partir du débit mesuré, la vitesse débitante dans la section ( $w_{moy} = Q/A$ ) peut être déterminée et le nombre de Reynolds  $Re$  calculé.

La mesure de la pression permet d'obtenir le coefficient de frottement  $f$  (ou coefficient de Darcy  $\lambda$ ) donné par l'équation :

$$f = \frac{D_h}{2 \rho w_{moy}^2} \left( -\frac{dp}{dz} \right)$$

et qui représente la forme adimensionnelle de la contrainte tangentielle moyenne à la paroi  $\bar{\tau}_p$ , laquelle s'exprime en fonction du gradient local de pression  $\frac{dp}{dz}$  à partir d'un bilan des forces sur un élément de conduite de largeur  $dz$  par :

$$\bar{\tau}_p P r dz = -A dp .$$

Le nombre de Poiseuille expérimental est alors défini comme étant le produit entre le nombre de Reynolds et le coefficient de frottement :  $Po_{exp} = f Re$  . Il peut être directement déduit des relevés expérimentaux et des dimensions des canaux par l'expression suivante :

$$Po_{exp} = \frac{A D_h^2}{2 \mu Q} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \quad (1.21)$$

pour un écoulement incompressible :

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\Delta p}{l}$$

avec  $\Delta p$  est la différence de pression entre les deux extrémités de la conduite.

et  $l$  est la longueur de la conduite.

### b) Nombre de Poiseuille théorique

Pour un écoulement laminaire, en régime établi, d'un fluide newtonien incompressible, le nombre de Poiseuille théorique  $Po_{th}$ , produit du nombre de Reynolds et du facteur de frottement, est constant. Il dépend seulement de la géométrie du canal. Ainsi pour des capillaires de section circulaire, il est égal à 16, pour un écoulement entre deux plaques

planes, ce nombre vaut 24. Pour des micro-canaux de sections plus complexes, il s'exprime en fonction du rapport de forme  $\alpha$  et des angles de la section.

pour les canaux rectangulaires, trois modèles approchés ont été proposés par différents auteurs [27] et sont comparés sur la Figure 1.4 :

- Tirunarayanan et Ramachandran, 1965

$$Po_{th} = 14,277 + 1402,5 \left( \frac{1 + \alpha(\sqrt{2}-1)}{4(1+\alpha)} - \frac{\sqrt{2}}{8} \right)^{1,9} \quad (1.22)$$

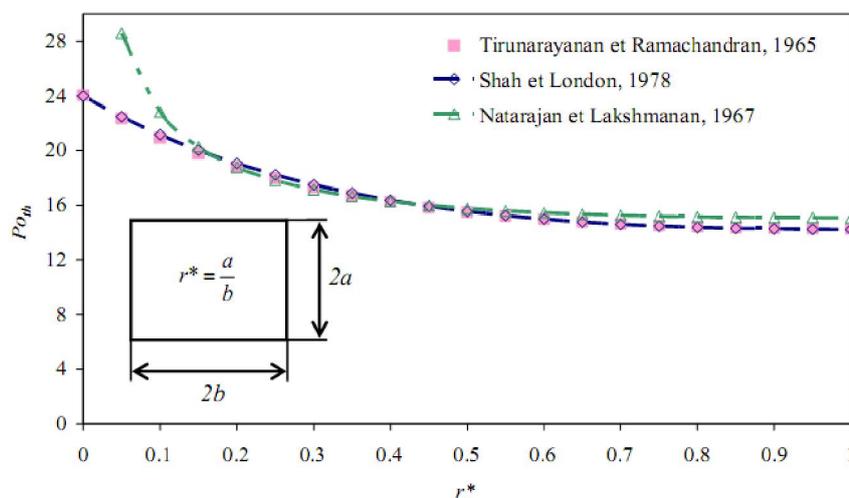
- Shah et London, 1978

$$Po_{th} = 24 [1 - 1,3553 \alpha + 1,9467 \alpha^2 - 1,7012 \alpha^3 + 0,9564 \alpha^4 - 0,2537 \alpha^5] \quad (1.23)$$

- Natarajan et Lakshmanan, 1967

$$Po_{th} = 8,968 \left( \frac{1+\alpha}{\sqrt{\alpha}} \right)^{0,75} \quad (1.24)$$

Lorsque le rapport de forme  $\alpha$  est nul, on retrouve le nombre de Poiseuille d'un écoulement entre deux plaques parallèles ; lorsque  $\alpha$  est égal à 1, sa valeur égale à 14,277 est celle d'un écoulement dans une canalisation de section carrée. Les formes approchées de Tirunarayanan et Ramachandran et de Shah et London donnent une valeur très proche de la solution exacte alors que la forme simple proposée par Natarajan et Lakshmanan est peu précise, notamment pour des petits rapports de forme.



**Fig. 1.3 :** Variation du nombre de Poiseuille théorique en fonction du rapport de forme pour une section rectangulaire [28]

Par commodité, lors des études expérimentales on définit fréquemment le coefficient  $Po^*$ , forme réduite du nombre de Poiseuille, comme étant le rapport entre nombre de Poiseuille expérimental et nombre de Poiseuille théorique.

$$Po^* = \frac{Po_{exp}}{Po_{th}} \quad (1.25)$$

Lorsque ce coefficient est égal à un, le modèle de Poiseuille et le résultat expérimental concordent. Pour  $Po^* > 1$ , le modèle de Poiseuille surestime le débit mesuré, et pour  $Po^* < 1$ , il sous-estime ce débit.

### 1.7.7. Longueur de développement hydraulique

La longueur de développement hydraulique  $L_e$  (appelée aussi longueur d'entrée) pour le régime laminaire est donnée par l'équation bien acceptée suivante:

$$\frac{L_e}{D_h} = 0,05 Re \quad (1.26)$$

# ***CHAPITRE II***

# ***FORMULATION MATHÉMATIQUE***

## FORMULATION MATHÉMATIQUE

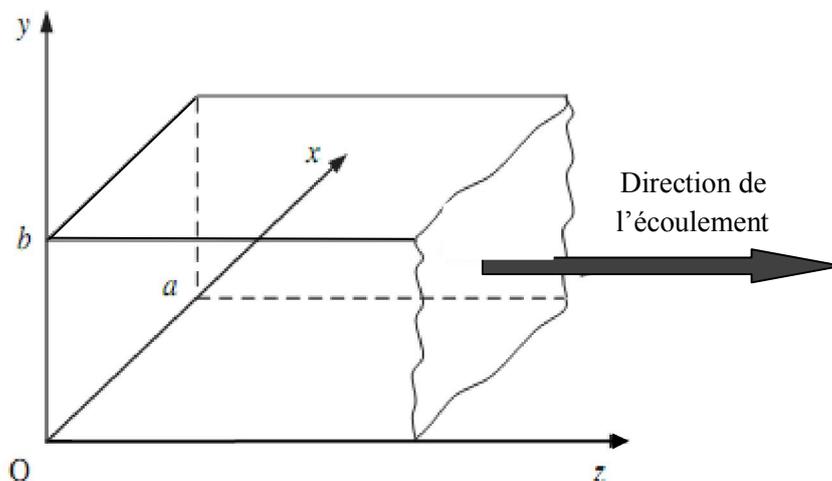
### 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la mise en équations du problème physique considéré en utilisant les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Ces dernières expriment des principes fondamentaux de la physique.

On commence par l'écriture des équations sous leurs formes générales, puis on passera aux différents traitements de ces équations pour les adapter au cas étudié. Pour cela on doit prendre en considération les hypothèses simplificatrices nécessaires ainsi que les conditions aux limites associées.

### 2.2 Modèle physique

Le problème considéré consiste en l'étude d'un écoulement à l'intérieur d'une conduite horizontale à section verticale rectangulaire de largeur « $a$ » et de hauteur « $b$ ». L'origine du système de coordonnées cartésiennes est situé à un coin de la conduite, avec l'écoulement dans la direction de l'axe « $z$ ». Une représentation schématique de la géométrie considérée est présentée sur la Figure Fig.2.1.



**Fig. 2.1** : Représentation schématique de l'écoulement

## 2.3. Formulation mathématique

Dans cette section, nous allons exposer les différentes étapes de la formulation mathématique nécessaires pour aboutir à l'équation finale régissant ainsi les phénomènes de conservation.

### 2.3.1. Hypothèses simplificatrices

Un ensemble d'hypothèses est retenu dans cette étude, afin de simplifier la modélisation mathématique du problème. Ces hypothèses sont issues des propriétés physiques de l'écoulement du fluide dans une conduite horizontale à section transversale rectangulaire.

Les principales hypothèses prises en compte dans cette étude sont les suivantes :

1. Le fluide est Newtonien , visqueux , incompressible et à propriétés physiques constantes et uniformes.
2. L'écoulement est transitoire , laminaire , et sans transfert de chaleur .

### 2.3.2. Mise en équations du problème

On exprimera les équations dans un système de coordonnées cartésiennes :

\* coordonnées  $(x, y, z)$  ;

\* vitesse  $(u, v, w)$  ;

Les équations de conservation qui régissent l'écoulement d'un fluide Newtonien s'écrivent comme suit :

**Equation de continuité :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (2.1)$$

**Equations de quantité de mouvement (de Navier Stokes):**

Les équations de quantité de mouvement écrites suivants les trois axes  $(x, y, z)$  sont :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\rho \partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\rho \partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\rho \partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.4)$$

Du fait que l'écoulement est unidirectionnel ( $u = v = 0$ ) et compte tenu des hypothèses formulées précédemment, les équations de conservation sont les suivantes :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\rho \partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.8)$$

Ce qui conduit finalement à l'équation gouvernante suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.9)$$

## 2.4. Conditions initiales et aux limites

### 2.4.1 Conditions initiales

Le fluide est supposé initialement au repos puis on applique, sur lui, un gradient de pression constant. Ce dernier provoquera l'écoulement du fluide dans la conduite. Ce qui signifie que la vitesse  $w(x, y, t)$  du fluide au temps ( $t = 0$  secondes) est nulle :

$$w(x, y, 0) = 0.0 ; \forall x \text{ et } \forall y. \quad (2.10)$$

### 2.4.2 Conditions aux limites

Du fait de la viscosité du fluide, les particules du fluide qui se trouvent au contact avec les parois s'adhèrent à ces dernières et restent immobiles :

$$w(x, 0, t) = w(x, b, t) = 0.0 \quad \forall t \quad \text{et} \quad \forall x \quad (2.11)$$

$$w(0, y, t) = w(a, y, t) = 0.0 \quad \forall t \quad \text{et} \quad \forall y \quad (2.12)$$

### 2.5. Adimensionnalisation de l'équation

Pour rendre notre étude plus simple et les résultats obtenus peuvent être généralisés à tous les phénomènes similaires, on doit introduire un ensemble de variables réduites pour aboutir à une forme adimensionnelle.

Considérons les variables réduites suivantes :

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{a} \\ Y &= \frac{y}{b} \\ T &= \frac{\nu t}{a^2} \\ W &= \frac{w}{\left(\frac{1}{\mu}\right) \left(-\frac{dp}{dz}\right) a^2} \\ \alpha &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

L'équation (2.9) aura, donc en fonction des nouvelles variables prédéfinies, la forme suivante :

$$\frac{\partial W}{\partial T} = 1 + \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \quad (2.13)$$

Les conditions initiales et aux limites adimensionnelles seront donc :

- $W(X, Y, 0) = 0.0 ; \forall X \quad \text{et} \quad \forall Y . \quad (2.14)$

- $W(X, 0, T) = W(X, 1, T) = 0.0 \quad \forall T \text{ et } \forall Y.$  (2.15)

$$W(0, Y, T) = W(1, Y, T) = 0.0 \quad \forall T \text{ et } \forall X. \quad (2.16)$$

## 2.6 Conclusion

Notre étude sera donc, la résolution de l'équation de Poisson non stationnaire

(2.9) avec

- source constante uniformément répartie  $(-\frac{\partial p}{\rho \partial z})$ ,
- propriétés physiques constantes  $(\rho, \mu)$ ,
- conditions initiales *éq.*(2.10)
- conditions aux limites de Dirichlet homogènes, *éqs.* (2.11) et (2.12).

Ou la résolution de l'équation adimensionnelle (2.15) avec les conditions (2.14), (2.15) et (2.16).

# ***CHAPITRE III***

# ***RESOLUTION ANALYTIQUE***

## RESOLUTION ANALYTIQUE

### 3.1 Introduction

La modélisation d'un problème physico-chimique, consiste en la formulation mathématique des différents phénomènes intervenant dans le processus, sous forme d'équations aux dérivées partielles couplées. Ces équations sont le plus souvent à plusieurs variables, et non homogènes, ce qui rend leur résolution analytique très délicate. Les méthodes numériques souvent utilisées ne fournissent que des solutions approximatives, et le besoin en solutions analytiques (dites solutions exactes) ne cesse de se développer.

Ce chapitre sera consacré à la résolution analytique de l'équation gouvernante (2.9) en prenant en compte les conditions initiales et aux limites (2.10), (2.11) et (2.12). L'équation est connue aussi sous le nom de l'équation de la chaleur non stationnaire avec source de chaleur sous sa forme en 2D. On peut l'écrire sous la forme générale :

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \mathcal{G} + \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \quad (3.1)$$

En utilisant le tableau suivant, l'équation de Poisson non stationnaire (3.1) peut décrire :

Problème	$\phi$	$\beta$	$\mathcal{G}$	$\psi$
Moment	$w$	$\nu = \frac{\mu}{\rho}$	$-\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}$	$\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial n}$
Conduction	$Temp$	$\alpha_a = \frac{k}{\rho c_p}$	$\frac{A}{k}$	$q = k \frac{\partial T}{\partial n}$

**Tab. 3.1 :** Sommaire des variables.

- l'écoulement non stationnaire visqueux dans une conduite rectangulaire.
- la conduction thermique non stationnaire bidimensionnelle dans une plaque rectangulaire.

avec  $w$  : la vitesse de l'écoulement

$\nu$  : la viscosité cinématique du fluide

$\mu$  : la viscosité dynamique du fluide

$\rho$  : la masse volumique du fluide

$\tau_w$  : la contrainte de cisaillement

$\frac{\partial p}{\partial z}$  : le gradient de pression

$Temp$  : la température du corps solide

$\alpha_a$  : la diffusivité thermique du corps solide

$k$  : la conductivité thermique du corps solide

$c_p$  : la chaleur spécifique du corps solide

$A$  : la section que traverse le flux de chaleur

$q_s$  : le flux de chaleur

L'examen des solutions exactes des équations de Navier-Stokes est très important pour de nombreuses raisons. Elles constituent une norme pour vérifier la véracité de nombreuses méthodes approximatives, numériques ou empiriques. Bien que les techniques informatiques permettent l'intégration numérique complète des équations de Navier-Stokes possible, l'exactitude des résultats peut être établie par une comparaison avec une solution exacte.[13]

Il est bien connu que la plupart des solutions pour des écoulements non stationnaires des fluides visqueux sont sous forme de séries. Ces séries peuvent être rapidement convergentes pour les grandes valeurs du temps, mais lentement convergentes pour les petites valeurs du temps, ou vice versa. Parfois, il peut être difficile d'obtenir la solution pour les petites valeurs du temps, mais il peut être facile de l'obtenir pour les grandes valeurs des temps et l'inverse peut aussi être vrai. . [13]

### **3.2. Différentes méthodes de résolution analytiques. [29]**

L'équation générale de la chaleur est une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre en espace et du premier ordre en temps. Cela se traduit par une constante d'intégration dans le temps et deux constantes d'intégrations dans chaque direction de l'espace. Elle admet

en principe une infinité de solutions. Pour que le problème ait une solution unique, il est nécessaire de connaître la répartition des températures en tout point de l'espace à un temps donné pris pour origine (conditions initiales), ainsi que les lois de variations de la température  $Temp$  (ou de ses dérivées) sur les frontières du domaine étudié (conditions aux limites). [29]

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour résoudre analytiquement l'équation de la chaleur (3.1). Parmi elles citons:

- **Les méthodes de transformées intégrales** (Laplace, Fourier, Hankel, etc.), elles sont plus pratiques à appliquer dans des géométries semi-infinies, mais elles posent certains problèmes surtout pour le calcul des transformées inverses.
- **La méthode de séparation des variables** (problèmes aux valeurs propres); elle est plus pratique à appliquer en dimensions finies. Elle se ramène à un problème aux valeurs propres, qui devient compliqué à résoudre dans le cas multidimensionnel, car les valeurs propres dans les différentes directions sont liées;
- **Les Fonctions de Green**, se ramènent généralement à la résolution de l'équation homogène par la méthode de séparation des variables; on exprime ensuite la solution générale sous forme d'une somme de combinaisons, de la solution homogène, des termes sources, des conditions aux limites et des conditions initiales.

La méthode des fonctions de Green (FGs) est un outil puissant pour résoudre les problèmes des conditions aux limites et des conditions initiales. En ingénierie et en sciences appliquées, l'équation de la conduction de la chaleur stationnaire et transitoire est l'un des problèmes de ce type qui est utilisé pour modéliser et étudier les phénomènes physiques survenant dans le monde réel.

Pour l'équation de diffusion de la chaleur, une FG décrit également la distribution de la température en un point  $\mathcal{X}$  au temps  $t$  en raison d'une élévation de la température initiale en un point  $\xi$ . Ensuite, le champ de températures peut être calculé comme une intégrale d'une FG évaluée au moment initial de l'analyse sur l'ensemble du domaine. [30], [31]

La méthode des fonctions de Green sera exposée dans l'annexe A

### 3.3. Résolution de l'équation

#### 3.3.1. Détermination de la vitesse

Considérons l'équation gouvernante (2.9) :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\rho \partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Avec  $w(x, 0, t) = w(x, b, t) = 0.0 \quad \forall t \text{ et } \forall x$

$w(0, y, t) = w(a, y, t) = 0.0 \quad \forall t \text{ et } \forall y$

Et  $w(x, y, 0) = 0.0 ; \forall x \text{ et } \forall y.$

La résolution de cette équation avec de telles conditions initiales et aux limites par la méthode des fonctions de Green a été présenté par C. Fan et B.T. Chao (1965) [9].

Pour la géométrie de la figure Fig.2.1. et en se basant sur les résultats de C. Fan et B.T. Chao (1965), la fonction de Green pour la vitesse  $w$  peut être exprimée comme suit [32]:

$$G(x, y, t | \xi, \eta, \theta) = \frac{16}{\rho \pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\nu B_{mn} t) Z_{mn}}{(2m+1)(2n+1)} \quad (3.2)$$

avec :

$$B_{mn} = \frac{\pi^2 (2m+1)^2}{a^2} + \frac{\pi^2 (2n+1)^2}{b^2} \quad (3.3)$$

et :

$$Z_{mn} = \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{b}\right) \quad (3.4)$$

En utilisant la propriété (A.11), voir annexe A, on obtient :

$$w(x, y, t) = \int_{-\infty}^t G(x, y, t | \xi, \eta, t - \theta) \left(-\frac{dp}{dz}\right)(\theta) d\theta \quad (3.5)$$

$$w(x, y, t) = \frac{16}{\mu\pi^2} \left(-\frac{dp}{dz}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)} [1 - \exp(-vB_{mn}t)] Z_{mn}}{(2m+1)(2n+1)B_{mn}} \quad (3.6a)$$

$$\frac{w(x, y, t)}{\left(\frac{-1}{2\mu}\right) \left(\frac{dp}{dz}\right) a^2} = \frac{32}{a^2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)} [1 - \exp(-vB_{mn}t)] Z_{mn}}{(2m+1)(2n+1)B_{mn}} \quad (3.6b)$$

IL est bien clair de cette relation que si  $t$  tend vers l'infinie on aboutie à l'expression de la vitesse à l'état stationnaire :

$$w_{ss}(x, y) = \frac{16}{\mu\pi^2} \left(-\frac{dp}{dz}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)} Z_{mn}}{(2m+1)(2n+1)B_{mn}} \quad (3.7)$$

En se référant aux équations (3.3) et (3.4) et en posant :

$$\beta_{mn} = B_{mn} \cdot a^2 = \frac{\pi^2(2m+1)^2}{1} + \frac{\pi^2(2n+1)^2}{\alpha^2} \quad (3.8)$$

$$Z_{mn} = \sin\left(\frac{(2m+1)\pi X}{1}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi Y}{1}\right) \quad (3.9)$$

avec  $X$  et  $Y$  sont les variables réduites, on abouti à l'expression adimensionnelle de la vitesse :

$$W(X, Y, T) = \frac{32}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)} [1 - \exp(-\beta_{mn}T)] Z_{mn}}{(2m+1)(2n+1)\beta_{mn}} \quad (3.10)$$

**M. Emin Erdogan** [12], [13], [16-18] a procédé autrement, voir l'annexe B, et a trouvé une autre expression pour la vitesse. Après les transformations des coordonnées nécessaires pour adapter les expressions à notre configuration de la Fig : 2.1, on admet l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{w(x, y, t)}{\left(\frac{-1}{2\mu}\right) \left(\frac{dp}{dz}\right) a^2} &= \frac{w_{ss}(x, y)}{\left(\frac{-1}{2\mu}\right) \left(\frac{dp}{dz}\right) a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \exp[-(\gamma_m^2 + \theta_n^2)vt] \\ &\times \cos\left[\gamma_m\left(x - \frac{a}{2}\right)\right] \cos\left[\theta_n\left(y - \frac{b}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec  $w_{ss}(x, y)$  est la vitesse à l'état stationnaire qui doit être déterminée au préalable et qui peut avoir l'une des trois expressions suivantes [13]:

$$\frac{w_{ss}(x, y)}{\left(\frac{-1}{2\mu}\right) \left(\frac{dp}{dz}\right) a^2} = \frac{a^2}{4b^2} - \frac{(2y-b)^2}{4a^2} - \frac{8b^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\cosh\left(\theta_n \left(x - \frac{a}{2}\right)\right)}{\cosh\left(\theta_n \frac{a}{2}\right)} \times \cos\left(\theta_n \left(y - \frac{b}{2}\right)\right) \quad (3.12)$$

$$\frac{w_{ss}(x, y)}{\left(\frac{-1}{2\mu}\right) \left(\frac{dp}{dz}\right) a^2} = \frac{8b^2}{\pi^4 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[ 1 - \frac{\cosh\left(\gamma_n \left(y - \frac{b}{2}\right)\right)}{\cosh\left(\gamma_n \frac{b}{2}\right)} \right] \times \cos\left(\gamma_n \left(x - \frac{a}{2}\right)\right) \quad (3.13)$$

$$\frac{w_{ss}(x, y)}{\left(\frac{-1}{2\mu}\right) \left(\frac{dp}{dz}\right) a^2} = \frac{32b^2}{\pi^4 a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)^3 (2n+1)} \times \frac{\cos\left[\gamma_m \left(x - \frac{a}{2}\right)\right] \cos\left[\theta_n \left(y - \frac{b}{2}\right)\right]}{(2m+1)^2 / (2n+1)^2 + (b^2/a^2)} \quad (3.14)$$

avec :

$$\gamma_m = \frac{(2m+1)\pi}{a} \quad (3.15)$$

$$\theta_n = \frac{(2n+1)\pi}{b} \quad (3.16)$$

et :

$$A_{mn} = \frac{128 (-1)^{(m+n)}}{\pi^4 (2m+1)^3 (2n+1)} \frac{1}{(2m+1)^2 / (2n+1)^2 + (b^2/a^2)} \quad (3.17)$$

L'expression (3.17) est obtenue en utilisant l'expression (3.14) donnant la vitesse  $w_{ss}(x, y)$  à l'état stationnaire.

En remplaçant par les variables réduites, y compris  $b/a$  par  $\alpha$  dans  $A_{mn}$ , on obtient l'expression adimensionnelle de la vitesse suivante :

$$W = W_{ss} - \frac{\alpha^2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \exp[-4((2m+1)^2 + \{(2n+1)^2/\alpha^2\})T] \\ \times \cos \left[ g_m \left( X - \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left[ h_n \left( Y - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (3.18)$$

avec :

$$W_{ss} = \frac{32}{\pi^4} \alpha^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)}}{(2m+1)^3(2n+1)} \\ \times \frac{\cos \left[ g_m \left( X - \frac{1}{2} \right) \right] \cos \left[ h_n \left( Y - \frac{1}{2} \right) \right]}{(2m+1)^2/(2n+1)^2 + \alpha^2} \quad (3.19)$$

$$g_m = \gamma_m \cdot a \quad (3.20)$$

$$h_n = \theta_n \cdot b \quad (3.21)$$

### 3.3.2. Détermination du débit

Le débit volumique est donnée par la relation (1.13a) :

$$Q = \iint w \, dA = \int_0^b \int_0^a w \, dx \, dy \quad (3.22)$$

En remplaçant  $w$  par son expression (3.6) dans l'équation (3.22), on obtient

$$\frac{Q}{\left( -\frac{4ab^3}{3\mu} \right) \left( \frac{dp}{dz} \right)} = \frac{16b^2}{3\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)} [1 - \exp(-vB_{mn}t)]}{(2m+1)^2(2n+1)^2 B_{mn}} \quad (3.23)$$

et si on introduit l'expression (3.11) de  $w$  dans l'équation (3.22), on abouti à :

$$\begin{aligned} \frac{Q}{\left(-\frac{4ab^3}{3\mu}\right)\left(\frac{dp}{dz}\right)} &= \frac{48}{\pi^4} \frac{1}{a \cdot b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\gamma_m \theta_n} \sin\left(\frac{\gamma_m a}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_n b}{2}\right) \\ &\quad - \frac{3}{8} \frac{1}{a \cdot b} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_{pq}}{\gamma_p \theta_q} \exp[-(\gamma_p + \theta_q)vt] \\ &\quad \times \sin\left(\frac{\gamma_p a}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_q b}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

### 3.3.3. Détermination de la vitesse moyenne

On peut calculer la vitesse moyenne à laide de l'expression (1.13b) comme suit

$$w_{moy} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{a \cdot b}$$

$$w_{moy} = \left(-\frac{64}{9\mu}\right)\left(\frac{dp}{dz}\right) \frac{b^4}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)}[1 - \exp(-vB_{mn}t)] Z_{mn}}{(2m+1)(2n+1)B_{mn}} \quad (3.25)$$

$$\frac{w_{moy}}{\left(\frac{-1}{2\mu}\right)\left(\frac{dp}{dz}\right) a^2} = \frac{128}{9\pi^4} \frac{b^4}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)}[1 - \exp(-vB_{mn}t)] Z_{mn}}{(2m+1)(2n+1)B_{mn}} \quad (3.26)$$

ou bien

$$\begin{aligned} w_{moy} &= \left(-\frac{1}{2\mu}\right)\left(\frac{dp}{dz}\right) \frac{b}{a} \left\{ \left(-\frac{128}{\pi^4}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\gamma_m \cdot \theta_n} \sin\left(\frac{\gamma_m \cdot a}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_n \cdot b}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_{pq}}{\gamma_p \theta_q} \exp[-(\gamma_p + \theta_q)vt] \sin\left(\frac{\gamma_p a}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_q b}{2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\frac{w_{moy}}{\left(\frac{-1}{2\mu}\right)\left(\frac{dp}{dz}\right) a^2} = \frac{128}{\pi^4} \frac{b}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\gamma_m \theta_n} \sin\left(\frac{\gamma_m \cdot a}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_n b}{2}\right)$$

$$-\frac{b}{a^3} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{A_{pq}}{\gamma_p \theta_q} \exp[-(\gamma_p + \theta_q)vt] \sin\left(\frac{\gamma_p a}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_q b}{2}\right) \quad (3.28)$$

### 3.3.4. Détermination de la contrainte de cisaillement

La contrainte de cisaillement se calcule par les relations (1.14a) et (1.14b) :

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \mu \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{16}{\pi^2} \left(-\frac{dp}{dz}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)} [1 - \exp(-vB_{mn}t)]}{(2m+1)(2n+1)B_{mn}} \frac{\partial Z_{mn}}{\partial x} \\ \tau_{yz} &= \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{16}{\pi^2} \left(-\frac{dp}{dz}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)} [1 - \exp(-vB_{mn}t)]}{(2m+1)(2n+1)B_{mn}} \frac{\partial Z_{mn}}{\partial y} \\ \frac{\tau_{xz}}{\left(\frac{dp}{dz}\right) a} &= \frac{16}{\pi a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)} [1 - \exp(-vB_{mn}t)]}{(2n+1)B_{mn}} \times \\ &\quad \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{yz}}{\left(\frac{dp}{dz}\right) a} &= \frac{16}{\pi ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)} [1 - \exp(-vB_{mn}t)]}{(2m+1)B_{mn}} \times \\ &\quad \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Sur les parois ( $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ ), les contraintes seront :

$$\begin{aligned} &\frac{\tau_{(x=0)z}}{\left(-\frac{dp}{dz}\right) a} \\ &= -\frac{16}{\pi a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)} [1 - \exp(-vB_{mn}t)]}{(2n+1)B_{mn}} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_{(x=a)z}}{\left(-\frac{dp}{dz}\right)a} \\ &= \frac{16}{\pi a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)}[1 - \exp(-\nu B_{mn}t)]}{(2n+1)B_{mn}} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_{(y=0)z}}{\left(-\frac{dp}{dz}\right)a} \\ &= -\frac{16}{\pi ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)}[1 - \exp(-\nu B_{mn}t)]}{(2m+1)B_{mn}} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{a}\right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_{(y=b)z}}{\left(-\frac{dp}{dz}\right)a} \\ &= \frac{16}{\pi ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)}[1 - \exp(-\nu B_{mn}t)]}{(2m+1)B_{mn}} \sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{a}\right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Les contraintes en fonction des variables réduites peuvent s'écrire donc :

$$\begin{aligned} \tau_{XZ}^* &= \frac{16}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)}[1 - \exp(-\beta_{mn}T)]}{(2n+1)\beta_{mn}} \\ & \quad \times \cos((2m+1)\pi X) \sin((2n+1)\pi Y) \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \tau_{YZ}^* &= \frac{16}{\pi\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(m+n)}[1 - \exp(-\beta_{mn}T)]}{(2m+1)\beta_{mn}} \\ & \quad \times \sin((2m+1)\pi X) \cos((2n+1)\pi Y) \end{aligned} \quad (3.36)$$

### 3.3.5. Détermination du nombre de Poiseuille.

Dans notre cas, le coefficient de frottement  $f$  est donné par : [13]

$$f = \frac{|\oint \tau dl|(D_h/4)}{(1/2)\rho w_{moy}^2 A} \quad (3.37)$$

avec  $\tau$  est la contrainte de cisaillement et son intégrale le long du périmètre est donnée par l'expression suivante :

$$\oint \tau dl = 2 \int_0^b \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} dy + 2 \int_0^a \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} dx \quad (3.38)$$

$D_h$  représente le diamètre hydraulique de la conduite, il est donné par :

$$D_h = 4 A / Pr$$

avec :  $A$  c'est la section du tube

$Pr$  c'est le périmètre de la section.

Pour un tube rectangulaire de dimensions  $a \times b$ , on aura :

$$D_h = \frac{2 a \cdot b}{(a + b)}$$

Et comme  $\frac{D_h}{\rho w_{moy}^2 A}$  est positif, on peut écrire, donc :

$$f = \left| \frac{\oint \tau dl (D_h/4)}{(1/2)\rho w_{moy}^2 A} \right|$$

Le nombre de Poiseuille est donné par l'expression :  $Po = f \cdot Re$ , avec  $Re = \frac{\rho w_{moy} D_h}{\mu}$

ce qui conduit à l'expression finale :

$$Po = \left| \frac{2}{\pi^2 (1 + \alpha)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 (2m + 1)^2 - (2n + 1)^2 \right| \quad (3.39)$$

### 3.4. Expressions compactes

On remarque que les expressions exactes des différentes propriétés  $w$ ,  $Q$  et  $\tau$  sont sous forme de double séries infinies ce qui rend les calculs lors du design difficiles et longs. Pour remédier à ce problème, on fait recourt à des modèles simples et compacts qui permettent de

calculer aisément et rapidement les caractéristiques de l'écoulement (ou de la conduction) et avec des erreurs entre 2 et 6% de la valeur exacte. [15]

Ces modèles sont obtenus par l'application de l'analyse de l'ordre (de l'échelle) "scale analysis", voir annexe C, et l'analyse asymptotique "asymptotic analysis", voir annexe D, à l'équation gouvernante. [15][33]

Pour notre cas, on abouti aux deux modèles suivants :

$$\bar{W} = \left[ (T)^n + \left( \frac{A/Pr}{\mathcal{L} Po_{\mathcal{L}}} \right)^n \right]^{1/n} \quad (3.40)$$

$$\bar{\tau} = \left[ \left( \frac{2 Pr \mathcal{L}}{\sqrt{\pi} A} \sqrt{T} \right)^s + 1 \right]^{1/s} \quad (3.41)$$

où :  $\bar{W}$  est la vitesse moyenne adimensionnelle

$\bar{\tau}$  est la contrainte de cisaillement moyenne adimensionnelle

$T$  : le temps adimensionnel

$A$  : la section transversale du tube  $A = a.b$

$Pr$  : le périmètre de la section  $A$ ,  $Pr = 2(a+b)$

$\mathcal{L}$  : longueur caractéristique,  $\mathcal{L} = D_h$  ou  $\mathcal{L} = \sqrt{A}$

$n$  et  $s$  peuvent être calculer à l'aide de l'expression exacte pour un point donné ou pour plusieurs points avec la valeur la plus petite de l'erreur (RMS). [15]

# ***CHAPITRE IV***

## ***RESOLUTION NUMERIQUE***

# RESOLUTION NUMERIQUE

## 4.1 Introduction

Les méthodes basées sur l'approximation numérique sont devenues un outil largement utilisé dans la résolution des problèmes de la physique. Cela est dû au développement important que connaît le domaine informatique ces dernières décennies d'années. Un tel développement qui a rendu le calcul numérique plus rapide, plus précis et moins coûteux.

En mécanique de fluide, les méthodes numériques les plus connues sont :

- méthodes des différences finies ;
- méthodes des éléments finis ;
- méthodes des volumes finis ;
- méthodes spectrales.

Une petite comparaison entre ces quatre méthodes a fait que notre choix soit tombé sur la méthode des volumes finis. Cela est dû au fait de sa mise en œuvre relativement facile et à sa préservation du caractère conservatif des équations sur chaque volume de contrôle .

## 4.2. Méthode des volumes finis

La méthode a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar ( Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, [34]). C'est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. Son algorithme numérique comporte les étapes suivantes :

- La génération du maillage : le domaine d'analyse (de calcul) est divisé en petits volumes élémentaires finis ;
- L'intégration formelle des équations sur tous les volumes (finis) de contrôle ;

- La discrétisation des différentes équations régissant le phénomène considéré ;
- La résolution du système d'équations algébriques par l'utilisation d'une méthode itérative.

### 4.3. Maillage du domaine de calcul

Dans la méthode des volumes finis, la zone d'intégration est divisée en un certain nombre de volumes élémentaires (voir Figure 4.1). Il faut bien distinguer les indices en lettres majuscules qui désignent des grandeurs attachées au point situé au centre du volume et les indices en lettres minuscules qui désignent les grandeurs attachées aux faces des volumes.

Si nous appelons P le nœud considéré alors les points qui lui sont adjacents sont dénommés :

East (E), West (W), North (N), et South (S) pour des écoulements bidimensionnels.

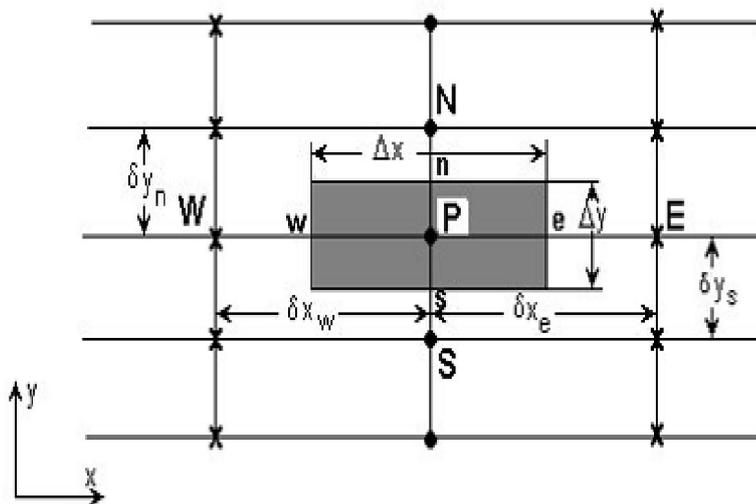


Fig. 4.1 : Volume de contrôle typique. [35]

Pour notre cas, on divise le rectangle ( $a \times b$ ) en «  $(n-1) \cdot (m-1)$  » rectangles élémentaires. On abouti à ce maillage implicitement en divisant les grandeurs 'a' et 'b' en  $(n-1)$  et  $(m-1)$  tronçons respectivement, c'est-à-dire, en considérant  $n$  et  $m$  points (nœuds) le long des les grandeurs 'a' et 'b' respectivement. Le nombre de nœuds, qui sera choisi ultérieurement, du maillage résultant est de  $(n \cdot m)$  nœuds,

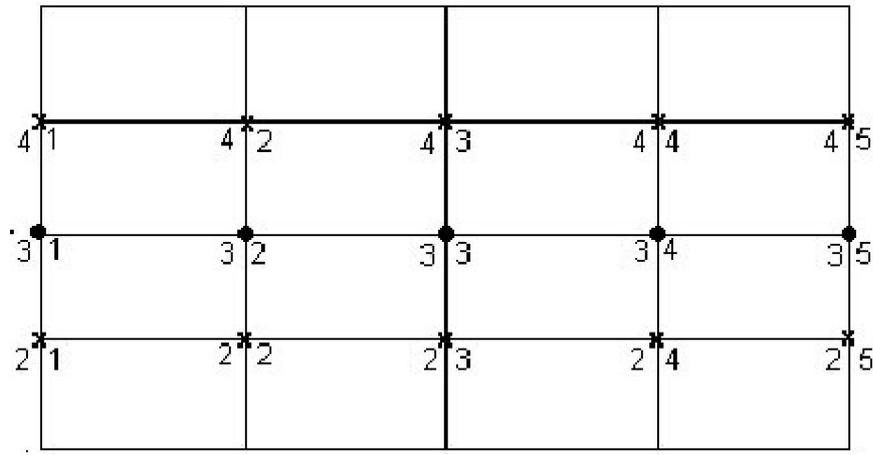


Fig. 4.2 : Maillage choisi

#### 4.6. Discrétisation de l'équation en volume finis

Soit à discrétiser l'équation qui régit notre problème sous sa forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial W}{\partial T} = 1 + \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}$$

On intégrant sur un volume de contrôle typique (voir Figure 4.2) ; on obtient :

$$\int_T^{T+\Delta T} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial W}{\partial T} dX dY dT = \int_T^{T+\Delta T} \int_s^n \int_w^e 1. dX dY dT + \int_T^{T+\Delta T} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} dX dY dT + \frac{1}{\alpha^2} \int_T^{T+\Delta T} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} dX dY dT \quad (II)$$

On évaluant chaque terme séparément, on obtient :

$$\int_T^{T+\Delta T} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial W}{\partial T} dX dY dT = (W_P - W_p^0) \Delta X \Delta Y$$

$$\int_T^{T+\Delta T} \int_s^n \int_w^e 1. dX dY dT = \Delta X \Delta Y \Delta T$$

$$\int_T^{T+\Delta T} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} dX dY dT = \left[ \left( \frac{W_E - W_P}{\delta X_e} \right) - \left( \frac{W_P - W_W}{\delta X_w} \right) \right] \Delta Y \Delta T$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \int_T^{T+\Delta T} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} dX dY dT = \left[ \left( \frac{W_E - W_P}{\delta Y_n} \right) - \left( \frac{W_E - W_P}{\delta Y_s} \right) \right] \frac{\Delta X \Delta T}{\alpha^2}$$

avec  $W_p$  et  $W_p^0$  sont les vitesses au point P aux temps  $T+\Delta T$  et  $T$  respectivement.

En remplaçant dans l'équation (II) on abouti à :

$$\begin{aligned} (W_P - W_p^0) \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta T} &= \Delta X \Delta Y + \left[ \left( \frac{W_E - W_P}{\delta X_e} \right) - \left( \frac{W_P - W_W}{\delta X_w} \right) \right] \Delta Y \\ &+ \left[ \left( \frac{W_E - W_P}{\delta Y_n} \right) - \left( \frac{W_E - W_P}{\delta Y_s} \right) \right] \frac{\Delta X}{\alpha^2} \end{aligned} \quad (III)$$

Dans notre cas (maillage uniforme) :  $\delta X_e = \delta X_w = \Delta X$  et  $\delta Y_n = \delta Y_s = \Delta Y$  et si on pose :

$$a_p^0 = \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta T}$$

$$a_E = a_W = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

$$a_N = a_S = \frac{\Delta X}{\alpha^2 \Delta Y}$$

$$a_p = a_p^0 + a_E + a_W + a_N + a_S$$

$$s = \Delta X \Delta Y$$

on aura :

$$a_P W_P = a_E W_E + a_W W_W + a_N W_N + a_S W_S + a_P^0 W_P^0 + s \quad (\text{IV})$$

En appliquant le schéma (IV) pour chaque nœud, on abouti à un système d'équations algébrique de la forme

$$[A][W] = [S]$$

avec :  $[A]$  est une matrice tri diagonale.

$[W]$  vecteur colonne des vitesses, inconnu.

$[S]$  vecteur colonne des termes source.

#### 4.7. Méthode de résolution du système d'équations

D'une manière générale, le succès de la simulation dépend fortement de la méthode de résolution des systèmes d'équations algébriques obtenues après discrétisations des équations différentielles. Pour cela on a opté pour un outil de résolution très performant pour notre cas. [34-36]

L'outil est un assemblage de deux techniques différentes et complémentaires :

- La technique **TDMA** (Tri Diagonal Matrix Algorithm) ou algorithme de **Thomas**.
- La technique de balayage rangée par rangée (ligne par ligne).

Nous commençons par balayer le domaine de calcul ligne par ligne, c'est à dire dans la direction  $X$ , ( $x$  sweep ). Pour chaque ligne, nous appliquons la technique TDMA pour déterminer le champ de la variable considérée ( $W$ ) sur toute la ligne en question. Nous effectuons ensuite les mêmes étapes mais cette fois dans la direction  $Y$  ( $y$  sweep ). Ainsi une itération a été réalisée, nous procédons à un test de convergence. Si le critère de convergence est satisfait le champ est déterminé , sinon nous recommençons les calculs au début avec le balayage suivant la direction choisie initialement.

Ce double balayage est destiné à accroître la stabilité et la convergence du système. Le principe de cette méthode est de corriger petit à petit les valeurs estimées du champ  $W$  dans

chaque itération jusqu'à obtenir des solutions du problème à une certaine valeur de résidu près, définie antérieurement par le critère de convergence.

#### 4.8. Critère de convergence

On dit qu'une procédure a convergé lorsque les itérations ne produisent plus de changements significatifs sur les variables selon un critère bien défini. Ce dernier est donc utilisé pour stopper le processus itératif lorsqu'il est satisfait.

Le critère de convergence utilisé dans ce travail repose sur le résidu de l'équation de transport, comme suit :

$$R_w = \sum_{\text{mailles}} (a_E W_E + a_W W_W + a_N W_N + a_S W_S + s - a_P W_P)$$

Pour toutes les variables, les résidus sont normalisés par  $F_w$  (masses entrantes, la somme de la quantité de mouvement à l'entrée). Il est alors attendu que ces grandeurs soient inférieures à un critère de convergence prédéfini par :

$$\frac{\sum |R_w|}{F_w} \leq \textit{epsilon}$$

Dans notre étude, nous avons choisi epsilon de l'ordre de  $10^{-6}$ .

# ***CHAPITRE V***

## ***RESULTATS ET DISCUSSIONS***

## RESULTATS ET DISCUSSIONS

### 5.1. Introduction

Nos calculs numériques ont été accomplies grâce aux exécutions faites par des codes de calcul sur un micro ordinateur personnel Dual Core de fréquence 2,00 \* 2,00 GHz, et de capacité de mémoire égale à 1 Go. Dans ce chapitre nous présentons tous les résultats analytiques et numériques obtenus concernant l'étude de l'écoulement d'un fluide Newtonien dans un canal horizontal à section transversale rectangulaire.

### 5.2. Choix du maillage

Avant de passer aux calculs numériques de notre étude, l'influence du maillage sur la solution numérique a été examinée.

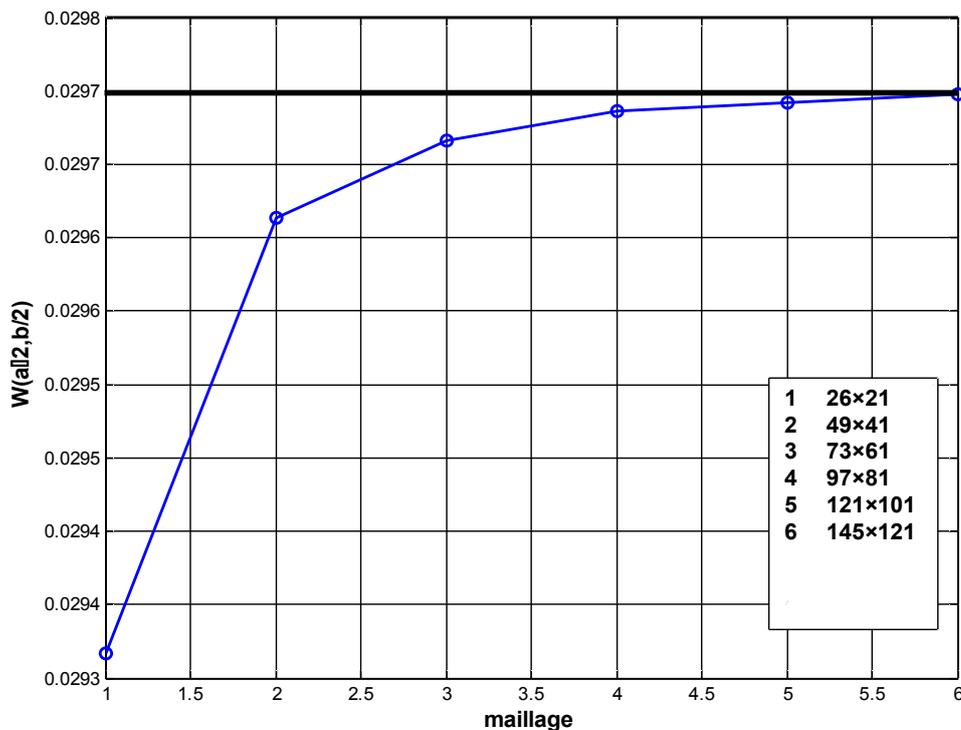
Nous avons testé la dépendance de la solution par rapport au maillage en considérant le rapport géométrique  $\alpha = b/a = 1$ . Nous avons calculé la vitesse au centre de la section transversale  $W(1/2, 1/2)$  pour plusieurs maillages et nous avons obtenu les résultats représentés dans le tableau Tab. 5.1.

nombre de nœuds	26 × 21	49 × 41	73 × 61	97 × 81	121 × 101	145 × 121
$W\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	2.9367E-2	2.9664E-2	2.9716E-2	2.9736E-2	2.9742E-2	2.9748E-2

**Tab. 5.1 :** Vitesse au centre de la section transversale  $W(1/2, 1/2)$  pour les différents maillages.

Les résultats obtenus par ces différents maillages sont très proches, cependant, le maillage  $141 \times 121$  donne un résultat très précis mais nécessite un temps d'exécution du programme de calcul élevé par rapport aux autres maillages. Nous avons constaté, qu'entre les maillages de  $(141 \times 121)$  et  $(121 \times 101)$ , un écart maximum de l'ordre de 0.02 % entre les valeurs de  $W(1/2, 1/2)$ . Ceci est confirmé d'une manière qualitative par le graphe de la figure Fig.5.1.

Finalement, notre choix a été définitivement orienté vers le maillage  $121 \times 101$ .

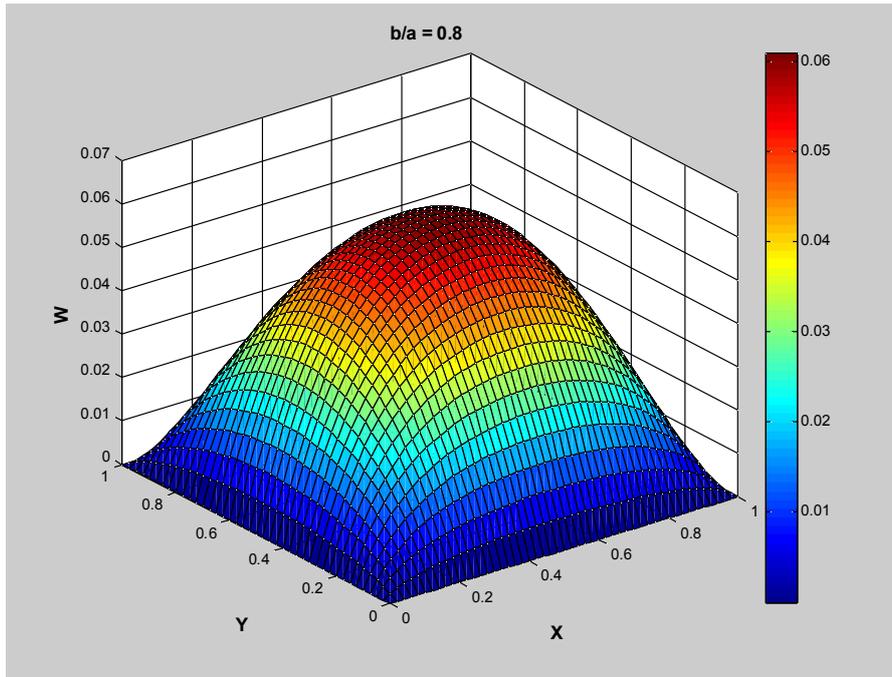


**Fig.5.1 :** Vitesse au centre de la section transversale  $W(1/2, 1/2)$  en fonction des différents maillages.

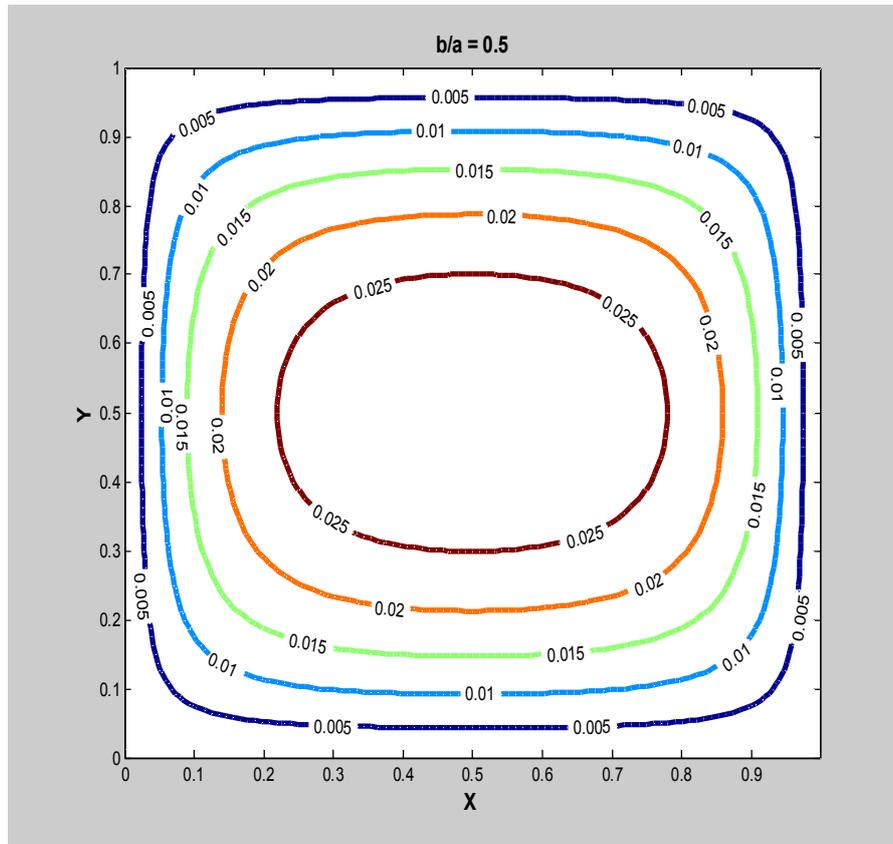
### 5.3. Résultats et discussions

#### 5.3.1. La vitesse

Les profils des vitesses évaluées analytiquement et numériquement en fonction de X et de Y sont représentés dans le graphe de la figure Fig.5.2 et les contours des vitesses dans celui de la figure Fig.5.3.

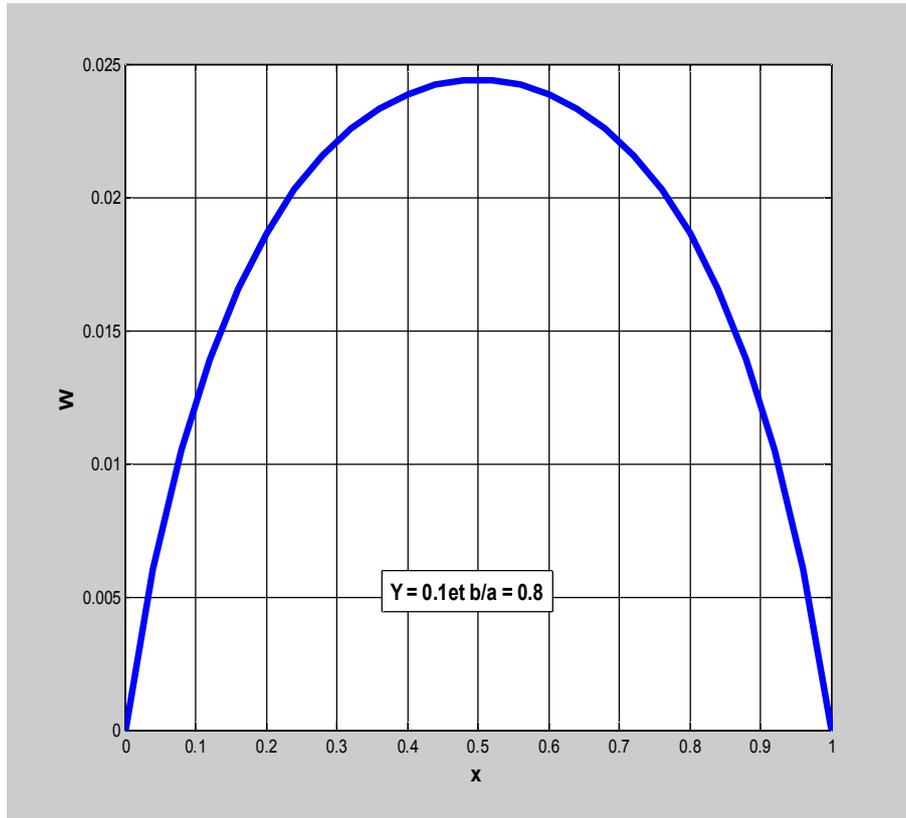


**Fig.5.2 :** Profils des vitesses évalués analytiquement ou numériquement en fonction de  $X$  et de  $Y$



**Fig5.3 :** Contours des vitesses

Si on effectue une coupe selon un plan  $Y = \text{constante}$ , on obtient le graphe de la figure Fig.5.4.



**Fig.5.4 :** Profil des vitesses en fonction de  $X$  dans un plan  $Y = 0.1$  et pour  $\alpha = 0.8$ .

Il est à noter que l'allure des profils des vitesses est la même que ce soit pour celles obtenues analytiquement ou numériquement, sauf qu'il y a de légères différences en leurs valeurs numériques.

Les figures Fig.5.5.a et Fig.5.5.b montrent une légère différence entre les profils des vitesses obtenues analytiquement, par l'expression (3.10) de C.Fan et B.T.Chao et l'expression (3.18) de M.E. Erdogan, et de celles obtenues numériquement.

La différence qui existe entre les graphes obtenus par les deux expressions analytiques est peut être due au fait que ces dernières sont sous forme de double séries infinies ce qui exige de valeurs très élevées de  $n$  et  $m$  pour approcher plus de la valeur exacte et cela demande un temps de calcul énorme.

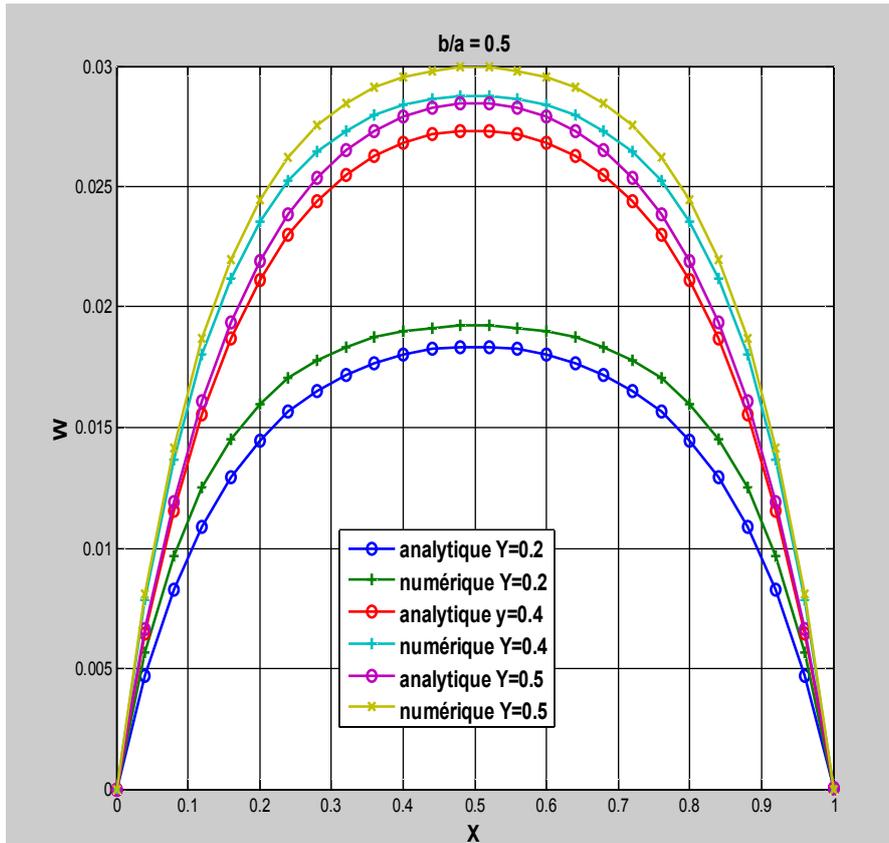


Fig.5.5.a : Comparaison entre les résultats (vitesse) analytiques et les résultats numériques.

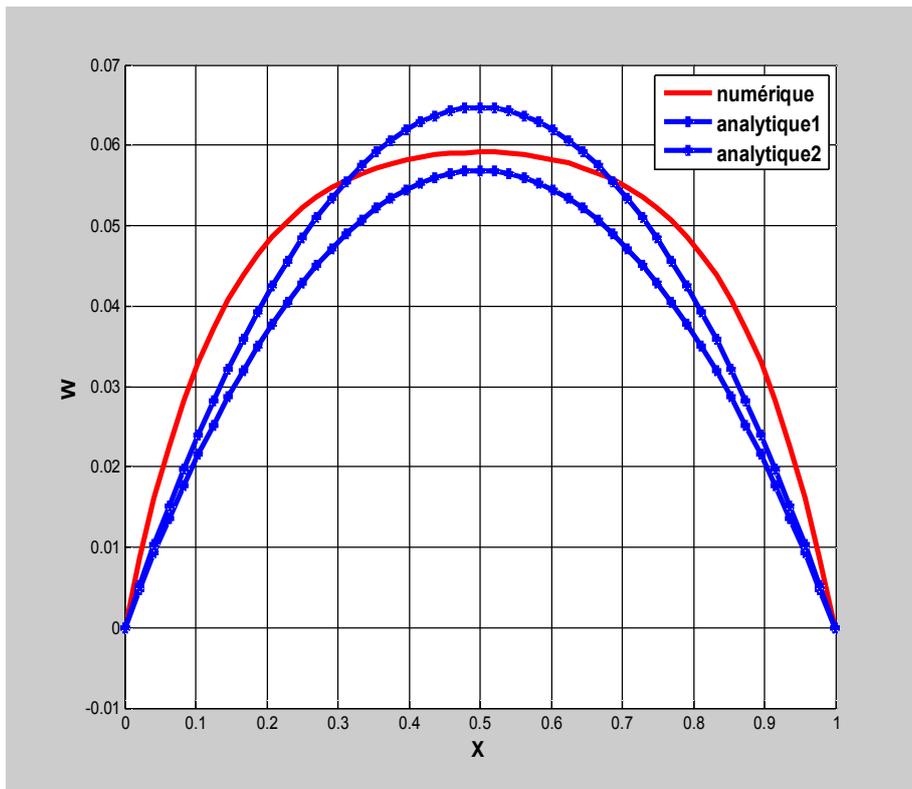


Fig.5.5.b : Comparaison entre la vitesse calculée par les deux expressions analytiques et la vitesse calculée numériquement dans le plan  $Y=0.4$ .

La figure Fig.5.6 montre que plus que le rapport géométrique  $\alpha = b/a$  est grand plus la vitesse augmente rapidement.

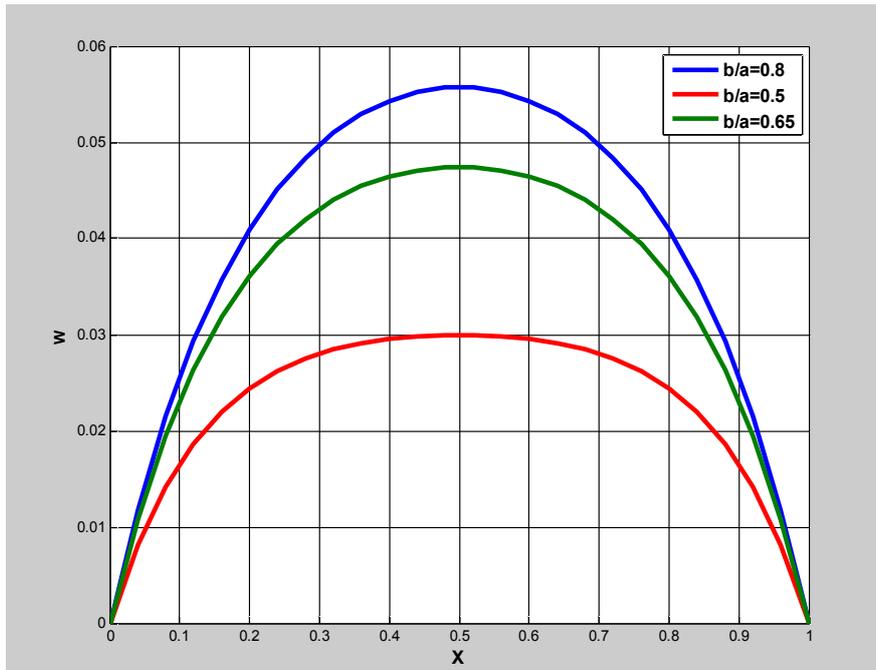


Fig.5.6 : Influence de  $\alpha$  sur le profil des vitesses,  $Y=0.5$

Inversement à l'effet de  $\alpha$ , au fur et à mesure que le nombre de Poiseuille  $Po$  augmente, la vitesse diminue, comme le montre la figure Fig.5.7.

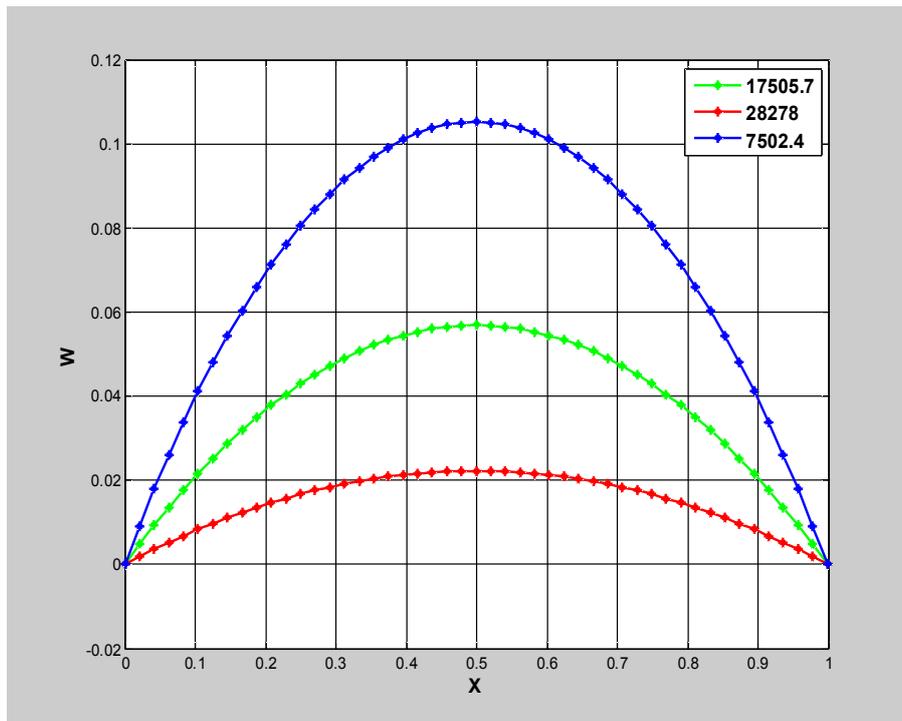
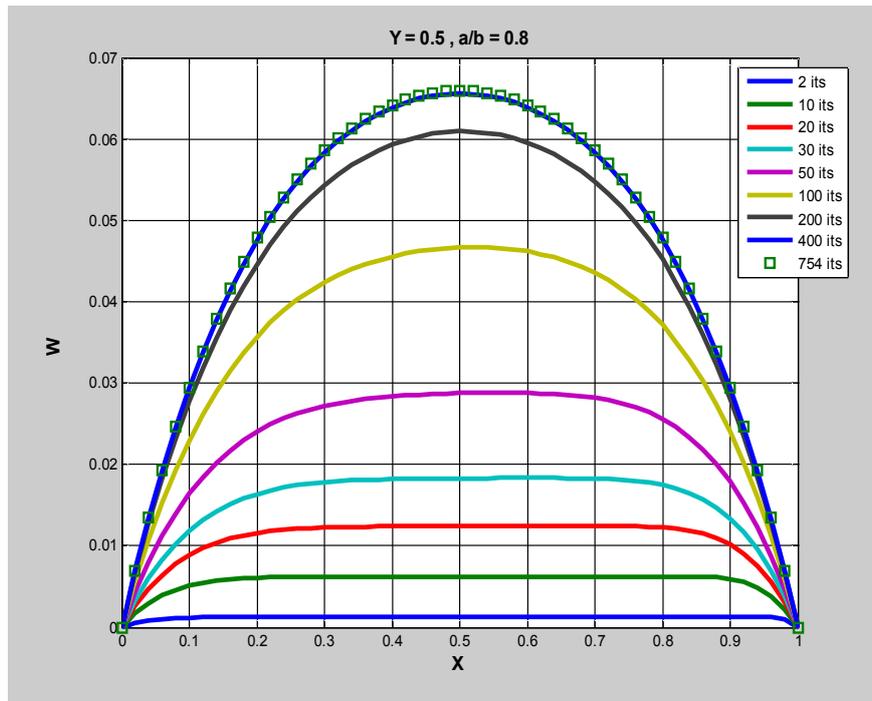


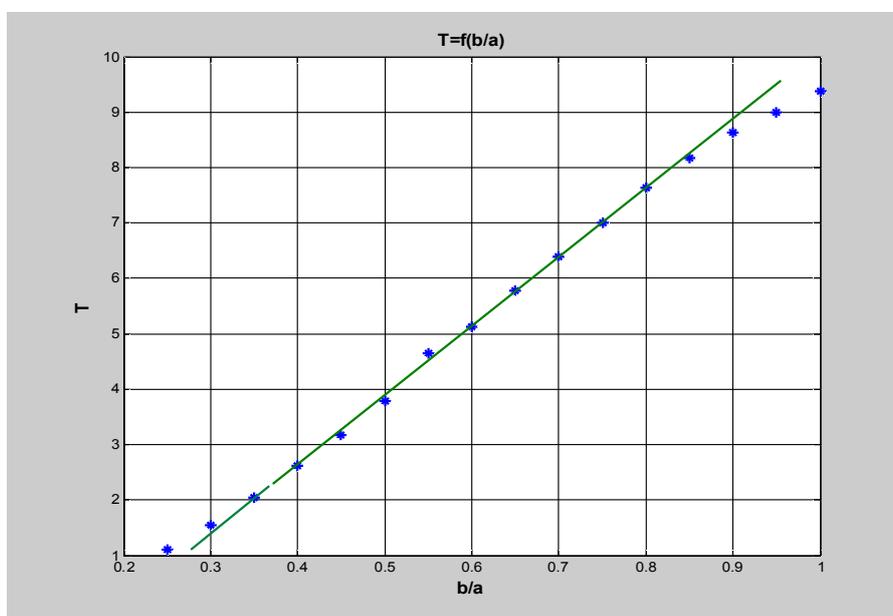
Fig.5.7 : Effet du nombre de Poiseuille sur le profil des vitesses,  $Y=0.5$



**Fig.5.8 :** Evolution du profil des vitesses en fonction du temps.

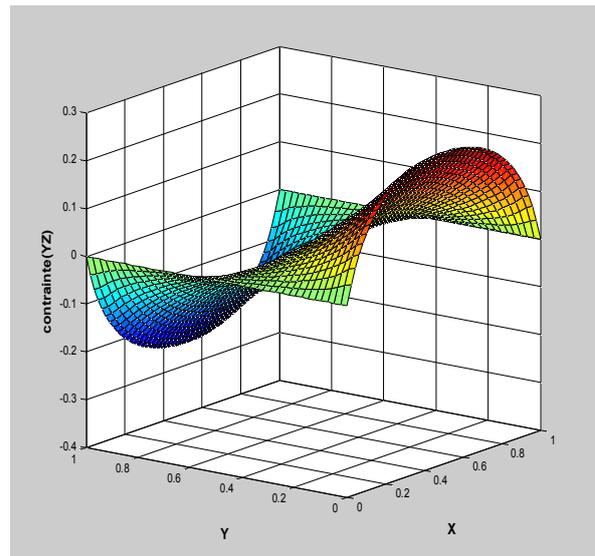
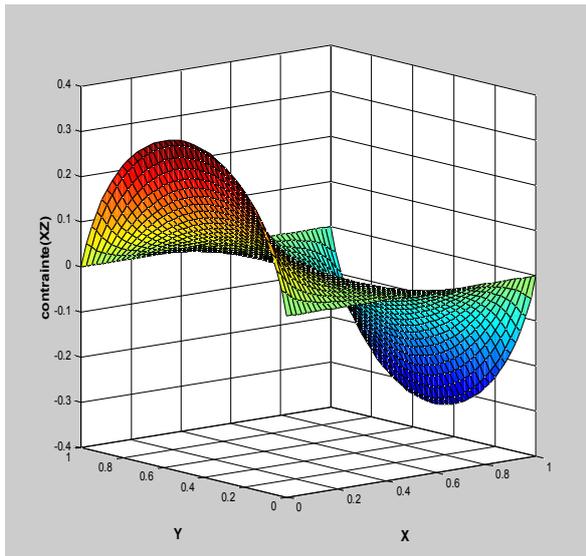
La figure Fig.5.8. montre le développement du profil des vitesses dans le temps, et après un certain temps, temps d'établissement de l'écoulement, le profil cesse de changer : l'écoulement c'est devenu stationnaire.

Dans la figure Fig.5.9, on voit clairement que l'allure de la courbe du temps d'établissement de l'écoulement  $T$  en fonction du rapport géométrique  $\alpha = b/a$  est presque une droite, d'où l'importance de ce facteur dans l'évolution de ce genre d'écoulement.



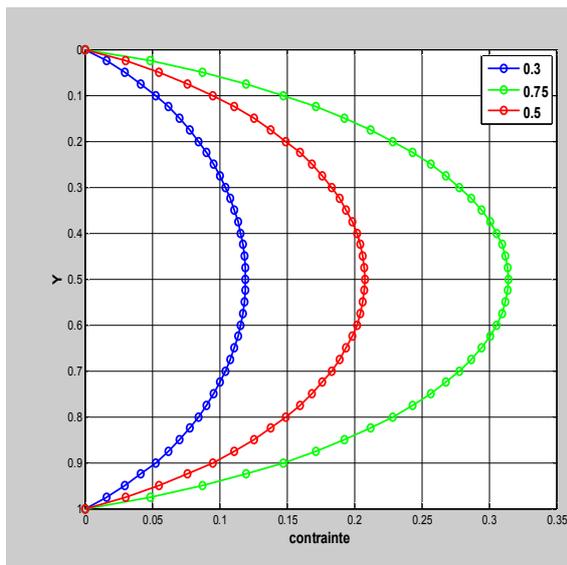
**Fig.5.9 :** Effet de  $\alpha$  sur le temps d'établissement de l'écoulement

### 5.3.2. La contrainte de cisaillement.

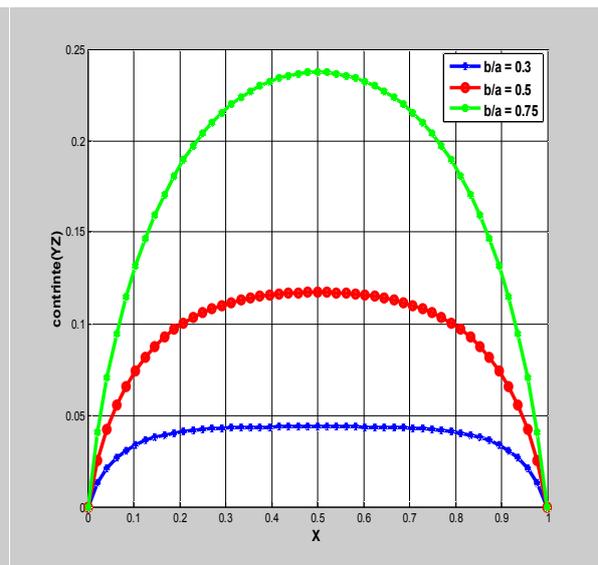


**Fig.5.10:** La contrainte  $\tau_{XZ}$  au sein du fluide **Fig.5.11:** La contrainte  $\tau_{YZ}$  au sein du fluide

La variation de la contrainte de cisaillement au sein du fluide est présentée sur les figures Fig.5.9 et Fig.5.10. La contrainte est importante sur les parois cela est dû aux particules du fluide collées sur les parois et jouent un rôle de freinage de l'écoulement.



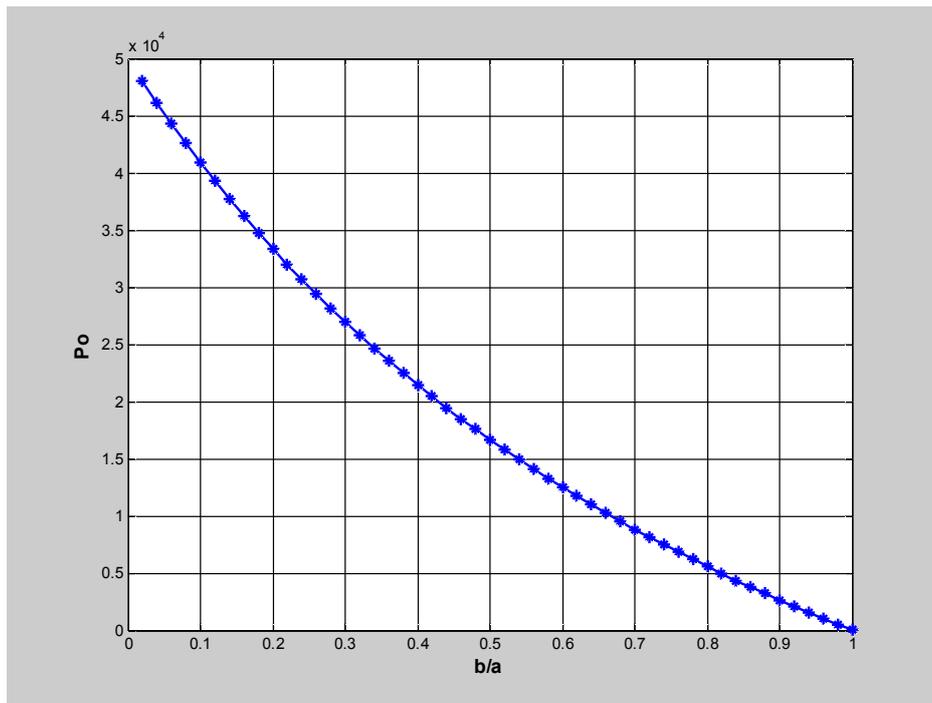
**Fig.5.12 :** Effet de  $\alpha$  sur la contrainte  $\tau_{XZ}$  à la paroi



**Fig.5.13 :** Effet de  $\alpha$  sur la contrainte  $\tau_{YZ}$  à la paroi

Les figures Fig.5.12. et Fig.5.12. montrent l'évolution de la contrainte aux parois quand la valeur du rapport géométrique  $\alpha = b/a$  augmente.

### 5.3.3. Nombre de Poiseuille



**Fig.5.14 :** *Diminution du nombre de Poiseuille en fonction de  $\alpha$*

La figure Fig.5.14. montre comment que le nombre de Poiseuille  $Po$  diminue quand la valeur du rapport géométrique  $\alpha = b/a$  augmente.

# ***CONCLUSION***

## CONCLUSION GENERALE

- Dans notre étude, nous avons touché un problème de mécanique de fluide et plus précisément les écoulements visqueux instationnaires.
- L'approche analytique nous a permis d'approfondir nos connaissances mathématiques et nous a fait découvrir qu'il reste beaucoup à faire par les chercheurs dans ce volet pour servir et mieux comprendre la mécanique de fluide.
- L'approche numérique nous a fourni une bonne initiation à la méthode des volumes finis qui est l'un des outils performants et beaucoup utilisés pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles rencontrées en physique.
- Une concordance acceptable entre les résultats analytiques et les résultats numériques, ce qui reflète la précision de la discrétisation en volumes finis.
- Les résultats obtenus reflètent le sens physique des écoulements visqueux : la vitesse des particules fluides est nulle sur les parois et augmente en s'éloignant de ces dernières pour atteindre son maximum au milieu du tube.
- Durant notre travail, on a pu constater l'influence de certains paramètres (facteur de forme, nombre de poiseuille) sur l'écoulement.
- L'étude peut être approfondie et élargie pour mieux s'approcher des écoulements réels. Pour cela, certains paramètres peuvent être pris en considération, la turbulence, fluides non Newtoniens, gradients de pression non constants, ...
- Le volet des micro-canaux est important, fertile, récent et mérite d'être exploré.

# REFERENCES

## REFERENCES

- [1] **S.P. Suter** et **R. Skalak**, *The History of Poiseuille's Law*. Ann. Rev. Fluid Mech. 25, p. 1-19, 1993.
- [2] **G. G. Stokes**, *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*. Cambridge Philosophical Society Transactions, IX: 8-106, 1851.
- [3] **E. Hagenbach**, *Über die Bestimmung der Zähigkeit einer Flüssigkeit durch den Ausfluss aus Röhren (Sur la détermination de la résistance d'un liquide par la décharge de la canalisation)*. Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie 108: 385–426, 1860.
- [4] **H. Lamb**, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press 6th ed. 1932 (1st published 1879)
- [5] **E.G. Richardson** et **E. Tyler**, *The transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established*, The Proceedings of the Physical Society 42/1 ,No 231, 1-15, 1929.
- [6] **G.Szymanski**, *Quelques solutions exactes des équations d'hydrodynamique du fluide visqueux dans le cas d'un tube cylindrique*, Journal de mathématiques pures et appliquées 9<sup>e</sup> série, tome 11 p. 67-108, 1932.
- [7] **R. J. Womersley**, *Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known*. J. Physiol-London, Vol. 127, p. 553–563, 1955.
- [8] **S. Uchida**, *The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion of incompressible fluid in a circular pipe*. ZAMP Vol. 7, p. 403–422, 1956.
- [9] **C. Fan** et **B..T. Chao**, *Unsteady, laminar, incompressible flow through rectangular ducts*. ZAMP 16:351–60, 1965.

- [10] **A. N. Darus**, *Streamlike Function Formulation of Entry Flow*, Jurnal Mekanikal, Jilid II, 2000
- [11] **J. Majdalani** et **H. A. Chibllial**, *Pulsatory channel flows with arbitrary pressure gradients*. 3<sup>rd</sup> AIAA theoretical fluid mechanics meeting 24-26 juin 2002 St. Louis, MO
- [12] **M. E. Erdoğan**, *On the unsteady unidirectional flows generated by impulsive motion of a boundary or sudden application of a pressure gradient*, Int. J. Non-Linear. Mech, Vol. 37, p. 1091 – 1106, 2002.
- [13] **M. E. Erdoğan**, *On the flows produced by sudden application of a constant pressure gradient or by impulsive motion of a boundary*, Int. J. Non-Linear Mech., Vol. 38, p. 781 - 797, 2003.
- [14] **Y.S. Muzychka** et **M.M. Yovanovich**, *Laminar flow friction and heat transfer in non-circular ducts—Part I. Hydrodynamic problem*, in: G.P. Celata, B. Thonon, A. Bontemps, S. Kandlikar (Eds.), Compact Heat Exchangers—A Festschrift on the 60th Birthday of Ramesh K. Shah, Edi-zioni ETS, p. 123–130, 2002
- [15] **Y.S. Muzychka** et **M.M. Yovanovich**, *Compact models for transient conduction or viscous transport in non-circular geometries with a uniform source*, Int. J. Thermal Sciences, Vol. 45, p. 1091–1102, doi:10.1016 , 2006.
- [16] **M. E. Erdoğan** et **C. E. Imrak**, *On the unsteady flows generated by impulsive motion of boundary*, Mathematical and Computational Applications, vol. 9, no. 2, pp. 265–274, 2004.
- [17] **M. E. Erdoğan** et **C. E. Imrak**, *Effect of the side walls on the unsteady flow in A duct of rectangular cross-section*, Mathematical and Computational Applications, vol. 9, no. 3, p. 443–448, 2004.
- [18] **M. E. Erdoğan** et **C. E. İmrak**, *Some Effects of Side Walls on Unsteady Flow of a Viscous Fluid over a Plane Wall*, *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2009, Article ID 725196, doi:10.1155/2009/725196, 2009.
- [19] **Yu-Tang Chen**, **Shung-Wen Kang**, **Wen-Chian Tuh** et **Tsung-Hsin Hsiao**, *Experimental Investigation of Fluid Flow and Heat Transfer in Micro-channels*, Tamkang Journal of Science and Engineering, Vol. 7, No. 1, pp. 11–16, 2004.

- [20] **R. Hadj Ali , A.Ghezal , Z. Ouchiha , J. C. Loraud**, *Etude Analytique et Numérique d'un Ecoulement Pulsé autour d'un Cylindre Horizontal*, 18ème Congrès Français de Mécanique (Grenoble 2007), AFM, Maison de la Mécanique.
- [21] **A.S.R. Duartea, A.I.P. Mirandab et P.J. Oliveira**, *Numerical and analytical modeling of unsteady viscoelastic flows: The start-up and pulsating test case problems*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. Vol. 154, p. 153–169, (2008)
- [22] **A. Tamayol et M. Bahrami** *Laminar Flow in Microchannels With Noncircular Cross Section*. J. Fluids Eng. Vol. 132, Issue 11, 111201, 2010.
- [23] **H. Schlichting**, *Boundary Layer Theory*. 7<sup>th</sup> edition. McGraw-Hill, New York, NY, 1979.
- [24] **F.M. White**, *Viscous Fluid Flow*. 2<sup>nd</sup> edition. McGraw-Hill, New York, NY, 1991
- [25] **G.K. Batchelor**, *Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1970
- [26] **F. M. White**, *Fluid Mechanics*. 4<sup>th</sup> edition. WCB McGraw-Hill, New York, NY, 1998
- [27] **M. ANDUZE**, *Etude expérimentale et numérique de microécoulements liquides dans les microsystèmes fluidiques*, Thèse, I.N.S.A. Toulouse, France,2000.
- [28] **C. BARROT LATTES**, *Développement de Méthodes Expérimentales pour l'Analyse des Ecoulements de Liquides dans les Micro canaux*, Thèse, I.N.S.A. Toulouse, France,2007.
- [29] **H. BELGHAZI**, *Modélisation analytique du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait et soumis à une source de chaleur en mouvement*, Thèse, Univ. Limoges, France, 2008.
- [30] **D. G. Duffy**, *Green's Functions with Applications*, Chapman & Hall/CRC, 2001
- [31] **K. F. Riley, M. P. Hobson et S. J. Bence**, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, 3<sup>rd</sup> edition, Cambridge University Press, 2006.
- [32] **X. G. Qi, D. M. Scott et D. I. Wilson**, *Modelling laminar pulsed flow in rectangular microchannels*, Chemical Engineering Science. Vol. 63 ,p. 2682 – 2689, 2008
- [33] **M. M. Yovanovich**, *Asymptotes and Asymptotic Analysis for Development of Compact Models for Microelectronics Cooling*, { Keynote Address, Semi-therm 2003, San Jose, CA, March 2003. }

- [34] **S.V. Patankar**, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, New York, 1980
- [35] **I. POPA**, *Modélisation numérique du transfert thermique, méthode des volumes finis*, Universitaria, Craiova, 2002.
- [36] **H. K. Versteeg, W. Malalasekera**, *An introduction to computational fluid dynamics, the finite volume method*, Prentice Hall, 1995.
- [37] **A. Grine, J.Y. Desmons et S. Harmand**, *Modélisation analytique de la convection transitoire sur plaque plane*, Ile des Embiez, 492-500, SFT 2007.
- [38] **A. Grine, J.Y. Desmons et S. Harmand**, *Models for transient conduction in a flat plate subjected to a variable heat flux*, Applied Thermal Engineering. Vol. 27, p 492–500, 2007.

# ***ANNEXES***

## Annexe A

# Résolution des équations différentielles par la méthode des fonctions de Green

### I. Introduction.[30,31], [37,38]

La méthode des fonctions de Green (FGs) est une technique importante pour résoudre les problèmes des conditions aux limites et des conditions initiales. On peut dire qu'elle est une fonction « *cause-effet* ». Pour l'équation de la chaleur, la FG peut être considérée comme une réponse de la température en un point  $x$  au temps  $t$  causée par une production de chaleur instantanée survenant en un point  $\xi$  au temps  $\theta$ . Ainsi, afin d'obtenir la réponse de la température dans le temps, il suffit d'intégrer une FG sur tout le volume et dans le temps aussi loin que la chaleur est produite.

Il est important de noter que le principe de réciprocité est valable pour les FGs (à savoir les points, la source et le champ peuvent être échangés).

Les GFs peuvent être dérivées en utilisant différentes méthodes, telles que la méthode des images, la méthode des fonctions propres, la transformée de Laplace ou la méthode de séparation des variables de Fourier.

Toutes ces méthodes donnent des solutions sous différentes formes mais mathématiquement équivalentes.

Du point de vue calcul, la principale différence entre toutes ces méthodes est la vitesse de convergence des séries. En général, les deux premières méthodes convergent rapidement pour de petites valeurs de temps alors que la méthode de Fourier produit des séries, qui sont mieux convergentes pour les grandes valeurs de temps.

## II. Rappel de quelques notions mathématiques.

Avant de développer la méthode de résolution par les fonctions de Green, nous allons introduire quelques notions qui nous seront utiles au cours de la résolution.

### II.1. Fonction de Heaviside. [29,38]

La fonction de Heaviside est une fonction définie par **Oliver Heaviside** (1850-1925) comme suit :

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

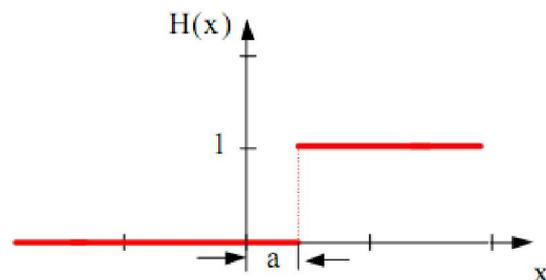


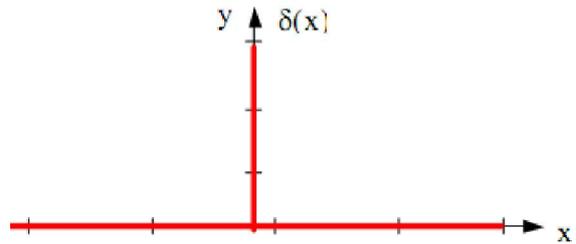
Fig. A.1 : Fonction de Heaviside.

Il est clair que cette fonction est discontinue pour  $t = 0$ , couramment on prend  $H(0) = 1/2$ .

### II.2. Fonction Delta de Dirac [29,30]

Au cours de l'élaboration de ses travaux en mécanique quantique, le physicien **Paul Adrien Maurice Dirac** (1902-1984) a introduit une fonction qui a pris son nom, il l'a définie comme suit :

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$



**Fig .A.2 :** *Fonction Delta de Dirac.*

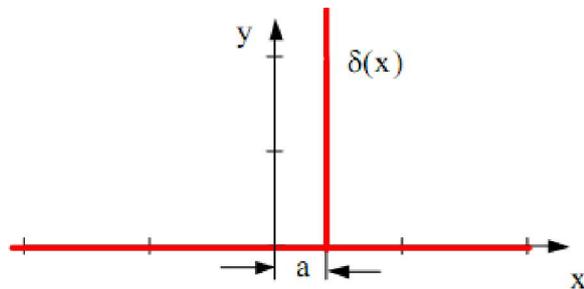
de sorte que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (\text{A.3})$$

ou sous forme générale :

$$\delta(t - a) = \begin{cases} \infty, & t = a \\ 0, & t \neq a \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) dt = 1 \quad (\text{A.5})$$



**Fig. A.3 :** *Fonction Delta de Dirac, forme générale.*

IL est clair qu'aucune fonction conventionnelle ne peut être trouvée satisfaisante ces propriétés. Par conséquent, on peut écrire

$$\delta(t) = \frac{dH(t)}{dx} \quad (\text{A.6})$$

mais la difficulté qui apparait ici c'est que la dérivé n'est pas définie pour  $t = 0$ . C'est pour cela que certains auteurs préfèrent la définir par sa propriété de *tamissage* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a) f(t) dt = f(a) \quad (\text{A.7})$$

Cette propriété a eu son nom parce que  $\delta(t - a)$  agit comme un tamis, en sélectionnant parmi toutes les valeurs possibles de  $f(t)$  sa valeur au point  $t = a$ . Malheureusement, il n'existe aucune fonction conventionnelle  $\delta(t - a)$  avec cette propriété.

### II.3. Fonctions de Green [30]

On appelle fonction de Green en physique ce que les mathématiciens appellent *solution élémentaire* d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants :

$$\mathbf{D} G(t, \theta) = \delta(t - \theta) \quad (\text{A.8})$$

avec  $\mathbf{D}$  : un opérateur différentiel linéaire d'ordre  $m$  à coefficients  $a_i$  constants :

$$\mathbf{D} = \sum_{i=0}^m a_i D^i \quad (\text{A.9})$$

Si la fonction de Green  $G(t, \theta)$  est connue, alors la solution  $\varphi(t)$  de l'équation :

$$\mathbf{D} \phi(t) = \varphi(t) \quad (\text{A.10})$$

s'écrit simplement sous la forme d'un *produit de convolution* :

$$\phi(t) = (G * \varphi)(t) = \int G(t, \theta) \varphi(\theta) d\theta \quad (\text{A.11})$$

En effet, l'opérateur  $\mathbf{D}$  agissant sur la variable  $x$ , il vient en permutant dérivation et intégration, et en utilisant la définition de  $G(x)$  :

$$\mathbf{D} \phi(t) = \int [\mathbf{D} G(t, \theta)] \varphi(\theta) d\theta = \int \delta(t - \theta) \varphi(\theta) d\theta = \varphi(t) \quad (\text{A.12})$$

Il existe en général plusieurs fonctions de Green associées à la même équation. Ces fonctions diffèrent entre elles par leurs *conditions aux limites*. C'est pourquoi il est très important de spécifier deux choses pour définir de façon unique une fonction de Green précise :

- l'équation aux dérivées partielles linéaire.
- les conditions et aux limites.

Pour plus de commodité, on notera  $G(t, \theta) = G(t | \theta)$ .

Dans le cas bidimensionnel, la FG est le produit des FGs dans les deux directions correspondantes : 
$$G(x, y | \xi, \eta) = G_1(x | \xi) G_2(y | \eta) \quad (\text{A.13})$$

et si, en plus, elle dépend du temps  $t$ , c'est-à-dire pour le cas bidimensionnel non stationnaire :

$$G(x, y, t | \xi, \eta, \theta) = G_1(x, t | \xi, \theta) G_2(y, t | \eta, \theta) \quad (\text{A.14})$$

ou bien

$$G(x, y, t | \xi, \eta, \theta) = G_1(x | \xi) G_2(y | \eta) G_3(t | \theta) \quad (\text{A.15})$$

## Annexe B

### Méthode de résolution utilisée par M. Emin Erdogan [12]

Pour résoudre l'équation (2.9) :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\rho \partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

associée aux conditions aux limites :

$$w(x, 0, t) = w(x, b, t) = 0.0 \quad \forall t \quad \text{et} \quad \forall x$$

$$w(0, y, t) = w(a, y, t) = 0.0 \quad \forall t \quad \text{et} \quad \forall y$$

et à la condition initiale :

$$w(x, y, 0) = 0.0 ; \quad \forall x \quad \text{et} \quad \forall y$$

on peut suivre une méthode qui peut être appliquée à tous les écoulements unidirectionnels non stationnaires. Une fois la distribution de la vitesse à l'état stationnaire  $w_{ss}(x, y)$  est connue, la vitesse  $w(x, y, t)$  peut être écrite comme sui :

$$w(x, y, t) = w_{ss}(x, y) - f(x, y, t)$$

où  $f(x, y, t)$  satisfait à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

qui satisfait aux conditions aux limites et initiale suivantes :

$$f(x, 0, t) = f(x, b, t) = 0.0 \quad \forall t \text{ et } \forall x$$

$$f(0, y, t) = f(a, y, t) = 0.0 \quad \forall t \text{ et } \forall y$$

$$f(x, y, 0) = w_{ss}(x, y) \quad \forall x \text{ et } \forall y$$

et quant  $t$  va à l'infinie,  $f(x, y, t)$  tend vers zéro.  $\left[ \gamma_m \left( x - \frac{a}{2} \right) \right]$

Dans le cas où

$$\begin{aligned} & \frac{w_{ss}(x, y)}{\left( \frac{-1}{2v} \right) \left( \frac{dp}{dz} \right) a^2} \\ &= \frac{32 b^2}{\pi^4 a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)^3 (2n+1)} \\ & \times \frac{\cos \left[ \gamma_m \left( x - \frac{a}{2} \right) \right] \cos \left[ \theta_n \left( y - \frac{b}{2} \right) \right]}{(2m+1)^2 / (2n+1)^2 + (b^2/a^2)} \end{aligned}$$

avec :  $\gamma_m = \frac{(2m+1)\pi}{a}$

$$\theta_n = \frac{(2n+1)\pi}{b}$$

Les conditions aux limites suggèrent une solution sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} f(x, y, t) &= \frac{b^2}{4a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \exp[-(\gamma_m^2 + \theta_n^2)vt] \\ & \times \cos \left[ \gamma_m \left( x - \frac{a}{2} \right) \right] \cos \left[ \theta_n \left( y - \frac{b}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

Les valeurs de  $A_{mn}$  peuvent être obtenues par la condition initiale :

$$A_{mn} = \frac{128 (-1)^{m+n}}{\pi^4 (2m+1)^3 (2n+1)} \cdot \frac{1}{(2m+1)^2 / (2n+1)^2 + (a^2/b^2)}$$

## Annexe C

### Analyse de l'ordre (de l'échelle). [15], [33]

Notre analyse sera portée sur l'équation gouvernante (2.9) et plus précisément sur sa forme générale (3.1) :

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \mathcal{G} + \nabla^2 \phi$$

avec les conditions de Dirichlet homogènes aux limites,  $\phi = 0$  et la condition initiale  $\phi = 0$ , quant  $t = 0$ .

C'est l'équation du mouvement dans un long tube à section transversale rectangulaire d'aire  $A$  entourée d'un périmètre  $P$ .

Elle représente un équilibre entre trois quantités : accumulation, génération et diffusion.

$$\underbrace{\frac{1}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial t}}_{\text{accumulation}} = \underbrace{\mathcal{G}}_{\text{génération}} + \underbrace{\nabla^2 \phi}_{\text{diffusion}}$$

On peut considérer trois régions d'écoulement distinctes : voir Fig 1.3

- $t$  est très grand, un écoulement complètement développé
- $t$  est petit, - un écoulement noyau.  
- une très mince couche limite.

chacune de ces régions sera sujet de l'analyse de l'ordre.

#### Quelques définitions nécessaires.

Il est intéressant d'introduire le potentiel (vitesse) moyen surfacique, obtenu en intégrant la solution pour  $\phi$  sur la surface transversale:

$$\bar{\phi}(t) = \iint_A \phi dA = \iint_A w dA = \bar{w}(t)$$

En outre, le flux (contrainte de cisaillement) de quantité de mouvement peut être défini comme :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(t) &= \frac{1}{P} \oint \gamma \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = \gamma \bar{\phi}_n \\ &= \bar{\tau}(t) = \frac{1}{P} \oint \mu \frac{\partial w}{\partial n} ds = \mu \bar{w}_n \end{aligned}$$

où :  $\bar{\phi}_n \equiv \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n}$

Le potentiel (vitesse) moyen adimensionnel est donc :

$$\phi^* = \frac{\bar{\phi}}{g \mathcal{L}^2} = \frac{\bar{w}}{\mathcal{L}^2 \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz}} = w^*$$

Alors que le flux de la quantité de mouvement adimensionnel (contrainte de cisaillement) à la surface est défini par rapport à la valeur de l'état stationnaire:

$$\tau^* = \frac{\tau}{\tau_\infty}$$

où :  $\tau_\infty = \frac{A}{P} \frac{dP}{dz} = \frac{A}{P} \frac{\Delta P}{L}$

Cela conduit au résultat suivant :

$$\tau^* = \frac{\tau}{\frac{A}{P} \frac{dP}{dz}} = \frac{\mu \bar{\phi}_n}{\frac{A}{P} \frac{dP}{dz}} = \psi^*$$

### Analyse de l'ordre

Nous allons utiliser les ordres suivants :

$$\phi \sim \bar{\phi} \quad , \quad t \sim t$$

$$\nabla^2 \sim \frac{1}{\mathcal{L}^2} \quad \text{pour } t \text{ très grand}$$

$$\nabla^2 \sim \frac{1}{\delta^2} \quad \text{pour } t \text{ petit}$$

où :  $\mathcal{L}$  est une longueur caractéristique indéterminée de la géométrie  $\mathcal{L} = D_h$  ou  $\mathcal{L} = \sqrt{A}$  et  $A$  est la superficie de la section transversale. Comme  $\mathcal{L}$  peut être prise égale à  $a$ ,  $a/2$ ,  $b$ , ou  $b/2$ .

$\delta$  est l'épaisseur de la couche limite.

Pour l'écoulement complètement développé quant  $t \rightarrow \infty$ , l'équilibre entre la génération et la diffusion mène à

$$\frac{\bar{\phi}}{\mathcal{L}^2} \sim \mathcal{G}$$

$$\text{ou } \bar{\phi} \sim \mathcal{L}^2 \mathcal{G}$$

$$\text{ou } \phi_{\infty}^* \sim \frac{\bar{\phi}}{g\mathcal{L}^2} \sim 1 ; \text{ pour } t \rightarrow \infty$$

D'autre part, quand  $t \rightarrow 0$ , l'équilibre est entre l'accumulation et la génération, c'est-à-dire on considère l'écoulement noyau, cela mène à :

$$\frac{1}{\beta} \frac{\bar{\phi}}{t} \sim \mathcal{G}$$

$$\text{ou } \bar{\phi} \sim \mathcal{G} \beta t$$

$$\text{ou } \phi_o^* \sim \frac{\beta t}{\mathcal{L}^2} \sim T ; \text{ pour } t \rightarrow 0$$

Dans la région de la couche limite, l'équilibre est entre l'accumulation et la diffusion ce qui donne :

$$\nabla^2 \sim \frac{1}{\delta^2}$$

d'où

$$\frac{1}{\beta} \frac{\bar{\phi}}{t} \sim \frac{\bar{\phi}}{\delta^2}$$

d'où

$$\delta \sim \sqrt{\beta t}$$

L'écoulement devient complètement développé quand  $\delta \rightarrow \mathcal{L}$  ; c'est-à-dire

$$\beta t \sim \mathcal{L}^2$$

d'où le temps adimensionnel  $T \sim \frac{\beta t}{\mathcal{L}^2} \sim 1$

Finalement, on déterminera des expressions donnant le flux à travers la surface défini

par :

$$\bar{\psi} = \gamma \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n}$$

Pour cela, on doit considérer les deux cas limites : temps très court et temps très long.

Quand  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\bar{\psi} \sim \gamma \frac{\bar{\phi}}{\mathcal{L}}$$

On peut exprimer le flux en fonction du terme source pour le cas de l'écoulement développé comme suit :

$$\bar{\psi}_\infty = \gamma \frac{A}{P} \mathcal{G}$$

et si on définit :

$$\psi^* = \frac{\bar{\psi}}{\bar{\psi}_\infty}$$

on obtient donc :

$$\psi_\infty^* = \frac{\bar{\phi}}{\left(\frac{A}{P} \mathcal{G} \mathcal{L}\right)} \sim 1 \quad ; \text{ pour } t \rightarrow \infty.$$

Quand  $t \rightarrow 0$ , le flux devient :

$$\bar{\psi} \sim \gamma \frac{\bar{\phi}}{\delta}$$

de l'équation du mouvement on a :

$$\frac{\bar{\phi}}{\delta^2} \sim \mathcal{G}$$

ce qui donne :

$$\bar{\psi} \sim \gamma \mathcal{G} \delta$$

d'où :

$$\psi_0^* = \frac{\delta}{(A/P)} \sim \frac{\sqrt{T} \mathcal{L}}{A/P} \quad ; \text{ pour } t \rightarrow 0.$$

On peut conclure que le potentiel moyen adimensionnel ( $\Phi^* = \bar{W}$ ) et le flux moyen adimensionnel ( $\psi^* = \bar{\tau}$ ) à travers la surface transversale auront les formes suivantes :

$$\Phi^* = \begin{cases} A_0 T & T \rightarrow 0 \\ A_\infty & T \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\psi^* = \begin{cases} B_0 T & T \rightarrow 0 \\ B_\infty & T \rightarrow \infty \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes  $A_0$ ,  $A_\infty$ ,  $B_0$  et  $B_\infty$ , on doit analyser le comportement asymptotique aux deux extrémités, voir annexe D.

## Annexe D

### Analyse asymptotique.[15], [33]

On va examiner le comportement asymptotique exact pour des temps petits et grands pour chaque grandeur sans dimension d'intérêt.

#### 1 Grandes valeurs de temps : $t \rightarrow \infty$ .

Pour des grandes valeurs de temps,  $t \rightarrow \infty$ , l'écoulement est caractérisé par un équilibre entre la production et la diffusion. Ce problème a été largement étudié pour le cas du mouvement dans la littérature [15], et les résultats sont généralement présentés sous forme du produit adimensionnel, « $f.Re$  », du facteur de frottement de **Fanny**  $f$  et du nombre de **Reynolds**  $Re$ , défini comme suit :

$$\frac{f Re_{\mathcal{L}}}{2} = \frac{\bar{\tau}_{\infty} \mathcal{L}}{\mu \bar{w}} = \frac{\bar{\psi}_{\infty} \mathcal{L}}{\gamma \bar{\phi}} = Po_{\mathcal{L}}$$

où  $Po$  est le nombre adimensionnel de **Poiseuille**.

On peut introduire le terme source  $\mathcal{G}$  en remplaçant  $\bar{\psi}_{\infty}$  par son expression :

$$Po_{\mathcal{L}} = \frac{\bar{\psi}_{\infty} \mathcal{L}}{\gamma \bar{\phi}} = \frac{A}{P} \frac{\mathcal{G} \mathcal{L}}{\gamma \bar{\phi}}$$

En utilisant l'expression du potentiel moyen  $\Phi^*$  avec un petit arrangement pour  $\bar{\phi}$ , on obtient :

$$\Phi^* = \frac{A/P}{Po_{\mathcal{L}} \mathcal{L}}$$

ce qui donne :

$$A_{\infty} = \frac{A/P}{Po_{\mathcal{L}}\mathcal{L}}$$

La limite asymptotique du flux adimensionnel  $\psi^*$  quand  $t$  prend de grandes valeurs est de

$$\psi^* = 1$$

ce qui donne :

$$B_{\infty} = 1$$

## 2 Petites valeurs de temps : $t \rightarrow 0$ .

Pour de petites valeurs de temps,  $t \rightarrow 0$ , le mouvement est caractérisé par un équilibre entre la génération et l'accumulation. L'équation de transport est :

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \mathcal{G}$$

celle-ci peut être intégrée et résolue avec la condition initiale :  $\phi(0) = 0$  pour donner :

$$\phi(t) = \beta \mathcal{G} t \approx \bar{\phi}(t)$$

La solution adimensionnelle est donc :

$$\Phi^* = \frac{\beta t}{\mathcal{L}^2} = T$$

ce qui donne :

$$A_0 = 1$$

Le flux quand le temps  $t$  prend de petites valeurs peut être trouvé en considérant la solution classique de **Stockes** de l'équation du transport.

$$\phi = \phi_0 \operatorname{erfc}(\eta)$$

$$\text{où : } \eta = \frac{x}{2\sqrt{\beta t}}$$

L'épaisseur de la couche limite  $\delta$  peut être donné par[15] :

$$\delta\phi_0 = 2\sqrt{\beta t} \int_0^{\infty} \phi_0 \operatorname{erfc}(\eta) d\eta$$

ce qui donne :

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\beta t} \approx 1.128 \sqrt{\beta t}$$

En remplaçant  $\delta$  par son expression dans la relation donnant  $\psi^*$ , on aboutit à :

$$\psi^* = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{P\mathcal{L}}{A} \sqrt{T}$$

ce qui donne :

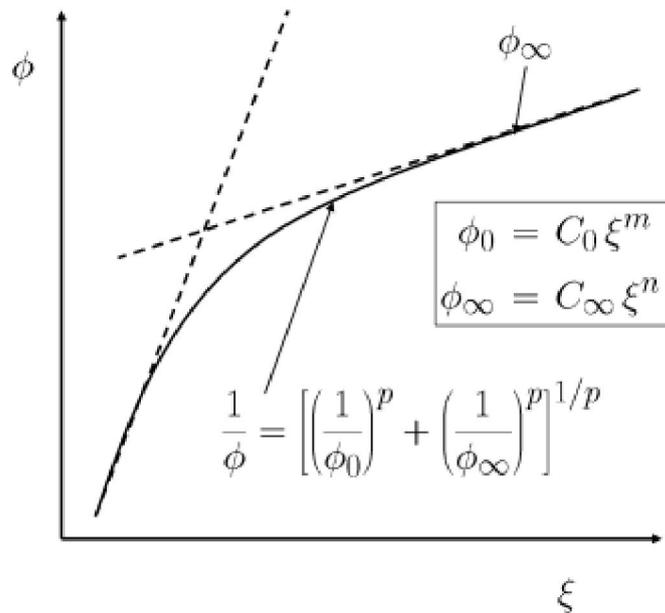
$$B_0 = \frac{2P\mathcal{L}}{\sqrt{\pi}A}$$

Ces limites exactes peuvent désormais être combinées de manière simple en utilisant une méthode de corrélation asymptotique.

### 3. Modèles compacts.

Les limites asymptotiques peuvent désormais être combinées pour développer un modèle simple compacte pour chaque grandeur sans dimension d'intérêt [15].

$$y^* = [(y_0^*)^n + (y_\infty^*)^n]^{1/n}$$



**Fig. D.1** : *Modèle de développement asymptotique*

La forme de  $\Phi^*$  et  $\psi^*$  est montré dans la figure D.1. Ce type de comportement est caractérisé par l'utilisation d'une valeur négative pour le paramètre  $n$ . Les modèles d'intérêt peuvent maintenant être écrits dans les formes suivantes :

$$\phi^* = \left[ (T)^n + \left( \frac{A/P}{\mathcal{L} P O_{\mathcal{L}}} \right)^n \right]^{1/n}$$

$$\psi^* = \left[ \left( \frac{2 P \mathcal{L}}{\sqrt{\pi} A} \sqrt{T} \right)^s + 1 \right]^{1/s}$$

Ces deux expressions sont en fonction de  $\mathcal{L}$  qui peut être pris égale à  $\sqrt{A}$  comme il peut être pris égale à  $D_h$ . Ce dernier choix de  $\mathcal{L}$  simplifie mieux la forme des modèles, tandis que le premier choix offre l'avantage que le nombre de Poiseuille est une simple fonction de la forme géométrique et peut être facilement prédit pour des formes plus complexes.

- a. Diamètre hydraulique  $\mathcal{L} = D_h = 4A/P$

$$\phi^* = \left[ (T)^n + \left( \frac{1}{4 P O_{D_h}} \right)^n \right]^{1/n}$$

$$\psi^* = \left[ \left( \frac{8}{\sqrt{\pi}} \sqrt{T} \right)^s + 1 \right]^{1/s}$$

- b. Racine carrée de la superficie  $\mathcal{L} = \sqrt{A}$

$$\phi^* = \left[ (T)^n + \left( \frac{\sqrt{A}/P}{Po\sqrt{A}} \right)^n \right]^{1/n}$$

$$\psi^* = \left[ \left( \frac{2P/\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{T} \right)^s + 1 \right]^{1/s}$$