RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider-Biskra

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la vie

Département de Mathématiques

N° d'ordre :

THÈSE

Pour l'obtension du grade de

DOCTORAT EN SCIENCES

SPECIALITÉ : MATHÉMATIQUES

Présenté par : **Said Beloul**

Intitulé

Conditions contractives généralisées, points fixes communs et applications

Directeur de thèse : **Prof. Ahcène Djoudi**

devant le jury composé de :

Djamel Meraghni	Professeur	Univ Biskra	Président.
Ahcène Djoudi	Professeur	Univ Annaba	Promoteur.
Abdelkrim Aliouche	Professeur	Univ Oum El Bouaghi	Examinateur.
Abdelouheb Ardjouni	M.C.A	Univ Souk Ahras	Examinateur.
Abdelouahab Mansour	M.C.A	Univ El-Oued	Examinateur.
Yahia Djabrane	M.C.A	Univ Biskra	Examinateur.

Remerciements et dédicace

Mes premiers remerciements vont au directeur de cette thèse, Ahcène Djoudi Professeur au Département de Mathématiques Université Badji Mokhtar Annaba, pour sa responsabilité de dériger ce travail. Je le remercie sincérement pour ses conseils avisés à son aide, sa patience et sa disponibilité.

Je tiéns remercie infiniment Monsieur Djamel Meraghni, Professeur au Département de Mathématiques Université Mohammed Khider Biskra, qui a accepté de présider le jury de cette thèse. Je remercie Monsieur Abdelkrim Aliouche, Professeur à l'Université d'Oum El Bouaghi, Monsieur Abdelouaheb Ardjouni, Maître de conférece à l'Université de Souk Ahras, Monsieur Yahia Djabrane, Maître de conférence à l'Université de Biskra et Monsier Abdelouahab Mansour, Maître de conférence à l'Université d'El-Oued qui ont accepté de rapporter cette thèse et de faire partie du jury.

Mes remerciements vont aussi à toute ma famile, mes parents, ma femme, mes enfants, mes soeurs, mes frères et mes amis sur ses encouragements.

Je dédie cette thèse à l'âme de ma mère, à toute ma famille et à tous mes amis.

Résumé

L'objectif de cette thèse est l'étude d'existence et d'unicité des points fixes communs pour diverses applications, univoques ou multivoques, définies sur des structures métriques et liées par des conditions contractives. Plusieurs théorèmes de point fixe commun ont été établis et démontrés pour des applications qui satisfont une certaine commutativité comme la compatibilité, la compatibilité faible, la compatiblité de type (E) ou fortement tangentielles. Ces applications sont soumises à des conditions contractives, contractives de type Gregus, ou contractives de type integrales et qui sont, dans certains cas, implicitement liées sur des espaces métriques généralisés. Ces résultats ont été apliqués aux équations intégrales et aux équations fonctionnelles qui apparaissent dans la progammation dynamique.

Mots clés. Applications faiblement sous-séquentiellement continues, contractions généralisées, applications fortement tangentielles, espace métrique partiel, espace métrique généralisé, progammation dynamique, équations intégrales.

Abstract

The objective of this thesis is to study the existence and uniqueness of common fixed points for single valued and multivalued mappings under different contractive conditions in certain metric structures. Several common fixed point theorems were established and proved for mappings satisfying commutativity properties such as compatibility, weak compatibility, compatibility of type (E) or tangential. The used mappings satisfy contractive conditions of Gregus or integral type via implicit relations on generalized metric spaces. The obtained results are applied to integral equations and functional equations which appear in dynamic programming.

ملخّص

يهدف هذّا البحث الَى درَاسة وجود و وحدَانية النقط الصَامدة المشتركة لبعض التطبيقَات، وحيدة القيم او متعدِدة القيم ، تحت شروط تقلصية مختلفة ، و في بنَى مترية متنوعَة. هذَا من خلَال نتَائِجنَا المتحصل عَليهَا، و التي تحوي مبرهنَات لِلنقط الصَامدة المشتركة لتطبيقَات. لتقلصَات معَممة ، و التي هي مستمرة بَالتَتَابع الجزئِي بضعف و متوَافقة من الصنف (هـ)، ايضَا مبرهنَات لِلنقط الصَامدة لتطبيقَات متمَاسة بقوة و متوَافقة بضعف، تحت شروط تقلصية بَاستعمَال دَالة ضمنية و اخرَى من صنف جريجيس ($Gregus$) في شكلهَا التكَاملي، بعض المبرهنَات لتطبيقَات متمَاسة و متوَافقة بضعف في فضَاءَات مترية جزئِية، مبرهنتين لِلنقط الصَامدة المشتركة صنف بيريند ($Berinde$) و في فضَااِت مترية معمَمة. ولقد دعمنَا هذَا العمل بِبعض التطبيقَات تخص المعَادلَات التكَاملية ، المعَادلَات الدَالية ، المعَادلَات التفَاضلية.

الكلمَات المفتَاحية : تطبيقَات مستمرة بَالتَتَابع الجزئِي، تطبيقَات متمَاسة ، تقلصَات معمَمة ، فضَاءَات مترية جزئِية ، فضَاءَات مترية معمَمة ، معَادلَات تكَاملية ، معَادلَات تفَاضلية ، معَادلَات دَالية.

Introduction

La théorie du point fixe sur des espaces métriques a plusieurs et différentes applications en analyse non linéaire, physique, économie.... Son histoire a commencé par les travaux de S. Banach dans son papier [12] (publié en 1922). Banach a établi l'existence et l'unicité du point fixe d'une contraction dans un espace métrique complet. Il a appliqué son théorème, connu sous le nom principe de l'application contractante, à la résolution des équations intégrales. Par la suite, les recherches de mathématiciens ont pris différentes directions en s'inspirant du principe de Banach, elles sont concentrées sur :

- L'étude d'existence et d'unicité du point fixe,
- La construction d'un algorithme pour le calcul,
- La convergence de l'algorithme en question,
- La stabilité de cet algorithme construit.

Après les travaux de Banach, il y a eu de nombreux essais pour améliorer et généraliser le problème d'existence et d'unicité, l'un de ces travaux fut celui de Rakotch [83], où il a remplacé la constante de la contraction par une fonction positive, décroissante à image dans l'intervalle $[0,1]$. Par ailleurs, Edelstein [40] a établi quelques résultats en utilisant une condition contractive plus stricte. Il a produit quelques travaux qui sont d'une grande importance et qui généralisent les résultats de Rakotch. On peut classer les étapes principales de développement de la théorie du point fixe comme suit :

1. La contraction non linéaire, ou la contractivité de Boyd et Wong [30] en 1969,
2. La contraction de Meir-Keeler [67] en 1969,
3. Généralisation de Geraghty [43] (1973),
4. La contraction faible, Alber et Guerre-Delabriere [6](1997),
5. La contraction de type intégrale, Branciari [31] (2002),
6. La contraction de type Suzuki [97] (2008).

En effet, parmi les plus importantes et qualitatives généralisations au résultat de Banach et de Rakotch sont incontestablement celles qui étaient introduites par Boyd et Wong en 1969, où les auteurs ont remplacé la constante de la contraction par une fonction positive, croissante et la limite de la composition de n-fois de cette fonction tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Leur résultat obtenu est connu sous le nom : le principe de la contraction non linéaire. Aussi, on trouve dans la littérature d'autres travaux importants comme ceux de Kannan [59], Ciric [33], Chaettjea [34] et Zamferscu [99]. Ce dernier a pu unifier les trois contractivités, de Banach [12], Ciric [33] et de Chattijea [34] en un seul théorème plus général. En 1977, Rhoades [85] a établi un théorème faisant l'équivalence entre les conditions contractives précédentes.
Geraghty [43] a présenté un autre type de conditions contractives, il a changé la constante de la contraction par une fonction qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1)$. En 1997, Jachymski [49] a établi un théorème qui fait une comparaison entre certains types de contractions, il a donné l'équivalence entre la contractivité de Matkwoski [69], et de Boyd-Wong [30].
En 2002, Branciari [31] a introduit la contraction de type intégrale, il a obtenu un résultat esthétique dans ce domaine. Malheureusement, après quelques années, Suzuki [96] a mentionné que le résultat de Branciari [31], n'est autre que celui de Meer-Keeler [67]. Par la suite, plusieurs auteurs se sont impliqués et ont établis des résultats améliorant ainsi les contractions intégrales. Alber et Guerre-Delabriere [6] ont introduit le concept de la contraction faible dans des espaces de Hilbert. En 2001 Rhoades [86] a prouvé que les derniers résultats sont valables dans les espaces métriques. Ce type de contraction est une généralisation du type de la contraction de Boyd et Wong [30] et de Reich [84]. On peut voir aussi facilement que toute contraction est une contraction faible.

La théorie du point fixe métrique pour les applications multivoques a été considérée par plusieurs auteurs à cause de ses applications intenses à la théorie des jeux, l'économie, les inclusions intégrales ou différentielles, problèmes de minimisation...etc. L'étude de ce type d'applications a commencé par Nadler [78] qui a utilisé la métrique de Hausdorff pour les contractions multivoques dans les espaces métriques. Plus tard, plusieurs travaux concernant l'existence d'un point fixe pour des applications multivoques ont été publiés, voir par exemple [28, 38, 57, 62, 88, 94, 98].

Généralement, pour établir un point fixe commun métrique, on a besoin d'une relation de commutativité entre les applications étudiées, la continuité et une condition contractive ainsi que la complétude ou la fermeture d'espace (ou sous-espaces). Pour cela, Jungck [50] a introduit et utilisé la commutativité de deux applications d'un espace métrique dans lui-même pour établir un point fixe commun. Cette dernière notion a été généralisée par Sessa [89] en introduisant la commutativité faible. En 1986 Jungck [51] a amélioré la propriété de commutativité et commutativité faible, à une nouvelle notion plus générale, c'est la propriété de compatibilité entre deux applications d'un espace métrique dans lui-même. Plus tard, cette dernière notion était généralisée aux divers types de compatibilité : compatibilité de type (A), compatibilité de type (B), compatibilité de type (C), compatibilité de type (P). Jungck et Rhoades [55] ont introduit un concept qui généralise tous les types précédents en introduisant la compatibilité faible. En 1998, Pant [76] a prouvé que la compatibilité faible est équivalente à la $R-$commutativité faible due à Pant [75]. D'autre part, l'étude des applications non compatibles a été commencée par Pant [77] qui a introduit la continuité réciproque qui était généralisée à la continuité réciproque faible. Dans le même cadre des applications non compatibles, Sastry et Murthy [87] ont introduit les applications tangentielles, ils ont mentionné que les applications compatibles sont tangentielles, de plus, il existe des applications qui sont non compatibles mais tangentielles. Après cela, Aamri et EL-Moutawakil [1] ont redécouvert la propriété (E.A). En 2009, Pathak et Shahazad [82] ont amélioré la propriété des applications tangentielles en l'appliquant à quatre applications pour établir un point fixe commun dans un espace métrique. La dernière propriété a été étendue aux applications multivoques par Sintunavarat et Kumam [94]. Dans l'année 2014, Chauhan et al.[35] ont modifié le concept des fonctions tangentielles pour les multivoques. Ils ont ajouté une condition supplémentaire appelée tangentielle forte. Récemment, Al-Thagafi et Abbas [11] ont donné une généralisation au concept de compatibilité faible, c'est la compatibilité occasionnellement faible. Diric et al.[39] ont observé que sous une condition d'existence d'un point de coïncidence pour deux applications sur un espace métrique, alors faiblement compatibles équivaut à faiblement occasionnellement compatibles. En 2009 Bouhadjera et Godet Thobie [29] ont introduit la notion de la compatibilité super-faible et la continuité sous-séquentielle. Elles ont combiné les deux propriétés pour établir un point fixe commun. Après deux ans Imdad et al. [46], ont observé que le résultat de Bouhadjera et Godet Thobie [29] n'est pas vrai car on n'a pas le choix d'obtenir la même suite, mais le résultat sera correct si on remplace la compatibilité super-faible par la compatibilité et la continuité sous-séquentielle par la continuité réciproque.

Pour la réalisation de notre thèse, on a étudié plusieurs articles sur le point fixe univoque et multivoque. On a essayé d'établir quelques théorèmes de point fixe commun avec des conditions plus faibles. On a pu aboutir à quelques résultats partiels et quelques remarques qu'on a résumées dans cette thèse. Comme d'habitude, le premier chapitre sera consacré à quelques définitions et des éléments basiques qui sont indispensables pour le reste de notre travail. Plus particulièrement, on présente dans ce chapitre :

- Certains types de contractions ainsi qu'une comparaison entre eux,
- Quelques propriétés de commutativité comme la commutativité faible entre deux applications dans les espaces métriques ainsi que la compatibilité et ses généralisations. En particulier, la compatibilité de type (A), de type (B), de type (C), de type (P), compatibilité de type (E), compatibilité faible et compatibilité super-faible, les applications tangentielles, fortement tangentielles et la propriété (E.A) commune seront définies.
- La continuité réciproque, la continuité réciproque faible, la continuité sous-séquentielle et la continuité sous-séquentielle faible.

Dans le deuxième chapitre, on va détailler nos travaux [17] et [18], plus précisément :

1. L'article [17] contient des théorèmes de point fixe commun pour quatre applications qui sont faiblement sous-séquentiellement continues et compatibles de type (E) satisfaisant une condition contractive généralisée définie sur un espace métrique.
2. L'article [18] contient quelques théorèmes pour des applications faiblement sous- séquentiellement continues et compatibles de type (E) vérifiant des contractions faiblement généralisées. Par ailleurs, on va détailler nos travaux [19], [23].

Dans le troisième chapitre, on trouve :

- Un théorème de point fixe commun pour deux applications univoques et multivoques faiblement compatibles et fortement tangentielles satisfaisant une condition contractive de type intégrale liée par une fonction implicite.
- Un théorème de point fixe commun de type Gregus pour deux applications univoques et multivoques qui sont sous-séquentiellement continues et compatibles satisfaisant une condition contractive stricte de type intégrale.

Le quatrième chapitre contient notre travail [20], où on va définir la propriété des applications tangentielles dans les espaces métriques partielles pour établir des théorèmes de point fixe commun pour deux paires des applications tangentielles et faiblement compatibles satisfaisant des conditions contractives faiblement généralisées dans des espaces métriques partiels.

Dans le cinquième chapitre, on s'intéresse à une autre structure métrique. On va présenter certains théorèmes de point fixe commun de type Berinde dans des espaces métrique généralisés.
Le dernier chapitre sera consacré à quelques applications concernant l'étude de quelques problèmes comme :

1. L'étude du problème de l'existence et l'unicité de la solution commune pour des équations intégrales de type Fredholm.
2. L'existence et l'unicité de la solution commune pour un système d'équations fonctionnelles émanant de la programmation dynamique.

Chapitre 1

Conditions contractives et fonctions compatibles

1.1 Quelques types de conditions contractives

Dans cette section on va citer quelques types de contractions. D'abord, on va donner quelques définitions et notions basiques concernant les applications contractantes.

1.1.1 Les applications contractantes

Définition 1.1 *Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \longrightarrow X$ est dite :*

1. *Lipschitzienne (ou k-Lipschitzienne) si et seulement si il existe une constante $k \geq 0$ telle que pour tout $x, y \in X$ on a :*
$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y),$$
2. *contraction ou une application contractante si $k < 1$,*
3. *non expansive si et seulement si elle est 1-Lipschitzienne,*
4. *contractive si et seulement si pour tout $x, y \in X$, on a :*
$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

Il est clair que, si T est non expansive, alors elle est Lipschitzienne.

Contraction de Boyd-Wong

Théorème 1.1 *[30] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application. Supposons qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ semi-continue supérieurement telle que $\phi(t) < t$ pour tout $t > 0$ et vérifiant :*

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y))$$

,pour tout $x, y \in X$. Alors T admet un point fixe unique x^*. En outre, pour tout $x \in X$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x^*$.

Dans ce cas, T est dite ϕ-contractive ou contraction non linéaire.

Extension d'Eldestein

Théorème 1.2 *[40] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant :*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y),$$

pour tout $x, y \in X$. Supposons qu'il existe $y \in X$, telle que la suite $\{x_n\}$ définie par :

$$\begin{cases} y = x_0, \\ x_{n+1} = Tx_n, \quad \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

possède une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ avec $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$, alors x est l'unique point fixe de T.

Contraction de Meir-Keeler

Théorème 1.3 *[67] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application satisfaisant pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$:*

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \delta \ \text{ implique } \ d(Tx, Ty) < \varepsilon.$$

Alors T a un point fixe unique dans X. De plus, pour tout $x \in X$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x = x^*$.

Contraction de Geraghty

Définition 1.2 *Soit (X, d) un espace métrique. L'application $T : X \to X$ est dite contraction de Geraghty si et seulement si il existe une fonction $\beta : \mathbb{R}_+ \to [0, 1)$ satisfaisant $\beta(t_n) \to 1$ implique*

$t_n \to 0$ *et pour tout* $x, y \in X$ *on a :*

$$d(Tx, Ty) \leq \beta(d(x, y))d(x, y).$$

Théorème 1.4 *[43] Toute contraction de Geraghty d'un espace métrique complet dans lui même admet un point fixe unique.*

Contraction de Matkowski

Définition 1.3 *Une application* $T : X \to X$ *d'un espace métrique* (X, d) *est dite contraction de Matkowski (ou* ϕ*-contraction) si et seulement si il existe une fonction* $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$*, strictement croissante vérifiant :*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0, \quad \textit{pour tout}\, t \in \mathbb{R}_+,$$

et

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))$$

Théorème 1.5 *[69] Toute* φ*-contraction* T *d'un espace métrique complet* (X, d) *dans lui même admet un point fixe unique* x^**. De plus, pour tout* $x_0 \in X$*, on a* $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x_0 = x^*$*.*

Contraction de Caristi

Théorème 1.6 *[32] Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application satisfaisant la condition suivante : il existe une fonction* $\phi : X \to \mathbb{R}_+$ *semi-continue inférieurement telle que :*

$$d(x, Tx) \leq \phi(x) - \phi(Tx),$$

pour tout $x \in X$*. Alors* T *admet un point fixe.*

Contraction de Branciari

Théorème 1.7 *[67] Soit* T *une application d'un espace métrique* (X, d) *dans lui même satisfaisant :*

$$\int_0^{d(Tx,Ty)} \varphi(t)dt \leq k \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt,$$

pour tout $x, y \in X$, où $0 \leq k < 1$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue vérifiant

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0, \quad pour\ tout\ \ \varepsilon > 0.$$

Alors T admet un point fixe unique x^*. De plus, pour tout $x_0 \in X$ on a : $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = x^*$.

Généralisation de Suzuki

Théorème 1.8 *[97] Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$. On définit une fonction décroissante $\theta : [0, 1) \to (\frac{1}{2}, 1]$vérifiant :*

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & si\ 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ (1-r)r^{-2}, & si\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq r \leq 2^{-\frac{1}{2}} \\ (1+r)^{-1}, & si\ 2^{-\frac{1}{2}} \leq r < 1. \end{cases}$$

Supposons qu'il existe $r \in [0, 1)$, tel que

$$\theta(r)d(x, Tx) \leq d(x, y) \ \ implique\ \ d(Tx, Ty) \leq rd(x, y),$$

pour tout $x, y \in X$. Alors T admet un point fixe unique x^* dans X. De plus on a $\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*$

1.1.2 Comparaison entre certaines contractions

Plusieurs auteurs ont fait une étude de comparaison entre les conditions contractives, parmi ceux, Rhoades [85], Miszaros [69] et Jachymski [48, 49]. On va citer un théorème de comparaison due à Jachymski [49] :

Théorème 1.9 *[49] Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \to X$ une application. Alors les conditions contractives suivantes sont équivalentes :*

- *(a) Il existe une fonction croissante et continue à droite $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que T est ϕ-contractive.*
- *(b) Il existe une application $\Theta : X \times X \to \mathbb{R}_+$, avec*

$$\inf\{\Theta(x, y), a \leq d(x, y) \leq b\} > 0,$$

  pour $a, b > 0$ telle que :

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \Theta(x, y), pour\ tout\ \ x, y \in X$$

- *(c) Il existe une application* $\Psi : X \times X \to \mathbb{R}_+$, *avec*

$$\sup\{\Psi(x,y), a \leq d(x,y) \leq b\} > 0 poura, b > 0, \quad \textit{telle que}$$

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y) - \Psi(x,y), \quad \textit{pour tout} \;\; x,y \in X$$

- *(d) Il existe une fonction continue* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *avec* $\varphi(t) > 0$ *pour tout* $t > 0$, *et*

$$d(Tx,Ty) \leq d(x,y) - \varphi(d(x,y)), \quad \textit{pour tout} \;\; x,y \in X$$

- *(e) Il existe une fonction semi-continue supérieurement* $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *telle que* T *est* ϕ*-contractive.*
- *(f) Il existe une fonction* $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, *telle que* $\lim_{s\to t} \sup \phi(s) < t$, *pour* $t > 0$ *et* T *est* ϕ*-contractive.*
- *(g) Il existe une fonction strictement croissante* $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant*

$$\lim_{n\to\infty} \phi^n(t) = 0, \quad \textit{pour tout} \;\; t \geq 0$$

  et T *est* ϕ*-contractante.*
- *(h) Il existe une fonction strictement croissante et continue* $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *telle que* T *est* ϕ*-contractive.*

La démonstration du Théorème précédent est basée sur le lemme suivant :

Lemme 1.1 *[49] Supposons que* $0 \leq a \leq b \leq \infty$ *et* ψ *une fonction vérifiant* $\phi(t) < t$ *pour tout* $t > 0$ *et*

$$\lim_{s\to t} \sup \phi(s) < t, \quad \textit{pour} \;\; t \in (a,b)$$

$$\lim_{s\to a^+} \sup \phi(s) < a \;\; \textit{si} \;\; t > a,$$

alors il existe une fonction croissante et continue $\psi : [a,b) \to \mathbb{R}_+$ *telle que*

$$\phi(t) < \psi(t) < t, \quad \textit{pour} \;\; t \in [a,b) \cap (0,\infty)$$

Proposition 1.1 *[49] Soient* (X,d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application vérifiant l'une des conditions du Théorème précédent. Alors* T *admet un point fixe unique.*

1.2 Les applications compatibles

Avant de citer la notion de la compatibilité due à Jungck [51], on va rappeler la définition de la commutativité et de la commutativité faible :

Définition 1.4 *[50] Soient S, T deux applications d'un espace métrique (X, d) dans lui même. S et T sont dites commutatives si $STx = TSx$, pour tout $x \in X$.*

Sessa [89] a généralisé la dernière définition en introduisant la commutativité faible.
S et T sont dites faiblement commutatives si et seulement si $d(STx, TSx) \leq d(Tx, Sx)$ pour tout $x \in X$.

Définition 1.5 *[51] S et T sont dite compatibles si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} d(STx_n, TSx_n) = 0$, pour toute suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t,$$

pour un certain $t \in X$.

Remarque 1.1 *Si S et T sont commutatives, alors elles sont faiblement commutatives, donc compatibles, mais la réciproque est fausse en général*

Exemple 1.1 *Soient $X = \mathbb{R}$ et d la métrique euclidienne. Définissons :*

$$Sx = \frac{x+1}{2}, \text{ et } Tx = 2x - 1$$

Soit la suite $\{x_n\}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. On a :

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = 1$$

. De plus

$$\lim_{n\to\infty} STx_n = \lim_{n\to\infty} S(1 + \frac{2}{n}) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} TSx_n = \lim_{n\to\infty} T(1 + \frac{1}{2n}) = 1.$$

Donc la paire $(S, T$ est compatible.

Définition 1.6 *[75] Deux applications $S,T : X \to X$ sont dites R-faiblement commutatives en $x \in X$ si et seulement si pour un certain $R > 0$ on a :*

$$d(STx, TSx) \leq Rd(Sx, Tx)$$

. Elles sont R-faiblement commutatives sur X s'il existe $R > 0$ telle que l'inégalité précédente est vérifiée pour tout $x \in X$.

Kaneko et Sessa [58] ont étendu le concept de compatibilité pour les applications multivoques comme suit :

Définition 1.7 *Soient (X, d) un espace métrique, $CB(X)$ l'ensemble des sous-ensembles non vides bornés et fermés dans X et $A : X \to X$, $S : X \to CB(X)l$. La paire (A, S) est dite compatible si pour tout $x \in X, ASx \in CB(X)$ et*

$$\lim_{n\to\infty} H(ASx_n, SAx_n) = 0,$$

pour toute suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant $\lim_{n\to\infty} Sx_n = M \in CB(X)$ et $\lim_{n\to\infty} Ax_n = t \in M$, pour un certain $t \in X$.

1.2.1 Divers types de compatibilité

Définition 1.8 *[52] $S,T : X \to X$ sont dites compatibles de type (A) si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} d(STx_n, T^2x_n) = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} d(TSx_n, S^2x_n) = 0$$

pour toute suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant $\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t$, pour certain $t \in X$.

Définition 1.9 *[79] On dit que S et T sont compatibles de type (B), si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} d(STx_n, T^2x_n) \leq \frac{1}{2}\Big[\lim_{n\to\infty} d(STx_n, St) + \lim_{n\to\infty} d(St, S^2x_n)\Big] \text{ et}$$

$$\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, S^2x_n) \leq \frac{1}{2}\Big[\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, Tt) + \lim_{n\to\infty} d(Tt, T^2x_n)\Big],$$

pour tute suite $\{x_n\}$ dans X vérifiant $\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t$, pour un certain $t \in X$.

Il est clair que compatibilité de type (A) implique compatibilité de type (B), mais la réciproque n'est pas vraie en général, (voir [79]).

Définition 1.10 *[80] S et T sont dites compatibles de type (P) si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} d(S^2x_n, T^2x_n) = 0$$

pour toute suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant $\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t$, pour un certain $t \in X$.

Proposition 1.2 *[80] Si S et T sont compatibles de type (P) et $Sx_n, Tx_n \to t$ quand $n \to \infty$ pour un certain $t \in X$, alors on a les assertions suivantes :*

1. $\lim_{n\to\infty} T^2x_n = St$ *si S est continue en t,*
2. $\lim_{n\to\infty} S^2x_n = Tt$ *si T est continue en t,*
3. $STt = TSt$ *et* $St = Tt$, *si S et T sont continues en t.*

Définition 1.11 *[81] S et T sont compatibles de type (C) si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} d(STx_n, T^2x_n) \leq \frac{1}{3}[\lim_{n\to\infty} d(STx_n, St) + \lim_{n\to\infty} d(St, T^2x_n) + \lim_{n\to\infty} d(St, S^2x_n)],$$

$$\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, S^2x_n) \leq \frac{1}{3}[\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, Tt) + \lim_{n\to\infty} d(Tt, S^2x_n) + \lim_{n\to\infty} d(Tt, T^2x_n)],$$

pour toute suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant $\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t$, pour un certain $t \in X$.

Définition 1.12 *[92] S et T sont dites compatibles de type (E) si $\lim_{n\to\infty} T^2x_n = \lim_{n\to\infty} TSx_n = St$ et $\lim_{n\to\infty} S^2x_n = \lim_{n\to\infty} STx_n = Tt$, pour toute suite $\{x_n\}$ dans X vérifiant $\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t$, pour un certain $t \in X$.*

Remarque 1.2 *[93] Si $St = Tt$, alors compatibilité de type (E) implique compatibilité, compatibilité de type (A), compatibilité de type (B), compatibilité de type (C) et compatibilité de type (P), mais la réciproque est fausse en général.*

Généralement si (S, T) est compatible de type (E), alors elle est compatible de type (B).

Définition 1.13 *[93] $S, T : X \to X$ sont dites S-compatibles de type (E) si*

$$\lim_{n\to\infty} S^2x_n = \lim_{n\to\infty} STx_n = Tt$$

. Elles sont dites T-compatibles de type (E) si

$$\lim_{n\to\infty} T^2x_n = \lim_{n\to\infty} TSx_n = St$$

pour toute suite $\{x_n\}$ dans X vérifiant $\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t$, pour un certain $t \in X$.

Notons que si S et T sont compatibles de type (E), alors elles sont S-compatibles et T-compatibles de type (E), la réciproque n'est pas vraie en général, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.2 *Soient $X = \mathbb{R}_+$ et $d(x,y) = |x-y|$. Définissons S et T par :*

$$Sx = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x+2}{2}, & x > 2 \end{cases} \quad Tx = \begin{cases} 4-x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Soit la suite $\{x_n\}$ définie par : $x_n = 2 + \dfrac{1}{n}$, pour tout $n \geq 1$.
Il est clair que pour tout $n \geq 1$, on a : $x_n > 2$ et

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = 2.$$

De plus

$$S^2x_n = S(2 + \frac{1}{n}) \longrightarrow 2 = T(2) \quad et$$
$$STx_n = S(2 - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n} \longrightarrow 2 = T(2).$$

Donc (S,T) est S-compatible de type (E), mais

$$T^2x_n = T(2 - \frac{1}{n}) \longrightarrow 2 \quad et$$

$$TSx_n = T(2 + \frac{1}{n}) = 1 \longrightarrow 0 \neq S(2).$$

D'où (S,T) n'est pas compatible de type (E).

1.2.2 Applications faiblement compatibles

Définition 1.14 *[53] S et T sont dites faiblement compatibles si elles commutent aux points de coïncidence ; i.e., pour tout $u \in X$ satisfaisant $Su = Tu$, alors $STu = TSu$.*

Exemple 1.3 *Soit $X = [0,2]$ muni de la métrique euclidienne, définissons S et T par :*

$$Sx = \begin{cases} 2-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad Tx = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Le point 1 satisfaisant $S(1) = T(1) = 1$ et $ST(1) = TS(1) = 1$, alors la paire (S,T) est faiblement compatible.

Remarque 1.3 *La compatibilité, la compatibilité de type (A), la compatibilité de type (P), la compatibilité de type (B) et la compatibilité de type (C)) implique la compatibilité faible, mais la réciproque n'est pas vraie en général(voir[53]).*

Dans le cas des applications multivoques la définition sera :

Définition 1.15 *[53] Soient $A : X \to X$ et $S : X \to CB(X)$ deux applications sur un espace métrique (X, d). La paire (A, S) est dite faiblement compatible si pour tout $u \in X$ satifaisant $Au \in Su$, alors $ASu = SAu$.*

Exemple 1.4 *Soit $(X, d) = ([0, 1], |.|)$. Définissons A et S par :*

$$Ax = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \qquad Sx = \begin{cases} \{\frac{1}{2}\}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ [\frac{1}{2}, x], & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Clairement, $A(\frac{1}{2}) \in S(\frac{1}{2})$ et $AS(\frac{1}{2}) = SA(\frac{1}{2}) = \{\frac{1}{2}\}$. Donc A et S sont faiblement compatibles.

1.2.3 Compatibilité occasionnellement faible

Définition 1.16 *[11] S et T sont dites occasionnellement faiblement compatibles si et seulement si il existe un certain point $u \in X$ satisfaisant $Su = Tu$ et $STu = TSu$.*

Le dernier concept est plus général que la compatibilité faible, i.e., faiblement compatibles implique occasionnellement faiblement compatibles (voir [11]).
Abbas et Rhoades [5] ont défini la compatibilité occasionnellement faible dans le cas multivoque comme suit :

Définition 1.17 *Deux applications $A : X \to X$ et $S : X \to B(X)$ sont dites occasionnellement faiblement compatibles si et seulement si il existe un certain point u dans X satisfaisant $Au \in Su$ et $ASu \subseteq SAu$.*

Exemple 1.5 *Soient $X = [0, \infty)$ et d la métrique euclidienne. Définissons A et S par :*

$$Ax = x + 2, \quad Sx = [x, 2x + 1]$$

. Il est clair que le point $u = 2$ satisfait $A(2) = 4 \in [2, 5] = S(2)$ et $AS(2) = [4, 7] \subseteq [4, 9] = SA(2)$. Donc A et S sont ofc.

1.2.4 Les applications super-faiblement compatibles

Définition 1.18 *[29] Deux applications S et T sont dites super-faiblement compatibles s'il existe une suite $\{x_n\}$ satisfaisant*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t \ \text{ et } \ \lim_{n\to\infty} d(STx_n, TSx_n) = 0,$$

pour un certain $t \in X$.

Deux applications compatibles ou faiblement compatibles ou occasionnellement faiblement compatibles sont super-faiblement compatibles, mais la réciproque est fausse en général, (voir [29]).

1.3 Les applications tangentielles

Définition 1.19 *[87] Soient $A, B : X \to X$ deux applications. Un point $t \in X$ est dit tangent pour A et B, s'il existe une suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant*

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Bx_n = t,$$

pour un certain $t \in X$. Dans ce cas, A et B sont dites des applications tangentielles.

1.3.1 La propriété (E.A)

Définition 1.20 *[1] Soient $S, T : X \to X$. La paire (S, T) satisfait la propriété (E, A) s'il existe une suite $\{x_n\}$ dans X, telle que*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t,$$

pour un certain t dans X.

Remarquons que si (S, T) est compatible, alors elle satisfait la propriété $(E.A)$, mais il existe des applications qui ne sont pas compatibles et satisfaisant cette propriété.

Exemple 1.6 *Soient $X = [0, 1]$ et $d(x, y) = |x - y|$, définissons S, T par :*

$$Sx = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ x + 1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases} \qquad Tx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2x + 1 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Soit la suite $\{x_n\}$ *définie par :*

$$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \ \textit{pour tout} \ \ n \geq 1.$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \frac{1}{2},$$

alors S *et* T *satisfont la propriété* $(E.A)$. *D'autre part, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} TSx_n = \lim_{n\to\infty} T(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}) = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} STx_n = \frac{1}{2},$$

donc S *e* T *sont pas compatibles.*

Définition 1.21 *[62] Soient* A, B, S *et* T *des applications d'un espace métrique* (X, d) *dans lui même. On dit qu'elles satisfaisant la propriété (E,A) commune s'il existe deux suites* $\{x_n\}$*et*$\{y_n\}$ *dans* X *vérifiant*

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} By_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n = t,$$

pour un certain t *dans* X.

Si $A = B$ et $S = T$ on obtient la définition précédente.

Exemple 1.7 *Dans l'espace métrique* $(\mathbb{R}_+, |.|)$, *définissons les applications* A, B, S *et* T *définies par :*

$$Ax = \frac{3x+1}{4}, \ \ Bx = \frac{x+1}{3}, \ \ Sx = \frac{2x+1}{3}, \ \ Tx = \frac{1}{2}x,$$

Soient les deux suites de $\mathbb{R}_+$ *définies par :*

$$x_n = 1 + \frac{1}{n+1}, \ \ y_n = 2 + \frac{1}{n+1}.$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} By_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n = 1,$$

donc A, B, S *et* T *satisfont la propriété (E,A) commune.*

Kamran [57] a généralisé la propriété (E.A) pour les applications multivoques comme suit :

Définition 1.22 *Soient $A : X \to X$ une application univoque et $S : X \to CB(X)$ une application multivoque. On dit que la paire (A, S) satisfait la propriété (E.A) s'il existe une suite $\{x_n\}$ dans X vérifiant*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = M \in CB(X) \;\; et \;\; \lim_{n\to\infty} Ax_n = t \in M,$$

pour un certain $t \in X$.

Définition 1.23 *[82] Soient $A, B, S, T : X \to X$ des applications. Un point $t \in X$ est dit un point faiblement tangent pour S et T s'il existe deux suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ dans X satisfaisant*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n = t.$$

La paire (A, B) est dite tangentielle par rapport à (S, T) si

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} By_n = t,$$

i.e., t est un point faiblement tangent à A et B.

Si $A = B$ et $S = T$, on dit que A est tangentielle par rapport à S.

Si $A = S$ et $B = T$, alors (A, B) est dite tangentielle par rapport à lui même.

Remarque 1.4 *Clairement, toute paire (A, B) satisfaisant la propriété (E.A) possède un point faiblement tangent, i.e., (A, B) est tangentielle. Il suffit de prendre $\{x_n\} = \{y_n\}$, mais la réciproque n'est pas vraie en général [82].*

Définition 1.24 *[94] Soient $A, B : X \to X$ deux applications univoques et $S, T : X \to B(X)$ deux applications multivoques sur un espace métrique (X, d). La paire (A, B) est dite tangentielle par rapport à (S, T) s'il existe deux suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ dans X satisfaisant*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n = M,$$

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} By_n = z \in M.$$

1.3.2 Applications fortement tangentielles

Définition 1.25 *[35] Soient $A, B : X \to X$ deux applications univoques et $S, T : X \to CB(X)$ deux applications multivoques sur un espace métrique (X, d). La paire (A, B) est dite fortement tangentielle par rapport à (S, T) s'il existe deux suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ dans X satisfaisant*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n = M,$$

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} By_n = t \in M$$

et $t \in A(X) \cap B(X)$.

Exemple 1.8 *Soit* $X = [0,4]$ *muni de la métrique euclidienne. Définissons* A, B, S *et* T *par :*

$$Ax = \begin{cases} x+1, & 0 \le x \le 2 \\ 2, & 2 < x \le 4 \end{cases} \qquad Bx = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 2 \\ 1 & 2 < x \le 4 \end{cases}$$

$$Sx = \begin{cases} [0, x+1], & 0 \le x \le 2 \\ [2, x], & 2 < x \le 4 \end{cases} \qquad Tx = \begin{cases} [0, 2x], & 0 \le x \le 2 \\ [2, 4] & 2 < x \le 4 \end{cases}$$

On a $A(X) = [1,3]$ *et* $B(X) = [0,4]$. *Alors* $A(X) \cap B(X) = [1,3]$. *Soient les deux suites* $\{x_n\}, \{y_n\}$ *définies pour tout* $n \ge 1$ *par :*

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}, y_n = 1 + \frac{1}{n}.$$

Clairement $\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n = [0,2]$ *et* $\lim_{n\to\infty} A(x_n) = \lim_{n\to\infty} By_n = 2 \in [0,2]$, *ainsi* $3 \in [1,3] = A(X) \cap B(X)$. *Donc* $\{A, B\}$ *est fortement tangentielle par rapport à* $\{S, T\}$.

Si dans la définition précédente on a $S = T$ et $A = B$, on obtient la définition suivante :

Définition 1.26 *Soient* $A : X \to X$ *et* $S : X \to CB(X)$ *deux applications.* A *est dite tangentielle par rapport à* S *si*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Sy_n = M$$

et $t \in A(X)$, *où* $\{x_n\}, \{y_n\}$ *sont deux suites dans* X *telles que*

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Ay_n = t \in M$$

Exemple 1.9 *Soit* $X = [0,2]$ *muni de la distance euclidienne. Définissons* A *et* S *par :*

$$Ax = \begin{cases} 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ x, & 1 < x \le 2 \end{cases} \qquad Sx = \begin{cases} [0, x+1], & 0 \le x \le 1 \\ [x-1, x] & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Soient les deux suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ *définies pour tout* $n \ge 1$ *par :* $x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = e^{-n}$. *On a :*

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Ay_n = 1$$

$$Sx_n = [0, 1 + \frac{1}{n}] \to [0,1], \quad quand \ n \to \infty,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} Sy_n = [0,1],$$

en outre $1 \in [0,2] = A(X)$, *donc* A *est fortement tangentielle par rapport à* S.

1.4 Applications réciproquement continues

Définition 1.27 *[77] $S,T : X \to X$ sont dites réciproquement continues si*

$$\lim_{n\to\infty} STx_n = St, \quad et \quad \lim_{n\to\infty} TSx_n = Tt,$$

pour toute suite $\{x_n\}$ de X vérifiant

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t,$$

pour un certain $t \in X$.

Evidement, la continuité implique la continuité réciproque, mais la réciproque n'est pas vraie en général. Dans le cas multivoque, la définition sera :

Définition 1.28 *[91] $A : X \to X$ et $S : X \to B(X)$ sont dites réciproquement continues si*

$$\lim_{n\to\infty} SAx_n = St, \quad \lim_{n\to\infty} ASx_n = AM,$$

pour toute suite $\{x_n\}$ vérifiant $\lim_{n\to\infty} Ax_n) = t \in M$ et $\lim_{n\to\infty} Sx_n = M$, pour un certain $t \in X$.

1.4.1 La continuité réciproque faible

Définition 1.29 *S et T sont dites faiblement réciproquement continues si*

$$\lim_{n\to\infty} STx_n = St, \quad ou \quad \lim_{n\to\infty} TSx_n = Tt$$

pour toute suite $\{x_n\}$ vérifiant $\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t$, pour un certain $t \in X$.

1.4.2 La continuité sous-séquentielle

Définition 1.30 *[29] La paire (S,T) est dite sous-séquentiellement continue s'il existe une suite $\{x_n\}$ satisfaisant*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t,$$

pour un certain $t \in X$ et

$$\lim_{n\to\infty} STx_n = St, \quad et \quad \lim_{n\to\infty} TSx_n = Tt.$$

Dans le cas multivoque, la définition sera :

Définition 1.31 *[23] Soient $A : X \to X$,$S : X \to CB(X)$ deux applications sur un espace métrique (X,d). On dit que la paire (A,S) est sous-séquentiellement continue s'il existe une suite $\{x_n\}$ dans X telle que*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = M \in CB(X),$$

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = t \in M,$$

pour un certain $t \in X$ et

$$\lim_{n\to\infty} ASx_n = AM, \quad et \quad \lim_{n\to\infty} SAx_n) = St.$$

1.4.3 Applications faiblement sous-séquentiellement continues

Définition 1.32 *[18] La paire (S,T) est dite faiblement sous-séquentiellement continue s'il existe une suite $\{x_n\}$ vérifiant*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t,$$

pour un certain $t \in X$ et

$$\lim_{n\to\infty} STx_n = St, \quad ou \quad \lim_{n\to\infty} TSx_n) = Tt.$$

Il est facile de voir que la continuité sous-séquentielle implique la continuité sous-séquentielle faible, mais la réciproque n'est pas vraie en général comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.10 *Soit $X = [0,\infty)$ muni de la métrique euclidienne. Définissons S,T par :*

$$Sx = \begin{cases} \frac{x+2}{2}, & 0 \le x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases} \qquad Tx = \begin{cases} 4-x, & 0 \le x \le 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$$

Clairement, S et T sont discontinues en 2. considérons une suite $\{x_n\}$ satisfaisant $0 \le x_n < 2$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.
On a :

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = 2$$

. De plus

$$\lim_{n\to\infty} TSx_n = \lim_{n\to\infty} T(1 + \frac{x_n}{2})$$

$$= \lim_{n\to\infty}(3 - \frac{x_n}{2}) = T(2) = 2$$

. Donc (S,T) est faiblement sous-séquentiellement continue.

D'autre part

$$\lim_{n\to\infty} STx_n = \lim_{n\to\infty} S(4 - x_n) = 0 \neq S(2)$$

. D'où (S,T) n'est pas sous-séquentiellement continue.

Définition 1.33 *[17] La paire (S,T) est dite S-sous-séquentiellement continue s'il existe une suite $\{x_n\}$, telle que*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t,$$

pour un certain $t \in X$ et

$$\lim_{n\to\infty} STx_n = St$$

. Elle est T-sous-séquentiellement continue s'il existe une suite $\{x_n\}$ satisfaisant

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t,$$

pour un certain $t \in X$ et $\lim_{n\to\infty} TSx_n = Tt.$

Remarquons que si S et T sont sous-séquentiellement continues, alors elles sont S-sous-séquentiellement continues et T-sous-séquentiellement continues, mais la réciproque est fausse en général. Ainsi, si la paire (S,T) est S-(ou T-)sous-séquentiellement continue, alors elle est faiblement sous-séquentiellement continue.

Chapitre 2

Théorèmes de point fixe commun sous des conditions contractives généralisées

Ce chapitre est consacré aux travaux [17],[18], plus précisément, on va présenter :

1. des théorèmes de point fixe commun pour des applications faiblement sous-séquentiellement continues satisfaisant une condition contractive généralisée.
2. des théorèmes de point fixe commun pour des applications faiblement sous-séquentiellement continues satisfaisant une condition contractive généralisée faible.

2.1 Théorèmes de point fixe commun pour des contractions généralisées

Notons par $\mathbb{R}_A^+ = [0, A)$, où $A \in [0, \infty)$ et $\mathcal{F}[0, A)$ l'ensemble des toutes les fonctions continues $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. $F(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
2. F est croissante.

Exemple 2.1 *[100] Soit $F(t) = t$, alors $F \in \mathcal{F}[0, A)$*

Exemple 2.2 *[100] Pour une certaine fonction φ positive, intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, A)$ et satisfaisant :*

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0, \ \textit{pour tout}\, \varepsilon \in (0, A),$$

alors $F : t \mapsto \int_0^t \varphi(t)dt$ *est dans* $\mathcal{F}[0, A)$

Exemple 2.3 *[100] Soit* ϕ *une fonction positive, intégrable au sens de Lebesgue sur* $[0, A)$ *satisfait :*

$$\int_0^{\varepsilon} \phi(t)dt > 0, \; \textit{pour tout}\, \varepsilon \in (0, A),$$

et soit φ *une fonction non négative et intégrable au sens de Lebesgue sur* $[0, \int_0^A \phi(s)ds)$ *satisfaisant*

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)dt > 0, \; \textit{pour tout}\, \varepsilon \in (0, \int_0^A \phi(s)ds),$$

alors $F(t) = \displaystyle\int_0^{\int_0^t \phi(s)ds} \varphi(u)du,$ *alors* $F \in \mathcal{F}$

Lemme 2.1 *[100] Soit* $\{\varepsilon_n\}$ *une suite de* $\mathbb{R}_A^+$*. Si* $\lim\limits_{n\to\infty} F(\varepsilon_n) = 0$*, alors* $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$*, où* $F \in \mathcal{F}[0, A)$.

Théorème 2.1 *Soient* A, B, S *et* T *des applications d'un espace métrique* (X, d) *dans lui même telles que pour tout* $x, y \in X$,

$$F(d(Sx, Ty)) \leq \psi\Big(F(M(x, y)\Big), \tag{2.1}$$

où $M(x, y) = \max(d(Ax, By), d(Ax, Sx), d(By, Ty), d(Ax, Ty), d(By, Sx))$*,* $F \in \mathcal{F}$ *et* $\psi \in \Psi[0, F(A-0)$ *pour tout* $A \in (0, \infty)$*. Si les deux paires* (A, S) *et* (B, T) *sont faiblement sous-séquentiellement continues et compatibles de type (E), alors* A, B, S *et* T *ont un point fixe commun unique dans* X*.*

Preuve. Puisque la paire (A, S) est faiblement sous-séquentiellement continue, il existe une suite $\{x_n\}$ dans X telle que $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = \lim\limits_{n\to\infty} Sx_n = z$ et $\lim\limits_{n\to\infty} ASx_n = Az$. Comme (A, S) est aussi compatible de type (E), alors $\lim\limits_{n\to\infty} A^2x_n = \lim\limits_{n\to\infty} ASx_n = Sz$ et $lim_{n\to\infty} S^2x_n = \lim\limits_{n\to\infty} SAx_n = Az$,. D'où $Az = Sz$.

Par analogie, B et T sont faiblement sous-séquentiellement continues, il existe une suite $\{y_n\}$ dans X satisfaisant $\lim\limits_{n\to\infty} By_n = \lim\limits_{n\to\infty} Ty_n = t$ et $\lim\limits_{n\to\infty} BTy_n = Bt$. Ainsi la paire (B, T) est compatible de type (E), alors $\lim\limits_{n\to\infty} B^2y_n = \lim\limits_{n\to\infty} BTy_n) = Tt$, et $\lim\limits_{n\to\infty} T^2y_n = \lim\limits_{n\to\infty} TBy_n) = Bt$. D'où $Bt = Tt$. On va prouver que $Az = Bt$, sinon d'après (2.1) on a :

$$F(d(Sz, Tt)) \leq \psi(F(\max(d(Az, Bt), d(Az, Sz), d(Bt, Tt), d(Az, Tt), d(Bt, Sz))))$$

$$\leq \psi(F(d(Sz, Tt), 0, 0, d(Sz, Tt), d(Sz, Tt))).$$

$$\leq \psi(F(d(Sz, Tt))) < F(d(Sz, Tt)),$$

qui est une contradiction. Alors $Az = Sz = Bt = Tt$

. Montrons que $z = Az$, sinon en utilisant 2.1 on trouve

$$F(d(Sx_n, Tt)) \leq \psi(F(\max(d(Ax_n, Bt), d(Ax_n, Sx_n), d(Bt, Tt), d(Ax_n, Tt), d(Bt, Sx_n))))$$

. Lorsque $n \to \infty$, on obtient :

$$F(z, Az) \leq \psi(F(d(z, Tt), 0, 0, d(z, Tt), d(z, Bt)))$$

. Comme $Bt = Tt = Az$, alors

$$F(z, Az) \leq \psi(F(d(z, Tt)) < F(d(z, Az)),$$

qui est une contradiction. Donc $z = Az = Sz$.

Maintenant, on va prouver que $z = t$, sinon en appliquant (2.1), on trouve :

$$F(d(Sx_n, Ty_n)) \leq \psi(F(\max(d(Ax_n, By_n), d(Ax_n, Sx_n), d(By_n, Ty_n), d(Ax_n, Ty_n), d(By_n, Sx_n))))$$

. En faisant $n \to \infty$, on obtient :

$$F(d(z, t)) \leq \psi(F(\max(d(z, t), 0, 0, d(z, t), d(z, t)))) < F(d(z, t))$$

, qui est une contradiction. D'où $z = t$, par conséquant z est un point fixe commun pour A, B, S et T

Pour l'unicité, supposons qu'il existe un autre point fixe commun w. En appliquant (2.1) on trouve :

$$F(d(z, w)) = F(d(Sz, Tw)) \leq \psi(F(\max(d(Az, Bw), d(Az, Sz), d(Bw, Tw), d(Az, Tw), d(Bw, Sz))))$$

.

$$\leq \psi(F(d(z, w), 0, 0, d(z, w), d(z, w)))$$

.

$$\leq \psi(F(d(z, w))) < F(d(z, w))$$

qui est une contradiction. Alors $z = w$. ■

Si on combine Théorème 2.1 avec l'Exemple 2.1, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 *Soient A, B, S et T des applications d'un espace métrique (X, d) dans lui même satisfaisant :*

$$d(Sx, Ty) \leq \psi(\max(d(Ax, By), d(Ax, Sx), d(By, Ty), d(Ax, Ty), d(By, Sx))),$$

pour tout $x, y \in X$, où $\psi \in \Psi$. Si les paires (A, S), (B, T) sont faiblement sous-séquentiellement continues et compatibles de type (E), alors A, B, S et T ont un point fixe commun unique dans X.

Corollaire 2.1 améliore et généralise corollaire 1 dans le papier [100].

Corollaire 2.2 *Soient A, B, S and T des applications d'un espace métrique (X, d) dans lui même telles que pour tous $x, y \in X$:*

$$\int_0^{d(Sx,Ty)} \varphi(t)dt \leq \psi(\int_0^{\max(d(Ax,By),d(Ax,Sx),d(By,Ty),d(Ax,Ty),d(By,Sx))} \varphi(t)dt)$$

. Supposons en outre que les paires (A, S) et (B, T) sont faiblement sous-séquentiellement continues et compatibles de type (E), alors A, B, S et T ont un point fixe commun unique.

Si on combine l'Exemple 2.3 avec le Théorème 2.1, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 2.3 *Soient A, B, S et T des applications d'un espace métrique (X, d) dans lui même, satisfaisant pour tout $x, y \in X$:*

$$\int_0^{\int_0^{d(Sx,Ty)} \phi(s)ds} \varphi(t)dt \leq \psi(\int_0^{\int_0^{M(x,y)} \phi(s)ds} \varphi(t)dt),$$

où $M(x, y) = \max(d(Ax, By), d(Ax, Sx), d(By, Ty), d(Ax, Ty), d(By, Sx))$. Si les paires (A, S) et (B, T) sont faiblement sous-séquentiellement continues et compatibles de type (E), alors A, B, S et T possèdent un point fixe commun unique dans X.

Maintenant, nous allons supporter nos résultats par l'exemple suivant :

Exemple 2.4 *Soit $X = [0, 2]$ muni de la métrique euclidienne. Définissons A, B, S et T par :*

$$Ax = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \qquad Bx = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$Sx = \begin{cases} \frac{x+1}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \qquad Tx = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

.

On considère la suite $\{x_n\}$ définie pour tout $n \geq 1$ par :

$x_n = 1 - \frac{1}{n}$*. Il est clair que* $\lim_{n\to\infty} Ax_n = 1$ *et* $\lim_{n\to\infty} Sx_n = 1$*, on a aussi :*

$$\lim_{n\to\infty} ASx_n = A(1) = 1,$$

alors (A, S) est faiblement sous-séquentiellement continue

. Par ailleurs, on a $\lim_{n\to\infty} ASx_n = S1 = 1$ *et* $\lim_{n\to\infty} SAx_n = A(1) = 1$*, d'où (A, S) est compatible de type (E), de même pour la paire (B, T) on a :*

$$\lim_{n\to\infty} BTx_n = \lim_{n\to\infty} B(x_n) = B(1) = 1,$$

ce qui implique que (B, T) est faiblement sous-séquentiellement continue. D'autre part :

$$\lim_{n\to\infty} BTx_n = \lim_{n\to\infty} B(x_n) = T(1) = 1$$

et

$$\lim_{n\to\infty} TBx_n = T(1) = 1,$$

donc la paire (B, T) est compatible de type (E).

Choisissons $\psi(t) = \frac{2}{3}t$, clairement $\psi \in \Psi$ et $F \in \mathcal{F}$

1. *Pour $x, y \in [0, 1]$, on a :*

$$d(Sx, Ty) = \frac{1}{2}|x - 1| \leq |x - 1| = \frac{2}{3}d(Ax, Sx).$$

2. *Pour $x \in [0, 1]$ et $y \in (1, 2]$, on a :*

$$d(Sx, Ty) = \frac{x}{2} \leq \frac{1}{6}|2x + 1| = \frac{2}{3}d(Sx, By).$$

3. *Pour $x \in (1, 2], y \in [0, 1]$, on a :*

$$d(Sx, Ty) = \frac{1}{4} \leq \frac{2}{3} = \frac{2}{3}d(Ax, Ty).$$

4. *Pour $x, y \in (1, 2]$, on a :*

$$d(Sx, Ty) = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} = \frac{2}{3}d(Ax, Sx)$$

. Par conséquent, toutes les hypothèses du Corollaire2.1 sont vérifiées et le point 1 est le point fixe commun unique pour A, B, S et T.

Théorème 2.2 *Soient A, B, S et T des applications d'un espace métrique (X, d) dans lui même satisfaisant :*

$$F(d(Sx, Ty)) \leq \psi\Big(F(\max(d(Ax, By), d(Ax, Sx), d(By, Ty), \frac{d(Ax, Ty) + d(By, Sx)}{2}\Big), \quad (2.2)$$

pour tout $x, y \in X$, où $F \in \mathcal{F}$ et $\psi \in \Psi$. Si les deux paires (A, S) et (B, T) sont faiblement sous-séquentiellement continues et compatibles de type (E), alors A, B, S et T admettent un point fixe commun unique dans X.

Preuve. Elle est similaire à la preuve du Théorème2.1. ■

Théorème 2.3 *Soient A, B, S et T des applications d'un espace métrique (X, d) dans lui même satisfaisant :*

$$F(d(Sx, Ty)) \leq \psi\Big(F(M(x, y)\Big), \quad (2.3)$$

pour tout $x, y \in X$, où $M(x, y) = \max(d(Ax, By), d(Ax, Sx), d(By, Ty), d(Ax, Ty), d(By, Sx))$, $F \in \mathcal{F}$ et $\psi \in \Psi$. Si en outre l'une des conditions suivantes est satisfaite :

1. *Les paires (A, S) et (B, T) sont sous-séquentiellement continues, (A, S) est A-compatible de type (E) et (B, T) est B-compatible de type (E),*
2. *(A, S) et (B, T) sont A-sous-séquentiellement continues (B-sous-séquentiellement continues resp) et A-compatibles (B-compatibles resp) de type (E),*
3. *(A, S) et (B, T) sont S-sous-séquentiellement continue (T-sous-séquentiellement continue resp) et S-compatibles (T-compatibles resp) de type (E),*
4. *(A, S) et (B, T) sont sous-séquentiellement continues et S-compatibles (T-compatibles resp) de type (E),*

alors A, B, S et T ont un point fixe commun unique dans X.

2.2 Théorèmes de point fixe commun pour des contractions généralisées faibles

Les contractions faibles et les contractions généralisées faibles

Définition 2.1 *[86] Soit (X, d) un espace métrique. Une application $T : X \to X$ est dite une contraction faible si et seulement si il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, semi-continue supérieu-*

rement verifiant :

1. $\phi(x) = 0$ *si et seulement si* $x = 0$,
2. $$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \phi(d(x, y)).$$

Soit Ψ l'ensemble de toutes les fonctions croissantes et continues $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant $\psi(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
Soit Φ l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant $\phi(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Définition 2.2 *Une application T d'un espace métrique (X, d) dans lui même est dite satisfaisant une contraction généralisée faible si pour tout $x, y \in X$ on a :*

$$\psi(d(Tx, Ty)) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y))$$

, où $\psi \in \Psi$ et $\phi \in \Phi$

Théorème 2.4 *Soient (X, d) un espace métrique et $A, B, S, T : X \to X$ des applications satisfaisant :*

$$\psi(d(Sx, Ty)) \leq \psi(M(x, y)) - \phi(M(x, y)), \tag{2.4}$$

pour tout $x, y \in X$, où $M(x, y) = \max\{d(Ax, By), d(Ax, Sx), d(By, Ty), \frac{d(Ax,Ty)+d(By,Sx)}{2}\}$ et $\psi \in \Psi, \phi \in \Phi$. Si les deux paires (A, S) et (B, T) sont faiblement sous-séquentiellement continues (fsc) et compatibles de type (E), alors A, B, S et T admettent un point fixe commun unique dans X.

Preuve. Comme (A, S) est fsc, il existe une suite $\{x_n\}$ dans X telle que $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = \lim\limits_{n\to\infty} Sx_n = z$ et $\lim\limits_{n\to\infty} ASx_n = Az$, ainsi A et S sont compatibles de type (E), alors on a : $\lim\limits_{n\to\infty} A^2x_n = \lim\limits_{n\to\infty} ASx_n = Sz$ et $\lim\limits_{n\to\infty} S^2x_n = \lim\limits_{n\to\infty} SAx_n = Az$. Donc $Az = Sz$.
La paire (B, T) est fsc, il existe une suite $\{y_n\}$ dans X telle que $\lim\limits_{n\to\infty} By_n = \lim\limits_{n\to\infty} Ty_n = t$ et $\lim\limits_{n\to\infty} BTy_n = Bt$. Puisque (B, T) est aussi compatible de type (E), alors $\lim\limits_{n\to\infty} B^2y_n = \lim\limits_{n\to\infty} BTy_n) = Tt$, et $\lim\limits_{n\to\infty} T^2y_n = \lim\limits_{n\to\infty} TBy_n) = Bt$. D'où $Bt = Tt$.
Si $Az \neq Bt$, en appliquant (2.4), on trouve :

$$\psi(d(Sz, Tt)) \leq \psi(\max(d(Az, Bt), d(Az, Sz), d(Bt, Tt), d(Az, Tt), d(Bt, Sz)))$$

$$-\phi(\max(d(Az,Bt),d(Az,Sz),d(Bt,Tt),d(Az,Tt),d(Bt,Sz)))$$

$$\leq \psi(\max(d(Sz,Tt),0,0,d(Sz,Tt),d(Sz,Tt))) - \phi(\max(d(Sz,Tt),0,0,d(Sz,Tt),d(Sz,Tt))),$$

$$\leq \psi(d(Sz,Tt)) - \phi(d(Sz,Tt)) < \psi(d(Az,Bt))$$

qui est une contradiction. Donc $Az = Sz = Bt = Tt$.

Maintenant, si $z \neq Az$ en appliquant 2.4), on obtient :

$$\psi(d(Sx_n,Tt)) \leq \psi(\max(d(Ax_n,Bt),d(Ax_n,Sx_n),d(Bt,Tt),d(Ax_n,Tt),d(Bt,Sx_n)))$$

$$-\phi(\max(d(Ax_n,Bt),d(Ax_n,Sz),d(Bt,Tt),d(Ax_n,Tt),d(Bt,Sx_n))).$$

En faisant $n \to \infty$, on obtient :

$$\psi(d(z,Tt) \leq \psi(\max(d(z,Bt),0,0,d(z,Tt),d(z,Bt))) - \phi(\max(d(z,Tt),0,0,d(z,Tt),d(z,Bt))).$$

Comme $Az = Bt = Tt$ on trouve :

$$\psi(d(z,Az) \leq \psi(d(z,Az)) - \phi(d(z,Az)) < \psi(d(z,Az)),$$

qui est une contradiction et donc $z = Az = Sz$.

Prochainement, on va démontrer $z = t$, sinon en utilisant (2.4), on trouve :

$$\psi(d(Sx_n,Ty_n)) \leq \psi(M(x_n,y_n)) - \phi(M(x_n,y_n)).$$

Lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\psi(d(z,t)) \leq \psi(\max(d(z,t),0,0,d(z,t),d(z,t))) - \phi\max(d(z,t),0,0,d(z,t),d(z,t))$$

$$< \psi(d(z,t)),$$

qui est une contradiction. Alors $z = t$, d'où z est un point fixe commun pour A, B, S et T.

Pour l'unicité, supposons qu'il existe un autre point fixe commun w. D'après (2.4), on obtient :

$$\psi(d(z,w)) = \psi(d(Az,Bw)) \leq \psi(M(z,w)) - \phi(M(z,w))$$

$$\leq \psi(d(z,w)) - \phi(d(z,w))$$

$$< \psi(d(z,w)),$$

qui est une contradiction et donc z est unique. ■ Si $\psi(t) = t$, on obtient le corollaire suivant

Corollaire 2.4 *Soient (X, d) un espace métrique, A, B, S et T sont des applications de X dans lui même telles que pour tout $x, y \in X$ on a :*

$$d(Sx, Ty) \leq M(x, y) - \phi(M(x, y))$$

, où $\phi \in \Phi$ et $M(x, y) = \max(d(Ax, By), d(Ax, Sx), d(By, Ty), \frac{1}{2}(d(Ax, Ty) + d(By, Sx)))$. Supposons que les deux paires (A, S) et (B, T) sont fsc et compatibles de type (E). Alors A, B, S et T ont un point fixe commun unique dans X.

Si $A = B$ et $S = T$ on obtient :

Corollaire 2.5 *Soient A et S deux applications d'un espace métrique (X, d) dans lui même telles que pour tout $x, y \in X$ on a :*

$$\psi(d(Sx, Sy)) \leq \psi(\max(d(Ax, Ay), d(Ax, Sx), d(Ay, Sy), \frac{1}{2}(d(Ax, Sy) + d(Ay, Sx)))$$
$$-\phi(\max(d(Ax, Ay), d(Ax, Sx), d(Ay, Sy), \frac{1}{2}(d(Ax, Sy) + d(Ay, Sx)))),$$

. Si (A, S) est fsc et compatible de type (E), alors A et S possèdent un point fixe commun unique dans X.

Théorème 2.5 *Soient A, B, S et T des applications d'un espace métrique (X, d) dans lui même satisfaisant (2.4). Supposons en outre que :*

1. *(A, S) est A-sous-séquentiellement continue et A-compatible de type (E),*
2. *(B, T) est B-sous-séquentiellement continue et B-compatible de type (E),*

. Alors A, B, S et T admettent un point fixe commun unique dans X.

Dans la suite, on va établir des résultats concernant des applications satifaisant une condition contractive généralisée faible.

Théorème 2.6 *Soient A, B, S et T des applications d'un espace métrique (X, d) dans lui même, satisfaisant*

$$d(Sx, Ty)) \leq \varphi(N(x, y)), \tag{2.5}$$

pour tout $x, y \in X$,, où $N(x, y) = \max(d(Ax, By), d(Ax, Sx), d(By, Ty), d(Ax, Ty), d(By, Sx))$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction croissante et semi-continue supérieurement telle que $\varphi(t) = 0$

si et seulement si $t = 0$ *et pour tout* $t > 0, \varphi(t) < t$. *Supposons que les deux paires* (A, S) *et* (B, T) *sont faiblement sous-séquentiellement continues et compatibles de type (E). Alors* A, B, S *et* T *ont un point fixe commun unique dans* X.

Preuve. Elle est similaire à la preuve du Théorème 2.4 ■

Corollaire 2.6 *Soient* A, B, S *et* T *des applications d'un espace métrique* (X, d) *dans lui même, satisfaisant :*

$$d(Sx, Ty) \leq \alpha \max(d(Ax, By), d(Ax, Sx), d(By, Ty), d(Ax, Ty), d(By, Sx))),$$

pour tout $x, y \in X$, *où* $0 \leq \alpha < 1$. *Si les paires* (A, S) *et* (B, T) *sont faiblement sous-séquentiellement continues et compatibles de type (E), alors* A, B, S *et* T *ont un point fixe commun unique dans* X.

Corollaire 2.6 améliore et généralise Corollaire 1 dans le papier [92].

Exemple 2.5 *Soient* $X = [0, 1]$ *et* d *la métrique euclidienne. Définissons* A, B, S *et* T *par*

$$Ax = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \qquad Bx = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$Sx = \begin{cases} \frac{2x+1}{4}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \qquad Tx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{4}, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Considérons une suite $\{x_n\}$ *définie pour tout* $n \geq 2$ *par :*
$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. *Clairement* $\lim_{n\to\infty} Ax_n = \dfrac{1}{2}$ *and* $\lim_{n\to\infty} Sx_n = \dfrac{1}{2}$. *On a aussi :*

$$\lim_{n\to\infty} ASx_n = A(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2},$$

alors (A, S) *est fsc.*
D'ailleurs on a : $\lim_{n\to\infty} ASx_n = S(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$ *et* $\lim_{n\to\infty} SAx_n = A(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{2}$, *ce qui implique que* (A, S) *est compatible de type (E).*
Pour la paire (B, T), *soit* $\{y_n\}$ *une suite définie par* $x_n = \frac{1}{2} - e^{-n}$,*pour tout* $n \geq 1$. *Il est clair que :*

$$\lim_{n\to\infty} By_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n = \frac{1}{2}$$

. *On a aussi :*

$$\lim_{n\to\infty} BTx_n = B(\frac{1}{2}) = T(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2},$$

ça implique que (B, T) *est* B*-sous-séquentiellement continue et* T*-compatible de type (E).*

Pour la condition contractive, on a les cas suivants :

1. *Pour* $x, y \in [0, \frac{1}{2}]$, *on a :*

$$d(Sx, Ty) = \frac{1}{4}|2x-1| \leq \frac{1}{3}|2x-1| = \frac{2}{3}d(Ax, Ty).$$

2. *Pour* $x \in [0, \frac{1}{2}]$ *et* $y \in (\frac{1}{2}, 1]$, *on a*

$$d(Ax, By) = \frac{1}{4}|2x-y+1| \leq \frac{1}{6}|4-y| = \frac{2}{3}d(By, Ty).$$

3. *Pour* $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ *et* $y \in [0, \frac{1}{2}]$, *on a :*

$$d(Sx, Ty) = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} = \frac{2}{3}d(Ax, Sx).$$

4. *Pour* $x, y \in (\frac{1}{2}, 1]$, *on a*

$$d(Sx, Ty) = \frac{1}{4}|1-y| \leq \frac{1}{2} = \frac{2}{3}d(By, Sx)$$

.

Par conséquent, toutes les hypothèses du Corollaire2.6, avec $\alpha = \frac{2}{3}$ *sont satisfaites. Donc* $\frac{1}{2}$ *est le point fixe commun unique pour* A, B, S *et* T.

Chapitre 3

Théorèmes de point fixe commun pour des contractions de type intégrale

Dans le chapitre présent on va détailler nos travaux [19],[23] concernant :

1. Un théorème de point fixe pour deux applications multivoques et deux applications univoques fortement tangentielles et faiblement compatibles satsifaisant une condition contractive liée par une fonction implicite.
2. Deux théorèmes de point fixe de type Gregus pour deux applications multivoques et deux applications univoques sous-séquentiellement continues et compatibles.

3.1 Applications fortement tangentielles et point fixe commun

3.1.1 Relations implicites

Considérons $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions continues $\mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant :

(F_1) : F est croissante en t_1 et décroissante en t_2, t_3, t_4, t_5.

(F_2) : Pour tout $u > 0$ on a :

$$F(u,0,0,u,u) > 0, F(u,0,u,0,u) > 0, F(u,0,u,0,2u) > 0.$$

Théorème 3.1 *Soient $A, B : X \to X$, deux applications univoques et $S, T : X \to B(X)$ deux applications multivoques sur un espace métrique (X,d) satisfaisant :*

$$F\Big(\int_0^{\delta(Sx,Ty)}\varphi(t)dt, \int_0^{d(Ax,By)}\varphi(t)dt, \int_0^{D(Ax,Sx)}\varphi(t)dt,$$

$$\int_0^{D(By,Ty)}\varphi(t)dt,\int_0^{D(Ax,Ty)+D(By,Sx)}\varphi(t)dt\Big)\leq 0, \tag{3.1}$$

pour tout x,y dans X, où $F\in\mathcal{F}$ et $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue qui est sommable sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}_+$, telle que pour un certain $\varepsilon>0,\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt>0$, et vérifiant l'inégalité suivante :

$$\int_0^{a+b}\varphi(t)dt\leq\int_0^{a}\varphi(t)dt+\int_0^{b}\varphi(t)dt, \tag{3.2}$$

pour tout $a>0,b>0$. Supposons que la paire (A,B) est fortement tangentielle par rapport à (S,T) et les paires $(A,S),(B,T)$ sont faiblement compatibles. Alors A,B,S et T admettent un point fixe commun unique dans X.

Preuve. Puisque $\{A,B\}$ est fortement tangentielle par rapport à (S,T), alors il existe deux suites $\{x_n\},\{y_n\}$ dans X, telles que

$$\lim_{n\to\infty}Sx_n=\lim_{n\to\infty}Ty_n=M,\ \text{ et }\ \lim_{n\to\infty}Ax_n=\lim_{n\to\infty}By_n=z\in M,$$

et $z\in A(X)\cap B(X)$, ce qui implique il existe $u,v\in X$, tels que $z=Au=Bv$.
Premièrement, on va démontrer $z\in Su$, sinon d'après (3.1) on a :

$$F\Big(\int_0^{\delta(Su,Ty_n)}\varphi(t)dt,\int_0^{d(Au,By_n)}\varphi(t)dt,\int_0^{D(Au,Su)}\varphi(t)dt,\int_0^{D(By_n,Ty_n)}\varphi(t)dt,$$
$$\int_0^{D(Au,Ty_n)+D(By_n,Su)}\varphi(t)dt\Big)\leq 0,$$

en faisant $n\to\infty$, comme $z\in M$ et $D(M,Su)\leq\delta(Su,M)$, on obtient :

$$F\Big(\int_0^{\delta(Su,Au)}\varphi(t)dt,0,\int_0^{\delta(Au,Su)}\varphi(t)dt,0,\int_0^{\delta(Au,Su)}\varphi(t)dt\Big)\leq$$

$$F\Big(\int_0^{\delta(Su,M)}\varphi(t)dt,0,\int_0^{D(Au,Su)}\varphi(t)dt,0,\int_0^{D(Au,Su)}\varphi(t)dt\Big)\leq 0,$$

qui est une contradiction avec (F_2). Alors $\delta(Su,Au)=0$, d'où $Su=\{Au\}=\{z\}$ et u est un point de coïncidence strict pour A et S.
Maintenant, montrons que $z=Bv\in Tv$, sinon d'après (3.1) on obtient :

$$F\Big(\int_0^{\delta(Sx_n,Tv)}\varphi(t)dt,\int_0^{d(Ax_n,Bv)}\varphi(t)dt,\int_0^{D(Ax_n,Sx_n)}\varphi(t)dt,\int_0^{D(Av,Tv)}\varphi(t)dt,$$
$$\int_0^{D(Ax_n,Tv)+D(Bv,Sx_n)}\varphi(t)dt\Big)\leq 0,$$

en faisant $n \to \infty$, comme $z \in M$ et $D(M,Tv) \leq \delta(Tv,Bv)$, on obtient :

$$F\Big(\int_0^{\delta(Bv,Tv)}\varphi(t)dt, 0, 0, \int_0^{\delta(Bv,Tv)}\varphi(t)dt, 0, \int_0^{\delta(Bv,Tv)}\varphi(t)dt\Big) \leq,$$

$$F\Big(\int_0^{\delta(M,Tv)}\varphi(t)dt, 0, 0, \int_0^{D(Bv,M)}\varphi(t)dt, 0, \int_0^{D(Bv,M)}\varphi(t)dt\Big) \leq 0,$$

qui est une contradiction avec (F_2). Alors $\delta(Bv,Tv) = 0$, d'où $Tv = \{Bv\}$.

La paire (A,S) est faiblement compatible, ce qui implique $ASu = SAu$, alors $Sz = \{Az\}$. De même pour (B,T), on trouve que le point v est un point de coïncidence strict, d'où $Tz = \{Bz\}$.

Prochainement, si $z \neq Az$, en appliquant (3.1), on trouve :

$$F\Big(\int_0^{\delta(Sz,Tv)}\varphi(t)dt, \int_0^{d(Az,Bv)}\varphi(t)dt, \int_0^{D(Az,Sz)}\varphi(t)dt,$$
$$\int_0^{D(Bv,Tv)}\varphi(t)dt, \int_0^{D(Az,Tv)+D(Bv,Sz)}\varphi(t)dt\Big) \leq 0,$$

l'inégalité (3.2) implique :

$$F\Big(\int_0^{d(Az,z)}\varphi(t)dt, \int_0^{d(Az,z)}\varphi(t)dt, 0, 0, 2\int_0^{d(Az,z)}\varphi(t)dt\Big) \leq$$
$$F\Big(\int_0^{\delta(Sz,Tv)}\varphi(t)dt, \int_0^{d(Az,gv)}\varphi(t)dt, \int_0^{D(Az,Sz)}\varphi(t)dt,$$
$$\int_0^{D(Bv,Tv)}\varphi(t)dt, \int_0^{D(Az,Tv)+D(Bv,Sz)}\varphi(t)dt\Big) \leq 0,$$

qui est une contradiction. Alors $Sz = \{Az\} = \{z\}$.

Similairement, on va démontrer que $z = Bz$, sinon en utilisant (3.1), on trouve :

$$F\Big(\int_0^{\delta(Sz,Tz)}\varphi(t)dt, \int_0^{d(Az,gz)}\varphi(t)dt, \int_0^{D(Az,Sz)}\varphi(t)dt,$$
$$\int_0^{D(Bz,Tz)}\varphi(t)dt, \int_0^{D(Az,Tz)+D(Bz,Sz)}\varphi(t)dt\Big) \leq 0.$$

D'après (3.2, on obtient :

$$F\Big(\int_0^{d(Bz,z)}\varphi(t)dt, \int_0^{d(Bz,z)}\varphi(t)dt, 0, 0, 2\int_0^{d(Bz,z)}\varphi(t)dt\Big) \leq$$
$$F\Big(\int_0^{\delta(Sz,Tv)}\varphi(t)dt, \int_0^{d(Az,Bv)}\varphi(t)dt, \int_0^{D(Az,Sz)}\varphi(t)dt,$$
$$\int_0^{D(Bv,Tv)}\varphi(t)dt, \int_0^{D(Az,Tv)+D(Bv,Sz)}\varphi(t)dt\Big) \leq 0,$$

qui est une contradiction. D'où $Tz = \{Bz\} = \{z\}$ et donc z est point fixe commun pour A, B, S et T. Il est strict pour S et T .

Pour l'unicité, supposons qu'il existe un autre point fixe w, d'après (3.1) on a :

$$F\Big(\int_0^{d(z,w)}\varphi(t)dt, \int_0^{d(z,w)}\varphi(t)dt, 0, 0, 2\int_0^{D(z,w)}\varphi(t)dt\Big) \leq,$$

$$F\Big(\int_0^{\delta(Sz,Tw)}\varphi(t)dt, \int_0^{d(Az,Bw)}\varphi(t)dt, \int_0^{D(Az,Sz)}\varphi(t)dt,$$

$$\int_0^{D(Bw,Tw)}\varphi(t)dt, \int_0^{D(Az,Tw)+D(Bw,Sz)}\varphi(t)dt\Big) \leq 0,$$

qui est une contradiction avec (F_2). Donc z est unique. ■

Remarque 3.1 *Théorème 3.1 améliore et généralise théorème 1 de Sedghi et al.[88] et théorème 2 du papier[**?**] aux applications multivoques.*

Si $A = B$ et $S = T$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.1 *Soient $A : X \to X$, et $S : X \to B(X)$ des applications sur un espace métrique (X, d) satisfaisant :*

$$F\Big(\int_0^{\delta(Sx,Sy)}\varphi(t)dt, \int_0^{d(Ax,By)}\varphi(t)dt, \int_0^{D(Ax,Sx)}\varphi(t)dt,$$

$$\int_0^{D(Ay,Sy)}\varphi(t)dt, \int_0^{D(Ax,Sy)+D(Ay,Sx)}\varphi(t)dt\Big) \leq 0,$$

où $F \in \mathcal{F}$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue et sommable sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}_+$ satisfaisant (3.2) et $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt > 0$, pout tout $\varepsilon > 0$.

Supposons en outre que A est fortement tangentielle par rapport à S et la paire (A, S) est faiblement compatible. Alors A et S ont un point fixe commun unique dans X.

Corollaire 3.2 *Soient $A, B : X \to X$, et $S, T : X \to B(X)$ des Applications univoques et multivoques respectivement sur un espace métrique (X, d) satisfaisant :*

$$\int_0^{\delta(Sx,Ty)}\varphi(t)dt \leq \alpha\int_0^{d(Ax,By)}\varphi(t)dt + \beta\int_0^{D(Ax,Sx)}\varphi(t)dt + \gamma\int_0^{D(By,Ty)}\varphi(t)d),$$

où α, β, γ sont des nombres réels positifs satisfaisant $\alpha + \beta + \gamma$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue et sommable sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}_+$ satisfaisant (3.2) et $\int_0^{\varepsilon}\varphi(t)dt > 0$ pout tout $\varepsilon > 0$.

Si (A, B) est fortement tangentielle par rapport à (S, T) et les deux paires (A, S) et (B, T) sont faiblement compatibles, alors A, B, S et T admettent un point fixe commun unique dans X.

Preuve. Il est clair que la fonction : $F : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}$, définie par

$$F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = t_1 - (\alpha t_2 + \beta t_3 + \gamma t_4),$$

où $\alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \delta < 1$ satisfait (F_1) et F_2). Donc $F \in \mathcal{F}$. ■

Corollaire 3.3 *Soient $A, B : X \to X$, et $S, T : X \to B(X)$ des applications univoques et multivoques respectivement sur un espace métrique (X, d) telles que :*

$$\int_0^{\delta(Sx,Ty)} \varphi(t)dt \leq \alpha \max(\int_0^{d(Ax,By)} \varphi(t)dt, \int_0^{D(Ax,Sx)} \varphi(t)dt, \int_0^{D(By,Sy)} \varphi(t)d)$$

$$+\beta \int_0^{D(Ax,Ty)+D(By,Sx)} \varphi(t)dt,$$

où $\alpha + 2\beta < 1$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}_+$ vérifiant (3.2), telle que pour tout $\varepsilon > 0, \int_0^\varepsilon \varphi(t)dt > 0$. Si (A, B) est tangentielle par rapport à (S, T) et les deux paires (A, S) et (B, T) sont faiblement compatibles, alors A, B, S et T ont un point fixe commun unique dans X.

Preuve. Il suffit de voir que la fonction $F : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}$, définie par :

$$F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = t_1 - \alpha \max(t_2, t_3, t_4) - \beta t_5,$$

où $\alpha + 2\beta < 1$ satisfait (F_1) et (F_2).
(F_1) : évidente.
(F_2) : Pout tout $u > 0$, on a $F(u, 0, 0, u, u) = F(u, 0, u, 0, u) = (1-\alpha-\beta)u > 0$, et $F(u, 0, u, 0, 2u) = (1 - \alpha - 2\beta)u > 0$, par conséquent $F \in \mathcal{F}$. ■

Corollaire 3.3 généralise corollaire 2 dans le papier [88].

Exemple 3.1 *Soient $X = [0, 4]$, $d(x, y) = |x - y|$, A, B, S et T définies par :*

$$Ax = \begin{cases} \frac{x+2}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & 2 < x \leq 4 \end{cases} \quad Bx = \begin{cases} 4 - x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$Sx = \begin{cases} \{2\}, & 0 \leq x \leq 2 \\ (2, \frac{9}{4}], & 2 < x \leq 4 \end{cases} \quad Tx = \{2\}.$$

Soient les deux suites définies par : $x_n = 2 - \frac{1}{n}, y_n = 2 - e^{-n}$, pour tout $n \geq 1$. Il est clair que

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} By_n = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n = \{2\},$$

ce qui implique que la paire (A, B) *est fortement tangentielle par rapport à* (S, T)*. Le point* $u = 2$ *satisfait* $A(2) = 2 \in S(2), B(2) = 2 \in T(2)$ *et* $AS(2) = \{2\} = SA(2)$ *et* $BT(2) = \{2\} = TB(2)$*. Donc,* $\{A, S\}$ *et* $\{B, T\}$ *sont faiblement compatibles. On va prendre dans le Théorème 3.1*

$$F(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = t_1 - \frac{2}{3}\max(t_2, t_3, t_4, \frac{1}{2}t_5)$$

Pour l'inégalité (3.1) on a les cas suivants :

1. *pour* $x, y \in [0, 2]$ *, on a :*

$$\delta(Sx, Ty) = 0 \leq \frac{1}{3}|x-1| = \frac{2}{3}D(Ax, Sx),$$

2. *pour* $x \in [0, 2]$ *et* $y \in (2, 4]$*, on a :*

$$\delta(Sx, Ty) = 0 \leq \frac{4}{3} = \frac{2}{3}D(By, Ty),$$

3. *pour* $x, y \in (2, 4]$*, on a :*

$$\delta(Sx, Ty) = \frac{1}{4} \leq \frac{2}{3} = \frac{2}{3}d(Ax, By),$$

4. *pour* $x \in (2, 4]$ *et* $y \in [0, 2]$*, on a :*

$$\delta(Sx, Ty) = \frac{1}{4} \leq \frac{2}{3} = \frac{2}{3}D(Ax, Sx)$$

.

D'où A, B, S *et* T *satisfont toutes les hypothèses du Théorème (3.1) et* $S(2) = T(2) = \{A(2)\} = \{B(2)\} = \{2\}$*, donc le point 2 est un point fixe commun unique pour* A, B, S *et* T*, il est strict pour* S *et* T*.*

3.2 Théorèmes du point fixe commun de type Gregus

Soit Ω l'ensemble de toutes les fonctions continues $\tau : \mathbb{R}_+^4 \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant $\tau(0, 0, x, x) = x$.

Exemple 3.2

$$\tau(t_1, t_2, t_3, t_4) = \max\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$$

Exemple 3.3

$$\tau(t_1,t_2,t_3,t_4)=\frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{2}$$

Exemple 3.4

$$\tau(t_1,t_2,t_3,t_4)=\max\{t_1,t_2,\sqrt{t_1t_3},\sqrt{t_3t_4}\}$$

Théorème 3.2 *Soient $A,B:X\to X$ et $S,T:X\to CB(X)$ des applications sur un espace métrique (X,d) satisfaisant*

$$\Big(1+a\Big(\int_0^{d(Ax,By)}\varphi(t)\Big)^p\Big)\Big(\int_0^{H(Sx,Ty)}\varphi(t)dt\Big)^p<$$

$$a\Big[\Big(\int_0^{d(Ax,Sx)}\varphi(t)dt\Big)^p\Big(\int_0^{d(By,Ty)}\varphi(t)dt\Big)^p+\Big(\int_0^{d(Sx,By)}\varphi(t)dt\Big)^p\Big(\int_0^{d(Ax,Ty)}\varphi(t)dt\Big)^p\Big]$$

$$+\alpha\Big(\int_0^{d(Ax,By)}\varphi(t)dt\Big)^p$$

$$+\beta\tau\Big(\Big(\int_0^{d(Ax,Sx)}\varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(By,Ty)}\varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(Ax,Ty)}\varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(By,Sx)}\varphi(t)dt)^p\Big)\Big),\tag{3.3}$$

pour tout x,y dans X , où a,α,β sont des nombres positifs, tels que $\alpha+\beta<1$ et $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue et sommable sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}_+$ satisfaisant $\int_0^\varepsilon\varphi(t)dt>0$, pout tout $\varepsilon>0$.
Si les paires $(A,S),(B,T)$ sont sous-séquentiellement continues et compatibles, alors A,B,S et T ont un point fixe commun dans X.

Preuve. Puisque (A,S) est sous-séquentiellement continue, il existe une suite $\{x_n\}$dans$X$ satisfaisant :

$$\lim_{n\to\infty}Sx_n=M,\ \lim_{n\to\infty}Ax_n=z\in M\text{et}$$

$$\lim_{n\to\infty}ASx_n=AM,\ \lim_{n\to\infty}SAx_n=Sz.$$

La compatibilité de la paire (A,S) implique

$$\lim_{n\to\infty}H(ASx_n,SAx_n)=H(AM,Sz)=0,$$

d'où $Sz=AM$. Donc z est un point de coïncidence pour A et S.
De même pour B et T, il existe une suite $\{y_n\}\subset X$, telle que

$$\lim_{n\to\infty}Ty_n=N\ \text{ et }\ \lim_{n\to\infty}By_n=t\in N$$

. la paire (B, T) est sous-séquentiellement continue, alors :

$$\lim_{n\to\infty} BTy_n = BN \text{ et } \lim_{n\to\infty} TBy_n = Tt$$

. La paire $\{B, T\}$ est compatible, alors :

$$\lim_{n\to\infty} H(BTy_n, Tgy_n) = H(BN, Tt) = 0,$$

donc $BN = Tt$. D'où t est un point de coïncidence pour B et T.

Premièrement, montrons que $Az = Bt$, sinon en appliquant (3.3), on trouve :

$$\Big(1 + a\Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)\Big)^p\Big)\Big(\int_0^{H(Sz,Tt)} \varphi(t)dt\Big)^p <$$

$$a\Big(\int_0^{d(Az,Tt)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big(\int_0^{d(Bt,Sz)} \varphi(t)dt\Big)^p + \alpha\Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p$$

$$+\beta\tau\Big(0, 0, \Big(\int_0^{d(Az,Tt)} \varphi(t)dt\Big)^p, \Big(\int_0^{d(Sz,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big)$$

. Comme $Az \in Sz$ et $Bt \in Tt$, on obtient :

$$\Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)\Big)^p = \Big(\int_0^{H(\{Az\},\{Bt\})} \varphi(t))^p < \alpha\Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)\Big)^p$$

$$+\beta\tau\Big(0, 0, \Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p, \Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big)$$

$$< (\alpha + \beta)\Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p < \Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p$$

, qui est une contradiction, donc $Az = Bt$.

Maintenant, si $z \neq Az$, en utilisant (3.3) on trouve :

$$\Big(1 + a\Big(\int_0^{d(Ax_n,Bt)} \varphi(t)\Big)^p\Big)\Big(\int_0^{H(Sx_n,Tt)} \varphi(t)dt\Big)^p <$$

$$a\Big[\Big(\int_0^{d(Ax_n,Sx_n)} \varphi(t)dt\Big)^p.\Big(\int_0^{d(Bt,Tt)} \varphi(t)dt\Big)^p + \Big(\int_0^{d(Bt,Sx_n)} \varphi(t)dt\Big)^p.\Big(\int_0^{d(Ax_n,Tt)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big]$$

$$+\alpha\Big(\int_0^{d(Ax_n,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p$$

$$+\beta\tau\Big(\Big(\int_0^{d(Ax_n,Sx_n)} \varphi(t)dt\Big)^p, 0, \Big(\int_0^{d(Ax_n,Tt)} \varphi(t)dt\Big)^p, \Big(\int_0^{d(Sx_n,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big),$$

en laissant $n \to \infty$, on a :

$$\Big(1 + a(\int_0^{d(z,Az)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big)\Big(\int_0^{d(z,Az)} \varphi(t)dt\Big)^p \leq$$

$$\Big(1+a\Big(\int_0^{d(z,Az)}\varphi(t)\Big)^p\Big)\Big(\int_0^{H(M,Az)}\varphi(t)dt\Big)^p < a\Big(\int_0^{d(Bt,M)}\varphi(t)dt\Big)^p.)Big(\int_0^{d(z,Tt)}\varphi(t)dt)\Big)^p$$
$$+\alpha\Big(\int_0^{d(z,Az)}\varphi(t)dt\Big)^p+\beta\tau\Big(0,0,\Big(\int_0^{d(z,Tt)}\varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(Az,M)}\varphi(t)dt\Big)^p\Big)$$

. Puisque $d(z,Tt)\leq H(M,Tt)$, $Az=Bt$ et $d(Az,M)\leq d(Az,z)$, on obtient :

$$\Big(\int_0^{H(M,Tt)}\varphi(t)dt\Big)^p<(\alpha+\beta)\Big(\int_0^{d(z,Az)}\varphi(t)dt\Big)^p$$

. Comme $z\in M$ et $Az=Bt\in Tt$, on obtient :

$$\Big(\int_0^{d(z,Az)}\varphi(t)\Big)^p=\Big(\int_0^{H(\{z\},\{Az\})}\varphi(t)\Big)^p<(\alpha+\beta)\Big(\int_0^{d(z,Az)}\varphi(t)\Big)^p$$
$$<\Big(\int_0^{d(z,Az)}\varphi(t)\Big)^p$$

, qui est une contradiction. Donc $z=Az\in Sz$.

Si $z\neq t$, en appliquant(3.3) on trouve :

$$\Big(1+a\Big(\int_0^{d(Ax_n,By_n)}\varphi(t)\Big)^p\Big)\Big(\int_0^{H(Sx_n,Ty_n)}\varphi(t)dt\Big)^p<$$
$$a\Big[\Big(\int_0^{d(Ax_n,Sx_n)}\varphi(t)dt\Big)^p.\Big(\int_0^{d(By_n,Ty_n)}\varphi(t)dt\Big)^p+\Big(\int_0^{d(Ax_n,Ty_n)}\varphi(t)dt\Big)^p.\Big(\int_0^{d(By_n,Sx_n)}\varphi(t)dt\Big)^p\Big]$$
$$+\alpha\Big(\int_0^{d(Ax_n,By_n)}\varphi(t)dt\Big)^p+\beta\tau\Big(\Big(\int_0^{d(Ax_n,Sx_n)}\varphi(t)dt)^p,\Big(\int_0^{d(By_n,Ty_n)}\varphi(t)dt)^p,$$
$$\Big(\int_0^{d(Ax_n,Ty_n)}\varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(Sx_n,By_n)}\varphi(t)dt\Big)^p).$$

En faisant $n\to\infty$, on a :

$$\Big(1+a(\int_0^{d(z,t)}\varphi(t))^p\Big)\Big(\int_0^{H(M,N)}\varphi(t)dt\Big)^p<$$
$$a\Big(\int_0^{d(z,N)}\varphi(t)dt\Big)^p.\Big(\int_0^{d(t,M)}\varphi(t)dt\Big)^p$$
$$+\alpha\Big(\int_0^{d(z,t)}\varphi(t)dt\Big)^p+\beta\tau\Big(0,0,\Big(\int_0^{d(z,N)}\varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(t,M)}\varphi(t)dt\Big)^p,$$

comme $d(t,M)\leq d(t,z)$, $d(z,N)\leq d(t,z)$ et $d(z,M)\leq H(M,N)$, on trouve :

$$\Big(\int_0^{H(M,N)}\varphi(t)dt\Big)^p<\alpha\Big(\int_0^{d(z,t)}\varphi(t)dt\Big)^p+\beta\tau\Big(\Big(0,0,\Big(\int_0^{d(z,t)}\varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(z,t)}\varphi(t)dt\Big)^p$$

, ce qui implique

$$\Big(\int_0^{d(z,t)}\varphi(t)dt\Big)^p=\Big(\int_0^{H(\{z\},\{t\})}\varphi(t)dt\Big)^p<$$

$$(\alpha+\beta)\Big(\int_0^{d(z,t)}\varphi(t)dt\Big)^p,$$

qui est une contradiction. Alors z est un point fixe commun pour A, B, S et T. ∎

Si $a = 0$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.4 *Soient $A, B : X \to X$ des applications univoques et $S, T : X \to CB(X)$ des applications multivoques satisfaisant :*

$$\Big(\int_0^{H(Sx,Ty)}\varphi(t)\Big)^p < \alpha\Big(\int_0^{d(Ax,By)}\varphi(t)dt\Big)^p\Big)$$

$$+\beta\tau\Big(\Big(\int_0^{d(Ax,Sx)}\varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(By,Ty)}\varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(Ax,Ty)}\varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(By,Sx)}\varphi(t)dt\Big)^p\Big),$$

où α, β sont des nombres positifs tels que $\alpha+\beta < 1$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction définie dans le Théorème (3.2. Supposons que les paires $\{A, S\}$ et $\{B, T\}$ sont sous-séquentiellement continues et compatibles. Alors A, B, S et T admettent un point fixe commun dans X.

Corollaire 3.4 améliore corollaire 2.6 dans [82] et généralise le corollaire 2 dans [35] pour les applications multtivoques. Il améliore aussi théorème 3 et corollaire 3.8 dans [94].
Si on combine Théorème 3.2 avec l'exemple et $p = 1$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.5 *Soient $A, B : X \to X$ des applications univoques et $S, T : X \to CB(X)$ des multivoques satisfaisant :*

$$\Big(1+a(\int_0^{d(Ax,By)}\varphi(t))\Big)\int_0^{H(Sx,Ty)}\varphi(t)dt <$$

$$\alpha\Big((\int_0^{d(Ax,Sx)}\varphi(t)dt).(\int_0^{d(By,Ty)}\varphi(t)dt)+(\int_0^{d(Sx,By)}\varphi(t)dt).(\int_0^{d(Ax,Ty)}\varphi(t)dt)\Big)$$

$$+a\Big(\int_0^{d(Ax,By)}\varphi(t)dt\Big)+(1-a)\max\{\int_0^{d(Ax,Sx)}\varphi(t)dt,\int_0^{d(By,Ty)}\varphi(t)dt,$$

$$\Big(\int_0^{d(Ax,Ty)}\varphi dt\Big)^{\frac{1}{2}}.\Big(\int_0^{d(By,Sx)}\varphi(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}},\Big(\int_0^{d(Ax,Ty)}\varphi(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}}.\Big(\int_0^{d(By,Sx)}\varphi(t)dt\Big)^{\frac{1}{2}}\},$$

où $0 \leq \alpha < 1$ et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction définie dans le Théorème (3.2. Supposons en outre que les paires (A, S) et (B, T) sont sous-séquentiellement continues et compatibles. Alors A, B, S et T ont un point fixe commun dans X.

Corollaire 3.5 améliore Corollaire 3.7 dans [94], il généralise aussi le théorème 2.5 de Pathak et Shahzad [82] et théorème 4 de Djoudi et Aliouche [38] pour les applications multivoques.

Corollaire 3.6 *Soient $A, B : X \to X$ des applications univoques d'un espace métrique (X, d) dans lui même et $S, T : X \to CB(X)$ des aplications multivoques satisfaisant :*

$$(1 + ad^p(Ax, By))H^p(Sx, Ty) < a\Big[d^p(Ax, Sx).d^p(Bt, Ty) + d^p(By, Sx).d^p(Ax, Sx)\Big]$$

$$+\alpha d^p(Ax, By) + \beta\tau\Big(d^p(Ax, Sx), d^p(By, Ty), d(Ax, Ty), d^p(Ax, Ty)\Big).$$

Si les deux paires (A, S) et (B, T) sont sous-séquentiellement continues et compatibles, alors A, B, S et T ont un point fixe commun dans X.

Soit Λ l'ensemble de toutes les fonctions continues $\lambda : \mathbb{R}_+^5 \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant $\lambda(0, 0, x, x, x) = kx$, où $0 < k < 1$.

Théorème 3.3 *Soient $A, B : X \to X$, des applications univoques et $S, T : X \to CB(X)$ des applications multivoques sur un espace métrique (X, d) satisfaisant :*

$$\Big(1 + a\Big(\int_0^{d(Ax,By)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big)\Big(\int_0^{H(Sx,Ty)} \varphi(t)dt\Big)^p <$$

$$\lambda\Big(\Big(\int_0^{d(Ax,Sx)} \varphi(t)dt\Big)^p, \Big(\int_0^{d(By,Ty)} \varphi(t)dt\Big)^p, \Big(\int_0^{d(Ax,Ty)} \varphi(t)dt\Big)^p,$$

$$\Big(\int_0^{d(By,Sx)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big), \Big(\int_0^{d(Ax,By)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big), \tag{3.4}$$

pour tout x, y dans X, où $\lambda \in \Lambda$ et $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction intégrable au sens de Lebesgue et sommable sur tout sous-ensemle compact de $\mathbb{R}_+$ satisfaisant $\int_0^\varepsilon \varphi(t)dt > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Supposons de plus que les paires (A, S) et (B, T) sont sous-séquentiellement continues et compatibles. Alors A, B, S et T admettent un point fixe commun dans X.

Preuve. Comme dans la preuve du Théorème 3.2, z est un point de coïncidence pour A et S, t est aussi point de coïncidence pour B et T, et on a :

$$\lim_{n\to\infty} By_n = t \text{ et } \lim_{n\to\infty} Ax_n = z$$

. On va montrer que $Az = Bt$, sinon d'après (3.4) on a :

$$\Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)\Big)^p = \Big(\int_0^{H(\{Az\},\{Bt\})} \varphi(t)dt\Big)^p <$$

$$\lambda(0, 0, (\int_0^{d(Az,Tt)} \varphi(t)dt\Big)^p, \Big(\int_0^{d(Sz,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p, \Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big),$$

Puisque $d(Sz,Bt) \leq d(Az,Bt)$ et $d(Az,Tt) \leq d(Az,Bt)$, on trouve :

$$\Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)\Big)^p < \lambda\Big(0,0,\Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big)$$

$$= k\Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p < \Big(\int_0^{d(Az,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p,$$

qui est une contradiction. Alors $Az = Bt$.

Maintenant, on va prouver que $z = Az$, sinon en appliquant (3.4,) on trouve :

$$\Big(\int_0^{H(Sx_n,Tt)} \varphi(t)dt\Big)^p \leq \Big(1 + a\Big(\int_0^{d(Ax_n,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big)\Big(\int_0^{H(Sx_n,Tt)} \varphi(t)dt\Big)^p$$

$$< \lambda\Big(\Big(\int_0^{d(Ax_n,Sx_n)} \varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(Bt,Tt)} \varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(Ax_n,Sx_n)} \varphi(t)dt\Big)^p,$$

$$\Big(\int_0^{d(Bt,Sx_n)} \varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(Ax_n,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big)\Big)$$

. Lorsque $n \to \infty$, on obtient :

$$\Big(\int_0^{H(M,Tt)} \varphi(t)dt\Big)^p \leq \Big(1 + a\Big(\int_0^{d(z,Bt)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big)\Big(\int_0^{H(M,Tt)} \varphi(t)dt\Big)^p <$$

$$\lambda\Big(0,0,\Big(\int_0^{d(z,Tt)} \varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(Bt,M)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big),\big(\int_0^{d(z,Bt)} \varphi(t)dt)^p\Big)$$

. D'où on obtient

$$\Big(\int_0^{d(z,Az)} \varphi(t)\Big)^p = \Big(\int_0^{H(\{z\},\{Az\})} \varphi(t)dt\Big)^p < \lambda\Big(0,0,\Big(\int_0^{d(z,Az)} \varphi(t)\Big)^p,\Big(\int_0^{d(z,Az)} \varphi(t)\Big)^p,\Big(\int_0^{d(z,Az)} \varphi(t)\Big)^p\Big)$$

$$= k\Big(\int_0^{d(z,Az)} \varphi(t)\Big)^p < \Big(\int_0^{d(z,Az)} \varphi(t)\Big)^p,$$

qui est une contradiction. Donc $z = Az \in Sz$. On va démontrer que $z = t$, sinon en utilisant 3.4, on trouve :

$$\Big(\int_0^{H(Sx_n,Ty_n)} \varphi(t)dt\Big)^p \leq \Big(1 + a\Big(\int_0^{d(Ax_n,By_n)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big)\Big(\int_0^{H(Sx_n,Ty_n)} \varphi(t)dt\Big)^p$$

$$< \lambda\Big(\Big(\int_0^{d(Ax_n,Sx_n)} \varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(By_n,Ty_n)} \varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(Ax_n,Ty_n)} \varphi(t)dt\Big)^p,$$

$$\Big(\int_0^{d(By_n,Sx_n)} \varphi(t)dt\Big)^p,\Big(\int_0^{d(Ax_n,By_n)} \varphi(t)dt)^p\Big)$$

. Lorsque $n \to \infty$, on trouve :

$$\Big(\int_0^{H(M,N)} \varphi(t)dt\Big)^p <$$

$$\lambda\Big(0, 0, \Big(\int_0^{d(z,N)} \varphi(t)dt\Big)^p, \Big(\int_0^{d(t,M)} \varphi(t)dt\Big)^p\Big), (\int_0^{d(z,t)} \varphi(t)dt)^p\Big),$$

comme $d(z, N) \leq d(z, t)$ et $d(t, M) \leq d(z, t)$, on obtient :

$$\Big(\int_0^{d(z,t)} \varphi(t)\Big)^p = \Big(\int_0^{H(\{z\},\{t\})} \varphi(t)dt\Big)^p < \lambda\Big(0, 0, \Big(\int_0^{d(z,t)} \varphi(t)\Big)^p, \Big(\int_0^{d(z,t)} \varphi(t)\Big)^p, \Big(\int_0^{d(z,t)} \varphi(t)\Big)^p\Big)$$

$$= k\Big(\int_0^{d(z,t)} \varphi(t)\Big)^p < \Big(\int_0^{d(z,t)} \varphi(t)\Big)^p,$$

qui est une contradiction. Donc z est un point fixe commun pour A, B, S et T. ■

Corollaire 3.7 *Soient $A, B : X \to X$ des applications univoques et $S, T : X \to CB(X)$ des applications multivoques sur un espace métrique (X, d) satisfaisant :*

$$H^p(Sx, Ty) < \lambda\Big(d^p(Ax, Sx), d^p(Bt, Ty), d^p(By, Ty), d^p(Ax, Ty), d^p(By, Sx), d^p(Ax, By)\Big),$$

pour tout $x, y \in X$. Si les deux paires (A, S) et (B, T) sont sous-séquentiellement continues et compatibles, alors A, B, S et T ont un point fixe commun dans X.

Chapitre 4

Théorèmes de point fixe commun dans les espaces métriques partiels

Le contenu de ce chapitre concerne des théorèmes de point fixe commun dans des espaces métriques partielles pour des contractions faiblement généralisées pour des applications tangentielles et faiblement compatibles.

4.1 Les espaces métriques partiels et ses propriétés

Définition 4.1 *[66]Soit X un ensemble non vide. Une fonction :$p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ est dite une métrique partielle sur X si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$p(x,x) = p(y,y) = p(x,y)$ si et seulement si $x = y$.*
2. *$p(x,x) \leq p(x,y)$, pour tout $x, y \in X$.*
3. *$p(x,y) = p(y,x)$, pour tout $x, y \in X$.*
4. *$p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$, pour tout $x, y, z \in X$.*

L'espace (X, p) est dit espace métrique partiel.

Clairement que si $p(x,y) = 0$, alors les deux premières conditions impliquent $x = y$.
Toute métrique partielle p sur X génère une topologie τ_p sur X, où elle a une base la famille des p-boules ouvertes, $\{B_p(x,\varepsilon); x \in X, \varepsilon > 0\}$, où $B_p(x,\varepsilon) = \{y \in X; p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon\}$ pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$.

Si p est une métrique partielle sur X, alors la fonction $p^s : X \times X \to R^+$ définie par

$$p^s(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$$

est une métrique sur X.

Définition 4.2 *[66] Soit (X, p) un espace métrique partiel.*

1. *Une suite $\{x_n\}$ dans X et dite convergente vers $x \in X$ pour la topologie τ_p si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} p(x, x_n) = p(x, x)$$

.

2. *Une suite $\{x_n\}$ dans X est dite suite de Cauchy si $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n, x_m)$ existe et est finie.*
3. *(X, p) est dit complet si toute suite de Cauchy $\{x_n\}$ dans X est convergente pour la topologie τ_p vers un point $x \in X$, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} p(x, x_n) = p(x, x)$.*
   Dans ce cas, on dit que la métrique partielle p est complete.

Plus récenmment, Nazir et Abbas [74] ont définie la propriété (E.A) dans les espaces métriques partiels comme suit :

Définition 4.3 *[74] Soient A, S deux applications d'un espace métrique partiel (X, p) dans lui même. La paire (A, S) satisfait la propriété (E.A) s'il existe une suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant*

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = z,$$

pour un certain $z \in X$ avec $p(z, z) = 0$.

Définition 4.4 *Soient (X, p) un espace métrique partiel et A, B, S et T des applications de X dans lui même. La paire $\{A, B\}$ est dite tangentielle par rapport à (S, T) s'il existe deux suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ dans X vérifiant :*

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = z,$$

$$\lim_{n\to\infty} By_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n = z$$

et $p(z, z) = 0$ pour un certain $z \in X$.

Exemple 4.1 *Soit $X = \mathbb{R}_+$ muni de la métrique partielle p définie par :*

$$p(x, y) = \max\{x, y\}$$

. Définissons A, B, S et T par :

$$Ax = 2x, \quad Sx = \ln(x+1)$$

$$Bx = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases} \qquad Tx = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ x + 1,, & x > 2 \end{cases}$$

Soient les deux suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ définies pour tout $n \geq 1$ par :

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = 2 - \frac{1}{n}.$$

Clairement $\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} By_n = 0$. Alors $\{A, B\}$ est tangentielle par rapport à (S, T).

Dans le papier [35], les auteurs ont introduit et utilisé les applications fortement tangentielles dans les espaces métriques, ils ont ajouté une modification. Dans la suite on va voir ce concept dans les espaces métriques partiels :

Définition 4.5 *Soient (X, p) un espace métrique partiel et A, B, S et T des applications de X dans lui même. La paire (A, B) est dite fortement tangentielle par rapport à (S, T), s'il existe deux suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ dans X telles que $\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = z$, $\lim_{n\to\infty} By_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n = z$ et $z \in AX \cap BX$ avec $p(z, z) = 0$.*

Soit Ψ l'ensemble de toutes les fonctions continues $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant :

1. $\psi(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$,
2. ψ croissante.

Soit Φ l'ensemble de toutes les fonctions semi-continues superièurement $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $\phi(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Théorème 4.1 *Soient (X, p) un espace métrique partiel et $A, B, S, T : X \to X$ sont des applications satisfaisant :*

$$\psi(p(Sx, Ty)) \leq \psi(M(x, y)) - \phi(M(x, y)), \tag{4.1}$$

pour tout $x, y \in X$, où $M(x, y) = \max\{p(Ax, By), p(Ax, Sx), p(By, Ty), \dfrac{p(Ax, Ty) + p(By, Sx)}{2}\}$ et $\psi \in \Psi, \phi \in \Phi$. Si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. AX et BX sont fermés,

2. la paire (A, B) est tangentielle par rapport à (S, T),

3. (A, S) et (B, T) sont faiblement compatibles.

Alors A, B, S et T ont un point fixe commun unique dans X.

Preuve. Puisque la paire (A, B) est tangentielle par rapport à (S, T), il existe deux suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ telles que $\{Ax_n\}, \{By_n\}, \{Sx_n\}$ et $\{Ty_n\}$ convergent vers le même point $z \in X$ avec $p(z, z) = 0$. Comme AX et BX sont fermés alors $z \in AX$ et $z \in BX$. Par conséquent, $z \in AX \cap BX$, donc il existe $u, v \in X$ vérifiant $z = Au = Bv$.
Premièrement, on va prouver que $Su = z$, sinon d'après (4.1), on trouve :

$$M(Su, Ty_n) = \max\{p(Au, By_n), p(Au, Su), p(By_n, Ty_n), \frac{1}{2}(p(Au, Ty_n) + p(By_n, Su))\}$$

. Lorsque $n \to \infty$, on obtient :

$$M(Su, Ty_n) \to p(Su, z),$$

$$\psi(p(Su, z)) \leq \psi(p(Su, z)) - \phi(p(Su,),$$

qui est une contradiction. Alors $p(Su, z) = 0$, d'où $Su = z$.
Maintenant, on va démontrer que $Tv = z$, sinon on trouve

$$M(Sx_n, Tv) = \max\{p(Ax_n, Bv), p(Ax_n, Sx_n), p(Bv, Tv), \frac{1}{2}(p(Ax_n, Tv) + p(Bv, Sx_n))\},$$

en faisant $n \to \infty\infty$,, on a :

$$M(Sx_n, Tv) \to p(z, Tv).$$

En utilisant (4.1), on obtient

$$\psi(p(z, Tv)) \leq \psi(p(z, Tv)) - \phi(p(z, Tv) < \psi(z, Tv),$$

qui est une contradiction. Donc $Tv = z$.
Puisque la paire (A, S) est faiblement compatible alors $Az = Sz$, de même pour la paire (B, T), on trouve $Bz = Tz$. D'où le point z est un point de coïncidence pour (A, S) et (B, T). Si $z \neq Az$, en utilisant (4.1 on trouve :

$$M(Sz, Ty_n) = \max\{p(Az, gy_n), p(Az, Sz), p(By_n, Ty_n), \frac{1}{2}(p(fz, Ty_n) + p(gy_n, Sz))\}.$$

En faisant $n \to \infty$, on a :

$$M(fz, Ty_n) \to p(fz, z).$$

En appliquant (4.1), on obtient

$$\psi(p(Az,z)) \leq \psi(p(Az,z)) - \phi(p(Az,z) < \psi(Az,z),$$

qui est une contradiction. Alors $p(Az,z) = 0$, d'où $Az = z$.

Par analogie, on trouve que $Bz = Tz = z$.

Pour l'unicité, supposons qu'il existe un autre point fixe w. En utilisant (4.1), on obtient

$$\psi(Sz, Tw) \leq \psi(M(z,w)) - \phi(p(M(z,w))),$$

où $M(z,w) = p(z,w)$ et $\psi(Sz,Tw) = \psi(z,w)$, alors

$$\psi(z,w) \leq \psi(z,w) - \phi(z,w) < \psi(z,w),$$

qui est une contradiction. Donc z est unique. ■

Si $S = T$ et $A = B$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 4.1 *Soient (X,p) un espace métrique partiel et $A, S : X \to X$ deux applications satisfaisant :*

$$\psi(Sx, Sy) \leq \psi(M(x,y)) - \phi(M(x,y)),$$

pour tout $x, y \in X$, où $M(x,y) = \max\{p(Ax,Ay), p(Ax,Sx), p(Ay,Sy), \dfrac{p(Ax,Sy)+p(Ay,Sx)}{2}\}$.
Supposons en outre que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. *$A(X)$ est fermé,*
2. *A est tangentielle par rapport à S,*
3. *la paire (A,S) est faiblement compatible.*

Alors A et S ont un point fixe commun unique dans X.

En Choisissant $\psi(t) = t$ dans le Théotème 4.1, on obtient :

Corollaire 4.2 *Soient (X,p) un espace métrique partiel et A, B, S et T des applications de X dans lui même satisfaisant :*

$$p(Sx, Ty) \leq M(x,y) - \phi(M(x,y)),$$

où $\phi \in \Phi$ et $M(x,y) = \max\{p(Ax,By), p(Ax,Sx), p(By,Ty), \frac{1}{2}(p(Ax,Ty)+p(By,Sx))\}$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. *$A(X)$ et $B(X)$ sont fermés,*
2. *(A,B) est tangentielle par rapport à (S,T),*
3. *les paires (A,S) et (B,T) sont faiblement compatibles,*

alors A, B, S et T possèdent un point fixe commun unique dans X.

Exemple 4.2 *Soit $X = [0,2]$ muni de la distance partielle $p(x,y) = \max\{x,y\}$. Définissons les applications A, B, S et T de X dans lui même par :*

$$Ax = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{15}{8}, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad Bx = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$Sx = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad Tx = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

On a $AX = [0,2]$ et $BX = [0, \frac{3}{2}]$, d'où ils sont fermés et $0 \in AX \cap BX = [0, \frac{3}{2}]$.

Pour tout $n \geq 1$. Considérons les deux suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ dans X définies par :

$$x_n = \frac{1}{n}, \;\; y_n = e^{-n},$$

clairement

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} By_n = 0.$$

D'ailleurs, on a :

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n = 0$$

et $p(0,0) = 0$. Alors la paire (A,B) est tangentielle par rapport à (S,T).

Il est clair que 0 est l'unique point de coïncidence pour A et S, de même pour B et T, on a aussi $AS0 = SA0 = 0$ et $TB0 = BT0 = 0$, donc les deux paires (A,S) et (B,T) sont faiblement compatibles.

Pour la condition contractive, choisissons $\phi(t) = \frac{1}{5}t$ dans le Corollaire 4.2, on va voir que pour tout $x, y \in X$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$p(Sx,Ty) \leq M(x,y) - \frac{1}{5}M(x,y) = \frac{4}{5}M(x,y),$$

où $M(x,y) = \max\{p(Ax,By), p(Ax,Sx), p(By,Ty), \frac{1}{2}(p(Ax,Ty)+p(By,Sx))$.

1. *Pour $x, y \in [0,1]$, on a*

$$p(Sx,Ty) = \frac{x}{2} \leq \frac{8}{5}x = \frac{4}{5}p(Ax,Sx).$$

2. *pour $x \in [0,1]$ et $1 < y \leq 2$, on a*

$$p(Sx,Ty) = \frac{1}{2} \leq \frac{4}{5} = \frac{4}{5}p(By,Ty).$$

3. *Pour $x > 1$ et $y \in [0,1]$, on a*

$$p(Sx,Ty) = \frac{1}{4} \leq \frac{3}{2} =\leq \frac{4}{5}p(Ax,Sx).$$

4. *Pour $x, y \in (1,\infty)$, on a*

$$p(Sx,Ty) = \frac{1}{2} \leq \frac{8}{5} = \frac{4}{5}p(Ax,By).$$

Par conséquent, toutes les hypothèses du Corollaire 4.2 sont satisfaites (avec $\psi(t) = t$ et $\phi(t) = \frac{1}{5}t$), donc 0 est l'unique point fixe commun pour A, B, S et T.

Prochainement, on va prouver l'existence d'un point fixe commun pour quatre applications, satisfaisant une condition contractive généralisée.

Théorème 4.2 *Soient (X,p) un espace métrique partiel et $A, B, S, T : X \to X$ des applications de X dans lui même telles que pour tout $x, y \in X$*

$$p(Sx,Ty)) \leq \varphi(M(x,y)), \tag{4.2}$$

où $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction semi-continue et croissante satisfaisant $\varphi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$, pour tout $t > 0, \varphi(t) < t$ et

$$M(x,y) = \max(p(Ax,By), p(Ax,Sx), p(By,Ty), p(Ax,Ty), p(By,Sx)).$$

Suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. *$\overline{TX} \subseteq AX$ et $\overline{SX} \subseteq BX$*
2. *la paire (A,B) est tangentielle par rapport à (S,T),*
3. *les paires (A,S) et (B,T) sont faiblement compatibles,*

alors A, B, S et T admettent un point fixe commun unique dans X.

Preuve. Puisque la paire (A, B) est tangentielle par rapport à (S, T), alors il existe deux suites $\{x_n\}, \{y_n\}$ satisfaisant

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Ty_n = z,$$

avec $p(z, z) = 0$, où $\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} By_n = z$.
Comme Ty_n est convergente vers $z \in \overline{TX} \subset AX$, alors il existe $u \in X$, tel que $z = Au$.
On va prouver que $Su = z$. En prenant $x = u$ et $y = y_n$, on obtient

$$M(Su, Ty_n) = \max\{p(Au, By_n), p(Au, Su), p(By_n, Ty_n), p(Au, Ty_n), p(By_n, Su)\}$$

. Lorsque $n \to \infty$, on trouve

$$M(Su, Ty_n) \to p(Su, z),$$

Maintenant d'après (4.2), on obtient

$$p(Su, z)) \leq \varphi(p(Su, z)) < p(Su, z),$$

qui est une contradiction. Alors $p(Su, z) = 0$, d'où $Su = z$.
D'autre part $Sx_n \to z \in \overline{SX} \subset BX$, il existe $v \in X$ tel que $z = Bv$. Montrons que $Tv = z$, sinon pour $x = x_n$ et $y = v$ dans $M(x, y)$, on trouve

$$M(Sx_n, Tv) = \max\{p(Ax_n, Bv), p(Ax_n, Sx_n), p(Bv, Tv), p(Ax_n, Tv), p(Bv, Sx_n)\},$$

en faisant $n \to \infty$, on obtient

$$M(Sx_n, Tv) \to p(z, Tv),$$

en appliquant (4.2), on trouve

$$p(z, Tv)) \leq \varphi(p(z, Tv)) < p(z, Tv),$$

qui est une contradiction, alors $Tv = z$.
Puisque la paire (A, S) et (B, T) sont faiblement compatibles, alors $Az = Sz$ et $Bz = Tz$. Donc z est un point de coïncidence pour A et S, et pour B et T.
Si $z \neq Az$, on obtient :

$$M(Sz, Ty_n) = \max\{p(Az, By_n), p(Az, Sz), p(By_n, Ty_n), \frac{1}{2}(p(Az, Ty_n) + p(By_n, Sz))\}.$$

Lorsque $n \to \infty$, on trouve

$$M(Az, Ty_n) \to p(Az, z),$$

en appliquant (4.2), on obtient

$$p(Az, z) \leq \varphi(p(Az, z)) < \varphi(Az, z),$$

qui est une contradiction. Alors $p(Az, z) = 0$, d'où $Az = z$. Par analogie, $Bz = z$. Par conséquent, z est un point fixe commun pour A, B, S et T.

Pour l'unicité, elle est similaire à celle du Théorème 4.1. ∎

Corollaire 4.3 *Soient (X, p) un espace métrique partiel et $A, S : X \to X$ des applications satisfaisant :*

$$p(Sx, Sy) \leq \varphi(M(x, y)),$$

où $M(x, y) = \max\{p(Ax, Ay), p(Ax, Sx), p(Ay, Sy), p(Ax, Sy), p(Ay, Sx)\}$. Si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. *$\overline{S(X)} \subset A(X)$,*
2. *A est tangentielle par rapport à S,*
3. *la paire (A, S) est faiblement compatible,*

alors A et S possèdent un point fixe commun unique dans X.

Corollaire 4.4 *Soient (X, p) un espace métrique partiel et $A, B, S, T : X \to X$ des applications satisfaisant :*

$$p(Sx, Sy) \leq \alpha \max\{p(Ax, By), p(Ax, Sx), p(By, Ty), p(Ax, Sy), p(By, Sx)\},$$

où $0 \leq \alpha < 1$. Si $\overline{TX} \subset A(X)$, $\overline{SX} \subset BX$ et (A, B) est Tangentielle par rapport à (S, T), alors A, B, S et T ont un point de coïncidence. De plus, si les deux paires (A, S) et $\{B, T\}$ sont faiblement compatibles, alors A, B, S et T admettent un point fixe commun unique dans X.

Maintenant, on va obtenir le même résultat du Théorème 4.2 en utilisant les applications fortement tangentielles.

Théorème 4.3 *Soient (X, p) un espace métrique partiel et A, B, S et T sont des applications sur X satisfaisant (4.2). Si (A, B) est fortement tangentielle par rapport à (S, T) et les deux paires (A, S) et (B, T) sont faiblement compatibles, alors A, B, S et T ont un point fixe commun unique dans X.*

Preuve. Elle est similaire à celle du Théorème 4.2, dans ce cas nous avons directement $z \in AX \cap BX$. ∎

Chapitre 5

Théorèmes de point fixe commun dans les espaces métriques généralisés

Dans ce chapitre on va présenter des théorèmes pour des applications satisfaisant une condition contractive de type Berinde et qui sont faiblement compatibles.

5.1 Les espaces métriques généralisés et ses propriétés

Mustafa et Sims [71] ont introduit une importante généralisation pour les espaces métriques dont ils ont appelés les espaces métriques généralisés ou espaces G-métriques. Premièrement, nous allons donner quelques définitions basiques et propriétés concernant ces espaces.

Définition 5.1 *[71] Soit X un ensemble non vide. Une fonction $G : X \times X \times X \to R_+$ est dite une métrique généralisée (G-métrique) sur X si et seulement si elle satisfait les conditions suivantes :*

1. $G(x, y, z) = 0$ *ssi* $x = y = z$,
2. $G(x, x, y) > 0$, *pour tout* x, y *avec* $x \neq y$,
3. $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$, *pour tout* $x, y, z \in X$ *avec* $z \neq y$,
4. $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = ...$ *(symétrie pour les trois variables),*
5. $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$, *pour tout* $x, y, z, a \in X$ *(inégalité rectangulaire).*

L'espace (X, G) est dit espace métrique généralisé (G-métrique).

Si pour tout $x, y \in X$ on a $G(x, y, y) = G(y, x, x)$, alors (X, G) est dit espace G-métrique symétrique.

Proposition 5.1 *[71] Soit (X, G) un espace G-métrique. La fonction $d_G : X \times X \to R+$ telle que pour tout $x, y \in X$, on a*

$$d_G(x, y) = G(x, y, y) + G(y, x, x),$$

définit une métrique sur X.

Si G est symétrique, alors pour tout $x, y \in X$ on a $d_G \leq 2G(x, y, y)$ et si cette dernière inégalité n'est pas véfifié on obtient :

$$\frac{3}{2}G(x, y, y) \leq d_G(x, y) \leq 3G(x, y, y)$$

pour tout $x, y \in X$.

Définition 5.2 *[71] Soit (X, G) un espace G-métrique.*

- *Une suite $\{x_n\}$ est dite suite de Cauchy si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tels que $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$, pour tout $n, m, l \geq k$, c'est àdire : $G(x_n, x_m, x_l)$ tend vers 0 quand $n, m, l \to \infty$.*
- *Une suite $\{x_n\}$ est G-convergente si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ et $n_0 \in N$, tels que pour tout $n, m \geq n_0$, $G(x, x_n, x_m) < \varepsilon$.*

(X, G) est dit G-complet si toute suite G-Cauchienne $\{x_n\}$ dans X est G-convergente vers un point $x \in X$, c'est à dire : $\lim\limits_{n,m\to\infty} G(x, x_n, x_m) = 0$. Dans ce cas, on dit que l'espace G-métrique est G-complet.

Proposition 5.2 *[71] Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\{x_n\}$ est G-convergente vers x in X,*
2. *$G(x_n, x_m, x) \to 0$ quand $n, m \to \infty$,*
3. *$G(x_n, x_n, x) \to 0$ quand $n \to \infty$,*
4. *$G(x_n, x, x) \to 0$ quand $n \to \infty$.*

Définition 5.3 *[4] Soient (X,G) un espace G-métrique et A,B deux applications de X dans lui même. A et B sont :*

- *G-compatibles si $\lim_{n\to\infty} G(ABx_n, ABx_n, BAx_n) = 0$, où $\{x_n\}$ est une suite dans X telle que Ax_n et Bx_n sont G-convergentes vers un certain $z \in X$,*
- *G-non-compatibles s'il existe une suite $\{x_n\}$ dans X telle que les suites $\{Ax_n\}$ et $Bx_n\}$ sont G-convergentes vers un certain $z \in X$, mais $\lim_{n\to\infty} G(ABx_n, ABx_n, BAx_n) \neq 0$ ou n'existe pas.*

Définition 5.4 *[13] Soient (X,d) un espace métrique et T une application de X dans lui même. L'application T satisfait la condition (B) s'il existe $\delta, \geq 0, L \geq 0$ tels que pour tout $x,y \in X$, on a :*

$$d(Tx,Ty) \leq \delta d(x,y) + L\min(d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)).$$

Abbas et al .[2] ont donné une généralisation à la dernière définition pour deux applications, appelée condition (B) généralisée.

Définition 5.5 *[2] Soient (X,d) un espace métrique et $S,T : X \to X$ deux Applications. L'application T satisfait la condition (B) généralisée associée avec S si il existe $\delta \in (0,1)$ et $L \geq 0$ satisfaisant*

$$d(Tx,Ty) \leq \delta M(x,y) + L\min\{d(Sx,Tx), d(Sy,Ty), d(Sx,Ty), d(Sy,Tx)\},$$

où $M(x,y) = \max\{d(Sx,Sy), d(Sx,Tx), d(Sy,Ty), \dfrac{d(Sx,Ty)+d(Sy,Tx)}{2}\}$.

Soient (X,G) un espace G-métrique et $A,B,S,T : X \to X$ sont des applications satisfaisant :

$$T(X) \subset A(X) \text{ et } S(X) \subset B(X), \tag{5.1}$$

il existe $\delta \in [0,1)$ et $L \geq 0$ tels que pour tout $x,y \in X$, on a :

$$G(Sx,Ty,Ty)) \leq \delta M(x,y,y)) + L\min\{G(Ax,Sx,Sx), G(By,Ty,Ty), G(Ax,Ty,Ty), G(By,By,Sx)\}, \tag{5.2}$$

où

$$M(x,y,y) = \max\{G(Ax,By,By), G(Sx,Ax,Ax), G(By,Ty,Ty), \frac{1}{2}(G(Sx,By,By)+G(Ax,Ty,Ty))\},$$

Soit x_0 un arbitraire dans X. Comme $S(X) \subset B(X)$, il existe un point $x_1 \in X$ tel que $Bx_1 = Sx_0$. Pour ce point, il existe un point $x_2 \in X$ satisfaisant $Ax_2 = Tx_1$. En continuant sur cette manière, on peut construire deux suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ dans X comme suit :

$$\begin{cases} y_{2n+1} = Bx_{2n+1} = Sx_{2n}, \\ y_{2n+2} = Ax_{2n+2} = Tx_{2n+1} \\ \end{cases} . \tag{5.3}$$

Lemme 5.1 *La suite $\{y_n\}$ définie par (5.3) est une suite de Cauchy dans (X, G).*

Preuve. Premièrement on va prouver :

$$\lim_{n\to\infty} G(y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+2}) = 0$$

.

$$G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2}) = G(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}) \leq \delta \max\{G(Ax_{2n}, Bx_{2n+1}, Bx_{2n+1}),$$

$$G(Sx_{2n}, Ax_{2n}, Ax_{2n}), G(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), \frac{1}{2}(G(Sx_{2n}, Bx_{2n+1}, Bx_{2n+1}) + (G(Ax_{2n}, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}))\}$$

$$+L \min\{G(Ax_{2n}, Sx_{2n}, S_{2n}), G(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}),$$

$$G(Ax_{2n}, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), G(Bx_{2n+1}, Bx_{2n+1}, Sx_{2n})\}$$

$$= \delta \max\{G(y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n+1}), G(y_{2n+1}, y_{2n}, y_{2n}), G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2}),$$

$$\frac{1}{2}(G(y_{2n+1}, y_{2n+1}, y_{2n+1}) + G(y_{2n}, y_{2n+2}, y_{2n+2}))\} + L \min\{G(y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n+1})$$

$$G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2}), G(y_{2n}, y_{2n+2}, y_{2n+2}), G(y_{2n+1}, y_{2n+1}, y_{2n+1})\}$$

$$= \delta \max\{G(y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n+1}), G(y_{2n+1}, y_{2n}, y_{2n}), G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2}),$$

$$\frac{1}{2}[G(y_{2n}, y_{2n+2}, y_{2n+2}) + G(y_{2n}, y_{2n+2}, y_{2n+2})]\} + L \min\{G(y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n+1}), G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2}, 0)\}$$

$$\leq \delta \max\{G(y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n+1}), G(y_{2n+1}, y_{2n}, y_{2n}), G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2}), G(y_{2n+2}, y_{2n}, y_{2n}\},$$

$$G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+}) \leq \delta G(y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n+1}).$$

Si

$$G(y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n+1}) \leq G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2}),$$

en appliquant (5.1), on obtient :

$$G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2}) \leq \delta G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2}) < G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2}),$$

qui est une contradiction, donc on a :

$$G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2}) \leq \delta G(y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n+1})$$

$$\leq \delta^2 G(y_{2n-1}, y_{2n}, y_{2n})$$

$$\leq \delta^3 G(y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n-1})$$

$$... \leq \delta^{2n+1} G(y_0, y_1, y_1).$$

Par induction, on trouve :

$$G(y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+2}) \leq \delta^{n+1} G(y_0, y_1, y_1).$$

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, tels que $m > n$, on a :

$$G(y_n, y_m, y_m) \leq G((y_n, y_{n+1}), y_{n+1}) + G(y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+2}) + ... + G(y_{m-1}, y_m, y_m)$$

$$\leq \delta^n \Big(1 + \delta + ... + \delta^{m-n}) G(y_0, y_1, y_1)$$

$$\leq \frac{\delta^n}{1-\delta} G(y_0, y_1, y_1) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Pour $n, m, l \in \mathbb{N}$ et d'après l'inégalité rectangulaire on obtient :

$$G(y_n, y_m, y_l) \leq G(y_n, y_m, y_m) + G(y_l, y_m, y_m),$$

en faisant $n, m, l \to \infty$, on trouve : $\lim\limits_{n,m,l\to\infty} G(y_n, y_m, y_l) = 0$. D'où $\{y_n\}$ est une suite G-Cauchienne dans (X, G). La complètude de (X, G) implique que $\{y_n\}$ est G-convergente vers un certain $z \in X$. ∎

Théorème 5.1 *Soient (X, G) un espace G-métrique complet et A, B, S et T des applications sur X satisfaisant (5.1),(5.2) et $A(X)$ ou $B(X)$ est fermé. Si en outre (A, S) et (B, T) sont faiblement compatibles, alors A, B, S et T ont un point fixe commun unique dans X.*

Preuve. D'après le Lemme 5.1, la suite $\{y_n\}$ est G-Cauchienne et puisque (X, G) est complet, alors elle est G-convergente vers $z \in X$. La sous-suite $\{y_{2n+2}\} = \{Ax_{2n+2}\}$ converge aussi vers

z. Comme $A(X)$ est fermé, alors il existe $u \in X$ tel que $z = Au$.

On va démontrer que $z = Su$, sinon d'après(5.2), on trouve :

$$G(Su, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}) \leq \delta \max\{G(Au, Bx_{2n+1}, Bx_{2n+1}), G(Au, Su, Su),$$

$$G(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), \frac{1}{2}(G(Au, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}) + G(Su, Bx_{2n+1}, Bx_{2n+1}))\}$$

$$+L \min\{G(Au, Su, Su), G(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), G(Au, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}) + G(Su, Bx_{2n+1}, Bx_{2n+1})\}.$$

En faisant $n \to \infty$, on obtient :

$$G(Su, Au, Au) \leq \delta G(Su, Au, Au) < G(Su, Au, Au),$$

qui est une contradiction. Alors $Su = Au = z$.

D'ailleurs, $Sx \subseteq BX$ implique qu'il existe un point $v \in X$ satisfaisant $Su = Bv$.

On va prouver que $Bv = Tv$, sinon d'après (5.2) on a :

$$G(Bv, Tv, Tv) = G(Su, Tv, Tv) \leq \delta \max\{G(Au, Bv, Bv), G(Bv, Tv, Tv), \frac{1}{2}G(Au, Tv, Tv)\}$$

$$\leq \delta G(Su, Tv, Tv) < G(Bv, Tv, Tv),$$

qui est une contradiction. D'où $Bv = Tv = z$ et donc v est un point de coïncidence pour B et T . La compatibilité faible de (A, S) implique que $Az = Sz$. De même pour la paire (B, T), on trouve $Bz = Tz$

. Prochainement, on va prouver que $z = Az$, sinon en appliquant (5.2), on obtient :

$$G(Az, z, z) = G(Sz, Tv, Tv) \leq \delta \max\{G(Az, Bv, Bv), \frac{1}{2}(G(Az, Tv, Tv) + G(Sz, Bv, Bv))\}$$

$$\leq \delta G(Az, z, z) < G(Az, z, z),$$

qui est une contradiction. Alors $z = Az$.

Similairement, on trouve $z = Bz = Tz$. Par conséquent z est un point fixe commun pour A, B, S et T.

Pour l'unicité, supposons w est un autre point fixe commun. En appliquant(5.2) on a :

$$G(z, w, w) = G(Sz, Tw, Tw) \leq \delta \max\{G(Az, Bw, Bw), G(Az, Sz, Sz), G(Bw, Tw, Tw),$$

$$\frac{1}{2}(G(Az, Tw, Tw) + G(Sz, Bw, Bw))\}$$

$$+L\min\{G(Az,Sz,Sz),G(Bw,Tw,Tw),G(Az,Tw,Tw),G(Sz,Bw,Bw)\}$$

$$\leq \delta G(z,w,w) < G(z,w,w),$$

qui est une contradiction. Donc z est unique. ■

Théorème 5.1 généralise le Théorème 3.1 dans le papier [56] aux espaces G-métriques. Il généralise aussi Théorème 3.2 de Abbas et.al [2], Théorème 2.3 dans [13] et Théorème 3.4 de Berinde [24].

Si $S = T$ et $A = B$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 5.1 *Soient (X, G) un espace G-métrique complet et $A, S : X \to X$ des applications de X dans lui même. Supposons que $SX \subseteq AX$ et pour tout $x, y \in X$ on a :*

$$G(Sx,Sy,Sy) \leq \delta\max\{G(Ax,Ay,Ay),G(Ax,Sx,Sx),G(Ay,Sy,Sy),\frac{1}{2}(G(Ax,Sy,Sy)+G(Ay,Sx,Sx)\}$$

$$+L\min\{G(Ax,Sx,Sx),G(Ay,Sy,Sy),G(Ax,Sy,Sy)+G(Ay,Sx,Sx)\},$$

où $0 \leq \delta < 1$ and $L \geq 0$. Si la paire (A, S) est faiblement compatible et le sous-espace $A(X)$ est fermé, alors A et S ont un point fixe commun unique dans X.

Corollaire 5.1 généralise Corollaire 2.2 dans [56].

Théorème 5.2 *Soient (X, G) un espace G-métrique et A, B, S et T des applications de X dans lui même satisfaisant les conditions suivantes :*

(*a*) $TX \subseteq AX,\ SX \subseteq BX,$

(*b*) *il existe $\delta \in [0, \frac{1}{2})$ et $L \geq 0$, tels que :*

$$G(Sx,Ty,Ty) \leq \delta N(x,y,y)+L\min\{G(Ax,Sx,Sx),G(By,Ty,Ty),G(Ax,Ty,Ty),G(By,Sx,Sx)\}, \tag{5.4}$$

pour tout $x, y \in X$, où

$$N(x,y,y) = \max\{G(Ax,By,By),G(Ax,Sx,Sx),G(By,Ty,Ty),G(Ax,Ty,Ty),G(By,Sx,Sx)\},$$

(*c*) *$A(X)$ ou $T(X)$ est fermé,*

(*d*) *les paires (A, S) et (B, T) sont faiblement compatibles.*

Alors A, B, S et T admettent un point fixe commun unique dans X.

Preuve. Soit $\{y_n\}$ une suite définie par (5.3). On a :

$$N(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}) = \max\{G(Ax_{2n}, Bx_{2n1}, Bx_{2n+1}), G(Ax_{2n}, Sx_{2n}, Sx_{2n}),$$

$$G(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), G(Ax_{2n}, Tx_{2n1}, Tx_{2n+1}), G(Bx_{2n+1}, Sx_{2n}, Sx_{2n})\}$$

$$\leq \max\{G(y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n+1}), G(y_{2n+1}, y_{2n+1}y_{2n+1}), G(y_{2n}, y_{2n+2}, y_{2n+2})\}$$

$$\leq G(y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n+1}) + G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2})$$

$$\leq 2\max\{G(y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n+1}), G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2})\}$$

$$\min\{G(Ax_{2n}, Sx_{2n}, Sx_{2n}), G(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), G(Ax_{2n}, Tx_{2n1}, Tx_{2n+1}), G(Bx_{2n+1}, Sx_{2n}, Sx_{2n})\},$$

$$= G(y_{2n+1}, y_{2n+1}, y_{2n+1}) = 0.$$

En utilisant (5.4), on trouve :

$$G(y_{2n+2}, y_{n+1}, y_{2n+2}) = G(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1})$$

$$\leq 2\delta \max\{G(y_{2n}, y_{2n+1}), G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2})\},$$

Si $G(y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n+1}) \leq G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2})$, on a :

$$G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2}) \leq 2\delta G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2}) < G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2}),$$

qui est une contradiction. D'où :

$$G(y_{2n+1}, y_{2n+2}, y_{2n+2}) \leq 2\delta G(y_{2n}, y_{2n+1}, y_{2n+1}) \leq 2^2\delta^2 G(y_{2n-1}, y_{2n}, y_{2n}) \leq ...$$

Par induction on obtient :

$$G(y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+2}) \leq (2\delta)^{n+1} G(y_0, y_1, y_1,$$

où il implique $G(y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+2}) \to 0$, quand $n \to \infty$.

Donc pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m > n$ on trouve :

$$G(y_n, y_m, y_m) \leq G((y_n, y_{n+1}), y_{n+1}) + G(y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+2}) + ... + G(y_{m-1}, y_m, y_m)$$

$$\leq (2\delta)^n \Big(1 + \delta + ... + \delta^{m-n}) G(y_0, y_1, y_1)$$

$$\leq \frac{2\delta^n}{1-\delta} G(y_0, y_1, y_1) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

Par conséquent $\{y_n\}$ est une suite G-Cauchienne dans (X, G).

Comme X est G-complet, alors $\{y_n\}$ est G-convergente vers un point $z \in X$, la fermeture de $A(X)$ implique que la sous-suite $\{Ax_{2n+2}\}$ est G-convergente vers $z \in A(X)$, donc il existe un point $u \in X$, tel que $z = Au$. On va prouver $z = Su$, sinon en appliquant (5.4) on a :

$$G(Su, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}) \leq \delta \max\{G(Au, Bx_{2n+1}, Bx_{2n+1}), G(Au, Su, Su),$$

$$G(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), G(Au, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), G(Su, Bx_{2n+1}, Bx_{2n+1}))\}$$

$$+L \min\{G(Au, Su, Su), G(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), G(Au, Tx_{2n+1}, Tx_{2n+1}), G(Su, Bx_{2n+1}, Bx_{2n+1})\},$$

laissant $n \to \infty$, on obtient

$$G(Su, z, z) \leq \delta \max\{G(z, Su, Su), G(Su, z, z)\},$$

mais $G(Su, Su, z) \leq G(Su, z, z) + G(z, z, Su) = 2G(Su, z, z)$, donc on trouve

$$G(Su, z, z) \leq 2\delta G(Su, z, z) < G(Su, z, z),$$

qui est une contradiction. Alors $Su = Au = z$.

L'inclusion $Sx \subseteq BX$ implique qu'il existe un point $v \in X$, tel que $Su = Bv$. Montrons que $z = Tv$, sinon en appliquant (5.4) on a :

$$G(z, Tv, Tv) = G(Su, Tv, Tv) \leq \delta \max\{G(z, Tv, Tv), G(z, Tv, Tv)\}$$

$$\leq \delta G(z, Tv, Tv) < G(z, Tv, Tv),$$

qui est une contradiction. Donc $Bv = Tv = z$ et v est un point de coïncidence pour B et T.

La paire (A, S) est faiblement compatible, donc $Az = Sz$. De même pour la paire (B, T), on obtient $Bz = Tz$.

Prochainement, on va prouver que $z = Az$, sinon d'après (5.4) on trouve :

$$G(Az, z, z) = G(Sz, Tv, Tv) \leq \delta \max\{G(Az, Bv, Bv), G(Az, Tv, Tv), G(Sz, Bv, Bv))\}$$

$$\leq \delta G(Az, z, z) < G(Az, z, z),$$

qui est une contradiction. Alors $z = Az$.

Similairement, on trouve $z = Bz = Tz$. D'où, z est un point fixe commun pour A, B, S et T.

L'unicité est similaire comme dans la preuve du Théorème 5.1 ■

Théorème 5.2 généralise et étend théorème 3.2 de Berinde [24] et théorème 3.2 dans [56] aux espaces G-métriques.

Si $S = T$ et $A = B$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 5.2 *Soient (X, G) un espace G-métrique complet et $A, S : X \to X$ deux applications de X dans lui même satisfaisant :*

$$G(Sx, Sy, Sy) \leq \delta N(x, y, y) + L \min\{G(Ax, Sx, Sx), G(Ay, Sy, Sy), G(Ax, Sy, Sy), G(Ay, Ay, Sx)\},$$

où

$$N(x, y, y) = \max\{G(Ax, Ay, Ay), G(Ax, Sx, Sx), G(Ay, Sy, Sy), G(Ax, Sy, Sy), G(Ay, Ay, Sx)\}.$$

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. *$SX \subseteq AX$,*
2. *AX est fermé,*
3. *la paire (A, S) est faiblement compatible,*

alors S et A ont un point fixe commun unique dans X.

Théorème 5.3 *Soient (X, G) un espace G-métrique complet et A, B, S et T des applications de X dans lui même satisfaisant (5.1)et :*

$$G(Sx, Ty, Ty)) \leq \delta\theta(x, y, y)) + L \min\{G(Bx, Sx, Sx)), G(By, Ty, Ty),$$
$$G(Ax, Ty, Ty), G(By, By, Sx)\}, \tag{5.5}$$

pour tout $x, y \in X$, où

$$\theta(x, y, y) = \max\{G(Ax, By, By), \frac{1}{2}(G(Sx, Ax, Ax) + G(By, Ty, Ty)),$$
$$\frac{1}{2}(G(Sx, By, By) + G(Ax, Ty, Ty))\}.$$

Si AX ou BX est fermé et les paires (A, S) et (B, T) sont faiblement compatibles, alors A, B, S et T admettent un point fixe commun unique dans X.

Preuve. Elle est similaire à celle du Théorème 5.1. ■

Maintenant, on va illustrer notre résultats par l'exemple suivant :

Exemple 5.1 *Soit* $X = [0,2]$ *muni de la G-métrique :*

$$G(x,y,z) = \max\{|x-y|, |x-z|, |y-z|\},$$

Considèrons les applications A, B, S *et* T *définies par*

$$Ax = \begin{cases} 2-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x}{4}, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \qquad Bx = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ 2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$Sx = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{7}{8}, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \qquad Tx = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Clairement, (X,G) *est un espace G-métrique complet. Le sous-espace* $B(X) = [0,2]$ *est fermé,* $TX = \{\frac{1}{2}, 1\} \subset AX = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \cup [1,2]$ *et* $SX = [0,1] \subset BX$*.*

Choisissons $\delta = \frac{4}{5}$ *dans le Théorème 5.1, pour l'inégalité (5.1). On a les cas suivants :*

1. *Pour* $x, y \in [0,1]$*, on a :*

$$G(Sx,Ty,Ty) = |1-x| \leq \frac{8}{5}|1-x| = \frac{4}{5}G(Ax,Sx,Sx)$$

2. *Pour* $x \in [0,1)$ *et* $y \in (1,2]$*, on a :*

$$G(Sx,Ty,Ty) = \frac{1}{2}|2x-1| \leq \frac{6}{5} = \frac{4}{5}G(By,Ty,Ty),$$

3. *Pour* $1 < x \leq 2$ *et* $y \in [0,1]$*, on a :*

$$G(Sx,Ty,Ty) = \frac{1}{8} \leq \frac{1}{10}|7-2x| \leq \frac{4}{5}G(Ax,Sx,Sx)$$

4. *Pour* $x, y \in (1,2]$*, on a :*

$$G(Sx,Ty,Ty) = \frac{3}{8} \leq \frac{6}{5} = \frac{4}{5}G(By,Ty,Ty).$$

Le point 1 *est un oint de coïncidence. Il satisfait* $AS1 == SA1 = 1$ *et* $BT1 = TB1 = 1$*, ce qui implique que* (A,S) *et* (B,T) *sont faiblement compatibles. Par conséquent, toutes les hypothèses du Théorème 5.1 sont satisfaites, donc* 1 *est l'unique point fixe commun pour* A, B, S *et* T*.*

Chapitre 6

Applications

Ce chapitre est consacré pour quelques applications. Premièrement, on va appliquer le Théorème 2.1 pour garantir l'existence et l'unicité de la solution commune d'un système d'équations intégrales de type Fredholm. Pour le deuxième application, on va appliquer le Corollaire 2.1 pour montrer l'existence et l'unicité d'un système des équations fonctionnelles qui apparaissent dans la programmation dynamique.

6.1 Existence d'une solution commune d'un système des équations intégrales

On va utiliser le Théorème 2.1 pour établir l'existence et l'unicité de la solution commune d'un système des équations intégrales de type Fredholm.

Considérons le système des équations suivant :

$$\begin{cases} x(t) = f(t) + \int_a^b K_1(t,s,y(s))ds, & t,s \in I = [a,b] \\ y(t) = f(t) + \int_a^b K_2(t,s,x(s))ds, & t,s \in [a,b] \\ \end{cases} \tag{6.1}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $I = [a,b]$ et $K_1, K_2 : I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues et $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$:l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

Il est clair que l'espace $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ muni de la métrique :

$$d(u,v) = \max |u(t) - v(t)|$$

est un espace métrique complet.

Théorème 6.1 *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Il existe une fonction $\theta : I \times I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, on a :*

$$|K_1(t,s,y(s) - K_2(t,s,x(s))| \leq \theta(t,s)\varphi(|x-y|)$$

, où $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction croissante, telle que $\varphi(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

2. $\sup_{t\in I} \int_a^b \theta(t,s)ds \leq 1$.

Alors le système (6.1) admet une solution commune unique dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Preuve. On Considère les deux applications :

$$Sx(t) = f(t) + \int_a^b K_1(t,s,y(s))ds, s,t \in I$$

$$Tx(t) = f(t) + \int_a^b K_2(t,s,x(s))ds,$$

où $A, B : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Le système (6.1) admet une solution commune si et seulement si A et B ont un point fixe commun dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Puisque f et K_i sont continues, alors A et B sont continues. Donc $\{S, id\}, \{T, id\}$ (id l'identité dans l'espace $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$) sont sous-séquentiellement continues et compatibles de type (E). De plus on a :

$$|K_1(t,s,y(s) - K_2(t,s,x(s))| \leq \theta(t,s)\psi(|x-y|)$$

,

$$|Sg(t) - Th(t)| = |\int_a^b |K_1(t,s,x(s) - K_2(t,s,y(s))ds| \leq \int_a^b |\theta(t,s)\psi(|x-y|)|ds,$$

$$\leq \psi(|x-y|)\int_a^b \theta(t,s)ds \leq \psi(M(x,y))$$

, où $M(x,y) = \max\{d(x,y), d(x,Sx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Sx)\}$. Par conséquent, toutes les hypothèses du Théorème 2.1(avec $F(t) = t$) sont satisfaites, alors A et B ont un point fixe commun unique D'où, le système (6.1) admet une solution commune unique. ■

6.2 Solution commune d'un système des équations fonctionnelles

Dans cette section, on va établir l'existence et l'unicité d'une solution commune d'un système des équations qui apparaissent dans la programmation dynamique.
Soient X et Y des espaces de Banach, $W \subset X$ est un espace d'état et $D \subset Y$ est un espace de décision. On désigne par $B(W)$ l'ensemble de toutes les fonctions définies et bornées dans W.
Bellman et Lee [15] ont mentionné que la forme fondamentale de l'équation fonctionnelle de la programmation dynamique est :

$$f(x) = opt_{y \in D} H(x, y, f(\tau(x, y))),$$

où $H : W \times D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tau : W \times D \to W$.

Maintenant, on va étudier l'existence et l'unicité d'une solution commune pour un système des équations fonctionnelles suivantes :

$$\begin{cases} F_i(x) = \sup\limits_{y \in W}\{u(x,t) + H_i(x, y, F_i(\tau(x, y)))\}, & \text{i=1,2.} \\ G_i(x) = \sup\limits_{y \in W}\{u(x,y) + K_i(x, y, G_i(\tau(x, y)))\}, & \text{i=1,2.} \quad , \\ \end{cases} \tag{6.2}$$

On munit l'ensemble $B(W)$ de la métrique :

$$h, k \in B(W),\ d(h, k) = \sup_{x \in W} |h(x) - k(x)|$$

Définissons les applications :

$$Sh = \sup_{y \in W}\{u(x,t) + H_1(x, y, h(\tau(x, y)))\}$$

$$Th = \sup_{y \in W}\{u(x,t) + K_1(x, y, h(\tau(x, y)))\}$$

$$Ah = \sup_{y \in W}\{u(x,t) + H_2(x, y, h(\tau(x, y)))\}$$

$$Bh = \sup_{y \in W}\{u(x,t) + K2(x, y, h(\tau(x, y)))\}$$

Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

(C_1) : H_i et K_i sont bornées, $i = 1, 2$.

(C_2) : Pour tout $x, y \in W$ et $h, k \in B(W)$, il existe une fonction $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante et semi-continue supérieurement satisfaisant $\psi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$ et pour tout $t > 0$, $\psi(t) < t$, telle que :

$$\begin{aligned}|H_1(x,y,h) - K_1(x,y,k)| \quad &\leq \quad \psi(\max(d(A_2h, B_2k), d(Sh, Ah), d(Tk, Bk), \\ &\quad\quad d(Ah, Tk), d(Bk, Sh))),\end{aligned}$$

(C_3) : Il existe une suite $\{h_n\}$ dans W et $h, k \in B(W)$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} \sup |Sh_n - h| = \lim_{n\to\infty} \sup |Ah_n - h| = 0,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \sup |SAh_n - Sh| = 0,$$

(C_4) : Pour toute suite $\{p_n\}$ dans W et $p \in B(w)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \sup |p_n - p| = 0$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} \sup |S^2p_n - Ap| = \lim_{n\to\infty} \sup |SAp_n - Ah| = 0$$

.

$(C_5$:) Il existe une suite $\{k_n\}$ dans W et $k \in B(W)$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} \sup |Tk_n - k| = \lim_{n\to\infty} \sup |Bk_n - k| = 0,$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \sup |TBk_n - Th| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup |SAh_n - Sh| = 0.$$

(C_6) : Pour toute suite $\{q_n\}$ dans W et $q \in B(W)$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} \sup |q_n - q| = 0$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} \sup |T^2q_n - Bq| = \lim_{n\to\infty} \sup |TBq_n - Bq| = 0,$$

Théorème 6.2 *Sous les hypothèses* $(C_1) - (C_6)$*, le système (6.2) admet une solution commune unique dans* $B(W)$.

Preuve. Le système (6.2) admet une solution commune si et seulement si les applications A, B, S, et T possèdent un point fixe commun.

Pour tout $h, k \in B(W)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $y, z \in D$ tels que

$$Sh < u(x, y) + H_1(x, y, h(\tau(x, y))) + \varepsilon, \tag{6.3}$$

$$Th < u(x, z) + K_1(x, z, k(\tau(x, z))) + \varepsilon, . \tag{6.4}$$

D'après

$$Sh \geq u(x, z) + H_1(x, z, h(\tau(x, z))), \tag{6.5}$$

$$Tk \geq u(x, y) + K_1(x, y, k(\tau(x, y))), . \tag{6.6}$$

En utilisant (6.3) et (6.5) on a :

$$Sh - Tk \leq H_1(x, y, h(\tau(x, y))) - K_1(x, y, k(\tau(x, y))) + \varepsilon$$

$$\leq \psi(\max(d(Ah, Bk), d(Ah, Sh), d(Bk, Tk), d(Ah, Tk), d(Bk, Sh))) + \varepsilon, \tag{6.7}$$

D'après (6.4) et (6.6) on obtient :

$$Sh - Tk > K_1(x, y, h(T(x, y))) - h_1(x, y, k(T(x, y))) - \varepsilon$$

$$\geq -\psi(\max(d(Ah, Bk), d(Sh, Ah), d(Bk, Tk), d(Ah, Tk), d(Bk, Sh))) - \varepsilon, \tag{6.8}$$

alors (6.7) et (6.8) impliquent que

$$d(Sh, Tk) = \sup |Sh - Tk| \leq |H_1(x, y, h(\tau(x, y))) - K_1(x, y, k(\tau(x, y)))| + \varepsilon$$

$$\leq \psi(\max(d(Ah, Bk), d(Sh, Ah), d(Bk, Tk), d(Ah, Tk), d(Bk, Sh))) + \varepsilon,$$

et comme la dernière inégalité est vraie pour chaque $\varepsilon > 0$ arbitraire, on peut écrit :

$$d(Sh, Tk) \leq \psi(\max(d(Ah, Bk), d(Sh, Ah), d(Bk, Tk), d(Ah, Tk), d(Bk, Sh))). \tag{6.9}$$

Les conditions (3) et (4) impliquent que la paire $\{A, S\}$ est S-sous-séquentiellement continue et S-compatible de type (E) et la paire $\{B, T\}$ est T-sous-séquentiellement continue et T-compatible de type (E). Par conséquent, toutes les conditions du Corollaire 2.6 sont satisfaites, donc les applications A, B, S et T ont un point fixe commun unique dans $B(W)$ et ce point est une solution commune du système des équations fonctionnelles (6.2). ■

Bibliographie

[1] M. Aamri and D. El Moutawakil, *Some new common fixed point theorems under strict contractive conditions*, Math. Anal. Appl., 270 (2002),181-188.

[2] M. Abbas, G. V. R. Babu and G. N. Alemayehu, *On common fixed points of weakly compatible mappings satisfying generalized condition*, Filomat 25 (2011), 9-19.

[3] M. Abbas and D. Ilic, *Common fixed points of generalized almost nonexpansive mappings*, Filomat 24 (3) (2010), 11-18.

[4] M. Abbas, S.H. Khan and T.Nazir, *Common fixed points of R-weakly commuting maps in generalized metric space*, Fixed Point Theory and Appl., 2011 :41(2011).

[5] M. Abbas and B. E. Rhoades, *Common fixed point theorems for hybrid pairs of occasionally weakly compatible mappings satisfying generalized contractive condition of integral type*, Fixed Point Theory Appl., 2007, Art. ID 54101, 9 pp.

[6] Ya. I. Alber and S. Guerre-Delabriere, *Principle of weakly contractive maps in Hilbert spaces, in : New Results in Operator Theory and its Applications*, Oper.Theory Adv.Appl., vol.98, Birkhauser, Basel, 1997, 7-22.

[7] A. Aliouche and A. Djoudi, *Common fixed point theorems for mappings satisfying an implicit relation without decreasing assumption,* Hacet. J. Math. Stat., 36 (1),(2007) 11-18.

[8] A. Aliouche and V. Popa, *General common fixed point theorems for occasionally weakly compatible hybrid mappings and applications,* Novi Sad J. Math., 39 (1) (2009), 89-109

[9] A. Aliouche and A. Djoudi, *A Common fixed point theorem for single valued and set-valued mappings satisfying a generalized contractive condition*, Thai J. Math., 8 (3) (2010), 459-467.

[10] I. Altun and D. Türkoğlu, *Some fixed point theorems for weakly compatible mappings satisfying an implicit relation,* Taiwanese. J. Math., 13 (4) (2009), 1291-1304.

[11] M. A. Al-Thagafi and N. Shahzad, *Generalized I-nonexpansive selfmaps and invariant approximations*, Acta Math. Sinica 24 (5) (2008), 867-876.

[12] 4 S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math., 3 (1922), 133-181.

[13] G. V. R. Babu and M. L. Sandhy and M. V. R. Kameshwari, *A note on a fixed point theorem of Berinde on weak contractions*, Carpath. J. Math., 24 (2008), 8-12.

[14] R. Baskaran and P. V. Subrahmanyam, A note on the solution of a class of functional equations, Appl. Anal., 22 (1986), 235-241.

[15] R. Bellman and E.S. Lee, *Functional equations in dynamic programming*, Aequ. Math., 17 (1978), 1-18.

[16] S. Beloul, *A Common Fixed Point Theorem for Weakly Compatible Multi-Valued Mappings Satisfying Strongly Tangential Property*, Math. Moravica, 18 (2) (2014), 63-72.

[17] S. Beloul, *Common fixed point theorems for weakly subsequentially continuous generalized contractions with aplications*, Appl. Maths. E-Notes, 15 (2015), 173-186.

[18] S. Beloul, *Some fixed point theorems for weakly subsequentially continuous and compatible of type (E) mappings with an application*, Int. J. Nonlianear.Anal.Appl., (7) (1) (2015), 53-62.

[19] S. Beloul, *Common Fixed Point Theorem for strongly tangential and weakly Compatible mappings satisfying implicit relations*, in press Thai.J. Math., (2015).

[20] S. Beloul,*Common fixed point theorems for tangential generalized weak contractions in partial metric spaces*, accepted in Filomat (2015).

[21] S. Beloul,*Gregus type fixed point theorems for subsequentially continuous multi-valued mappings in metric spaces*,submitted (2015).

[22] S. Beloul, *Common fixed point theorems for multi-valued contractions satisfying generalized condition(B) on partial metric spaces*, Facta Univ Nis Ser. Math. Inform., vol. 30 (5) (2015), 555-566.

[23] S. Beloul and S. Chauhan, *Gregus type fixed points for weakly subsequentially continuous mappings satisfying strict contractive condition of integral type*, accepted in Le Mathematiche (2015).

[24] V. Berinde, *Some remarks on a fixed point theorem for Ciric-type almost contractions*, Carpath. J. Math., 25 (2009), 157-162.

[25] V. Berinde, *Approximating fixed points of implicit almost contractions*, Hacet. J. Math. Stat., 40 (2012), 93-102.

[26] R. K. Bisht and R.P. Pant, *A critical remark on fixed point theorems for occasionally weakly compatible mappings*, J. Egypt. Math. Soc., (2013), 273-275.

[27] S. Binayak Choudhury and N. Metiya, *Fixed point theorems for almost contractions in partially ordered metric spaces*, Ann. Univ. Ferrara, 58 (2012), 21-36.

[28] H. Bouhadjera and A. Djoudi, *Common fixed point theorems for single and set-valued maps without continuity*, Ann. Univ. Ovidius C, 16 (1) (2008), 49-58.

[29] H. Bouhadjera and C. Godet Thobie, *Common fixed point theorems for pairs of subcompatible maps*, arXiv :0906.3159v1 [math.FA].(2009).

[30] D. W. Boyd and S.W.Wong, *On nonlinear contractions*, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969), 458-464.

[31] A. Branciari, *A fixed point theorem for mapping satisfying a general contractive condition of integral type*, Int. J. Math. Math. Sci., 29 (9) (2002), 531-536.

[32] J. Caristi, *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc., 215 (1976), 241-251.

[33] Lj. B. Ciric, *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc., 45 (1974) 267-273.

[34] S. K. Chatterjea, *Fixed point theorems*, C. R. Acad. Bulgare Sci., 25 (1972), 727-730.

[35] S. Chauhan, M. Imdad, E. Karapinar and B. Fisher, *An integral type fixed point theorem for multi-valued mappings employing strongly tangential property*, J. Egypt. Math. Soc., 22 (2014), 258-264.

[36] C. Di Bari and P. Vetro, *Fixed points for weak φ-contractions on partial metric spaces*, Int. J. Eng.Cont. Math. Sci., 1 (2011), 5-13.

[37] A. Djoudi, *A common fixed point theorem for compatible mappings of type (B) in complete metric spaces,* Demonstatio Math., 36 (2003), 463-470.

[38] A. Djoudi and A. Aliouche, *Common fixed point theorems of Gregus type for weakly compatible mappings satisfying contractive conditions of integral type*, J. Math. Anal. Appl., 329 (2007) 31-45.

[39] D. Dorić, Z. Kadelburg and S. Radenović, *A note on occasionally weakly compatible mappings and common fixed point*, Fixed Point Theory, 13 (2012), 475-480.

[40] M. Edelstein, *An extension of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc., 12 (1961), 7-10

[41] A. Erdurana, Z. Kadelburgh, H. K. Nashinec and C. Vetro, *A fxed point theorem for (φ,L)-weak contraction mappings on a partial metric space*, J. Nonlinear Sci. Appl., 7 (2014), 196-204.

[42] B. Fisher and S. Sessa, *Two common fixed point theorems for weakly commuting mappings,* Period. Math. Hungar., 20 (1989), 207-218.

[43] M. Geraghty, *On contractive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., 40 (1973), 604-608.

[44] D. Gopal, M. Imdad and M. Abbas, *Metrical common fixed point theorems without completeness and closedness*, Fixed Point Theory and Appl., 2012 (1),(2014), 96-204.

[45] R. H. Haghi, Sh. Rezapour and N. Shahzad, *Be careful on partial metric fixed point results*, Top. Appl., 160 (2013), 450-454.

[46] M. Imdad, S. Kumar and M. S. Khan, *Remarks on some fixed point theorems satisfying implicit relations,* Radovi Mat.,1 (2002), 135-143.

[47] M. Imdad, J. Ali and M. Tanveer, *Remarks on some recent metrical common fixed point theorems*, Appl. Math. Lett., 24 (2011), 1165-1169.

[48] J. Jachymski, *Equivalent conditions and the Meir-Keeler type theorems*, J. Math. Anal. Appl., 194 (1995), 293-303.

[49] J. Jachymski, *Equivalence of some contractive properties over metrical structures*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (8) (1997), 2327-2335.

[50] G. Jungck, *Commuting mappings and fixed points*, Amer. Math. Monthly, 83 (4) (1976), 261-263.

[51] G. Jungck, *Compatible mappings and common fixed points*, Int. J. Math. Math. Sci., 9 (1986), 771-779.

[52] G. Jungck, P. P. Murthy and Y. J. Cho, *Compatible mappings of type (A) and common fixed points*, Math. Japon, 38 (1993), 381-390.

[53] G. Jungck and B. E. Rhoades, *Fixed point for set valued functions without continuity,* Indian J. Pure Appl. Math., 29 (3) (1998), 227-238.

[54] T. Kamran, *Coincidence and fixed points for hybrid strict contractions,* J. Math. Anal. Appl., 299 (1) (2004), 235-241.

[55] G. Jungck, B. E. Rhoades, *Fixed point theorems for occasionally weakly compatible mappings,* Fixed Point Theory 7 (2) (2006) 287-296 (Fixed Point Theory 9 (2008), 383-384.

[56] A. Kaewcharoen and T.Yuyin, *Unique common fixed point theorems on partial metric spaces*, J. Nonlinear Sci. Appl., 17 (2014), 90-101.

[57] T. Kamran, *Coincidence and fixed points for hybrid strict contractions,* J. Math. Anal. Appl., 299 (1) (2004), 235-241.

[58] H. Kaneko and S. Sessa, *Fixed point theorems for compatible multi-valued and single-valued mappings,* Int. J. Math. Math. Sci., 12 (2) (1989), 257-262.

[59] R. Kannan, *Some results on fixed points*, Bull.Calcutta Math. Soc., 60 (1968), 71-76.

[60] W. A. Kirk, *A fixed point theorems for mappings which do not increase distanse*, Amer. Math. Monthly, 72 (1963), 1004-1006.

[61] E. Krapinar and S. Romaguera, *Nonunique fixed point theorems in partial metric spaces*, Filomat 27 (7) (2013), 1305-1314.

[62] W. Liu, J. Wu and Z. Li, *Common fixed points of single-valued and multi-valued maps*, Int. J. Math. Math. Sci., 19 (2005), 3045-3055.

[63] Y. Liu and Li-Shan, *Common fixed points of a pair of single-valued mappings and a pair of set-valued mappings*, (Chinese), Qufu Shifan Daxue Xuebao Ziran Kexue Ban, 1 (18) (1992), 6-10.

[64] W. Long, M. Abbas, T. Nazir and S. Radenovi, *Common Fixed Point for Two Pairs of Mappings Satisfying (E.A) Property in Generalized Metric Spaces*, Abstr. Appl. Anal., Vol. 15 (2012).

[65] J. Matkowski, *Integrable solutions of functional equations*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), 127 (1975), 68 pages.

[66] S. G. Matthews, *Partial metric topology*, in : Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications, in : Ann. New York Acad. Sci., 728 (1994), 183-197.

[67] A. Meir and E. Keeler, *A theorem on contraction mappings*, J. Math. Anal. Appl., 28 (1969), 326-329.

[68] N. Mizoguchi and W. Takahashi, *Fixed point theorem for multivalued mappings on complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., 141 (1989), 177-188.

[69] J. A.Meszaros, *A comparison of various definitions of contractive type mappings*, Bull. Calcutta Math. Soc., 84 (2) (1992), 167-194.

[70] Z. Mustafa and B. Sims, *Some remarks concerning D-metric spaces*, In. Proc. Int. Conf. on Fixed Point Theory and Applications, Valencia, Spain, July 13-19, pp 189-198 (2004).

[71] Z. Mustafa and B. Sims, *A new approach to generalized metric spaces*, J. Nonlinear Conv. Anal., 7 (2) (2006), 289-297.

[72] Z. Mustafa, H. Obiedat and F. Awawdeh, *Some fixed point theorem for mapping on complete G-metric spaces*, Fixed Point Theory Appl, vol. 2008, Article ID 189870, 12 pages (2008).

[73] S. B. Nadler, *Multivalued contraction mappings*, Pacific J. Math., 30 (1969), 475-488.

[74] T. Nazir and M.Abbas, *Common fixed points of two pairs of mappings satisfying (E.A)-property in partial metric spaces,* J. Inqual. Appl., 2014, Article ID 237 (2014).

[75] R. P. Pant, *Common fixed points of noncommuting mappings*, J. Math. Anal. Appl., 188 (1994), 436-440.

[76] R. P. Pant, *Common fixed points for four mappings*, Bull. Calcutta Math. Soc., 9 (1998), 281-286.

[77] R. P. Pant, *A common fixed point theorem under a new condition*, Indian J. Pure Appl. Math., 2 (30) (1999), 147-152.

[78] R. P. Pant, R. K. Bisht and D. Arora, *Weak reciprocal continuity and fixed point theorems*, Ann. Univ. Ferrara 57 (2011),181-190.

[79] H. K.Pathak and M. S. Khan, *Compatible mappings of type (B) and common fixed point theorems of Gregus type*, Czechoslovak Math. J, 45 (120) (1995), 685-698.

[80] H. K. Pathak, Y. J. Cho, S. M. Kang and B. S. Lee, *Fixed point theorems for compatible mappings of type (P) and application to dynamic programming*, Le Matematiche (Fasc. I), 50 (1995), 15 -33.

[81] H. K. Pathak, Y. J. Cho, S. M. Khan and B. Madharia, *Compatible mappings of type (C) and common fixed point theorems of Gregus type,* Demonstratio Math., 31 (3) (1998), 499-518.

[82] H. K. Pathak and N. Shahzad, *Gregus type fixed point results for tangential mappings satisfying contractive conditions of integral type,* Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 16 (2) (2009), 277-288,

[83] E. Rakotch, *A note on contractive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 459-465.

[84] S. Reich, *Kannan's fixed point theorem*, Boll. Un. Mat. Ital, 4 (1971), 1-11.

[85] B. E. Rhoades, *A Comparison of Various Definitions of Contractive Mappings*, Trans. Amer. Math. Soc., 226 (1977), 257-290.

[86] B. E. Rhoades, *Some theorems on weakly contractive maps*, Nonlinear Anal., 47 (4) (2001), 2683-2693.

[87] K. P. R. Sastry and I. S. R. Krishna Murthy, *Common fixed points of two partially commuting tangential selfmaps on a metric space*, J. Math. Anal. Appl., 250 (2) (2000), 731-734.

[88] S. Sedghi, I. Altun and N. Shobe, *A fixed point theorem for multi-maps satisfying an implicit relation on metric spaces,* Appl. Anal. Discrete Math., 2 (2008), 189-196.

[89] S. Sessa, *On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations,* Publ. Inst. Math. Beograd 32 (46) (1982), 149-153.

[90] W. Shatanawi and H. K. Nashine, *A generalization of Banach's contraction principle for nonlinear contraction in a partial metric space*, J. Nonlinear Sci. Appl., 5 (2012), 37-43.

[91] S. L. Singh and S. N. Mishra, *Coincidence and fixed points of reciprocally continuous and compatible hybrid maps,* Int. J. Math. Math. Sci., 10 (2002), 627-635.

[92] M. R. Singh and Y. Mahendra Singh, *Compatible mappings of type (E) and common fixed point theorems of Meir-Keeler type*, Int. J. Math. Sci. Engg. Appl., 1 (2),(2007) 299-315.

[93] M. R. Singh and Y. Mahendra Singh, *On various types of compatible maps and common fixed point theorems for non-continuous maps,* Hacet. J. Math. Stat., 40 (4) (2011) 503 -513.

[94] W. Sintunavarat and P. Kumam, *Gregus-type common fixed point theorems for tangential multivalued mappings of integral type in metric spaces,* J. Ineq. Appl., 3 (2011) 12 pages.

[95] W. Sintunavarat and P. Kumam, *Common fixed point thorem for cyclic generalized multi-valued contraction mappings*, Appl. Math. Lett., 25 (11) (2012), 1849-1855.

[96] T. Suzuki, *Meir-Keeler Contractions of Integral Type Are Still Meir-Keeler Contractions*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 2007, Article ID 39281, 6 pages.

[97] T. Suzuki,*A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol 136 (5) (2008), 1861-1869.

[98] W. Takahashi, *Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings*, Fixed Point Theory and Applications (Marseille, 1989), in : Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 252, Longman Sci. Tech., Harlow, (1991), 397-406.

[99] T. Zamfirescu, *Fixed Point Theorems in Metric Spaces*, Arch. Math., 23 (1972), 292-298.

[100] X. Zhang, Common fixed point theorems for some new generalized contractive type mappings, J. Math. Anal. Appl., 333 (2) (2007), 780-786.