Republique Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques

Thèse pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences

Option :Analyse Mathématique

Présentée par : **Korrichi Fatima**

****************************************

# *Produit d'Opérateurs de Toeplitz et Opérateur de Composition*

*********************************************************

Thèse dirigée par **Dr. Bendaoud Zohra**

Devant le jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| *Dr.Khelil Nasser* | Université de Biskra | Président |
| *Dr.Bendaoud Zohra* | Université de Laghouat | Encadreur |
| *Dr.Strouse Elizabeth* | IMB Bordeaux-France | Co-encadreur |
| *Dr.Mokhtari Zouhir* | Université de Biskra | Examinateur |
| *Pr.Mokhtari Abdelkader* | Université de Laghouat | Examinateur |
| *Dr.Allaoui Salah-Eddine* | Université de Laghouat | Examinateur |
| *Pr.Kellay Karim* | IMB Bordeaux-France | Invité |

Année Universitaire : 2015-2016

## Résumé

Le but de cette thèse est d'étudier certains opérateurs sur les espaces de Dirichlet. Dans la première partie de la thèse on s'intéresse aux opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace modèle, plus particulièrement a la stabilité du produit. Nous donnons une démonstration du théorème de Sedlock pour le produit de deux opérateurs de Toeplitz tronqués par la méthode matricielle, ensuite nous proposons une caractérisation matricielle d'un opérateur de Toeplitz tronqué de type $\alpha$ dans le cas où la fonction intérieure $u$ est un produit de Blaschke d'ordre $n$.
Dans la dexième partie de la thèse nous avons étudier les opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet. Nous somme intéressés plus particulièrement, à la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna associée aux symboles. Shapiro a caractérisé la compacité des opérateurs de composition sur l'espace de Hardy à l'aide de la fonction de comptage de Nevanlinna du symbole. Plus généralement sur les espaces de Dirichlet nous avons donner une majoration de la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna par la normes des itérées de symbole $\varphi$.



**Mots-clés :** opérateur de Toeplitz tronqué, matrice de Toeplitz, opérateurs de composition, espace modèle, espace de Dirichlet,fonction de comptage de Nevanlinna.



**Abstract**

The main objectives of this thesis consist

1. In studying of truncated Toeplitz operators in the model space.
2. In studying of composition operators in the Dirichlet spaces.

We give another proof of the Sedlock theorem for the product of two truncated Toeplitz operators by the matrix method, then we propose a characterization of a the matrix of truncated operator Toeplitz of type $\alpha$ where the inner function $u$ is a Blaschke product of order $n$.
In the second part of the thesis we have studied the composition operators on the Dirichlet space. We are particularly interested in the generalized Nevanlinna counting function associated with the symbols. Shapiro characterized the compactness of composition operators on Hardy space using Nevanlinna counting function of the symbol. More generally on Dirichlet spaces we obtain an estimation of generalized Nevanlinna counting function by the norme of symbol.



**Keywords :** Truncated Toeplitz operators, Toeplitz Matrix, Composition operators, Model space, Dirichlet space, Nevanlinna counting function.

# REMERCIMENTS

Cette thèse n'aurait pas été sans le soutien d'un certain nombre de personnes : c'est avec beaucoup d'émotion que je m'apprête à remercier tous ceux qui ont contribué, chacun à sa manière, à l'aboutissement de cette thèse.

Je tiens en premier lieu à exprimer ma sincère gratitude à **Zohra Bendaoud** pour avoir accepté de me diriger, je la remercie aussi pour ses conseils, ses encouragements, sa disponibilité, son énergie et son enthousiasme qui m'ont été fortement utiles pour effectuer ce travail.

Je remercie profondément Madame **Elizabeth Strouse** d'avoir accepté de me co-encadrer et me diriger, surtout pour ses qualités humaines, sa convivialité, son dynamisme et ses conseils précieux m'ont guidé et motivé tout au long de mes séjours à l'IMB-Université de Bordeaux I.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur **Khelil Nasser** Maître de Conférence à l'Université Mohamed Khider de Biskra, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ma thèse de Doctorat. Je lui exprime mes profonds respects et toute ma gratitude.

Je remercie vivement Monsieur **Zouhir Mokhtari**, Maître de Conférence à l'Université Mohamed Khider de Biskra, Monsieur **Mokhtari Abdelkader** Professeur à l'Université de Laghouat et Monsieur **Allaoui Salah-Eddine** Maître de Conférence à l'Université de Laghouat d'avoir pris la peine d'examiner ce travail et m'honorer par leurs présences parmi les membres de jury.

Je remercie l'équipe d'Analyse de l'Université Bordeaux I et plus spécialement Mrs **Kellay Karim**, et **Mohamed Zarrabi** pour avoir toujours été prêt à répondre à mes questions et à m'indiquer des références ainsi que pour leurs conseils et encouragements. J'ai pu profiter de l'hospitalité de l'équipe d'analyse, que je remercie pour les excellentes conditions de séjour et de travail offertes.

Je remercie tous les membres du laboratoire de l'IMB, le personnel, les chercheurs, les informaticiens, les secrétaires et techniciens, sans oublier tous les membres de la bibliothèque. Ils ont tous contribué de façon directe ou indirecte au bon déroulement de mes séjours.

Je tiens à remercier le personnel de la faculté de sciences exactes et de sciences de la nature et de la vie de l'Université de Biskra pour m'avoir facilité toutes les taches, ainsi que le chef de Département de mathématiques, ainsi que toutes les personnes que j'ai contacté et qui ont été toujours disponible et satisfaisant que ce soit au Département ou à la post graduation.

Je tiens particulièrement à remercier les membres de mon Laboratoire, LMPA, au sein de l'université de Laghouat, à commencer par son directeur, Mme **Fermeli-Bendaoud Zohra**, qui a mis à notre disposition tous les moyens possibles pour qu'on puisse avancer. Je n'oublie pas de remercier les membres de mon équipe : Mrs **Ali Chettih**, **Yagoub Ameur, Rahmoune Abdelaziz,** sans oublié Melle **Chafika Belabbaci,** qui a toujours était présente.

Je n'oublierais pas mes enseignants de l'université de Laghouat : Mrs **Belabbaci Youcef, Mokhtari Aek**, ainsi que Mme **Boukhatem Yamna** enseignante au département de mats-info.

Milles merci à mes amis : **Ahlem, Aicha, Samia, Fatima Zohra et Siham** sans oublié Mr **Habib Fermeli** pour leur soutiens et aides, je n'oublie pas Mr **Fanilo** avec qui j'ai pu avancer lors de mes séjours à Bordeaux.

Un remerciement particulier à mon amie et sœur **Ahlem** ainsi qu'à toute sa famille **Nasri,** qui ont remplacé ma famille à Laghouat…

Le plus grand remerciement est celui que je dois à mon cher père, **Ammar**, sans lui je n'aurais jamais pu finir…je n'oublie pas bien sûr ma mère, ma grand-mère ainsi que mes chers frères.

# Table des matières

# Introduction

Cette thèse se situe à l'interface entre l'analyse fonctionnelle, la théorie des opérateurs et l'analyse complexe. Elle est dédiée à l'étude de certains opérateurs sur plusieurs espaces fonctionnels. Nous nous intéressons aux opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace modèle et aux opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet.

On note par $\mathbb{D}$ le disque unité, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ le cercle unité du plan complexe $\mathbb{C}$, $dm := \dfrac{dt}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$ et $L^2(\mathbb{T}; dm)$ l'espace de Lebesgue usuel sur $\mathbb{T}$.

On définit l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ par l'espace des fonctions analytiques $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ sur le disque unité telle que la norme

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2 |d\zeta|$$

soit finie.

$H^2(\mathbb{D})$ peut être identifié au sous espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T}, dm)$ défini par :

$$H^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}$$

muni de la norme de $L^2(\mathbb{T})$.

Le noyau reproduisant de $H^2(\mathbb{D})$ (appelé aussi noyau de Cauchy Szegö), noté $k_\lambda$

et donné par la formule :

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}, \qquad pour \quad z \in \mathbb{T}.$$

D'aprés le théorème de Beurling, les sous espaces fermés non-nul de $H^2$, qui sont invariants par $S$, sont de la forme $uH^2$ pour une certaine fonction intérieure $u \in H^2$. Il s'ensuit que les sous espace fermés non nul de $H^2$, invariants par $S^*$ sont de la forme :

$$K_u^2 = H^2 \ominus uH^2$$

pour une certaine fonction intérieure $u \in H^2$.
Le sous espace $K_u^2$ est appelé espace modèle associé à la fonction $u$.

Comme dans le cas de $H^2$, chaque $K_u^2$ est un espace à noyau reproduisant noté $k_\lambda^u$ et est défini par :

$$k_\lambda^u(z) = P_u[k_\lambda](z) = \frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{1-\overline{\lambda}z}, \qquad (\lambda, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}$$

$K_u^2$ est de dimension fini si $u$ est un produit de Blaschke d'ordre fini.

L'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\varphi \in L^\infty$ sur $K_u^2$ est défini par :

$$A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f), \quad \text{pour chaque } f \in K_u^2.$$

L'étude des opérateurs de Toeplitz tronqués est un domaine de recherche d'actualité dans la théorie des opérateurs. Sur l'espace modèle, ces opérateurs ont été introduits par Sarason en 2007 **[33, 35]**. En 2010, Sedlock a introduit une nouvelle classe d'opérateurs de Toeplitz tronqués, connus sous le nom d'opérateurs de Toeplitz tronqués de type $\alpha$ **[37]**. Cette classe d'opérateurs donne des réponses à la question de stabilité :
*"sous quelles conditions le produit de deux opérateurs de Toeplitz tronqués est aussi un opérateur de Toeplitz tronqué ?"*

Pour $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, un opérateur de Toeplitz tronqué $A$ est dit de type $\alpha$ si et seulement s'il existe $\varphi \in K_u^2$ telle que :

$$A = A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}} + c}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Dans [37], Sedlock a montré que le produit de deux opérateurs de Toeplitz tronqués est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement si l'un des deux cas suivants est vérifié :

(i) cas trivial : l'un des deux opérateurs est égal à $cI$ avec $c \in \mathbb{C}$.

(ii) cas non trivial : il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ telle que les deux opérateurs sont tous les deux de type $\alpha$, dans ce cas leur produit est aussi de type $\alpha$.

Dans ce travail on s'intéresse particulièrement aux matrices des opérateurs de Toeplitz tronqués, car ce type de matrices joue un rôle essentiel dans plusieurs domaines.

La matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué $A_\varphi$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & \cdots & a_{-n+2} & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & a_{-n+2} \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \tag{0.0.1}$$

Ces matrices interviennent dans :

* la théorie de la prédiction,
* les solutions numériques de certaines equations différentielles,
* traitement du signal et de l'image,
* l'étude des processus gaussiens stationnaires...

Pour les opérateurs de composition sur les espaces de Dirichlet, le problème auquel nous nous intéressons concerne la compacité d'un opérateur de composition.
Les opérateurs de composition sur les espaces de Hardy ont été largement étudiés (voir par exemple **[14, 26, 38, 39]**).
Rappelons que pour une fonction holomorphe $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, un opérateur de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ de symbole $\varphi$ est défini par :

$$\begin{aligned} C_\varphi : H^2(\mathbb{D}) &\longrightarrow H^2(\mathbb{D}) \\ f &\longrightarrow C_\varphi(f) = f \circ \varphi. \end{aligned}$$

La continuité de $C_\varphi$ est essentiellement assurée par le principe de subordination de Littlewood (1925) **[38]**.

On définit la fonction de comptage de Nevanlinna de la fonction $\varphi$, pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}$ par :

$$N_\varphi(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{w \in \varphi^{-1}(\{z\})} \frac{1}{\log |w|} & z \neq 0 \\ \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

La caractérisation de la compacité des opérateurs de composition à l'aide de la fonction de comptage de Nevanlinna du symbole due a Shapiro **[38]** qui a montré que pour une fonction holomorphe $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, l'opérateur $C_\varphi$ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si

$$\lim_{|w| \to 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{\log \dfrac{1}{|w|}} = 0.$$

Les espaces de Dirichlet sont définis par :

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_\alpha^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z) < \infty \right\},$$

avec

$$dA_\alpha(z) = (1+\alpha)(1-|z|)^\alpha dA(z), \qquad z \in \mathbb{D},$$

où

$$dA(z) = dxdy/\pi, z = x+iy.$$

Lorsque $\alpha = 1$, $\mathcal{D}_1 = H^2$ est l'espace de Hardy classique et lorsque $\alpha = 0$, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ est l'espace de Dirichlet.
Kellay et Lefèvre dans **[27]** en 2012 ont montré que
pour une fonction holomorphe $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$,

(i) $C_\varphi$ est borné dans $\mathcal{D}_\alpha \iff N_{\varphi,\alpha} = O(1-|z|)^\alpha, \quad |z| \to 1^-$

(ii) $C_\varphi$ est compact dans $\mathcal{D}_\alpha \iff N_{\varphi,\alpha} = o(1-|z|)^\alpha, \quad |z| \to 1^-$

pour $0 < \alpha \leq 1$.

Cette thèse est partagée en deux parties :
dans **la première partie**, qui est composée de deux chapitres, on s'intéresse aux opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace modèle particulièrement aux matrices.

**Le chapitre 1** est consacré à la présentation de l'espace de Hardy, à savoir les résultats fondamentaux, en particulier nous donnons la construction des espaces modèles qui sont les sous-espaces stables par l'adjoint de la multiplication par $z$. Nous rappelons quelques notions de base sur l'espace modèle et nous présentons les propriétés des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Dans **le chapitre 2** nous rappelons les opérateurs de Toeplitz tronqués de type $\alpha$ et nous donnons une démonstration du théorème de Sedlock pour le produit de deux opérateurs de Toeplitz tronqués par la méthode matricielle dans le cas où $u(z) = z^n$.
On montre dans le théorème 2.3.1 que :
Si $A$ et $B$ sont deux matrices de Toeplitz, le produit $A \times B$ est une matrice de Toeplitz si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1) $A$ et $B$ sont toutes les deux triangulaires inférieures ou triangulaires supérieures.

2) $A$ ou $B$ est un multiple de l'identité.

3) Il existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $A$ et $B$ sont de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha a_{n-1} & \cdots & \cdots & \alpha a_2 & \alpha a_1 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & \alpha a_2 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & \alpha a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & \alpha b_{n-1} & \cdots & \cdots & \alpha b_2 & \alpha b_1 \\ b_1 & b_0 & \ddots & & & \alpha b_2 \\ b_2 & b_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & \alpha b_{n-1} \\ b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

Il est à remarquer que Sedlock a montré l'existence de $\alpha$. Dans notre cas, nous avons obtenu une formule explicite de $\alpha$.

Dans le théorème 2.3.2 on a démontré que, si la fonction intérieure $u$ définissant l'espace modèle $K_u^2$ est un produit de Blaschke d'ordre $n$ associé a un seul zéro ( $u(z) = z^n$ ou $u(z) = b_\lambda^n(z), \lambda \in \mathbb{D}$) alors la $\mathbb{C}^*$ algèbre engendrée par $S_u$ ( où $S_u$ est l'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $z$) n'est autre que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. D'autre part nous proposons une caractérisation matricielle d'un opérateur de Toeplitz tronqué de type $\alpha$ dans le cas où la fonction intérieure $u$ est un produit de Blaschke d'ordre $n$ avec des zéros simples deux à deux distincts. Nous donnons la représentation d'une matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué de type $\alpha$ en utilisant la méthode donnée par Ross dans **[12]**.

Dans **la deuxième partie**, qui est composé de deux chapitres, on s'intéresse à l'étude des opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet.

Dans **le troisième chapitre**, nous présentons quelques propriétés des opérateurs de composition sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, particulièrement consacré à l'étude de leur compacité.

Dans **le dernier chapitre**, nous allons étudier les opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement, à la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna associée aux symboles.

Nous avons donné une majoration de la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna par la normes des itérées de symbole $\varphi$.

On pose :

$$\mathcal{D}_\alpha(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z).$$

Nous avons montrer que pour $0 < \alpha < 1$,

$$N_{\varphi,\alpha}(z) \lesssim \mathcal{D}_\alpha(\varphi^{n+1}), \qquad n \geq 1,$$

pour une certaine constante $c > 0$.

Et

$$\inf_{1-\frac{1}{m} \leq |z| \leq 1-\frac{1}{m+1}} N_{\varphi,0}(z) \leq \frac{e^4}{\pi} \mathcal{D}_0(\varphi^{m+1}), \qquad m \geq 2$$

Cette majoration nous permet de construire quelques exemples d'opérateurs bornés et compacts dans $\mathcal{D}_\alpha$. Dans l'espace de Hardy où $\alpha = 1$, nous avons montré une estimation de la fonction de comptage de Nevanlinna dans le théorème 4.4.6 :

Soit $K$ le Cantor généralisé associé à la suite $(a_n)_n$ vérifiant

$$\lambda_K := \sup_{n\geq 1} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2},$$

et soit $\Omega(t) = t^\beta$ telle que $\beta > \mu_K$, où $\mu_K = 1 - \log 2/\log(1/\lambda_K)$.

Alors

$$N_\varphi(z) = O((1-|z|)^{\mu_K/\beta}(\log 1/(1-|z|))^{\mu_K/\beta}), \qquad |z| \to 1^-.$$

Dans l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$ où $0 < \alpha < 1$, nous avons montré le théorème 4.4.7 :

Soient $0 < \alpha < 1$ et $K$ le cantor généralisé associé à la suite $(a_n)_n$ qui vérifie

$$\lambda_K := \sup_{n\geq 1} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2},$$

telle que $\alpha + \mu_K \geq 1$. où $\mu_K = 1 - \log 2/\log(1/\lambda_K)$.

Soit $\Omega(t) = t^\beta$ telle que $\beta < \min\{(1-\alpha)/2, \alpha + \mu_K - 1\}$. Soit $\varphi = \varphi_{\Omega,K}$, alors

$$N_{\varphi,\alpha}(z) = O((1-|z|)^{(\alpha+\mu_K-1)/\beta}) \qquad (z \to 1-).$$

Un travail similaire à ce qui va suivre a été démontré par El-Fallah, Kellay, Shabankhah et Youssfi **[19]** dans les espaces de Dirichlet où $\alpha = 0$.

Dans le théorème 4.4.9 nous avons considéré le cas où $0 \leq \alpha < 1$.

Soit $K$ le cantor généralisé qui vérifie

$$\lambda_K := \sup_{n\geq 1} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2},$$

soit $\Omega : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que $t \to \Omega(t^\gamma)$ soit concave pour $\gamma > 2/(1-\alpha)$.

Si

$$\int_0^1 \frac{\Omega'(t)^2}{\Omega(t)^{2+\alpha}}\, t^\alpha |K_t| dt \,<\, \infty, \tag{0.0.2}$$

alors

$$C_{\varphi_{\Omega,K}} \in S_2(\mathcal{D}_\alpha).$$

# Chapitre 1

# Espace de Hardy et Espace Modèle

Dans ce chapitre on va rappeler quelques définitions et résultats classiques concernant l'espace de Hardy $H^2$ et ses sous-espaces invariants par l'opérateur shift. Nous rappelons aussi certaines propriétés des éléments de cet espace, qu'on va utiliser pour caractériser les sous-espaces invariants par l'adjoint de l'opérateur shift, un tel espace est appelé espace modèle.

## 1.1 Espace de Hardy

On note par $\mathbb{D}$ le disque unité du plan complexe $\mathbb{C}$, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ le cercle unité et par $dm := \dfrac{dt}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$. $L^2(\mathbb{T})$ étant l'espace de Lebesgue usuel sur $\mathbb{T}$.

L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ est l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbb{T})$ dont les coefficients de Fourier de signe négatifs sont nuls, autrement dit

$$H^2(\mathbb{T}) := \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \widehat{f}(n) = 0, \quad n < 0\},$$

avec $\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{\zeta}^n dm(\zeta)$ les coefficients de Fourier d'ordre $n$.

On peut identifier $H^2(\mathbb{T})$ à l'espace $H^2(\mathbb{D})$, l'espace des fonctions holomorphes $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ tel que

$$\|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^2 |d\zeta| < +\infty,$$

car l'application

$$\begin{array}{rccc} \chi : & H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{T}) \\ & f & \longrightarrow & f^* \end{array}$$

est un isomorphisme isométrique, où $f^*$ est la limite radiale de $f$.

D'aprés le théorème de Fatou, la limite radiale de toute fonction $f \in H^2(\mathbb{D})$, qui est une fonction définie sur $\mathbb{T}$ par :

$$f^*(\zeta) := \lim_{r \longrightarrow 1^-} f(r\zeta) \qquad \zeta \in \mathbb{T},$$

existe presque partout sur $\mathbb{T}$.
On peut montrer que $f^* \in H^2(\mathbb{T})$, $\widehat{f}(n) = 0$ pour $n < 0$ et que

$$\int_{\mathbb{T}} \log |f^*| |d\zeta| > -\infty.$$

(Voir **[32]**).

Puisque $H^2(\mathbb{T})$ est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$, il est aussi un espace de Hilbert muni du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{T})$ défini par :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)} |d\zeta|,$$

et muni de la norme

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |f^*(\zeta)|^2 dm(\zeta).$$

On défini l'espace $H^\infty(\mathbb{D})$ par :

$$H^\infty(\mathbb{D}) := \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \sup_{z\in\mathbb{D}} f(z) < \infty\}.$$

Soit $X$ un ensemble non vide et $H$ un espace de Hilbert de fonctions à valeurs complexes sur $X$. Un noyau reproduisant en $\lambda \in X$ d'un espace de Hilbert $H$ est une fonction $k_\lambda$ telle que $\langle f, k_\lambda \rangle = f(z), \quad f \in H$.

Pour chaque point $\lambda \in X$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi_\lambda : & H & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longrightarrow & \Phi_\lambda(f) = f(\lambda) \end{array}$$

est linéaire continue. Donc, et d'aprés le théorème de représentation de Riesz, il existe une fonction unique $k_\lambda \in H$ telle que $f(\lambda) = \langle f, k_\lambda \rangle$ pour tout $f \in H$.

$H^2(\mathbb{D})$ contient une telle fonction en chaque point $\lambda \in \mathbb{D}$, car
pour chaque $\lambda \in \mathbb{D}$, $f(\lambda)$ est linéaire continue.

Ce noyau reproduisant de $H^2(\mathbb{D})$ en $\lambda \in \mathbb{D}$ est donné par :

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

et

$$\langle f, k_\lambda \rangle = \langle f^*, k_\lambda^* \rangle, \quad f \in H^2,$$

La projection orthogonale $P$ de $L^2$ sur $H^2$ peut être exprimée en terme d'un opérateur noyau

$$P(f)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - z\overline{\zeta}} |d\zeta| \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

Une fonction $u \in H^2(\mathbb{D})$ est dite intérieure si

$$|u^*(z)| = 1 \quad \text{presque partout sur} \quad \mathbb{T}.$$

Rappelons aussi que, par le théorème de factorisation, chaque fonction $f \in H^2$ admet une factorisation unique, à une constante près, de la forme

$$f = BSF$$

où $B$ est un produit de Blaschke, $S$ est une fonction intérieure singulière et $F$ une fonction extérieure (pour plus de détail voir **[14]**).

Un produit de Blaschke $B$ , est défini par :

$$B(z) = \prod_n \frac{|z_n|}{z_n}\left(\frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n}z}\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

avec $(z_n)$ une suite de $\mathbb{D}$ compté avec leurs multiplicités et qui vérifie la condition de Blaschke

$$\sum_n (1 - |z_n|) < \infty.$$

Une fonction intérieure singulière $S$ est de la forme

$$S(z) = exp\left(-\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\sigma(\zeta)\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

où $\sigma$ est une mesure de Borel positive finie et singulière par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$.

$BS$ est appelé le facteur intérieur de la fonction $f$.

Une fonction extérieure $F$ est une fonction qui peut être exprimée par :

$$F(z) = exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log\phi(\zeta)|d\zeta|\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

où $\phi$ est une fonction positive mésurable tel que $\log|\phi| \in L^1(\mathbb{T})$, si $\phi = f$ on dit que $F$ est le facteur extérieur de la fonction $f$.

Ces résultats vont nous permettre de voir une fonction de l'espace de Hardy comme une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ ou comme une fonction de $L^2(\mathbb{T})$. On pourra alors utiliser la richesse de la théorie des fonctions holomorphes (principe du maximum etc...) ou la structure de $L^2(\mathbb{T})$ pour calculer des normes ou utiliser les propriétés des coefficients de Fourier. Dans la suite, on notera l'espace de Hardy par $H^2$.

## 1.2 Espace modèle

L'opérateur de décalage à droite (ou shift) sur $H^2$ est défini par :

$$S[f](z) = zf(z) \text{ pour } f \in H^2 \text{ et } z \in \mathbb{T},$$

et son adjoint l'opérateur de décalage à gauche $S^* : H^2 \to H^2$ est défini par :

$$S^*[f](z) = \frac{f(z) - f(0)}{z} \text{ pour } f \in H^2 \text{ et } z \in \mathbb{T}.$$

Un sous-espace $M$ de $H^2$ est dit invariant par $S$ s'il est fermé et tel que $SM \subseteq M$.

Le théorème de Beurling donne une caractérisation complète des sous espaces invariant par le shift dans $H^2$, ils sont tous de la forme :

$$uH^2 = \{uh, \quad h \in H^2\},$$

où $u$ est une fonction intérieure de $H^2$. Le fait que si $E$ est un sous espace fermé invariant par $S$ dans $H^2$ si et seulement si $E^\perp$ est invariant par $S^*$ implique que les sous espaces fermés non nul de $H^2$, invariants par $S^*$ sont de la forme :

$$K_u^2 = (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2$$

pour une certaine fonction intérieure $u \in H^2$.

Le sous espace $K_u^2$ est appelé espace modèle correspondant à la fonction intérieure $u$, qui est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{T})$.
On note par $P_u$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur $K_u^2$ et par $M_u$ et $M_{\overline{u}}$ les opérateurs de multiplication par $u$ et $\overline{u}$ respectivement.

**Proposition 1.2.1.** *Soit $u$ une fonction intérieure de $H^2$.*

*(i) $M_u P M_{\overline{u}}$ est la projection orthogonale sur $uH^2$.*

*(ii) la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur $K_u^2$ est*

$$P_u = P - M_u P M_{\overline{u}}.$$

Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle f, k_\lambda \rangle = \langle f, P_u k_\lambda \rangle &= \langle P_u f, k_\lambda \rangle \\
&= (P_u f)(\lambda) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \frac{1 - u(\lambda)\overline{u(\zeta)}}{1 - \lambda\overline{\zeta}} |d\zeta|.
\end{aligned}$$

Comme dans le cas de $H^2$, chaque $K_u^2$ est un espace à noyau reproduisant. On sait que, si $E$ un sous espace de $H^2$ et $k_\lambda$ est le noyau reproduisant de $H^2$, alors la projection orthogonale $P^E k_\lambda$ de $k_\lambda$ sur $E$ est le noyau reproduisant de $E$, donc

$$k_\lambda - P^E k_\lambda$$

est le noyau reproduisant de $E^\perp$, c'est-à-dire le noyau reproduisant de $K_u^2$ est la projection orthogonale de $k_\lambda$ sur $K_u^2$, il est donné par :

$$k_\lambda^u(z) = \frac{1 - \overline{u(\lambda)}u(z)}{1 - \overline{\lambda}z}, \qquad (\lambda, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}.$$

En effet, si $f = uh \in uH^2$, alors

$$\begin{aligned}
f(\lambda) = u(\lambda)h(\lambda) &= u(\lambda)\langle h, k_\lambda \rangle \\
&= u(\lambda)\langle \overline{u} f, k_\lambda \rangle \\
&= \langle f, \overline{u(\lambda)} u k_\lambda \rangle,
\end{aligned}$$

donc le noyau reproduisant de $uH^2$ est $\overline{u(\lambda)}u(z)k_\lambda$.
Si $f \in K_u^2$ alors

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \langle f, k_\lambda \rangle \\
&= \langle f, k_\lambda \rangle - u(\lambda)\langle f, u k_\lambda \rangle \\
&= \langle f, (1 - \overline{u(\lambda)}u) k_\lambda \rangle.
\end{aligned}$$

De plus $(1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \in K_u^2$ car, pour tout $h \in H^2$,

$$\begin{aligned}\langle uh, (1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda\rangle &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)\langle uh, uk_\lambda\rangle\\ &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)\langle h, k_\lambda\rangle\\ &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)h(\lambda) = 0.\end{aligned}$$

On déduit que :

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda^u\rangle, \quad f \in K_u^2.$$

Une fonction $f$ analytique sur $\mathbb{D}$ admet une limite non-tangentielle $l$ au point $\omega \in \mathbb{T}$ si pour tout $\theta > 0$ $f(z) \to l$ quand $z \to \omega$ sur toute région non-tangentielle $\Gamma_\theta(\omega) = \{z \in \mathbb{D} : |z-\omega| < \theta(1-|\theta|)\}$.

On dit que la fonction $u$ admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point $\eta \in \mathbb{T}$ si $u$ a une limite non-tangentielle au point $\eta$ et $u'$ admet une limite non-tangentielle $u'(\eta)$ au point $\eta$.

On sait que $u$ admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point $\eta$ si et seulement si chaque fonction dans $K_u^2$ possède une limite non-tangentielle $\eta$ **[36]**.

Donc il existe un noyau reproduisant $k_\eta^u$ telle que $\langle f, k_\eta^u\rangle = f(\eta)$.

Autrement dit $k_\eta^u$ est la limite de $k_\lambda^u$ en faisant tendre $\lambda$ vers $\eta$ non-tangentiellement dans le disque et donc

$$k_\eta^u = \frac{1-\overline{u(\eta)}u(z)}{1-\overline{\eta}z}, \qquad z \in \mathbb{T}.$$

**Proposition 1.2.2.** *Soit $u$ une fonction intérieure.*

*L'espace modèle $K_u^2$ est l'ensemble des fonctions $f \in H^2$ telles que $f = u\overline{zg}$ presque partout sur $\mathbb{T}$ pour une certaine fonction $g \in H^2$.*

*Autrement dit,*

$$K_u^2 = H^2 \bigcap u\overline{zH^2}$$

*Démonstration.*

Pour chaque $f \in K_u^2$, on a $f \perp uH^2$ donc

$$\begin{aligned}\langle f, uh\rangle = 0, \forall h \in H^2 &\Leftrightarrow \langle \overline{u}f, h\rangle = 0, \forall h \in H^2\\ &\Leftrightarrow \overline{u}f \in (H^2)^\perp = L^2 \ominus H^2 = \overline{zH^2}\\ &\Leftrightarrow f \in u\overline{zH^2} \quad \text{car } |u| = 1, \quad \text{p.p sur } \mathbb{T},\end{aligned}$$

alors $f \in (uH^2)^\perp$ si et seulement si $f \in u\overline{zH^2}$.

□

Pour chaque fonction intérieure $u$, les compressions de $S$ et $S^*$ sur $K_u^2$ sont notées respectivement par $S_u$ et $S_u^*$.

Dans ce qui suit nous allons proposer quelques exemples d'espaces modèles de dimension finie où on peut décrire explicitement les éléments.

**Proposition 1.2.3.** *Soit $u$ une fonction intérieure.*

*1) Si $u(z) = z^n$ alors $K_u^2$ est l'ensemble des polynômes de degré $(n-1)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ . C'est-à-dire*

$$K_u^2 = \left\{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1}z^{n-1}; \quad a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}\right\}.$$

*2) Si $u$ est un produit de Blaschke d'ordre fini avec des zéros $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, comptés avec leurs ordre de multiplicité alors :*

$$K_u^2 = \left\{\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}}{(1-\overline{\lambda_1}z)(1-\overline{\lambda_2}z)\cdots(1-\overline{\lambda_n}z)}; \quad (a_i)_{0\le i\le n-1} \in \mathbb{C}\right\} \qquad (1.2.1)$$

*3) Si $u$ est un produit de Blaschke d'ordre fini avec des zéros deux à deux distincts $\lambda_1; \lambda_2; ...; \lambda_n$ d'ordre de multiplicités respectifs $m_1; m_2; ...; m_n$ alors :*

$$K_u^2 = \operatorname{span}\left\{\frac{d^{l_{j-1}}}{dz}\left[\frac{1}{1-\overline{\lambda_j}z}\right]; \quad 1 \le j \le n \quad et \quad 1 \le l_j \le m_j\right\}.$$

*Démonstration.*

On va montrer directement la deuxième propriété car la première propriété est un cas particulier de la deuxième.

On suppose que les zéros $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ du produit de Blaschke sont simples et deux à deux distincts. On a :

$$\langle uh, k_{\lambda_j} \rangle = u(\lambda_j)h(\lambda_j) = 0,$$

pour tout $h \in H^2$ et pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$, alors

$$span\{k_{\lambda_j}; \quad 1 \leq j \leq n\} \subseteq K_u^2.$$

Si $f(\lambda_j) = \langle f, k_{\lambda_j} \rangle$ pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$, alors $u$ divise $f$ et donc $f \in uH^2$. Ainsi

$$span\{k_{\lambda_j}; \quad 1 \leq j \leq n\}^{\perp} \subseteq (K_u^2)^{\perp}.$$

Comme $K_u^2 = span\{k_{\lambda_j}; \quad 1 \leq j \leq n\}$, alors toute combinaison linéaire des $k_{\lambda_j}$ pour $j \in \{1, 2, ..., n\}$ peut être exprimé comme une fonction rationnelle du même type de (1.2.1).

Et réciproquement, tout expression du type (1.2.1) peut être décomposée comme combinaison linéaire des fonctions $k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}, ..., k_{\lambda_n}$.

Si $\lambda$ est un zéro d'ordre $m$ de $u$, il faut remplacer $k_\lambda$ par ses dérivées d'ordre inférieure ou égal à $m-1$, c'est-à-dire $k_\lambda, k'_\lambda, k''_\lambda, \cdots, k_\lambda^{(m-1)}$ à la place de $k_\lambda$ dans la démonstration précédente. □

### 1.2.1 Opérateurs de conjugaison

**Définition 1.2.4.** *Soit $H$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$. Un opérateur de conjugaison sur $H$ est un opérateur $C : H \to H$ vérifiant*

*(i)* $\langle Cx, Cy \rangle = \langle y, x \rangle$.

*(ii)* $C^2 = Id_H$

*Un opérateur $T$ défini sur $H$ est dit $C$-symétrique s'il existe un opérateur de conjugaison $C$ sur $H$ tel que $T^* = CTC$.*

Chaque espace modèle $K_u^2$ admet un opérateur de conjugaison

$$C : K_u^2 \longrightarrow K_u^2$$

défini par

$$C[f](z) = u(z)\overline{zf(z)}, \quad f \in K_u^2, \quad z \in \mathbb{T}. \tag{1.2.2}$$

Dans ce qui suit, l'image de chaque fonction $f$ par l'opérateur de conjugaison $C$ défini dans la relation 1.2.2 est notée $\widetilde{f}$ c'est-à-dire $\widetilde{f} = C[f]$.

Nous rappelons dans ce qui suit quelques résultats concernant les noyaux reproduisant et l'opérateur de conjugaison.

**Lemme 1.2.5.** *Pour chaque $\lambda \in \mathbb{D}$ et $z \in \mathbb{T}$, on a :*

*1)* $\widetilde{k_\lambda^u}(z) = \dfrac{u(z) - u(\lambda)}{z - \lambda}$, *en particulier, si* $u(\lambda) = 0$, $\widetilde{k_\lambda^u}(z) = \dfrac{u(z)}{z - \lambda}$.

*2)* $\widetilde{f}(\lambda) = \langle \widetilde{k_\lambda^u}, f \rangle, \quad f \in K_u^2$.

*Démonstration.*

Montrons d'abord (1).

Puisque $|u| = 1$ p.p sur $\mathbb{T}$, pour tout $z \in \mathbb{T}$, nous avons

$$\begin{aligned} \widetilde{k_\lambda^u}(z) &= u(z)\overline{zk_\lambda^u(z)} \\ &= u(z)\overline{z}\frac{1 - u(\lambda)\overline{u(z)}}{1 - \lambda\overline{z}} \\ &= \overline{z}\frac{u(z) - u(\lambda)}{1 - \overline{z}\lambda} \\ &= \frac{u(z) - u(\lambda)}{z - \lambda}. \end{aligned}$$

La propriété (2) découle des égalités suivantes :

$$\langle \widetilde{k_\lambda^u}, f \rangle = \langle Ck_\lambda^u, f \rangle = \langle Ck_\lambda^u, C^2 f \rangle = \langle Cf, k_\lambda^u \rangle = \langle \widetilde{f}, k_\lambda^u \rangle = \widetilde{f}(\lambda).$$

$\square$

## 1.3 Opérateurs de Toeplitz

Dans cette partie nous nous intéressons aux opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace modèle et aux opérateurs de composition sur l'espace de Hardy et plus généralement les espaces de Dirichlet.

Pour une fonction $\varphi \in L^\infty$, l'opérateur de Toeplitz de symbole $\varphi$ sur $H^2$ est défini par :

$$\begin{aligned} T_\varphi : H^2 &\longrightarrow H^2 \\ f &\longrightarrow T_\varphi(f) = P(\varphi f), \end{aligned}$$

où $P$ est la projection orthogonale de $L^2$ sur $H^2$.
Brown et Halmos ont montré qu'un opérateur $T$ borné sur $H^2(\mathbb{T})$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si

$$S^*TS = T.$$

La matrice $A = (a_{ij})_{i,j}$ de l'opérateur de Toeplitz $T_\varphi$ définit sur $H^2$ dans la base $\{1, z, z^2, z^3, \cdots\}$ est donnée par :

$$a_{ij} = \langle T_\varphi z^j, z^i\rangle = \langle P(\varphi z^j), z^i\rangle = \langle \varphi z^j, Pz^i\rangle = \langle \varphi, z^{i-j}\rangle = \widehat{\varphi}(i-j)$$

c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \widehat{\varphi}(-2) & \cdots \\ \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \cdots \\ \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{1.3.1}$$

Où

$$\widehat{\varphi}(k) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)e^{-ikt}dt$$

L'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\varphi \in L^2$ sur $K_u^2$ est défini par :

$$\begin{array}{rcl} A_\varphi^u : K_u^2 & \longrightarrow & K_u^2 \\ f & \longrightarrow & A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f), \end{array}$$

où $P_u$ est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur $K_u^2$.

L'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués sur $K_u^2$ est noté par $\mathfrak{T}_u$.

L'adjoint $(A_\varphi^u)^*$ de $A_\varphi^u \in \mathfrak{T}_u$ est l'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\overline{\varphi}$.
On note par $K_u^\infty = K_u^2 \cap H^\infty$.
Il est à remarquer que $K_u^\infty$ est dense dans $K_u^2$ ( [24, 33]).

**Lemme 1.3.1.** *([23]) Les opérateurs de Toeplitz tronqués sur $K_u^2$ sont C-symétriques par l'opérateur de conjugaison $C$ défini dans la relation (1.2.2).*

*Démonstration.*
Soit $\varphi \in L^2$ telle que $A_\varphi^u \in \mathfrak{T}_u$, pour tout $f \in K_u^\infty$ et $g \in K_u^2$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \langle CA_\varphi^u Cf, g\rangle & = & \langle Cg, A_\varphi^u Cf\rangle \\ & = & \displaystyle\int_{\mathbb{T}} u(\zeta)\overline{\zeta}\overline{g(\zeta)\varphi(\zeta)u(\zeta)}\zeta f(\zeta)dm(\zeta) \\ & = & \displaystyle\int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi(\zeta)}f(\zeta)\overline{g(\zeta)}dm(\zeta) \\ & = & \langle A_{\overline{\varphi}}^u f, g\rangle = \langle (A_\varphi^u)^* f, g\rangle. \end{array}$$

□

Pour $\varphi \in K_u^2$ l'opérateur de Toeplitz tronqué $A_\varphi^u$ commute avec $S_u$, et son adjoint $(A_\varphi^u)^*$ commute avec $S_u^*$.
L'opérateur de Toeplitz tronqué $A_\varphi^u$ est la compression sur $K_u^2$ de l'opérateur de Toeplitz $T_\varphi$ défini sur $H^2$, et $S_u$ est la compression de $S$ sur $K_u^2$ donc, puisque $\varphi \in K_u^2 \subset H^2$, $T_\varphi$ commute avec $S$ alors $A_\varphi^u$ commute avec $S_u$ et son adjoint $(A_\varphi^u)^*$ commute avec $S_u^*$.

**Lemme 1.3.2.** *Soit $u$ une fonction intérieure. Soit $k_\lambda^u$ le noyau reproduisant de $K_u^2$.*

*(i) Pour $\lambda \in \mathbb{D}$ on a :*

$$S_u^* k_\lambda^u = \overline{\lambda} k_\lambda^u - \overline{u(\lambda)} \widetilde{k_0^u}, \tag{1.3.2}$$

$$S_u \widetilde{k_\lambda^u} = \lambda \widetilde{k_\lambda^u} - u(\lambda) k_0^u. \tag{1.3.3}$$

*(ii) Pour $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, on a :*

$$S_u k_\lambda^u = \frac{1}{\overline{\lambda}}(k_\lambda^u - k_0^u), \tag{1.3.4}$$

$$S_u^* \widetilde{k_\lambda^u} = \frac{1}{\lambda}(\widetilde{k_\lambda^u} - \widetilde{k_0^u}). \tag{1.3.5}$$

*Ces égalités sont aussi vraies pour $\lambda \in \mathbb{T}$ et si $u$ admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point $\lambda$.*

*Démonstration.*
Soit $u \in H^2$ une fonction intérieure.

(i) Par définition de $S^*$, pour $f$ et $g$ deux fonctions on a :

$$\begin{aligned} S^*(fg) &= \frac{fg - f(0)g(0)}{z} \\ &= \frac{fg - fg(0) + fg(0) - f(0)g(0)}{z} \\ &= f\frac{g - g(0)}{z} + \frac{f - f(0)}{z} g(0) \\ &= fS^*(g) + S^*(f)g(0). \end{aligned}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{D}$ on a :

$$S_u^* k_\lambda^u = S^*\big((1 - \overline{u(\lambda)} u) k_\lambda\big)$$

Posons $f = (1 - \overline{u(\lambda)}u)$ et $g = k_\lambda$, l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned}
S_u^* k_\lambda^u &= (1 - \overline{u(\lambda)}u)S^* k_\lambda + k_\lambda(0) S^*(1 - \overline{u(\lambda)}u) \\
&= (1 - \overline{u(\lambda)}u)\frac{k_\lambda - k_\lambda(0)}{z} - \overline{u(\lambda)}S^* u \qquad (k_\lambda(0)S^*(1) = 0) \\
&= (1 - \overline{u(\lambda)}u)\frac{\frac{1}{1-\overline{\lambda}z} - 1}{z} - \overline{u(\lambda)}\frac{u - u(0)}{z} \\
&= (1 - \overline{u(\lambda)}u)\overline{\lambda}k_\lambda - \overline{u(\lambda)}\widetilde{k_0^u} \\
&= \overline{\lambda}k_\lambda^u - \overline{u(\lambda)}\widetilde{k_0^u},
\end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité en appliquant l'opérateur de conjugaison $C$ à la première égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
S_u \widetilde{k_\lambda^u} &= C S_u^* C C k_\lambda^u \\
&= C S_u^* k_\lambda^u \\
&= C\big(\overline{\lambda}k_\lambda^u - \overline{u(\lambda)}\widetilde{k_0^u}\big) \\
&= \lambda \widetilde{k_\lambda^u} - u(\lambda) k_0^u.
\end{aligned}$$

(ii) Pour $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, on a :

$$\begin{aligned}
S_u k_\lambda^u &= P_u S k_\lambda^u \\
&= P_u S\big((1 - \overline{u(\lambda)}u)k_\lambda\big) \\
&= P_u S k_\lambda \qquad (\text{car} \quad P_u S\overline{u(\lambda)}u k_\lambda = 0).
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
S k_\lambda(z) &= z k_\lambda(z) \\
&= \frac{z}{1 - \overline{\lambda}z} \\
&= \frac{1}{\overline{\lambda}}\left(\frac{1 - 1 + z\overline{\lambda}}{1 - \overline{\lambda}z}\right) \\
&= \frac{1}{\overline{\lambda}}\big(\frac{1}{1 - \overline{\lambda}z} - 1\big) \\
&= \frac{1}{\overline{\lambda}}(k_\lambda(z) - 1),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} S_u k_\lambda^u &= \frac{1}{\lambda} P_u(k_\lambda(z) - 1) \\ &= \frac{1}{\lambda}(k_\lambda^u - k_0^u), \end{aligned}$$

la deuxième égalité découle de la première égalité, si en appliquant l'opérateur de conjugaison $C$, on a :

$$\begin{aligned} S_u^* \widetilde{k_\lambda^u} &= C S_u C C k_\lambda^u \\ &= C S_u k_\lambda^u \\ &= C\left(\frac{1}{\lambda}(k_\lambda^u - k_0^u)\right) \\ &= \frac{1}{\overline{\lambda}}(\widetilde{k_\lambda^u} - \widetilde{k_0^u}). \end{aligned}$$

□

**Définition 1.3.3.** *Soient $H$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et $x, y \in H$. Le produit tensoriel de $x$ et $y$ est l'opérateur sur $H$ défini par :*

$$x \otimes y : z \in H \longrightarrow \langle z, y \rangle . x \in H$$

*Ce produit tensoriel est de rang 1.*

Dans le lemme suivant on présente quelques propriétés du produit tensoriel.

**Lemme 1.3.4.** *Soit $H$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et soient $x, y, z, t \in H$. Soit $A$ un opérateur continu sur $H$, alors*

*1)* $A(x \otimes y) = A(x) \otimes y$ *et* $(x \otimes y)A = x \otimes A^*(y)$,

*2)* $(x \otimes y)(z \otimes t) = \langle z, y \rangle x \otimes t$,

*3)* $(x \otimes y) + (z \otimes y) = (x + z) \otimes y$,

*4)* $x \otimes y = z \otimes t \Leftrightarrow \exists \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad : \quad x = \alpha z$ *et* $y = \overline{\alpha} t$.

**Lemme 1.3.5.** *[33] Soit $u \in H^2$ une fonction intérieure. Alors*

*a)* $I - S_u S_u^* = k_0^u \otimes k_0^u$,

*b)* $I - S_u^* S_u = \widetilde{k_0^u} \otimes \widetilde{k_0^u}$.

Le symbole de l'opérateur de Toeplitz $T_\varphi$ défini sur l'espace de Hardy est unique car $T_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.
Par contre dans l'espace modèle ce n'est pas le cas, le symbole d'un opérateur de Toeplitz tronqué n'est pas unique, on peut voir par exemple que l'opérateur de symbole $\varphi$ sur $K_u^2$ est souvent nul même si $\varphi \neq 0$. On a le théorème de Sarason [33] suivant :

**Théorème 1.3.6.** *Soit $\varphi \in L^2$. Alors*

$$A_\varphi^u = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad \varphi \in uH^2 + \overline{uH^2}.$$

*Démonstration.*
Soit $\varphi \in L^2$.
On suppose que $\varphi \in uH^2 + \overline{uH^2}$, alors il existe $\psi, \chi \in H^2$ telles que :

$$\varphi = u\psi + \overline{u\chi}.$$

Pour tout $f \in K_u^\infty$ on a :

$$\varphi f = u\psi f + \overline{u\chi} f$$

qui est orthogonale à $K_u^2$ car $uK_u^\infty \subset uH^\infty$ et $\overline{uK_u^\infty} \subset \overline{uH^\infty}$.
Donc $A_\varphi^u = 0$ pour tout $f \in K_u^\infty$ et ainsi $A_\varphi^u = 0$ (car $K_u^\infty$ est dense dans $K_u^2$).

Réciproquement, on suppose que $A_\varphi^u = 0$, et $\varphi = \psi + \overline{\chi}$ avec $\psi, \chi \in H^2$. Donc

$$A_\psi^u = -A_{\overline{\chi}}^u.$$

Les opérateurs $A_{\overline{\chi}}^u$ et $S_u^*$ commutent, ainsi que les opérateurs $A_\psi^u$ et $S_u$, alors les opérateurs $A_\psi^u$ et $A_{\overline{\chi}}^u$ commutent avec $S_u$ et $S_u^*$. Donc

$$A_\psi^u (I - S_u S_u^*) = (I - S_u S_u^*) A_\psi^u,$$

et

$$A_\psi^u(I - S_u S_u^*)k_0^u = (I - S_u S_u^*)A_\psi^u k_0^u. \tag{1.3.6}$$

En appliquant le lemme 1.3.5 on obtient :

$$\begin{aligned} A_\psi^u(I - S_u S_u^*)k_0^u &= A_\psi^u(k_0^u \otimes k_0^u)k_0^u \\ &= \left[(A_\psi^u k_0^u) \otimes k_0^u\right] k_0^u \\ &= \langle k_0^u, k_0^u\rangle A_\psi^u k_0^u \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} (I - S_u S_u^*)A_\psi^u k_0^u &= (k_0^u \otimes k_0^u)A_\psi^u k_0^u \\ &= \langle A_\psi^u k_0^u, k_0^u\rangle k_0^u. \end{aligned}$$

Donc l'équation 1.3.6 devient :

$$\langle k_0^u, k_0^u\rangle A_\psi^u k_0^u = \langle A_\psi^u k_0^u, k_0^u\rangle k_0^u.$$

D'òu $A_\psi^u k_0^u$ est un multiple de $k_0^u$, c'est-à-dire il existe un scalaire $c \in \mathbb{C}$ tel que :

$$A_\psi^u k_0^u = c k_0^u.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} 0 = (A_\psi^u - cI)k_0^u &= P_u\left[(\psi - c)(1 - \overline{u(0)}u)\right] \\ &= P_u(\psi - c), \end{aligned}$$

( car $(\psi - c)(-\overline{u(0)}u) \in uH^2$, donc

$$P_u\left[(\psi - c)(-\overline{u(0)}u)\right] = 0.$$

Ce qui implique que

$$\psi - c \in uH^2$$

alors

$$A_{\psi-c} = 0,$$

et de plus on a :

$$A_\psi^u = cI.$$

Comme $A_\psi^u = -A_{\overline{\chi}}^u$ alors

$$A_{\overline{\chi}}^u = -cI.$$

En répétant le même raisonnement ci-dessus, on trouve que $\chi + \overline{c} \in uH^2$ donc

$$\overline{\chi} + c \in \overline{u}\overline{H^2}.$$

D'où

$$\varphi = \psi - c + \overline{\chi} + c \in uH^2 + \overline{u}\overline{H^2}.$$

□

Dans la proposition suivante nous donnons un exemple très simple d'un opérateur de Toeplitz tronqué qui a plus qu'un seul symbole.

**Proposition 1.3.7.** *Soit $u$ une fonction intérieure. Soient $A_1$, $A_{k_0^u}$ et $A_{\overline{k_0^u}}$ les opérateurs de Toeplitz tronqués des symboles $1$, $k_0^u$ et $\overline{k_0^u}$ respectivement. Alors*

$$I = A_1 = A_{k_0^u} = A_{\overline{k_0^u}}.$$

*Démonstration.*
Soit $f \in K_u^2$.
On a : $A_1 f = P_u(1 \cdot f) = P_u(f) = f$, alors $A_1 = I$.

Et on a :

$$\begin{aligned} A_1(f) - A_{k_0^u}(f) &= A_{1-1+\overline{u(0)}u}(f) \\ &= A_{\overline{u(0)}u}(f) \\ &= P_u\big(\overline{u(0)}uf\big) \\ &= \overline{u(0)}P_u\big(uf\big) \\ &= 0 \qquad (\text{car} \quad uf \in uH^2 = (K_u^2)^\perp), \end{aligned}$$

donc $A_1 = A_{k_0^u}$, mais $A_1$ est auto-adjoint, donc

$$A_{k_0^u} = A^*_{k_0^u} = A_{\overline{k_0^u}}.$$

$\square$

**Théorème 1.3.8.** *(Sarason [33]) Pour $\lambda \in \mathbb{D}$,*

*1) les opérateurs $\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u$ et $k_\lambda^u \otimes \widetilde{k_\lambda^u}$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1,*

*2) Si $u$ admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point $\eta \in \mathbb{T}$ alors $k_\eta^u \otimes k_\eta^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de rang 1,*

*3) Les seuls opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1 sont des multiples des opérateurs définis dans (1) et (2).*

Dans [33] Sarason a montré aussi que pour $\lambda \in \mathbb{D}$ :

1) l'opérateur de Toeplitz tronqué $\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u$ est de symbole $\dfrac{u}{z-\lambda}$

2) l'opérateur de Toeplitz tronqué $k_\lambda^u \otimes \widetilde{k_\lambda^u}$ est de symbole $\dfrac{\overline{u}}{\overline{z}-\overline{\lambda}}$

3) pour $\eta \in \mathbb{T}$, l'opérateur de Toeplitz tronqué $k_\eta^u \otimes k_\eta^u$ est de symbole $k_\eta^u + \overline{k_\eta^u} - 1$.

# Chapitre 2

# Opérateurs de Toeplitz tronqués

Dans le chapitre precédent, on a défini l'espace modèle $K_u^2$ correspondant à la fonction intérieure $u \in H^2$ ainsi que les opérateurs de Toeplitz tronqués sur les espaces modèles. Pour la suite de cette partie on va s'intéresser à une classe spéciale d'opérateurs de Toeplitz tronqués sur les espaces modèles introduit par Sedlock dans [37], les opérateurs de Toeplitz tronqués est de type $\alpha$. On s'intérèsse particulièrement aux matrices de ces opérateurs dans certaines bases de $K_u^2$.

## 2.1 Produit d'opérateurs de Toeplitz

Parmi les problèmes qui nous intéressent pour les opérateurs de Toeplitz est leur produit, car l'ensemble des opérateurs de Toeplitz n'est pas stable par la multiplication et c'est rare où le produit de deux opérateurs de Toeplitz est aussi un opérateur de Toeplitz. Sur l'espace de Hardy, Brown et Halmos [8] en 1962 ont donné une condition nécéssaire et suffisante pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ soit un opérateur de Toeplitz.

**Théorème 2.1.1.** *Soient $\varphi$ et $\psi$ deux fonctions bornées sur $\mathbb{T}$. Le produit $T_\varphi T_\psi$*

*est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $\psi$ est anti-analytique ou si $\varphi$ est analytique. Dans les deux cas on a :*

$$T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}.$$

*Démonstration.*

Soient $(a_{i-j})_{i,j\geq 0}, (b_{i-j})_{i,j\geq 0}$ et $(c_{ij})_{i,j\geq 0}$ les matrices de $T_\varphi$ , $T_\psi$ et $T_\varphi T_\psi$ respectivement, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les $(a_n)$ sont les coefficients de Fourier de $\varphi$ et les $(b_n)$ sont ceux de $\psi$. Pour tout couple $(i, j)$ d'entiers positifs, on a :

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i-k} b_{k-j} \quad \text{et} \quad c_{i+1,j+1} = a_{i+1} b_{-j-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{i-k} b_{k-j},$$

c'est-à-dire

$$c_{i+1,j+1} = c_{ij} + a_{i+1} b_{-j-1}.$$

Il vient que, pour tous entiers positifs $i$ et $j$,

$$\text{si} \quad c_{i+1,j+1} = c_{ij} \quad \text{alors} \quad a_{i+1} b_{-j-1} = 0.$$

Si la matrice $(c_{ij})_{i,j\geq 0}$ est une matrice de Toeplitz, donc le produit $T_\varphi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz, alors

(i) soit $a_{i+1} = 0$ pour tout entier positif $i$ ou bien $b_{-j-1} = 0$ pour tout entier positif $j$, ce qui est équivalent à dire que soit $\widehat{\varphi}(n) = 0$ pour tout entier $n \geq 1$ et donc $\varphi$ est anti-analytique,

(ii) ou bien $\widehat{\psi}(n) = 0$ pour tout entier $n \leq -1$, donc $\psi$ est analytique.

Réciproquement, si $\psi$ est analytique alors $T_\psi$ est l'opérateur de multiplication par $\psi$ et donc pour toute fonction $f$ dans $H^2$

$$T_\varphi T_\psi f = T_\varphi(\psi f) = P(\varphi\psi f) = T_{\varphi\psi} f.$$

Et si $\varphi$ est anti-analytique alors son adjoint $\overline{\varphi}$ est analytique, alors

$$(T_\varphi T_\psi)^* = T_{\overline{\psi}} T_{\overline{\varphi}} = T_{\overline{\psi\varphi}} = (T_{\varphi\psi})^*.$$

Par un deuxième passage à l'adjoint, on obtient que

$$T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}.$$

$\square$

## 2.2 Opérateurs de Toeplitz tronqués de type $\alpha$

En 2010, Sedlock [37] a introduit la notion d'opérateur de Toeplitz tronqué de type $\alpha$.

**Définition 2.2.1.** *Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. Un opérateur de Toeplitz tronqué $A$ est dit de type $\alpha$ si et seulement s'il existe $\varphi \in K_u^2$ telle que*

$$A = A_{\varphi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}+c} \quad , \quad c \in \mathbb{C}.$$

On note par $\mathcal{B}_u^\alpha$ l'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués de type $\alpha$.

**Proposition 2.2.2.** *Si $A_\phi$ est de type $\alpha$, alors il existe $\varphi_0 \in K_u^2$ et $c \in \mathbb{C}$ telle que $\varphi_0(0) = 0$ et $A_\phi = A_{\varphi_0+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_0}}+c}$.*

Comme exemple d'opérateurs de Toeplitz tronqués de type $\alpha$, on a les opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1 donnés par Sedlock dans [37].

**Lemme 2.2.3.** *(Sedlock [37]) Soit $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ alors,*

*(i) Si $\lambda \in \mathbb{D}$, l'opérateur $\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de type $\alpha$, où $\alpha = u(\lambda)$, son symbole est la fonction $\phi = \widetilde{k_\lambda^u} + u(\lambda)\overline{S_u k_\lambda^u}$*

*(ii) Si $\lambda \in \mathbb{T}$ et $u$ admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en $\lambda$, l'opérateur $k_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de type $u(\lambda)$ et son symbole est la fonction $\phi = k_\lambda^u + u(\lambda)\overline{S_u\widetilde{k_\lambda^u}}$.*

*Démonstration.*

(i) On a :

$$\widetilde{k_\lambda^u}(z) = \frac{u(z)-u(\lambda)}{z-\lambda} = \frac{u(z)}{z-\lambda} - \frac{u(\lambda)}{z-\lambda}$$

alors

$$\frac{u}{z-\lambda} = \frac{u(z)-u(\lambda)}{z-\lambda} + \frac{u(\lambda)}{z-\lambda} = \widetilde{k_\lambda^u}(z) + \frac{u(\lambda)}{z-\lambda}.$$

D'aprés le théorème 1.3.8 l'opérateur de Toeplitz tronqué $\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u$ est de symbole $\dfrac{u}{z-\lambda}$ alors

$$\begin{aligned} \widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u &= A_{\frac{u}{z-\lambda}} = A_{\widetilde{k_\lambda^u} + \frac{u(\lambda)}{z-\lambda}} \\ &= A_{\widetilde{k_\lambda^u} + u(\lambda)\overline{zk_\lambda}} \qquad (\text{ car } A_{S_u k_\lambda^u} = A_{Sk_\lambda}) \\ &= A_{\widetilde{k_\lambda^u} + u(\lambda)\overline{S_u k_\lambda^u}} \end{aligned}$$

donc $\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u$ est de type $u(\lambda)$.

(ii) On a déja vu dans le théorème 1.3.8 que pour $\lambda \in \mathbb{T}$ alors $k_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $k_\lambda^u + \overline{k_\lambda^u} - 1$, de plus on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{k_\lambda^u} &= \frac{u(z)-u(\lambda)}{z-\lambda} \\ &= \frac{u(\lambda)\big(1-\overline{u(\lambda)}u(z)\big)}{\lambda\big(1-\overline{\lambda}z\big)} \\ &= \overline{\lambda}u(\lambda)k_\lambda^u, \end{aligned}$$

d'aprés l'équation 1.3.3, on a :

$$S_u\widetilde{k_\lambda^u} = u(\lambda)(k_\lambda^u - k_0^u),$$

alors

$$A_{\overline{S_u\widetilde{k_\lambda^u}}} = A_{\overline{u(\lambda)(k_\lambda^u - k_0^u)}} = A_{\overline{u(\lambda)}(\overline{k_\lambda^u}-1)}$$

donc

$$A_{\overline{k_\lambda^u}-1} = A_{\overline{k_\lambda^u - k_0^u}} = A_{u(\lambda)\overline{S_u \widetilde{k_\lambda^u}}}$$

par conséquant

$$k_\lambda^u \otimes k_\lambda^u = A_{k_\lambda^u + \overline{k_\lambda^u} - 1} = A_{k_\lambda^u + u(\lambda)\overline{S_u \widetilde{k_\lambda^u}}}.$$

Donc $k_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de type $u(\lambda)$.

□

Dans la suite on va montrer que tous les opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1 appartiennent à une certaine classe $\mathcal{B}_u^\alpha$ pour un certain $\alpha$.

En utilisant les résultats du théorème 1.3.8 et du lemme 2.2.3, on a le théorème suivant :

**Théorème 2.2.4.** *Tout opérateur de Toeplitz tronqué de rang 1 appartenant à une certaine classe $\mathcal{B}_u^\alpha$, telle que $\alpha$ est de la forme $\alpha = u(\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.*

*Démonstration.*
Soit $A \in \mathfrak{T}_u$ tel que $A$ est de rang 1. Daprès le théorème 1.3.8, on a :

(i) ou bien, $A$ est multiple de l'un des opérateurs $\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u$ où $k_\lambda^u \otimes \widetilde{k_\lambda^u}$.

(ii) ou bien $A$ est multiple de $k_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ où $u$ admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point $\lambda$.

Et d'aprés le Lemme 2.2.3 l'opérateur $A$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de type $u(\lambda)$. □

Dans [37], Sedlock nous donne plusieurs caractérisations d'un opérateur de Toeplitz tronqué de type $\alpha$.

**Lemme 2.2.5.** *Soient $A$ un opérateur borné et $\alpha \in \mathbb{D}$.*
*Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*1)* $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$

*2) Il existe* $\varphi \in K_u^2$ *telle que*

$$A = A_{\varphi + \alpha \overline{u}(\varphi - \varphi(0))}.$$

*3) Il existe* $\varphi \in K_u^2$ *telle que*

$$A = A_{\dfrac{\varphi}{1 - \alpha \overline{u}}}.$$

*4) Ils existent* $\varphi_1, \varphi_2 \in K_u^2$ *continues telles que*

$$A = A_{\varphi_1 + \overline{\varphi_2}} \quad et \quad \overline{\alpha} S_u \widetilde{\varphi_1} - \varphi_2 \in span(k_0^u).$$

*Démonstration.*

Soient $A$ un opérateur borné et $\alpha \in \mathbb{D}$.

1) $\Rightarrow$ 2) Si $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$, par définition il existe $\varphi \in K_u^2$ telle que $A = A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}}}$
Rappelons que l'opérateur $S_u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $z$, donc $S_u$ est C-symétrique c'est-à-dire

$$S_u C S_u = C^*,$$

dans ce cas on a :

$$\begin{aligned}
S_u \widetilde{\varphi} &= S_u C \varphi \\
&= C S_u^* \varphi \\
&= C P_u\big(\overline{z}[\varphi - \varphi(0)]\big) \\
&= C\big(\overline{z}[\varphi - \varphi(0)]\big) \quad (\text{car} \quad \overline{z}[\varphi - \varphi(0)] \in K_u^2) \\
&= u\big(\overline{\varphi - \varphi(0)}\big).
\end{aligned}$$

D'où $A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}}} = A_{\varphi + \alpha \overline{u}(\varphi - \varphi(0))}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Supposons que $A = A_{\varphi + \alpha\overline{u}(\varphi - \varphi(0))}$, pour $\varphi \in K_u^2$.

$$\text{Comme} \quad \frac{1}{1-\alpha\overline{u}} = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha\overline{u})^n, \quad \text{(série convergente dans } L^2\text{)}.$$

on a :

$$\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}} = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi(\alpha\overline{u})^n = \varphi + \varphi\alpha\overline{u} + \sum_{n=2}^{\infty}\varphi(\alpha\overline{u})^n.$$

Vue que $\overline{u}\varphi \in \overline{zH^2}$, d'après la proposition 1.2.2, on a : $u\overline{\varphi} \in zH^2 \subset H^2$.

Par un calcul simple on obtient, pour $f, g \in K_u^2$ :

$$\langle \varphi\overline{u}^k f, g\rangle = \langle \overline{u}^{k-1} f, u\overline{\varphi} g\rangle = 0, \qquad \text{pour tout} \quad k \geq 2.$$

Il résulte que :

$$A_{\varphi + \alpha\overline{u}(\varphi - \varphi(0))} = A_{\varphi + \varphi\alpha\overline{u}} = A_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}.$$

3) $\Rightarrow$ 4) Supposons que $A = A_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}$ avec $\varphi \in K_u^2$. On a :

$$A_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}} = A_{\varphi + \varphi\alpha\overline{u}}.$$

On a aussi

$$\overline{u}\varphi = \overline{S_u\widetilde{\varphi}},$$

donc ils existent

$$\varphi_1 = \varphi, \quad \varphi_2 = \overline{\alpha}S_u\widetilde{\varphi},$$

de plus

$$\overline{\alpha}S_u\widetilde{\varphi_1} - \varphi_2 = \overline{\alpha}S_u\widetilde{\varphi} - \overline{\alpha}S_u\widetilde{\varphi} = 0 \in span(k_0^u).$$

4) $\Rightarrow$ 1) Supposons que $A = A_{\varphi_1 + \overline{\varphi_2}}$ tel que $\overline{\alpha}S_u\widetilde{\varphi_1} - \varphi_2 \in span(k_0^u)$, alors

$$\varphi_2 = \overline{\alpha}S_u\widetilde{\varphi_1} + ck_0^u \qquad \text{avec} \qquad c \in \mathbb{C}.$$

Donc

$$A_{\varphi_1 + \overline{\varphi_2}} = A_{\varphi_1 + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_1}} + \overline{ck_0^u}},$$

puisque $A_{\overline{ck_0^u}} = \overline{c}A_1 = \overline{c}I$, on déduit que $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$.

□

Dans [37], Sedlock a généralisé les résultats de Brown et Halmos pour répondre à la question : "Pour quel type de $\varphi$ et $\psi$, l'opérateur $A_\varphi A_\psi$ est un opérateur de Toeplitz tronqué ?".

**Théorème 2.2.6.** *Soient $\varphi, \psi \in K_u^2$.*
*Alors $A_\varphi A_\psi$ est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement si l'un des deux cas suivants est vérifié :*

*(i) cas trivial : ou bien $A_\varphi$ ou bien $A_\psi$ est égal à $cI$ avec $c \in C$.*

*(ii) cas non trivial : il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ telle que $A_\varphi$ et $A_\psi$ sont tous les deux de type $\alpha$ et dans ce cas $A_\varphi A_\psi$ est aussi de type $\alpha$.*

### 2.2.1 Shift généralisé

Les opérateurs $S_u$ et $S_u^*$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole respectif $z$ et $\overline{z}$. Autrement dit,

$$S_u = A_z^u \quad \text{et} \qquad S_u^* = A_{\overline{z}}^u.$$

Un autre exemple fondamentale d'opérateurs de Toeplitz tronqués est l'opérateur shift généralisé (ou modifié) $S_u^\alpha$ qui est défini comme suit :
pour $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, on définit l'opérateur $S_u^\alpha$ par :

$$S_u^\alpha = S_u + \frac{\alpha}{1 - \alpha\overline{u(0)}} k_0^u \otimes \widetilde{k_0^u}$$

Notons que $S_u^0 = S_u$.

Ces opérateurs ont été définis par Sarason et Clark (voir **[33, 13]**). Ils sont la somme de deux opérateurs de Toeplitz tronqués. Si $|\alpha| = 1$, $S_u^\alpha$ est un opérateur unitaire appelé opérateur unitaire de Clark.

On a déja vue qu'un opérateur $T$ sur $H^2(\mathbb{T})$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $S^*TS = T$. Sur l'espace modèle $K_u^2$ Sarason a caractérisé les opérateurs de Toeplitz tronqués par le shift généralisé dans le théorème suivant :

**Théorème 2.2.7.** *(Sarason 2007) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Un opérateur borné $A$ sur $K_u^2$ est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement s'ils existent deux fonctions $\varphi, \psi \in K_u^2$ telles que :*

$$A - S_u^\alpha A (S_u^\alpha)^* = (\varphi \otimes k_0^u) + (k_0^u \otimes \psi)$$

Le corollaire suivant est un résultat du théorème précédent.

**Corollaire 2.2.8.** *Si un opérateur borné $A \in K_u^2$ commute avec $S_u^\alpha$ alors $A$ est un opérateur de Toeplitz tronqué.*

**Lemme 2.2.9.** *Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ .*
*L'opérateur $S_u^\alpha$ est un opérateur de type $\alpha$, plus particulièrement*

$$S_u^\alpha = \frac{1}{1 - \alpha\overline{u(0)}} A^u_{S_u k_0^u + \alpha \overline{\widetilde{k_0^u}}}$$

*Démonstration.*
Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$

$$S_u^\alpha = S_u + \frac{\alpha}{1 - \alpha\overline{u(0)}} k_0^u \otimes \widetilde{k_0^u}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{1 - \alpha\overline{u(0)}} k_0^u \otimes \widetilde{k_0^u} &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\overline{u(0)}} A^u_{\frac{\overline{u}}{\overline{z}}} \\
&= A^u_{\frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} \frac{\overline{u}}{\overline{z}}} \\
&= A^u_{\alpha \frac{\overline{u} - \overline{u(0)} + \overline{u(0)}}{\overline{z}(1 - \alpha\overline{u(0)})}} \\
&= A^u_{\frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} \left(\overline{\widetilde{k_0^u}} + \overline{u(0)} z\right)} \\
&= \frac{\alpha}{1 - \alpha\overline{u(0)}} A^u_{\overline{\widetilde{k_0^u}}} + \frac{\alpha\overline{u(0)}}{1 - \alpha\overline{u(0)}} A^u_z \\
&= \frac{\alpha}{1 - \alpha\overline{u(0)}} A^u_{\overline{\widetilde{k_0^u}}} + \frac{\alpha\overline{u(0)}}{1 - \alpha\overline{u(0)}} S_u.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
S_u^\alpha &= S_u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{\widetilde{k_0^u}} + \frac{\alpha\overline{u(0)}}{1-\alpha\overline{u(0)}} S_u \\
&= \frac{1}{1-\alpha\overline{u(0)}} S_u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{\widetilde{k_0^u}} \\
&= \frac{1}{1-\alpha\overline{u(0)}} P_u S_u k_0^u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{\widetilde{k_0^u}} \\
&= \frac{1}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{S_u k_0^u} + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{\widetilde{k_0^u}} \\
&= \frac{1}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{S_u k_o^u + \alpha\widetilde{k_0^u}}
\end{aligned}$$

□

L'opérateur shift généralisé joue un rôle essentiel dans l'étude des opérateurs de Toeplitz tronqués, le théorème suivant, donné par Sedlock dans **[37]**, caractérise les opérateurs de Toeplitz tronqués de type $\alpha$ en terme de $S_u^\alpha$.

**Théorème 2.2.10.** *Soit $A$ un opérateur borné sur $K_u^2$ et soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$.*
*Alors $A$ est de type $\alpha$ si et seulement si*

$$AS_u^\alpha = S_u^\alpha A.$$

*Démonstration.*
Soit $A$ un opérateur borné sur $K_u^2$ et soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$.

$(\Rightarrow)$ Si $A$ est de type $\alpha$, d'après le théorème 2.2.6 et le lemme 1.3.1 on a :

$$\begin{aligned}
AS_u^\alpha &= C^2 AS_u^\alpha C^2 \\
&= C(AS_u^\alpha)^* C \\
&= C(S_u^\alpha)^* A^* C \\
&= C^2 S_u^\alpha C^2 A C^2 \\
&= S_u^\alpha A
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) On suppose que $AS_u^\alpha = S_u^\alpha A$, d'après le corollaire 2.2.8, $A$ est un opérateur de Toeplitz tronqué, donc C-symmétrique. On sait que :

$$AS_u^\alpha = AS_u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}}(Ak_0^u)\otimes\widetilde{k_0^u} = AS_u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}}A(k_o^u\otimes\widetilde{k_o^u}),$$

et

$$S_u^\alpha A = S_uA + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}}k_0^u\otimes(A^*\widetilde{k_0^u}) = S_uA + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}}k_0^u\otimes(\widetilde{Ak_0^u}).$$

D'où

$$\begin{aligned} A - S_uAS_u^* &= A - AS_uS_u^* - \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}}Ak_0^u\otimes S_u\widetilde{k_0^u} + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}}k_0^u\otimes(S_u\widetilde{Ak_0^u}) \\ &= Ak_0^u\otimes k_0^u + \frac{\overline{\alpha u(0)}}{1-\alpha\overline{u(0)}}Ak_0^u\otimes k_0^u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}}k_0^u\otimes S_u\widetilde{Ak_0^u} \\ &= \frac{Ak_0^u}{1-\alpha\overline{u(0)}}\otimes k_0^u + \overline{\alpha}S_uC\left(\frac{Ak_0^u}{1-\alpha\overline{u(0)}}\right). \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{Ak_0^u}{1-\alpha\overline{u(0)}} + \overline{\alpha S_uC\left(\dfrac{Ak_0^u}{1-\alpha\overline{u(0)}}\right)}$ est un symbole de $A$, alors $A$ est de type $\alpha$.

$\square$

Sedlock a montré dans [37] que la seule classe d'opérateurs de Toeplitz tronqués qui est stable par la multiplication est la classe d'opérateurs de Toeplitz tronqués de type $\alpha$.

**Théorème 2.2.11.** *(Sedlock [37]) Pour $\alpha \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, on a :*

*(i) $\mathcal{B}_u^\alpha = \{S_u^\alpha\}'$, le commutant de $S_u^\alpha$.*

*(ii) $\mathcal{B}_u^\alpha$ est une algèbre commutative fermée.*

*(iii) $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$ si et seulement si $A^* \in \mathcal{B}_u^{1/\overline{\alpha}}$.*

*(iv) Si $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$ est inversible alors $A^{-1} \in \mathcal{B}_u^\alpha$.*

*(v) Deux opérateurs de Toeplitz tronqués $A_\varphi$ et $A_\psi$ commutent si et seulement s'ils appartiennent à une même classe $\mathcal{B}_u^\alpha$ pour un certain $\alpha$, dans ce cas le produit $AB \in \mathcal{B}_u^\alpha$.*

*(vi) Si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ alors $\mathcal{B}_u^{\alpha_1} \cap \mathcal{B}_u^{\alpha_2} = \mathbb{C}_{\mathbb{I}}$ où $\mathbb{I}$ désigne l'opérateur identité sur $K_u^2$.*

*(vii) Pour chaque $\alpha$, la classe $\mathcal{B}_u^\alpha$ est une sous-algèbre maximale contenue dans $\mathfrak{T}_u$.*

## 2.3 Matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué

Dans cette partie, on s'intéresse aux matrices des opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace modèle dans le cas où la fonction intérieure est égale a $z^n$, ou bien un produit de Blaschke d'ordre fini.

### 2.3.1 Exemples de matrices d'un opérateur de Toeplitz tronqué

Si $u(z) = z^n$ et $\varphi \in L^2$, la famille $\mathcal{S} = \{1, z, z^2, ..., z^n\}$ est une base orthonormée de $K_u^2$ et la matrice de l'opérateur de Toeplitz tronqué $A_\varphi$ relativement à la base $\mathcal{S}$ n'est autre qu'une matrice de Toeplitz usuelle donnée par la formule 1.3.1 formée par les coefficients de Fourier de la fonction $\varphi$.

En effet, si $A = (a_{kj})_{0 \leq k,j \leq (n-1)}$ est la matrice de $A_\varphi$ dans la base $\mathcal{S}$ alors

$$a_{kj} = \widehat{\varphi}(k - j).$$

La matrice de $A_\varphi$ relativement à la base $\mathcal{S}$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & \cdots & \cdots & a_{-n+2} & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & a_{-n+2} \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

la matrice du shift généralisé $S_u^\alpha$ est de la forme :

$$M = M_{S_u^\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3.2}$$

Il est facile de vérifier que :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de plus on trouve que :

$$M^n = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_n$$

donc la matrice de l'opérateur de Toeplitz tronqué $A_\varphi$ peut s'écrire sous la forme :

$$A = I + \alpha M + \alpha M^2 + \ldots + \alpha M^{n-1}$$

### 2.3.2 Démonstration du théorème de Sedlock par la méthode matricielle

La méthode utilisée par Sedlock dans [37], pour le produit des opérateurs de Toeplitz tronqués montre seulement l'existence de $\alpha$.
Dans notre cas, nous avons obtenu une formule explicite de $\alpha$ dans le cas où $u(z) = z^n$.

Rappelons que sur $K_u^2$, pour $u(z) = z^n$ et $\varphi \in L^2$, la matrice de l'opérateur de Toeplitz tronqué $A_\varphi$ définit sur l'espace $K_u^2$ relativement à la base $\mathcal{S}$ est donnée par la formule 2.3.1.

On s'intéresse à ce type de matrices, qui sont souvent utilisées.
Par exemple, pour $\alpha = 1$, notre matrice n'est autre que la matrice circulante,

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & a_{n-2} \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

et si on multiplie notre matrice par $\frac{1}{\alpha}$ on trouve la matrice alpha-circulante.

**Théorème 2.3.1.** *Soient $A$ et $B$ deux matrices de Toeplitz. Le produit $A \times B$ est une matrice de Toeplitz si et seulement si l'une des condition suivantes est vérifiée :*

*(i) A et B sont toutes les deux triangulaires inférieures ou triangulaires supérieures*

*(ii) A ou B est un multiple de l'identité.*

*(iii) Il existe un $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que A et B sont de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha a_{n-1} & \cdots & \cdots & \alpha a_2 & \alpha a_1 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & \alpha a_2 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & \alpha a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & \alpha b_{n-1} & \cdots & \cdots & \alpha b_2 & \alpha b_1 \\ b_1 & b_0 & \ddots & & & \alpha b_2 \\ b_2 & b_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & \alpha b_{n-1} \\ b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

*Démonstration.*

Notons $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = (a_{i-j})_{1\leq i,j\leq n}$

$B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = (b_{i-j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $A \times B = C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

Par définition,

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik} b_{kj}$$

$C$ est une matrice de Toeplitz si et seulement si :

$$c_{ij} = c_{i-j} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k} b_{k-j} \tag{2.3.3}$$

Nous distinguons deux cas pour cette égalité.

(i) Pour $i = j$, on a :

$$c_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k} b_{k-i} \quad \text{pour } i = 0, 1, ..., n-1.$$

d'où

$$c_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k} b_{k-i} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k+1} b_{k-j-1} \quad \text{pour } i = 0, 1, ..., n-2. \tag{2.3.4}$$

En déduit l'égalité

$$a_{i-n+1} b_{n-i-1} = a_{i+1} b_{-i-1} \tag{2.3.5}$$

Autrement dit

$$\begin{cases} a_{-n+1} b_{n-1} & = & a_1 b_{-1} \\ a_{-n+2} b_{n-2} & = & a_2 b_{-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{-1} b_1 & = & a_{n-1} b_{-n+1} \end{cases} \tag{2.3.6}$$

(ii) Pour $i \neq j$, posons $l = i - j$, $j = i - l$ avec $|l| = 1, ..., n-2$, nous avons :

$$c_{i-j} = c_l = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k} b_{k-i+l}$$

Remarquons que pour chaque $i$ et $l$, on a l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k} b_{k-i+l} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{i-k+1} b_{k-1-i+l} \tag{2.3.7}$$

donc

$$a_{i-n+1} b_{n-1-i+l} = a_{i+1} b_{-1-i+l} \tag{2.3.8}$$

En variant $l$ dans la relation précédente, on obtient les systèmes suivants :

$$\begin{cases} a_1 b_{-1} & = & a_{-n+1} b_{n-1} \\ a_1 b_{-2} & = & a_{-n+1} b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 b_{-n+1} & = & a_{-n+1} b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 b_{-1} & = & a_{-n+2} b_{n-1} \\ a_2 b_{-2} & = & a_{-n+2} b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 b_{-n+1} & = & a_{-n+2} b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n-1} b_{-1} & = & a_{-1} b_{n-1} \\ a_{-n+2} b_{n-2} & = & a_2 b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} b_{-n+1} & = & a_{-1} b_1 \end{cases}$$

Donc, pour chaque $i \in \{0, 1, ..., n\}$, on déduit que :

$$\begin{cases} a_i b_{-1} & = & a_{-n+i} b_{n-1} \\ a_i b_{-2} & = & a_{-n+i} b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_i b_{-n+1} & = & a_{-n+i} b_1 \end{cases} \tag{2.3.9}$$

S'il existe $a_{i_0} \neq 0$, on pose $\beta = \dfrac{a_{-n+i_0}}{a_{i_0}}$.
On obtient :

$$b_{-1} = \beta b_{n-1}, \quad b_{-2} = \beta b_{n-2}, ..., b_{-n+1} = \beta b_1$$

Nous avons deux alternatives pour $\beta$.

(a) Si $\beta = 0$ alors $b_{-1} = b_{-2} = ... = b_{-n+1} = 0$, et en revenant dans 2.3.9, on a :

  (i) soit $a_{-n+1} = 0$ pour tous les $i \in \{0, 1, ..., n\}$,

  (ii) ou bien $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$

  En résumé, si $\beta = 0$ alors $A$ et $B$ sont toutes les deux triangulaires inférieures ou B est multiple de l'identité.

(b) Si $\beta \neq 0$ dans ce cas on a :

$$b_{-1} = \beta b_{n-1}, \quad b_{-2} = \beta b_{n-2}, ..., b_{-n+1} = \beta b_1$$

Nous avons encore deux cas :

(i) S'il existe un $s$ tel que $b_{n-s} \neq 0$ alors

$$a_i b_{-s} = a_{-n+i} b_{n-s}$$

donc

$$\beta a_i b_{n-s} = a_{-n+i} b_{n-s}$$

d'où

$$a_{-n+i} = \beta a_i$$

Donc $A$ et $B$ sont de la forme suivante

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha a_{n-1} & \cdots & \cdots & \alpha a_2 & \alpha a_1 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & \alpha a_2 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & \alpha a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & \alpha b_{n-1} & \cdots & \cdots & \alpha b_2 & \alpha b_1 \\ b_1 & b_0 & \ddots & & & \alpha b_2 \\ b_2 & b_1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & \alpha b_{n-1} \\ b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

(ii) Si $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$ alors $B$ est un multiple de l'identité.

$\square$

### 2.3.3 $\mathbb{C}^*$ algèbre engendrée par $S_u$

Dans cette partie, nous allons montrer que, si $u(z) = z^n$ ou $u(z) = b_\lambda^n(z), \lambda \in \mathbb{D}$ alors la $\mathbb{C}^*$ algèbre engendrée par $S_u$ n'est autre que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{C}$.

**Théorème 2.3.2.** *Soit $u$ la fonction intérieure $u(z) = z^n$. On désigne par $A$ la matrice de $S_u$ par rapport à la base orthogonale $\mathrm{S} = \{1, z, z^2, ..., z^{n-1}\}$ de $K_u^2$ alors*

$$E_{ij} = A^{*(n-1-i)} A^{n-1} A^{*j} \quad \textit{pour} \quad 0 \leq i, j \leq n-1$$

*où $(E_{ij})$ désigne la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $A^* = \overline{A^t}$ l'adjoint de $A$.*
*Donc*

$$\mathbb{C}^*(S_u) = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

*Démonstration.*
Soit $(f_k)_k$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Il suffit de remarquer que :

$$E_{ij}(f_k) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & si \quad k \neq j \\ f_i & si \quad k = j \end{cases}$$

et d'après la formule 2.3.2, on a :

$$A^{*l}(f_k) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & si \quad k < l \\ f_{k-l} & si \quad k \geqslant l \end{cases}$$

et

$$A^m(f_k) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & si \quad k \neq 0 \\ f_m & si \quad k = 0 \end{cases}$$

Alors

$$A^{*j}(f_k) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & si \quad k < j \\ f_{k-j} & si \quad k \geqslant j \end{cases}$$

Donc

1) si $k < j$ on a :

$$A^{*(n-1-i)}A^{n-1}A^{*j}(f_k) = 0$$

2) si $k \geqslant j$ on a :

$$A^{n-1}A^{*j}(f_k) = A^{n-1}(f_{k-j}) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & si \quad k-j \neq 0 \\ f_{n-1} & si \quad k-j = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} A^{*(n-1-i)}A^{n-1}A^{*j}(f_k) &= \begin{cases} \overrightarrow{0} & si \quad k \neq j \\ A^{*(n-1-i)}(f_{n-1}) & si \quad k = j \end{cases} \\ &= \begin{cases} \overrightarrow{0} & si \quad k \neq j \\ f_{(n-1)-(n-1-i)} & si \quad k = j \end{cases} \\ &= \begin{cases} \overrightarrow{0} & si \quad k \neq j \\ f_i & si \quad k = j \end{cases} \\ &= E_{ij}(f_k). \end{aligned}$$

Donc $E_{ij}$ est un produit des puissances de $A$ et $A^*$, alors $\{E_{ij}\}_{0 \leq i,j \leq n-1} \subseteq \mathbb{C}^*(S_u)$, ce qui implique que $\mathbb{C}^*(S_u) = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. □

Le corollaire suivant est un résultat du Théorème 2.3.2, qui montre qu'on peut avoir le même résultat si la fonction intérieure $u$ est un produit de Blaschke d'ordre $n$ avec un seul zéro répété $n$-fois.

**Corollaire 2.3.3.** *Avec les mêmes notations que le théorème précédent.*
*Si*

$$u(z) = \left(\frac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}z}\right)^n$$

*alors*

$$\mathbb{C}^*(S_u) = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}).$$

*Démonstration.*

Rappellons que la transformation de Möbius définie par

$$b_\lambda : z \mapsto b_\lambda(z) = \frac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}z}$$

est une transformation conforme qui envoie 0 à $z$ et vice versa.

Cima, Garcia, Ross et Wogen dans leurs papier [11] ont montré que $\mathfrak{T}_{z^n} \cong \mathfrak{T}_{(b_\lambda)^n}$.

Si $A$ est la matrice de $S_{z^n}$ par rapport à la base orthogonale $\mathrm{S} = \{1, z, z^2, ..., z^{n-1}\}$ de $K^2_{z^n}$ et si $B$ est la matrice de $S_{(b_\lambda)^n}$ par rapport à la base orthogonale $\mathrm{S} = \left\{1, k_\lambda, k_\lambda^2, ..., k_\lambda^{n-1}\right\}$ de $K^2_{(b_\lambda)^n}$ alors $A$ est unitairement équivalente à $B$, donc il existe une matrice unitaire $U$ telle que

$$B = U^* AU.$$

D'où

$$\begin{aligned}
B^{*(n-1-i)}B^{n-1}B^{*j} &= (U^*AU)^{*(n-1-i)}(U^*AU)^{n-1}(U^*AU)^{*j} \\
&= U^*A^{*(n-1-i)}UU^*A^{n-1}UU^*A^{*j}U \\
&= U^*A^{*(n-1-i)}A^{n-1}A^{*j}U \\
&= U^*E_{ij}U = E_{ij}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{C}^*(S_{(b_\lambda)^n}) = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. □

## 2.4 Représentation matricielle d'un opérateur de Toeplitz tronqué de type $\alpha$

Dans cette section, nous donnons la représentation matricielle d'un opérateur de Toeplitz tronqué de type $\alpha$ dans le cas où la fonction intérieure $u$ est un produit de Blaschke d'ordre $n$, avec des zéros simples deux à deux distincts. La première caractérisation matricielle des opérateurs de Toeplitz tronqués, dans le cas où l'espace modèle est de dimension finie, a été obtenue par Cima, Ross et Wogen dans [12]. En utilisant leurs méthode pour déterminer les coefficients de la matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué de type $\alpha$.

En 2008, Cima, Ross et Wogen ont donnés dans [12] une caractérisation matricielle des opérateurs de Toeplitz tronqués dans le cas où la dimension est finie. Nous rappelons ici leurs résultats.

**Théorème 2.4.1.** *Soit $u$ un produit de Blaschke de degré $n$, avec des zéros deux à deux distincts et $A$ une application linéaire sur $K_u^2$. Si $M = (r_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ désigne la matrice de $A$ relativement à la base $\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}\}$ de $K_u^2$ alors $A \in \mathfrak{T}_u$ si et seulement si :*

$$r_{ij} = \frac{\overline{u'(\lambda_i)}}{\overline{u'(\lambda_j)}}\left[\frac{\overline{\lambda}_1 - \overline{\lambda}_i}{\overline{\lambda}_j - \overline{\lambda}_i} r_{1i} - \frac{\overline{\lambda}_j - \overline{\lambda}_1}{\overline{\lambda}_j - \overline{\lambda}_i} r_{1j}\right],\ pour\ 1 \leqslant i,j \leqslant n \quad et \quad i \neq j \tag{2.4.1}$$

Cette relation nous dit que la matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué est entièrement déterminée par la donnée des coefficients de la première ligne et la diagonale. La relation 2.4.1 qui s'écrit aussi

$$r_{1i} = \frac{\overline{u'(\lambda_1)}}{\overline{u'(\lambda_i)}} \text{ et } r_{ij} = \frac{\overline{u'(\lambda_i)}}{\overline{u'(\lambda_j)}}.$$

Par exemple si $n = 2$ la matrice

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$$

est une matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué dans la base $\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}\}$ de $K_u^2$ si et seulement si

$$\overline{u'(\lambda_1)} r_{12} = \overline{u'(\lambda_2)} r_{21}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{D}$ et soit $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$, il existe $\varphi \in K_u^2$ telle que $A = A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}}}$.

Si $u$ est un produit de Blaschke de degré $n$ avec des zéros deux à deux distincts, c'est-à-dire $u(z) = \prod_{k=1}^n b_{\lambda_k}(z)$. D'après la relation 1.2.1, l'ensemble $\mathcal{A} =$

$\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}\}$ est une base non orthonormale de $K_u^2$, alors il existe $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\varphi = a_1 k_{\lambda_1} + a_2 k_{\lambda_2} + ... + a_n k_{\lambda_n}$$

et

$$\widetilde{\varphi} = \overline{a}_1 \widetilde{k_{\lambda_1}} + \overline{a}_2 \widetilde{k_{\lambda_2}} + ... + \overline{a}_n \widetilde{k_{\lambda_n}}.$$

Pour les calculs des coefficients de la matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué, on aura besoin du lemmes suivants :

**Lemme 2.4.2.** *Pour chaque $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, on a :*

*(i)* $\langle \widetilde{k_{\lambda_i}}, \widetilde{k_{\lambda_j}} \rangle = \dfrac{1}{1 - \overline{\lambda_j}\lambda_i}$

*(ii)* $\langle \widetilde{k_{\lambda_i}}, k_{\lambda_j} \rangle = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ u'(\lambda_j) & si \quad i = j \end{cases}$

*Démonstration.*
Soit $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, on a :

(i) $\langle \widetilde{k}_{\lambda_i}, \widetilde{k}_{\lambda_j} \rangle = \langle C[k_{\lambda_i}], C[k_{\lambda_j}] \rangle = \langle k_{\lambda_j}, k_{\lambda_i} \rangle = k_{\lambda_j}(\lambda_i) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda_j}\lambda_i}$

(ii) On a : $\langle \widetilde{k}_{\lambda_i}, k_{\lambda_j} \rangle = \widetilde{k}_{\lambda_i}(\lambda_j)$ car $k_{\lambda_j}$ est un noyau reproduisant et $\widetilde{k}_{\lambda_i} \in K_u^2$.
Mais $\widetilde{k}_{\lambda_i}(z) = \dfrac{u(z)}{z - \lambda_i} = \dfrac{1}{1 - \overline{\lambda_i} z} \displaystyle\prod_{p=1_{p\neq i}}^{n} b_{\lambda_p}(z)$, pour $z \in \mathbb{T}$.

On a deux cas :

1) si $i \neq j$ alors $\widetilde{k}_{\lambda_i}(\lambda_j) = \dfrac{u(\lambda_j)}{\lambda_j - \lambda_i} = 0$

2) pour $i = j$, remarquons que $u'(\lambda_s) = \dfrac{1}{1 - |\lambda_s|^2} \prod_{p=1_{p\neq s}}^{n} b_{\lambda_p}(\lambda_s)$ et

$$\widetilde{k}_{\lambda_i}(\lambda_i) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda_i}\lambda_i} \prod_{p=1_{p\neq i}}^{n} b_{\lambda_p}(\lambda_i) = u^{'}(\lambda_i)$$

.

□

**Lemme 2.4.3.** *Pour chaque $i,j \in \{1,2,...,n\}$, les coefficients de la matrice de $A_{\widetilde{\widetilde{k}}_{\lambda_j}}$ sont tous nuls sauf le coefficient $t_{jj}$ tel que $t_{jj} = \overline{u'(\lambda_j)}$. C'est-à-dire*

$$A_{\widetilde{\widetilde{k}}_{\lambda_j}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \overline{u'(\lambda_j)} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

*Démonstration.*

D'après le lemme 2.2.3, on sait que $k_\lambda^u \otimes \widetilde{k}_\lambda^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de type $\overline{u(\lambda)}$ et son symbole est la fonction

$$\Phi = \widetilde{\widetilde{k}}_\lambda^u + \overline{u(\lambda)} S_u k_\lambda^u$$

.

Il est à remarquer que, puisque $u(\lambda_j) = 0$, alors $k_{\lambda_j} \otimes \widetilde{k}_{\lambda_j}$ est de symbole $\widetilde{\widetilde{k}}_{\lambda_j}$. Pour chaque $i \in \{1,2,...,n\}$ on a :

$$k_{\lambda_j} \otimes \widetilde{k}_{\lambda_j}(k_{\lambda_i}) = \langle k_{\lambda_i}, \widetilde{k}_{\lambda_j} \rangle k_{\lambda_j},$$

d'après le lemme 2.4.2 on a :

$$k_{\lambda_j} \otimes \widetilde{k}_{\lambda_j}(k_{\lambda_i}) = \begin{cases} \overline{u'(\lambda_j)} & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce cas la matrice de $A_{\widetilde{\widetilde{k}}_{\lambda_j}}$ est

$$A_{\widetilde{\widetilde{k}}_{\lambda_j}} = diag\big(0, \cdots, 0, \overline{u'(\lambda_j)}, 0, \cdots, 0\big)$$

□

**Lemme 2.4.4.** *Pour chaque $s \in \{1, 2, ..., n\}$, notons $(b_{ij}(s))_{1 \leq s,p \leq n}$ la matrice de $A_{k_{\lambda_s}}$ relativement à la base $\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}\}$ de $K_u^2$. Alors les $b_{ij}(s)$ sont donnés par :*

$$b_{ij}(s) = \begin{cases} \dfrac{\overline{\lambda}_s}{\overline{\lambda}_s - \overline{\lambda}_j} & si \quad i = s, \quad j \neq s \\[2ex] \dfrac{\overline{\lambda}_s}{\overline{\lambda}_s - \overline{\lambda}_i} \dfrac{\overline{u'(\lambda_s)}}{\overline{u'(\lambda_i)}} & si \quad s = j, \quad i \neq s \\[2ex] \dfrac{\overline{\lambda}_i}{\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_s} & si \quad i = j, \quad j \neq s \\[2ex] 1 + \dfrac{\overline{\lambda}_s \overline{u''(\lambda_s)}}{\overline{u'(\lambda_s)}} & si \quad i = j = s \\[2ex] 0 & si \quad i \neq s, j \neq s \quad et \quad i \neq j \end{cases}$$

*Démonstration.*

Pour chaque $s \in \{1, 2, ..., n\}$ et $1 \leq j \leq n$, par définition, $b_{ij}(s)$ est la i-ème composante de $A_{k_{\lambda_s}}(k_{\lambda_j})$.

* Si $j \neq s$, on a :

$$\begin{aligned} A_{k_{\lambda_s}}(k_{\lambda_j}) &= P_u[k_{\lambda_s} k_{\lambda_j}] = P_u\left(\frac{\overline{\lambda}_s}{\overline{\lambda}_s - \overline{\lambda}_j} k_{\lambda_s} + \frac{\overline{\lambda}_j}{\overline{\lambda}_j - \overline{\lambda}_s} k_{\lambda_j}\right) \\ &= \frac{\overline{\lambda}_s}{\overline{\lambda}_s - \overline{\lambda}_j} k_{\lambda_s} + \frac{\overline{\lambda}_j}{\overline{\lambda}_j - \overline{\lambda}_s} k_{\lambda_j} = b_{sj} k_{\lambda_s} + b_{jj} k_{\lambda_j} \end{aligned}$$

* Si $j = s$, on a $A_{k_{\lambda_s}}(k_{\lambda_s}) = P_u(k_{\lambda_s}^2) \in K_u^2$, donc ils existent $c_{1s}, c_{2s}, ..., c_{ns}$ de $\mathbb{C}$ tels que

$$A_{k_{\lambda_s}}(k_{\lambda_s}) = P_u(k_{\lambda_s}^2) = c_{1s} k_{\lambda_1} + c_{2s} k_{\lambda_2} + ... + c_{ns} k_{\lambda_n}.$$

D'après le lemme 2.4.2, pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$ on a :

$$\left\langle P_u(k_{\lambda_s}^2), \widetilde{k}_{\lambda_i} \right\rangle = c_{is} \overline{u'(\lambda_i)} \tag{2.4.2}$$

$$\begin{aligned}\left\langle P_u(k_{\lambda_s}^2), \widetilde{k}_{\lambda_i}\right\rangle &= \left\langle k_{\lambda_s}^2, P_u(\widetilde{k}_{\lambda_i})\right\rangle \\ &= \left\langle k_{\lambda_s}^2, \widetilde{k}_{\lambda_i}\right\rangle \\ &= \overline{\left\langle \widetilde{k}_{\lambda_i}, k_{\lambda_s}^2\right\rangle} = \overline{I}_{is},\end{aligned}$$

où $I_{is} = \displaystyle\int_{\mathbb{T}} \frac{u(\zeta)}{\zeta - \lambda_i} \frac{1}{(1-\lambda_s\overline{\zeta})^2} dm(\zeta)$.

Posons $\zeta = e^{i\theta}$ alors $dm(\zeta) = \dfrac{d\theta}{2\pi}$ et $d\zeta = d(e^{i\theta}) = ie^{i\theta}d\theta = i\zeta d\theta$ c'est-à-dire $dm(\zeta) = \dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{d\zeta}{\zeta}$.

Donc

$$I_{is} = \int_{\mathbb{T}} \frac{u(\zeta)}{\zeta - \lambda_i} \frac{1}{(1-\lambda_s\overline{\zeta})^2} dm(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta u(\zeta)}{(\zeta-\lambda_i)(\zeta-\lambda_s)^2} d(\zeta).$$

On a deux cas :

1) Pour $i \neq s$, on considère la fonction $f$ définie par :

$$f(z) = \frac{zu(z)}{(z-\lambda_i)(z-\lambda_s)} = \frac{z}{(1-\overline{\lambda_i}z)(1-\overline{\lambda_s}z)} \prod_{k=1_{k\neq i,s}}^{n} \frac{z-\lambda_k}{1-\overline{\lambda_k}z}.$$

La fonction $f$ est une fonction holomorphe sur chaque voisinage $V$ du disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ qui ne contient pas les points $\lambda_i, \lambda_s$, donc $f$ admet un prolongement analytique qu'on va noté $f^s$ avec

$$f^s(z) = \frac{zu(z)}{(z-\lambda_i)(z-\lambda_s)}.$$

On a dans ce cas :

$$I_{is} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{f^s(\zeta)}{(\zeta-\lambda_s)} d(\zeta) = f^s(\lambda_s), \qquad \text{(d'après la formule de Cauchy)},$$

d'autre part on a :

$$f^s(\lambda_s) = \frac{\lambda_s}{(1-|\lambda_s|^2)(1-\overline{\lambda_i}\lambda_s})} \prod_{k=1_{k\neq i,s}}^{n} \frac{\lambda_s-\lambda_k}{1-\overline{\lambda_k}\lambda_s} = \frac{\lambda_s}{\lambda_s-\lambda_i}u'(\lambda_s).$$

Donc

$$I_{is} = \frac{\lambda_s}{\lambda_s-\lambda_i}u'(\lambda_s).$$

2) Pour $i = s$, on a :

$$I_{ss} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta u(\zeta)}{(\zeta-\lambda_s)^3} d(\zeta).$$

On considère la fonction $g$ définie par $g(z) = zu(z)$.

Puisque la fonction $g$ est holomorphe dans un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, alors d'après la formule de Cauchy on a :

$$I_{ss} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta u(\zeta)}{(\zeta-\lambda_s)^3} d(\zeta) = \frac{g''(\lambda_s)}{2} = u'(\lambda_s) + \frac{\lambda_s}{2} u''(\lambda_s).$$

De l'équation 2.4.2 on obtient :

$$c_{is} = \frac{\overline{I_{is}}}{u'(\lambda_i)}$$

Donc

$$c_{is} = \begin{cases} \dfrac{\overline{\lambda}_s}{\overline{\lambda}_s - \overline{\lambda}_s} \dfrac{\overline{u'(\lambda_s)}}{\overline{u'(\lambda_i)}} & si \quad i \neq s \\ \\ 1 + \dfrac{\overline{\lambda_s}}{2} \dfrac{\overline{u''(\lambda_s)}}{\overline{u'(\lambda_s)}} & si \quad i = s \end{cases} \tag{2.4.3}$$

□

Nous allons maintenant déterminer la matrice de $A_\varphi$ pour $\varphi \in K_u^2$.

**Lemme 2.4.5.** *Soit $\varphi \in K_u^2$, notons par $(r_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ sa matrice dans la base $\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}\}$ de $K_u^2$. Alors les $r_{ij}$ sont donnés par :*

$$r_{ij} = \begin{cases} a_i \dfrac{\overline{\lambda}_i}{\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_j} + a_j \dfrac{\overline{\lambda}_j}{\overline{\lambda}_j - \overline{\lambda}_i} \dfrac{\overline{u'(\lambda_j)}}{\overline{u'(\lambda_i)}} & si \quad i \neq j \\ \\ \displaystyle\sum_{k=1_{k\neq i}}^{n} a_k \frac{\overline{\lambda}_i}{\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_k} + a_i \left[1 + \frac{\overline{\lambda_i}\overline{u''(\lambda_i)}}{\overline{u'(\lambda_i)}}\right] & si \quad i = j \end{cases} \tag{2.4.4}$$

*où les $a_i$ sont les coordonnées de la fonction $\varphi$ relativement à la base $\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}\}$ de $K_u^2$.*

*Démonstration.*

Soit $\varphi \in K_u^2$, alors il existe $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\varphi = a_1 k_{\lambda_1} + a_2 k_{\lambda_2} + ... + a_n k_{\lambda_n}$$

donc $A_\varphi = \sum_{s=1}^{n} a_s A_{k_{\lambda_s}}$. Il s'ensuit, d'après le lemme 2.4.4, que $r_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_s b_{ij}(s)$.

(i) Si $i \neq j$, d'après le lemme 2.4.4 on a :

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \sum_{s=1}^{n} a_s b_{ij}(s) \\ &= a_1 b_{ij}(1) + a_2 b_{ij}(2) + \cdots + a_n b_{ij}(n) \\ &= a_i b_{ij}(i) + a_j b_{ij}(j) \\ &= a_i \frac{\overline{\lambda}_i}{\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_j} + a_j \frac{\overline{\lambda}_j}{\overline{\lambda}_j - \overline{\lambda}_i} \frac{\overline{u'(\lambda_j)}}{\overline{u'(\lambda_i)}} \end{aligned}$$

(ii) Si $i = j$, d'après le lemme 2.4.4 on a :

$$\begin{aligned} r_{ii} &= \sum_{s=1}^{n} a_s b_{ii}(s) \\ &= a_1 b_{ii}(1) + a_2 b_{ii}(2) + \cdots + a_i b_{ii}(i) + \cdots + a_n b_{ii}(n) \\ &= a_1 \frac{\overline{\lambda}_i}{\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_1} + a_2 \frac{\overline{\lambda}_i}{\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_2} + \cdots + a_i \left[ 1 + \frac{\overline{\lambda}_i \overline{u''(\lambda_i)}}{\overline{u'(\lambda_i)}} \right] + \cdots + a_n \frac{\overline{\lambda}_i}{\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_n} \\ &= \sum_{k=1_{k \neq i}}^{n} a_k \frac{\overline{\lambda}_i}{\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_k} + a_i \left[ 1 + \frac{\overline{\lambda}_i \overline{u''(\lambda_i)}}{\overline{u'(\lambda_i)}} \right]. \end{aligned}$$

$\square$

**Lemme 2.4.6.** *Si $\varphi \in K_u^2$ alors la matrice de $A_{\overline{S_u \varphi}}$ est de la forme*

$$diag\left( a_1 \overline{\lambda}_1 \overline{u'(\lambda_1)}, a_2 \overline{\lambda}_2 \overline{u'(\lambda_2)}, ..., a_n \overline{\lambda}_n \overline{u'(\lambda_n)} \right),$$

*où les coefficients $a_1, a_2, ..., a_n$ sont les coordonnées de la fonction $\varphi$ relativement à la base $\mathcal{A}$ de $K_u^2$.*

*Démonstration.*

Soit $\varphi = a_1 k_{\lambda_1} + a_2 k_{\lambda_2} + ... + a_n k_{\lambda_n}$ avec $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$, alors

$$\widetilde{\varphi} = \overline{a}_1 \widetilde{k_{\lambda_1}} + \overline{a}_2 \widetilde{k_{\lambda_2}} + ... + \overline{a}_n \widetilde{k_{\lambda_n}}.$$

D'après la relation 1.3.3 on a :

$$\begin{aligned} S_u \widetilde{\varphi} &= \overline{a}_1 S_u \widetilde{k_{\lambda_1}} + \overline{a}_2 S_u \widetilde{k_{\lambda_2}} + ... + \overline{a}_n S_u \widetilde{k_{\lambda_n}} \\ &= \overline{a}_1 \lambda_1 \widetilde{k_{\lambda_1}} + \overline{a}_2 \lambda_2 \widetilde{k_{\lambda_2}} + ... + \overline{a}_n \lambda_n \widetilde{k_{\lambda_n}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\overline{S_u \widetilde{\varphi}} = a_1 \overline{\lambda}_1 \overline{\widetilde{k_{\lambda_1}}} + a_2 \overline{\lambda}_2 \overline{\widetilde{k_{\lambda_2}}} + ... + a_n \overline{\lambda}_n \overline{\widetilde{k_{\lambda_n}}}.$$

Comme $A_{\overline{\widetilde{k_{\lambda_p}}}} = k_{\lambda_p} \otimes \widetilde{k_{\lambda_p}}$ (d'après le lemme 2.2.3) alors

$$A_{\overline{S_u \widetilde{\varphi}}} = \sum_{p=1}^{n} a_p \overline{\lambda}_p A_{\overline{\widetilde{k_{\lambda_p}}}} = \sum_{p=1}^{n} a_p \overline{\lambda}_p (k_{\lambda_p} \otimes \widetilde{k_{\lambda_p}}),$$

d'après le lemme 2.4.2 on a :

$$A_{\overline{S_u \widetilde{\varphi}}}(\lambda_s) = \sum_{p=1}^{n} a_p \overline{\lambda}_p (k_{\lambda_p} \otimes \widetilde{k_{\lambda_p}})(k_{\lambda_s}) = a_p \overline{\lambda}_p \overline{u'(\lambda_p)} \delta_{sp}.$$

□

Nous pouvons maintenant décrire la matrice d'un opérateur de Toeplitz tronqué de type $\alpha$.

**Théorème 2.4.7.** *Soit $\alpha \in \mathbb{D}$ et $A \in \mathcal{B}_u^{\alpha}$ de symbole $\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}}$. Notons $(t_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice de $A$ dans la base $\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}\}$ de $K_u^2$. Alors les $t_{ij}$ sont donnés par :*

$$t_{ij} = \begin{cases} a_i \left(1 + \dfrac{\overline{u''(\lambda_i)}}{\overline{u'(\lambda_i)}}\right) + \overline{\lambda_i} \displaystyle\sum_{p=1_{p \neq i}}^{n} \dfrac{a_p}{\overline{\lambda_i} - \overline{\lambda_p}} + \alpha a_i \overline{\lambda_i} \overline{u'(\lambda_i)} & si \quad i = j \\ \\ a_i \dfrac{\overline{\lambda_i}}{\overline{\lambda_i} - \overline{\lambda_j}} + a_j \dfrac{\overline{\lambda_j}}{\overline{\lambda_j} - \overline{\lambda_i}} \dfrac{\overline{u'(\lambda_j)}}{\overline{u'(\lambda_i)}} & si \quad i \neq j \end{cases}$$

*où les $a_i$ sont les coordonnées de la fonction $\varphi$ relativement à la base $\mathcal{A} = \{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}\}$ de $K_u^2$.*

*Démonstration.*

Soit $\varphi \in K_u^2$, ils existent $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\varphi = a_1 k_{\lambda_1} + a_2 k_{\lambda_2} + ... + a_n k_{\lambda_n}$$

et

$$\widetilde{\varphi} = \overline{a}_1 \widetilde{k_{\lambda_1}} + \overline{a}_2 \widetilde{k_{\lambda_2}} + ... + \overline{a}_n \widetilde{k_{\lambda_n}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}}} &= A_\varphi + A_{\alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}}} \\ &= A_\varphi + \alpha A_{\overline{S_u \widetilde{\varphi}}} \end{aligned}$$

Les coefficients de la matrice $A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}}}$ sont la somme des coefficients de la matrice $A_\varphi$ décrites dans le Lemme 2.4.5 et les coefficients de la matrice $A_{\alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}}}$ donnés par le Lemme 2.4.6.

En effet, puisque la matrice de $A_{\overline{S_u \widetilde{\varphi}}}$ est diagonale alors

(i) Si $i = j$

$$A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}}} = A_\varphi + \alpha A_{\overline{S_u \widetilde{\varphi}}}$$

donc si on note par $(t_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ les coefficients de la matrice $A$ dans la base $\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}\}$ de $K_u^2$. Alors les $t_{ij}$ sont donnés par :

$$t_{ij} = a_i \left( 1 + \frac{\overline{u''(\lambda_i)}}{\overline{u'(\lambda_i)}} \right) + \overline{\lambda_i} \sum_{p=1_{p \neq i}}^{n} \frac{a_p}{\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_p} + \alpha a_i \overline{\lambda}_i \overline{u'(\lambda_i)}$$

(ii) Si $i \neq j$

$$A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}}} = A_\varphi$$

et les coefficients $t_{ij}$ de la matrice de $A$ dans la base $\{k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2}, ..., k_{\lambda_n}\}$ de $K_u^2$ sont donnés par :

$$t_{ij} = a_i \frac{\overline{\lambda}_i}{\overline{\lambda}_i - \overline{\lambda}_j} + a_j \frac{\overline{\lambda}_j}{\overline{\lambda}_j - \overline{\lambda}_i} \frac{\overline{u'(\lambda_j)}}{\overline{u'(\lambda_i)}}$$

$\square$

# Chapitre 3

# Opérateurs de composition sur l'espace de Hardy

Dans ce chapitre, nous allons nous intéréssés à l'étude de quelques propriétés des opérateurs de composition sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$. particulièrement il est consacré à l'étude de leur compacité.

Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, l'opérateur de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ de symbole $\varphi$ est défini par :

$$\begin{array}{rcl} C_\varphi : H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{D}) \\ f & \longrightarrow & C_\varphi(f) = f \circ \varphi. \end{array}$$

## 3.1 Opérateurs de composition

Sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$, l'opérateur de composition $C_\varphi$ est toujours borné, cela d'après le principe de subordination de Littlewood (1925) **[38]**, donné dans le théorème suivant :

**Théorème 3.1.1.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe et $\varphi(0) = 0$, pour tout*

*$f \in H^2(\mathbb{D})$, alors $C_\varphi$ est un opérateur borné sur $H^2(\mathbb{D})$ et*

$$\|C_\varphi f\|_2 \leq \|f\|_2.$$

*Démonstration.*

Soit $S^*$ l'opérateur de décalage à gauche définit sur $H^2(\mathbb{D})$, pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n) z^n$$

alors

$$S^* f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n+1) z^n.$$

On remarque que pour toute fonction holomorphe $f \in H^2(\mathbb{D})$ on a :

$$f(z) = f(0) + zSf(z) \qquad (z \in \mathbb{D}), \tag{3.1.1}$$

$$S^n f(0) = \widehat{f}(n) \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

on suppose que $f$ est un polynôme. Il est clair, dans ce cas, que $f$ est bornée sur $\mathbb{D}$, alors $f \circ \varphi$ est aussi borné. On déduit que $f \circ \varphi \in H^2(\mathbb{D})$. On a :

$$\|Sf\|_2 \leq \|f\|_2$$

pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$.

En remplaçant $z$ par $\varphi(z)$ dans l'équation (3.1.1), on obtient :

$$f(\varphi(z)) = f(0) + \varphi(z)(S^* f)(\varphi(z)) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

On note par $M_\phi$ l'opérateur de multiplication par $\phi$ et on réecrit l'équation précédente, on aura :

$$C_\varphi f = f(0) + M_\varphi C_\varphi S^* f.$$

Puisque $\varphi(0) = 0$, le coefficient constant de $M_\varphi C_\varphi S^* f$ est nul, donc $M_\varphi C_\varphi S^* f$ est orthogonale à la fonction constante $f(0)$ dans $H^2(\mathbb{D})$. Ainsi,

$$\|C_\varphi f\|_2^2 \;=\; |f(0)|^2 + \|M_\varphi C_\varphi S^* f\|_2^2 \leq |f(0)|^2 + \|C_\varphi S^* f\|_2^2, \qquad (3.1.2)$$

la dernière inégalité résulte de la propriété de contraction des opérateurs de multiplication puisque $\|\varphi\|_\infty \leq 1$.

Remplaçons maintenant $f$, successivement, par $S^* f, S^{*2} f, \cdots, S^{*n} f$ dans (3.1.2) on obtient :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi S^* f\|_2^2 &\leq |S^* f(0)|^2 + \|C_\varphi S^{*2} f\|_2^2 \\
\|C_\varphi S^{*2} f\|_2^2 &\leq |S^{*2} f(0)|^2 + \|C_\varphi S^{*3} f\|_2^2 \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
\|C_\varphi S^{*n} f\|_2^2 &\leq |S^{*n} f(0)|^2 + \|C_\varphi S^{*n+1} f\|_2^2,
\end{aligned}$$

on déduit que, pour tout entier $n$ positif, on a :

$$\|C_\varphi f\|_2^2 \leq \sum_{k=0}^{n} |(S^{*k} f)(0)|^2 + \|C_\varphi S^{*n+1} f\|_2^2. \qquad (3.1.3)$$

Rappelons que $f$ est un polynôme, si $n$ est son degré, alors $S^{n+1} f = 0$, donc l'inégalité 3.1.3 devient :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f\|_2^2 &\leq \sum_{k=0}^{n} |(S^{*k} f)(0)|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n} |\widehat{f}(k)|^2 \\
&= \|f\|_2^2,
\end{aligned}$$

ceci nous montre que $C_\varphi$ est une contraction de norme dans $H^2(\mathbb{D})$.

Soit
$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{f}(k) z^k,$$
on note par $f_n$ la somme partielle de la série de Taylor d'ordre $n$ associé à $f$.

On a $f_n \longrightarrow f$ en norme dans $H^2(\mathbb{D})$, alors $f_n \longrightarrow f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$.

Dans ce cas $f_n \circ \varphi$ converge uniformément vers $f \circ \varphi$ sur tout compact de $\mathbb{D}$.

Ainsi pour chaque $r$, $\quad 0 < r < 1$ fixé, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(\varphi(re^{i\theta}))|^2 d\theta &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(\varphi(re^{i\theta}))|^2 d\theta \\
&\leq \limsup_{n\longrightarrow\infty} \|f_n \circ \varphi\|_2^2 \\
&\leq \limsup_{n\longrightarrow\infty} \|f_n\|_2^2 \\
&\leq \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

□

Pour chaque point $a \in \mathbb{D}$, on définit l'automorphisme spécial de $\mathbb{D}$ par :

$$\phi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

c'est une transformation de Möbius. Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe.

On pose $a = \varphi(0)$, soit la fonction holomorphe $\psi = \phi_a \circ \varphi$.

Si $\varphi = \phi_a \circ \psi$, alors $C_\varphi = C_\psi C_{\phi_a}$.

Il est clair que $C_\psi$ est borné, et le produit des opérateurs bornés est toujours borné.

On a le lemme suivant :

**Lemme 3.1.2.** *[40] Pour tout $a \in \mathbb{D}$, soit*

$$\phi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}$$

*la transformation de Möbius de $\mathbb{D}$.*

*L'opérateur $C_{\phi_a}$ est borné dans $H^2(\mathbb{D})$, de plus on a :*

$$\|C_{\phi_a}\| \leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{1/2}$$

*Démonstration.*

Supposons d'abord que $f$ est une fonction holomorphe dans $(R\mathbb{D})$, avec $R\mathbb{D} = \{|z| < R\}$, pour certain $R > 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\|f \circ \phi_a\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(\phi_a(e^{i\theta}))|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 |\phi_a'(e^{it})| dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2 \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}e^{it}|^2} dt \\
&\leq \frac{1-|a|^2}{(1-|a|)^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^2\right) \\
&= \frac{1+|a|}{1-|a|}\|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

On fait tendre $R$ vers 1, cqfd. □

Le théorème de Littlewood [38] nous donne l'estimation de la norme de l'opérateur de composition $C_\varphi$,

**Théorème 3.1.3.** *Soit $\varphi$ une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$.*
*Alors $C_\varphi$ est un opérateur borné dans $H^2(\mathbb{D})$, et*

$$\|C_\varphi\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)}{1-|\varphi(0)|}}.$$

*Démonstration.*

Comme il est indiqué précédemment, on a :

$$C_\varphi = C_\psi C_{\phi_a}, \quad \text{où} \quad a = \varphi(0).$$

D'aprés les deux lemmes précédents, les opérateurs $C_\psi$ et $C_{\phi_a}$ sont bornés dans $H^2$, par concéquant $C_\varphi$ est aussi borné. De plus

$$\|C_\varphi\| \leq \|C_\psi\|\|C_{\phi_a}\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)}{1-|\varphi(0)|}}.$$

□

## 3.2 Compacité des opérateurs de composition

Dans cette section nous allons étudier la compacité des opérateurs de composition. Nous avons d'abord le résultat suivant sur les symboles de normes petites.

**Théorème 3.2.1.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Si $\|\varphi\|_\infty < 1$ alors $C_\varphi$ est un opérateur compact sur $H^2(\mathbb{D})$.*

*Démonstration.*

Pour chaque entier positif $n$ on défini l'opérateur

$$T_n f = \sum_{k=0}^{n} \widehat{f}(k)\varphi^k, \quad f \in H^2(\mathbb{D}).$$

$T_n$ est donc borné. En effet, $\|\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_\infty < 1$,

$$\begin{aligned}
\|T_n f\|_2 &\leq \sum_{k=0}^{n} |\widehat{f}(k)|\|\varphi^k\|_2 \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|\varphi\|_2^k\right)^{1/2} \\
&\leq \|f\|_2 \left(\frac{1}{1-\|\varphi\|_2}\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Montrons que $\|C_\varphi - T_n\| \longrightarrow 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\|(C_\varphi - T_n)f\|_2 &= \|\sum_{k=n+1}^{\infty} \widehat{f}(k)\varphi^k\|_2 \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|\|\varphi^k\|_2 \\
&\leq \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|\varphi\|_2^k\Big)^{1/2} \\
&\leq \frac{\|\varphi\|_2^{n+1}}{\sqrt{1-\|\varphi\|_2^2}}\|f\|_2 \\
&\leq \frac{\|\varphi\|_\infty^{n+1}}{\sqrt{1-\|\varphi\|_\infty^2}}\|f\|_2.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|C_\varphi - T_n\| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty^{n+1}}{\sqrt{1-\|\varphi\|_\infty^2}} \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty,$$

puisque $T_n$ est de rang fini sur $H^2(\mathbb{D})$, alors $C_\varphi$ est un opérateur compact sur $H^2(\mathbb{D})$.

$\square$

**Remarque 3.2.1.**

*1) Soit $\varphi(z) = \dfrac{1+z}{2}$, $\|\varphi\|_\infty = 1$ alors l'opérateur de composition $C_\varphi$ n'est pas compact sur $H^2(\mathbb{D})$.*

*En effet, si $\alpha < 1/2$, soit $f_\alpha(z) = (1-z)^{-\alpha} \in H^2(\mathbb{D})$, on a*

$$\|f_\alpha\| \longrightarrow \infty \quad \textit{quand} \quad \alpha \longrightarrow 1/2.$$

*Soit $g_\alpha = f_\alpha/\|f_\alpha\|$, alors $g_\alpha$ converge uniformément vers zéro sur un sous-ensemble compact de $\mathbb{D}$, quand $\alpha \longrightarrow 1/2$. Puisque $C_\varphi f_\alpha = 2^\alpha f_\alpha$, chaque $f_\alpha$ est un vecteur propre de $C_\varphi$, de même pour tout $g_\alpha$, mais*

$$\|C_\varphi g_\alpha\| = 2^\alpha \longrightarrow \sqrt{2} \neq 0$$

*donc $C_\varphi$ n'est pas compact.*

*2) Pour $0 < \lambda < 1$. Soit $\varphi(z) = \lambda z + (1-\lambda)$, alors l'opérateur de composition $C_\varphi$ n'est pas compact sur $H^2(\mathbb{D})$.*

Pour une fonction holomorphe $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, on définit l'ensemble de contact de $\varphi$ par :

$$E(\varphi) = \{\theta \in [-\pi, \pi] : |\varphi(e^{i\theta})| = 1\}.$$

La proposition suivante montre que l'ensemble de contact du symbole d'un opérateur de composition est de mesure nulle.
Soit $E \subset \mathbb{T}$, on désigne par $|E|$ la mesure de Lebesgue de l'ensemble $E$.

**Proposition 3.2.2.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, et soit $E(\varphi)$ l'ensemble de contact de $\varphi$.*

*Si $C_\varphi$ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$, alors $|E(\varphi)| = 0$.*

*Démonstration.*
Soit $E = E(\varphi)$. On a :

$$\begin{aligned} \|C_\varphi(z^n)\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta \\ &\geq \frac{1}{2\pi}\int_{E} |\varphi(e^{i\theta})|^{2n} d\theta \\ &\geq \frac{1}{2\pi}|E| > 0 \end{aligned}$$

Ainsi la suite $C_\varphi(z^n)$ ne tend pas vers zéro en norme.
Puisque $z^n (n \geq 0)$ appartient a la boule unité de $H^2(\mathbb{D})$, $z^n$ tend vers zéro uniformément sur un sous-ensemble compact de $\mathbb{D}$, d'où $C_\varphi$ n'est pas compact. $\square$

Maintenant, nous allons définir la fonction de comptage de Nevanlinna qui joue un rôle essentielle dans l'étude des opérateurs de composition.

**Définition 3.2.3.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. On définit la fonction de comptage de Nevanlinna de $\varphi$ pour tout $z \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}$ par :*

$$N_\varphi(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{w \in \varphi^{-1}(\{z\})} \frac{1}{\log|w|} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

*où $\varphi^{-1}(\{z\})$ désigne l'ensemble des antécédents de $z$ par $\varphi$, chacun étant compté avec sa multiplicité (en tant que zéro de la fonction $(\varphi - z)$).*

Le lemme suivant montre l'invariance de la fonction de comptage de Nevanlinna par la transformation de Möbius ([38]).

**Lemme 3.2.4.** *Soit $\phi_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}$ la transformation de Möbius de $\mathbb{D}$, pour tout $a \in \mathbb{D}$, on a :*

$$N_{\varphi,1}(\phi_a(w)) = N_{\phi_a \circ \varphi,1}(w), \qquad w \in \mathbb{D}.$$

Soit $dA(z) = dxdy/\pi$, ( avec $z = x + iy$), la mesure de Lebesgue planaire normalisée sur $\mathbb{D}$.

Dans le théorème suivant, nous avons l'identité de Littlewood-Paley qui nous donne une autre expression de la norme de $H^2(\mathbb{D})$.

**Théorème 3.2.5.** *Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$, alors*

$$\|f\|_2^2 = |f(0)|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \log \frac{1}{|w|} dA(w).$$

*Démonstration.*

Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$, on écrit

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \log \frac{1}{|w|} dA(w) &= \int_0^r \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}|^2 d\theta \right] \log \frac{1}{r} r dr \\
&= 2\int_0^r \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 r^{2(n-1)} \log \frac{1}{r} r dr \right] \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \int_0^r r^{2(n-1)} \log \frac{1}{r} r dr \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 (\frac{1}{2n})^2 \\
&= \frac{1}{2} \left[ \|f\|_2^2 - |f(0)|^2 \right],
\end{aligned}$$

donc $\|f\|_2^2 = |f(0)|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \log \frac{1}{|w|} dA(w)$. □

Nous avons besoin aussi du théorème de changement de variable suivant :

**Théorème 3.2.6.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe et soit $f \in H^2(\mathbb{D})$, alors :*

$$\|C_\varphi f\|_2^2 = |f(\varphi(0))|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w)$$

*Démonstration.*
Appliquant l'identité de Littlewood-Paley a la fonction $f \circ \varphi$,

$$\begin{aligned} \|f \circ \varphi\|_2^2 - |f(\varphi(0))|^2 &= 2\int_{\mathbb{D}} |(f \circ \varphi)'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) \\ &= 2\int_{\mathbb{D}} |(f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z). \end{aligned}$$

La fonction $\varphi$ est localement univalente sur $\mathbb{D}$, sauf sur un nombre dénombrable de points où la dérivée de $\varphi$ s'annule.
Donc l'ensemble $\mathbf{Z} = \{z \in \mathbb{D} : \varphi'(z) = 0\}$ est dénombrable et $\mathbb{D} \setminus \mathbf{Z}$ peut s'écrire comme une union des rectangles disjoints $\mathbf{R}_j$ où sur chaque rectangle $\varphi$ est biholomorphe. On note par $\psi_j$ l'inverse de la restriction de $\varphi$ sur $\mathbf{R}_j$.

Par la formule de changement de variable usuel, si $w = \varphi(z)$, alors

$$dA(w) = |\varphi'(z)|^2 dA(z),$$

pour tout $j$ on a :

$$\int_{\mathbf{R}_j} |(f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) = \int_{\varphi(\mathbf{R}_j)} |f'(w)|^2 \log \frac{1}{|\psi_j(w)|} dA(w).$$

Par sommation sur $j$, où $\chi_j$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\varphi(\mathbf{R}_j)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |(f'(\varphi(z))|^2|\varphi'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}dA(z) &= \sum_j \int_{\mathbf{R}_j} |(f'(\varphi(z))|^2|\varphi'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}dA(z)\\ &= \sum_j \int_{\varphi(\mathbf{R}_j)} |f'(w)|^2 \log\frac{1}{|\psi_j(w)|}dA(w)\\ &= \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \sum_j \chi_j(w)\log\frac{1}{|\psi_j(w)|}dA(w),\end{aligned}$$

si $w \in \varphi(\mathbb{D}) \setminus \varphi(z)$ chaque point de $\varphi^{-1}(\{x\})$ est de multiplicité 1, donc

$$\sum_j \chi_j(w)\log\frac{1}{|\psi_j(w)|} = N_\varphi(w),$$

pour $w \in \varphi(\mathbb{D})$ presque partout, alors on a :

$$\int_{\mathbb{D}} |(f'(\varphi(z))|^2|\varphi'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}dA(z) = \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 N_\varphi(w)dA(w).$$

□

Notons que :

$$N_\varphi(w) = O(1-|w|), \qquad |w| \to \infty, \tag{3.2.2}$$

voir corollaire (3.2.8), ceci résulte de l'inégalité de Littlewood suivante :

**Théorème 3.2.7.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe.*
*Pour tout $w \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}$,*

$$N_\varphi(w) \le \log\left|\frac{1-\overline{w}\varphi(0)}{w-\varphi(0)}\right|.$$

*Démonstration.*
Soit $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe telle que $\psi(0) \neq 0$, si $\{z_j\}$ est l'ensemble des zéros de $\psi$, alors $|\psi(0)| \le \prod |z_j|$ donc

$$\log|\psi(0)| \le \log\left(\prod |z_j|\right) = \sum \log|z_j|.$$

D'où

$$N_\psi(0) = \sum \log \frac{1}{|z_j|} \leq \log \frac{1}{|\psi(0)|}. \tag{3.2.3}$$

Maintenant on considère la fonction

$$\psi(z) = \frac{w - \varphi(z)}{1 - \overline{w}\varphi(z)} = \phi_w(\varphi(z)).$$

Puisque $\varphi$ est holomorphe dans $\mathbb{D}$ dans lui même et $w \in \mathbb{D}$ tel que $\varphi(0) \neq w$, alors $|\psi(z)| < 1$ et $\psi(0) \neq 0$, l'inégalité 3.2.3 devient :

$$N_\psi(0) \leq \log \left| \frac{1 - \overline{w}\varphi(0)}{w - \varphi(0)} \right|,$$

comme $\psi(z) = 0$ si et seulement si $\varphi(z) = w$, on a l'inégalité. □

**Corollaire 3.2.8.** *Pour toute fonction $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe, on a :*

$$N_\varphi(w) \leq \frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|} \log \frac{1}{|w|}.$$

*Démonstration.*

On a :

$$N_\varphi(w) \leq \log \left| \frac{1 - \overline{w}\varphi(0)}{w - \varphi(0)} \right|,$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} &\leq \frac{\log \left| \frac{1 - \overline{w}\varphi(0)}{w - \varphi(0)} \right|}{\log \frac{1}{|w|}} \\
&\leq \frac{\log \left| \frac{w - \varphi(0)}{1 - \overline{w}\varphi(0)} \right|^2}{\log |w|^2} \\
&\leq \frac{1 - \left| \frac{w - \varphi(0)}{1 - \overline{w}\varphi(0)} \right|^2}{1 - |w|^2} \\
&\leq \frac{\frac{\left(1 - |w|^2\right)\left(1 - |\varphi(0)|^2\right)}{|1 - \overline{w}\varphi(0)|^2}}{1 - |w|^2} \leq \frac{1 + |\varphi(0)|}{1 - |\varphi(0)|}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{N_{\varphi}(w)}{\log \dfrac{1}{|w|}} \leq \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}.$$

□

La fonction de comptage de Nevanlinna vérifie l'inégalité de la moyenne dans le théorème (3.2.10). Pour le montrer nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.2.9.** *Soit* $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *une fonction holomorphe avec* $\psi(0) \neq 0$*,*
*si* $0 < R < |\psi(0)|$ *alors*

$$N_{\psi}(0) \leq \frac{1}{R^2} \int_{R\mathbb{D}} N_{\psi}(z) dA(z).$$

*Démonstration.*
Supposons $f$ une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ avec $f(0) \neq 0$. Soit $(a_n)$ la suite des zéros de $f$, la formule de Jensen est :

$$\sum_{n=1}^{n(r)} \log \frac{r}{|a_n|} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|, \quad 0 \leq r < 1.$$

Les termes de la somme du premier membre de l'équation sont tous positifs, alors

$$\log |f(0)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Si $w \in \mathbb{D}$, alors pour $f(z) = z - w$ l'inégalité précédente devient :

$$\log |w| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |re^{i\theta} - w| d\theta,$$

pour tout $0 \leq r < 1$.

Par intégration sur l'intervalle $[0, R]$ par rapport à la mesure $2R^{-2} r dr$, on obtient :

$$\log |z| \leq \frac{1}{R^2} \int_{R\mathbb{D}} \log |z - w| dA(w). \tag{3.2.4}$$

Soit

$$N_{\psi,r}(w) := \sum \log \frac{r}{|z_j(w)|},$$

pour tout $0 \leq r < 1$, avec $\{z_j\}$ l'ensemble des zéros de $\psi$.

Ensuite, la formule de Jensen pour $f = \psi - w$ est

$$N_{\psi,r}(w) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\psi(re^{i\theta})|d\theta - \log|\psi(0)|, \quad 0 \leq r < 1.$$

Intégrons les deux membres de cette identité par rapport à la mesure de probabilité $R^{-2}dA(w)$ on obtient :

$$\frac{1}{R^2}\int_{R\mathbb{D}} N_{\psi,r}(w)dA(w) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{R^2}\int_{R\mathbb{D}} \log|\psi(re^{i\theta}) - w|dA(w)\right)d\theta - \log|\psi(0)|,$$

Utilisons l'équation 3.2.4 avec $z = \psi(re^{i\theta})$, on trouve que pour tout $0 \leq r < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{R^2}\int_{R\mathbb{D}} N_{\psi,r}(w)dA(w) &\geq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\psi(re^{i\theta})|d\theta - \log|\psi(0)| \\ &= N_{\psi,r}(0).\end{aligned}$$

Puisque, pour tout $w \in \mathbb{D}$

$$N_{\psi,r}(w) \to N_{\psi}(w) \quad \text{quand} \quad r \to 1$$

ce qui termine la preuve. □

**Théorème 3.2.10.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe avec $\varphi(0) = 0$, alors :*

$$N_{\varphi}(z) \leq \frac{2}{R^2}\int_{D(z,R)} N_{\varphi}(w)dA(w),$$

*pour tout disque de centre $z$ et de rayon $R$, tel que $D(z,R) \subset \mathbb{D} \setminus D(0,\frac{1}{2})$.*

*Démonstration.*

Soit $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe avec $\varphi(0) = 0$. D'après les lemmes 3.2.9 et 3.2.4 on a :

$$\begin{aligned}N_{\varphi}(z) = N_{\phi_z\circ\varphi}(0) &\leq \frac{1}{R^2}\int_{D(0,R)} N_{\phi_z\circ\varphi}(w)dA(w) \\ &= \frac{1}{R^2}\int_{D(0,R)} N_{\varphi}(\varphi_z(w))dA(w)\end{aligned}$$

avec
$$\phi_z(\varphi(0)) = \frac{z - \varphi(0)}{1 - \overline{z}\varphi(0)} = z$$
et $0 < R < |\phi_z(\varphi(0))| = |z| < 1$.
On pose :
$$\zeta = \phi_z(w),$$
alors
$$w = \phi_z(\zeta),$$
et
$$\begin{aligned} dA(w) &= |\phi_z'(\zeta)|^2 dA(\zeta) \\ &= \left[\frac{(1-|z|^2)}{|1-\overline{z}\zeta|^2}\right]^2 dA(\zeta). \end{aligned}$$
Notons aussi que si $w \in D(0,R)$ alors $\zeta \in \phi_z\big(D(0,R)\big) \subset D(z,R)$.
Donc
$$N_\varphi(z) \leq \frac{1}{R^2}\int_{D(z,r)} N_\varphi(\zeta)\left[\frac{\left(1-|z|^2\right)^2}{|1-\overline{z}\zeta|^4}\right] dA(\zeta)$$
Si $|z| > 1/2 > R$, d'après le lemme 4.3.3 de [42] on a :
$$N_\varphi(z) \leq \frac{2}{R^2}\int_{D(z,R)} N_\varphi(\zeta) dA(\zeta).$$
□

J.Shapiro dans [38, 39] a caractérisé la compacité des opérateurs de composition sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ en utilisant la fonction de comptage Nevanlinna.

**Théorème 3.2.11.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, alors $C_\varphi$ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement si*

$$\lim_{|w| \to 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{\log \dfrac{1}{|w|}} = 0.$$

*Démonstration.*

Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe.

1)Supposons que

$$\lim_{|w|\to 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{\log \frac{1}{|w|}} = 0,$$

on montre que $C_\varphi$ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$.

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions de $H^2(\mathbb{D})$ qui converge uniformément vers 0 sur tout compact de $\mathbb{D}$.

D'apré le théorème de la convergence faible, il suffit de montrer que :

$$\|C_\varphi f_n\| \to 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné, de l'hypothèse de $N_\varphi$ on choisit $0 < r < 1$ tel que :

$$N_\varphi(w) < \varepsilon \log \frac{1}{|w|}.$$

Comme $f_n \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$, on peut choisir $n_\varepsilon$ tel que $|f_n| < \sqrt{\varepsilon}$ sur $r\mathbb{D} \cup \{\varphi(0)\}$, $\quad \forall n > n_\varepsilon$.

Alors pour tout $n$, on a :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f_n\|^2 &= |f_n(\varphi(0))|^2 + \int_{r\mathbb{D}} + \int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 N_\varphi(w) dA(w) \\
&< \varepsilon + \varepsilon \int_{r\mathbb{D}} N_\varphi(w) dA(w) + \int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 \log \frac{1}{|w|} dA(w) \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon \int_{r\mathbb{D}} N_\varphi(w) dA(w) + \int_{\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 \log \frac{1}{|w|} dA(w) \\
&= \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\|z\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}(\|f_n\|^2 - |f_n(\varphi(0))|^2) \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc

$$\|C_\varphi f_n\| \to 0,$$

ce qui montre la compacité de $C_\varphi$.

2)On suppose que $C_\varphi$ est compact sur $H^2(\mathbb{D})$ et on montre que :

$$N_\varphi(w) = o(\log\frac{1}{|w|}) \quad \text{quand} \quad |w| \to 1^-$$

qui est équivalent à :

$$\lim_{|w|\to 1^-} \frac{N_\varphi(w)}{1-|w|} = 0.$$

Pour $a \in \mathbb{D}$, le noyau reproduisant normalisé est :

$$f_a(z) = \frac{\sqrt{1-|a|^2}}{1-\bar{a}z}.$$

Comme $\|f_a\| = 1, \quad \forall a$, et $f_a \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ quand $|a| \to 1^-$, on obtient :

$$\lim_{|a|\to 1^-} \|C_\varphi f_a\| = 0$$

Puisque $\phi_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$ est un automorphisme de $\mathbb{D}$, pour tout $a \in \mathbb{D}$, alors :

$$N_\varphi(\phi_a(w)) = N_{\phi_a\circ\varphi}(w), \quad \forall w \in \mathbb{D}$$

Appliquant la formule de changement de variable (le théorème (3.2.6)) et l'inégalité de la moyenne (le théorème (3.2.10)), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f_a\|^2 &\geq 2\int_{\mathbb{D}} |f_a'(w)|^2 N_\varphi(w)dA(w) \\
&= 2\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|a|^2)|a|^2}{|1-\bar{a}w|^4} N_\varphi(w)dA(w) \\
&= \frac{2|a|^2}{1-|a|^2}\int_{\mathbb{D}} |\phi_a'(w)|^2 N_\varphi(w)dA(w).
\end{aligned}$$

Posons $W = \phi_a(w)$, on a :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f_a\|^2 &\geq \frac{2|a|^2}{1-|a|^2}\int_{\mathbb{D}} N_\varphi(\phi_a(W))dA(W) \\
&= \frac{2|a|^2}{1-|a|^2}\int_{\mathbb{D}} N_{\phi_a\circ\varphi}(W))dA(W) \\
&\geq \frac{2|a|^2}{1-|a|^2}\int_{\frac{1}{2}\mathbb{D}} N_{\phi_a\circ\varphi}(W))dA(W).
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de la moyenne a l'intégrale précédent, avec

$$\psi = \phi_a \circ \varphi,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f_a\|^2 &\geq 4\frac{2|a|^2}{1-|a|^2} N_{\phi_a \circ \varphi}(0) \\ &= \frac{8|a|^2}{1+|a|} \frac{N_\varphi(a)}{1-|a|}. \end{aligned}$$

On notera que dans la première ligne de l'équation précédente, l'application de l'inégalité de la moyenne sur le disque $\frac{1}{2}\mathbb{D}$ nécessite que

$$|\phi_a(\varphi(0))| > \frac{1}{2}.$$

Mais $|\phi_a(\varphi(0))| \to 1$ quand $|a| \to 1^-$, alors cela reste vrai pour tout $a$ .
Par conséquent, pour toutes ces $a$,

$$\|C_\varphi f_a\|^2 \geq c\frac{N_\varphi(a)}{1-|a|}, \quad \text{où} \quad c \text{ constant.}$$

Comme la compacité de $C_\varphi$ implique que $\|C_\varphi f_a\| \to 0$ quand $|p| \to 1^-$, alors la dernière inégalité donne l'estimation souhaitée de la fonction $N_\varphi$. $\square$

# Chapitre 4

# Estimations de la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna

Dans ce chapitre, nous allons étudier les opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet. Nous allons nous intéressés plus particulièrement à la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna associée aux symboles.

## 4.1 Espace de Dirichlet et fonction de comptage généralisée de Nevanlinna

Dans cette section nous allons définir les espaces de Dirichlet et la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna associée aux espaces de Dirichlet.

### 4.1.1 Espace de Dirichlet

On pose :

$$dA_\alpha(z) = (1+\alpha)(1-|z|)^\alpha dA(z), \qquad z \in \mathbb{D},$$

où $dA(z) = dxdy/\pi, z = x + iy$.

Les espaces de Dirichlet sont définis par :

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_\alpha^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z) < \infty \right\}.$$

Notons que si :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

alors

$$\|f\|_\alpha^2 \asymp \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{1-\alpha} |a_n|^2.$$

(Voir proposition 4.1.1)

Notons que si $\alpha = 1$, $\mathcal{D}_1 = H^2$ est l'espace de Hardy et lorsque $\alpha = 0$, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ est l'espace de Dirichlet classique.

On désigne par $A \lesssim B$, s'il existe une constante absolue $c$, telle que :

$$A \leq cB$$

$A \asymp B$ signifie que $A \lesssim B$ et $B \lesssim B$.

**Proposition 4.1.1.** *Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha$. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ alors*

$$\|f\|_\alpha^2 \asymp \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{1-\alpha} |a_n|^2.$$

Pour la preuve de la proposition nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.1.2.** *Soit $n$ un entier positif et $0 < r < 1$, alors*

$$\int_0^1 r^n (1-r)^\alpha dr \asymp \frac{1}{(n+1)^{1+\alpha}}$$

*Démonstration.*

Soit $n$ un entier positif et $0 < r < 1$.

(i)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r^n(1-r)^\alpha dr &= \int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n(1-r)^{1-(1-\alpha)}dr + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 r^n(1-r)^\alpha dr \\
&\leq n^{(1-\alpha)} \int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n(1-r)dr + \frac{1}{n^\alpha}\int_{1-\frac{1}{n}}^1 dr \\
&\leq n^{(1-\alpha)}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \frac{1}{n^{1+\alpha}} \\
&\asymp \frac{1}{(n+1)^{1+\alpha}}.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r^n(1-r)^\alpha dr &\geq \int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n(1-r)^\alpha dr \\
&\geq \frac{1}{n^\alpha}\int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n dr \\
&\geq \frac{1}{n^\alpha}\left[\frac{r^{n+1}}{n+1}\right]_0^{n+1} \\
&\gtrsim \frac{1}{(n+1)^{1+\alpha}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} \\
&\asymp \frac{1}{(n+1)^{1+\alpha}}.
\end{aligned}$$

□

*Démonstration.* (de la proposition 4.1.1)

Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z) &= \int_0^1\int_0^{2\pi} |\sum a_n n z^{n-1}|^2(1+\alpha)(1-|z|)^\alpha r\frac{drd\theta}{\pi} \\
&= 2(1+\alpha)\int_0^1 \sum |a_n|^2 n^2 r^{2n}(1-r^2)^\alpha r dr \\
&= 2(1+\alpha)\sum |a_n|^2 n^2 \int_0^1 r^{2n+1}(1-r^2)^\alpha dr \\
&\asymp \sum |a_n|^2 n^2 \frac{n^2}{n^{1+\alpha}} = \sum |a_n|^2 n^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

□

### 4.1.2 Fonction de comptage généralisée de Nevanlinna

La fonction de comptage généralisée de Nevanlinna associée à l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$ est donnée par :

$$N_{\varphi,\alpha}(z) = \sum_{z=\phi(w)} (1-|w|)^\alpha, \qquad z \in \mathbb{D} \setminus \{\phi(0)\},$$

pour $0 \leqslant \alpha < 1$.

Notons que lorsque $\alpha = 1, N_1$ est comparable a la fonction de comptage de Nevanlinna classique que nous avons définis dans le chapitre précédent de la manière suivante :

$$N_{\varphi,1}(z) = N_\varphi(z).$$

La fonction de comptage généralisée de Nevanlinna joue un rôle essentiel dans l'étude des opérateurs de composition. En effet, on a déja vue que J.Shapiro **[38]** a caractérisé la compacité de l'opérateur de composition sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ par la fonction de comptage Nevanlinna, et sur les espaces de Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$, pour $0 < \alpha \leq 1$, il a été montré dans **[27, 43]** que :

(i) $C_\varphi$ est borné dans $\mathcal{D}_\alpha \Leftrightarrow N_{\varphi,\alpha}(z) = O((1-|z|)^\alpha)$ quand $|z| \to 1^-$,

(ii) $C_\varphi$ est compact dans $\mathcal{D}_\alpha \Leftrightarrow N_{\varphi,\alpha}(z) = o((1-|z|)^\alpha)$ quand $|z| \to 1^-$.

Dans la suite de notre travail, on aura besoin des lemmes suivants. Le premier lemme donne la formule de changement de variable en terme de la fonction de comptage de Nevanlinna généralisée, voir **[38, 39]**.

**Lemme 4.1.3.** *Pour $0 \leq \alpha \leq 1$, soient $\varphi$ une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ et $f$ une fonction mésurable sur $\mathbb{D}$, alors :*

$$\int_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi)(z) |\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) = (1+\alpha) \int_{\mathbb{D}} f(z) N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z).$$

*Démonstration.*

On suppose que $\varphi$ n'est pas constante.

L'ensemble $\mathbf{Z} = \{z \in \mathbb{D} : \varphi'(z) = 0\}$ est dénombrable et $\mathbb{D} \setminus \mathbf{Z}$ peut s'écrire comme une union des rectangles disjoints $\mathbf{R}_j$ où sur chacun d'eux, $\varphi$ est biholomorphe. On note par $\psi_j$ l'inverse de la restriction de $\varphi$ sur $\mathbf{R}_j$.

Par la formule de changement de variable usuel, avec $z = \psi_j(w)$, pour tout $j$ on a :

$$\int_{\mathbf{R}_j} (f \circ \varphi)(z)|\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) = (1+\alpha) \int_{\varphi(\mathbf{R}_j)} f(w)|1 - \psi_j(w)|^\alpha dA(w).$$

Par sommation sur $j$, on déduit que :

$$\int_{\mathbb{D}\setminus\mathbf{Z}} (f \circ \varphi)(z)|\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) = (1+\alpha) \int_{\mathbb{D}} f(w) \left( \sum_j \chi_j(w)|1 - \psi_j(w)|^\alpha \right) dA(w).$$

Où $\chi_j$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\varphi(\mathbf{R}_j)$.

L'ensemble $\mathbf{Z}$ est dénombrable donc il est de mesure nulle, le premier membre de l'équation est égale à :

$$\int_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi)(z)|\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z),$$

et aussi le terme qui est entre parenthèse du second membre de l'équation est $N_{\varphi,\alpha}(z)$.

□

Le deuxième lemme nous affirme que la fonction de comptage géneralisée $N_{\varphi,\alpha}$ vérifie l'inégalité de la moyenne **[27]** comme dans le cas de Hardy (thérème 3.2.10).

**Lemme 4.1.4.** *Soit $0 < \alpha \leq 1$. Si $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est une fonction holomorphe, alors*

$$N_{\varphi,\alpha}(z) \leq \frac{c}{r^2} \int_{D(z,r)} N_{\varphi,\alpha}(w) dA(w), \quad c \in \mathbb{R}^+.$$

*pour tout disque $D(z,r)$ tel que $D(z,r) \subset \mathbb{D} \setminus D(0, \frac{1}{2})$.*

*Démonstration.*

Soit $w(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$, on a :

$$\lim_{|z|\to 1^-} w(z) = 0$$

par le théorème de Green, pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$ nous avons :

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) \log\left|\frac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}z}\right|(z) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) \log|\phi_z^{-1}(\lambda)| dA(z). \end{aligned}$$

Où

$$\phi_z(\delta) = \frac{z+\delta}{1+\overline{z}\delta}.$$

Puisque $w$ est concave et décroissante alors :

$$\Delta(w(r)) = \Delta(w(z)) = w'(r)/r + w''(r) < 0,$$

pour $0 < \alpha < 1$, on a :

$$\begin{aligned} N_{\varphi,\alpha}(\zeta) = \sum_{\varphi(\lambda)=\zeta} w(\zeta) &= \frac{1}{2}\sum_{\varphi(\lambda)=\zeta}\int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) \log|\phi_z^{-1}(\lambda)| dA(z) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) (\sum_{\varphi(\lambda)=\zeta} -\log|\phi_z^{-1}(\lambda)|) dA(z). \end{aligned}$$

Comme $\varphi(\lambda) = \zeta$ si est seulement si $\varphi \circ \phi_z(\phi_z^{-1}(\lambda)) = \zeta$, on a dans ce cas :

$$N_{\varphi,\alpha}(\zeta) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) N_{\varphi\circ\phi_z}(\zeta) dA(z),$$

où

$$N_{\varphi\circ\phi_z}(\zeta) = \sum_{\varphi\circ\phi_z(\lambda)=\zeta} \log\frac{1}{|\lambda|}.$$

Donc

$$\begin{aligned} N_{\varphi,\alpha}(\zeta) &\leq -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z))[\frac{1}{r^2}\int_{D(\zeta,r)} N_{\varphi\circ\phi_z}(\lambda) dA(\lambda)] dA(z) \\ &= \frac{1}{r^2}\int_{D(\zeta,r)} [-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) N_{\varphi\circ\phi_z}(\lambda) dA(z)] dA(\lambda) \\ &= \frac{1}{r^2}\int_{D(\zeta,r)} N_{\varphi,\alpha}(\lambda) dA(\lambda). \end{aligned}$$

□

## 4.2 Lien entre la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna $N_{\varphi,\alpha}$ et $\mathcal{D}(\varphi^n)$

L'estimation de la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna $N_{\varphi,\alpha}$ s'avère compliquée en générale.
Dans ce qui suit nous allons donner une majoration de la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna par la normes des itérées de symbole $\varphi$, ce qui va nous permettre de construire quelques exemples d'opérateurs bornés et compacts dans l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$.

Plus précisément, on pose :

$$\mathcal{D}_\alpha(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z).$$

Nous allons montrer que pour $0 < \alpha < 1$,

$$N_{\varphi,\alpha}(1 - 1/n) \lesssim \mathcal{D}_\alpha(\varphi^{n+1}), \qquad n \geq 1, \tag{4.2.1}$$

pour une certaine constante $c > 0$.

**Théorème 4.2.1.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe.*
*Alors pour $0 < \alpha \leq 1$,*

*(i) $C_\varphi$ est borné dans $\mathcal{D}_\alpha$ $\iff$ $N_{\varphi,\alpha} = O(1 - |z|)^\alpha$, $\quad |z| \to 1^-$.*

*(ii) $C_\varphi$ est compact dans $\mathcal{D}_\alpha$ $\iff$ $N_{\varphi,\alpha} = o(1 - |z|)^\alpha$, $\quad |z| \to 1^-$.*

*Démonstration.*
Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe.
(i) $\Leftarrow$) Soit $N_{\varphi,\alpha} = O(1 - |z|)^\alpha$, $|z| \to 1^-$, avec le changement de variable utilisé dans

le lemme 4.1.3 on a :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi(f)\|_\alpha^2 &= |f(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} |(f'\circ\varphi)(z)|^2|\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z)\\
&= |f(0)|^2 + (1+\alpha)\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z)\\
&\leq |f(0)|^2 + c(1+\alpha)\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha dA(z)\\
&\asymp \|f\|_\alpha^2.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$) Supposons maintenant que $C_\varphi$ est borné dans $\mathcal{D}_\alpha$. On considère la fonction test donnée par :

$$F_\lambda(z) = \frac{(1-|\lambda|^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{(1-\overline{\lambda}z)}, \qquad \lambda, z \in \mathbb{D}.$$

on a, d'après le lemme (2.5) de **[27]**

$$\|F_\lambda\|_{\mathcal{D}_\alpha} \asymp 1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha(C_\varphi(F_\lambda)) &= \int_{\mathbb{D}} |\left(F_\lambda(\varphi(w)\right)'|^2 dA_\alpha(w)\\
&= (1+\alpha)\int_{\mathbb{D}} |F_\lambda'(z)| N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z)\\
&\asymp (1-|\lambda|^2)^{2-\alpha}\int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{|1-\overline{\lambda}z|^4} dA(z)\\
&\geq (1-|\lambda|^2)^{2-\alpha}\int_{D(\lambda,\frac{1-|\lambda|}{2})} \frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{|1-\overline{\lambda}z|^4} dA(z)\\
&\geq c_1(1-|\lambda|^2)^{-2-\alpha}\int_{D(\lambda,\frac{1-|\lambda|}{2})} N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z)\\
&\geq c_2\frac{N_{\varphi,\alpha}(\lambda)}{(1-|\lambda|^2)^\alpha},
\end{aligned}$$

où $c_1, c_2$ sont indépendants de $\lambda$.

De la dernière inégalité de la moyenne (Lemme 4.1.4) (lorsque $|\lambda| \longrightarrow 1^-$ ).

Nous concluons que :

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}(\lambda)}{(1-|\lambda|^2)^\alpha} \leq c' \sup_{\lambda\in\mathbb{D}} \|C_\varphi(F_\lambda)\|_\alpha^2 \leq c'\|C_\varphi\|^2 \sup_{\lambda\in\mathbb{D}} \|F_\lambda\|_\alpha^2$$

qui est borné par l'hypothèse ($C_\varphi$ borné dans $\mathcal{D}_\alpha$) et grâce au fait que $\|F_\lambda\|_{\mathcal{D}_\alpha} \asymp 1$.

(ii)($\Leftarrow$) Soient $N_{\varphi,\alpha} = o(1-|z|)^\alpha, |z| \to 1^-$ et $(f_n)_n$ une suite dans $\mathcal{D}_\alpha$, qui converge faiblement vers 0. Il suffit de montrer que :

$$\|C_\varphi(f_n)\|_\alpha \to 0, n \to \infty.$$

La convergence faible de $f_n$ vers 0 implique que $f_n(x) \to 0$ et $f_n'(x) \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\rho_\varepsilon \in (\frac{1}{2}, 1)$ tel que :

$$N_{\varphi,\alpha} \leq \varepsilon(1-|z|)^\alpha, \text{ pour } \rho_\varepsilon < |z| < 1.$$

Par changement de variable on a :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi(f_n)\|_\alpha &= |f_n(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} |(f_n' \circ \varphi)(z)|^2 |\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) \\
&\asymp |f_n(0)|^2 + (1+\alpha) \int_{\mathbb{D}} |f_n'(z)|^2 N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \\
&\leq |f_n(0)|^2 + \int_{\rho_\varepsilon \mathbb{D}} |f_n'(z)|^2 N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) + \varepsilon \int_{\varphi(\mathbb{D})|\rho_\varepsilon \mathbb{D}} |f_n'(z)|^2 (1-|z|)^\alpha dA(z) \\
&\leq |f_n(0)|^2 + \int_{\rho_\varepsilon \mathbb{D}} |f_n'(z)|^2 N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nous avons $f_n'(x) \to 0$ uniformément sur le disque fermé $\rho_\varepsilon \overline{\mathbb{D}}$, donc
$\|C_\varphi(f_n)\|_\alpha \to 0$, quand $n \to \infty$.

$\Rightarrow$) Supposons que pour $\beta > 0$, la suite $\lambda_n \in \mathbb{D}$ tel que $|\lambda_n| \to 1^-$ et

$$N_{\varphi,\alpha}(\lambda_n) \geq \beta(1-|\lambda_n|)^\alpha,$$

on a la fonction test

$$f_n(z) = \frac{(1-|\lambda_n|^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{(1-\overline{\lambda_n} z)}, \qquad \text{pour} \quad z \in \mathbb{D}.$$

C'est une suite bornée dans $\mathcal{D}_\alpha$, qui converge faiblement vers 0. En effet, elle converge uniformément vers 0 sur tout compact, on a dans ce cas :

$$(1-|\lambda_n|^2)^{1-\frac{\alpha}{2}} \leq 2(1-|\lambda_n|^2)^{(1-\frac{\alpha}{2})/2}$$

D'autre part, par le changement de variable et l'inégalité de la moyenne, on conclut que :

$$\begin{aligned}
\|f_n\circ\varphi\|_\alpha^2 &\asymp \int_{\mathbb{D}} |\,(f_n(\varphi(w))'\,|^2 dA_\alpha(w)\\
&\asymp (1-|\lambda_n|^2)^{2-\alpha}\int_{\mathbb{D}}\frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{|1-\overline{\lambda_n}z|^4}dA(z)\\
&\geq c_1(1-|\lambda_n|^2)^{-2-\alpha}\int_{D(\lambda_n,\frac{1-|\lambda_n|}{2})} N_{\varphi,\alpha}(z)dA(z)\\
&\geq c_2\frac{N_{\varphi,\alpha}(\lambda_n)}{(1-|\lambda_n|^2)^\alpha}\\
&\geq c_2\beta,
\end{aligned}$$

où $c_1, c_2$ sont indépendants de $n$.

Donc $C_\varphi$ n'est pas compact, d'où la contradiction. □

**Théorème 4.2.2.** *Soit $\varphi : \mathbb{D}\to\mathbb{D}$ une fonction holomorphe et soit $\alpha\in(0,1]$. Alors il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geq n_0$ on a :*

$$N_{\varphi,\alpha}(z)\leq\frac{8e^4}{1+\alpha}\mathcal{D}_\alpha(\varphi^{n+1}),\qquad \frac{1}{n}\leq 1-|z|\leq\frac{1}{n-1}.$$

*Démonstration.*

Soit $n_1\in\mathbb{N}$ assez grand de sorte que si $n\geq n_1$, alors

$$D(1-1/(n-1), 1/2(n+1))\subset\mathbb{D}\backslash D(0,1/2).$$

Pour $n\geq n_1$, supposons que $1/n\leq 1-|z|\leq 1/n-1$, alors par le Lemme 4.1.4, il résulte que :

$$\begin{aligned}
N_{\varphi,\alpha}(z) &\leq 2\times 4(n+1)^2\int_{D(z,1/2(n+1))} N_{\varphi,\alpha}(w)dA(w)\\
&= 8(n+1)^2\int_{D(z,1/2(n+1))} N_{\varphi,\alpha}(w)\frac{|w|^{2n}}{|w|^{2n}}dA(w)\\
&\leq 8(n+1)^2\Big[\sup_{D(z,1/2(n+1))}|w|^{-2n}\Big]\int_{D(z,1/2(n+1))} N_{\varphi,\alpha}(w)|w|^{2n}dA(w).
\end{aligned}$$

Il est facile de voir qu'il existe $n_0 \geq n_1$ assez grand de sorte que pour tout $n \geq n_0$,

$$\sup_{D(z,1/2(n+1))} |w|^{-2n} \leq e^4.$$

Donc,

$$\begin{aligned} N_{\varphi,\alpha}(z) &\leq 8e^4(n+1)^2 \int_{D(z,1/2(n+1))} N_{\varphi,\alpha}(w)|w|^{2n} dA(w) \\ &\leq 8e^4(n+1)^2 \int_{\mathbb{D}} N_{\varphi,\alpha}(w)|w|^{2n} dA(w). \end{aligned}$$

D'autre part, par le lemme 4.1.3 il découle que :

$$\int_{\mathbb{D}} N_{\varphi,\alpha}(w)|w|^{2n} dA(w) = \frac{1}{1+\alpha} \int_{\mathbb{D}} |\varphi'(\eta)|^2 |\varphi(\eta)|^{2n} dA_\alpha(\eta).$$

Ainsi

$$N_{\varphi,\alpha}(z) \leq \frac{8e^4}{1+\alpha} \mathcal{D}_\alpha(\varphi^{n+1}), \qquad \frac{1}{n} \leq 1-|z| \leq \frac{1}{n-1}.$$

□

En conséquence de ceci, on obtient le résultat suivant :

**Corollaire 4.2.3.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe et soit $\alpha \in (0,1]$, alors :*

*(i) Si $\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n) = O(1/n^\alpha)$ alors $C_\varphi$ est borné sur $\mathcal{D}_\alpha$.*

*(ii) Si $\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n) = o(1/n^\alpha)$ alors $C_\varphi$ est compact sur $\mathcal{D}_\alpha$.*

*Démonstration.*

La preuve du corollaire découle des Théorèmes 4.2.2 et 4.2.1. □

Dans ce qui suit, on se propose de donner une autre preuve de celle donnée par El-Fallah, Kellay, Shabankhah et Youssfi dans **[19]**, dans le cas de Dirichlet ($\alpha = 0$) voir Corollaire 4.3.4.

On considère la fonction test donnée par :

$$F_\lambda(z) = \frac{(1-|\lambda|^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{(1-\overline{\lambda}z)}, \qquad \lambda, z \in \mathbb{D}.$$

Nous rappelons le lemme suivant ([19]).

**Lemme 4.2.4.** *Soit $\varphi \in \mathcal{D}_\alpha$ telle que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et $0 < \alpha \leq 1$. Alors*

*(i) $C_\varphi$ est borné sur $\mathcal{D}_\alpha$ $\iff$ $\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \|F_\lambda \circ \varphi\|_\alpha < \infty$.*

*(ii) $C_\varphi$ est compact sur $\mathcal{D}_\alpha$ $\iff$ $\lim_{|\lambda| \to 1^-} \|F_\lambda \circ \varphi\|_\alpha = 0$.*

Les résultats trouvés nous permettent de redémontrer le corollaire 4.2.3.

### Deuxième preuve du Corollaire 4.2.3

On suppose que $\varphi(0) = 0$.
Si $\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n) = o(1/n^\alpha)$ alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha(C_\varphi(F_\lambda)) &= \int_{\mathbb{D}} |\,(F_\lambda(\varphi(w))'\,|^2 dA_\alpha(w) \\
&\leq c_1(1-|\lambda|^2)^{2-\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2}{(1-|\lambda\varphi(w)|^2)^4} dA_\alpha(w) \\
&\leq c_2(1-|\lambda|^2)^{2-\alpha} \sum_{n\geq 0}(1+n)^3|\lambda|^{2n} \int_{\mathbb{D}} |\varphi\prime(w)|^2|\varphi(w)|^{2n} dA_\alpha(w) \\
&\leq c_3(1-|\lambda|^2)^{2-\alpha} \sum_{n\geq 0}(1+n)|\lambda|^{2n}\mathcal{D}_\alpha(\varphi^{n+1}) \\
&\leq c_4(1-|\lambda|^2)^{2-\alpha}\Big[\sum_{0\leq n\leq N}(1+n)^{1-\alpha}|\lambda|^{2n} + o\Big(\sum_{n\geq N}(1+n)^{1-\alpha}|\lambda|^{2n}\Big)\Big] \\
&\asymp o(1), \quad |\lambda| \to 1^-.
\end{aligned}$$

où $c_1, c_2, c_3$ et $c_4$ sont des constantes positives.
Dans ce cas $C_\varphi$ est compact, pour la bornitude c'est la même preuve.

On associe à toute fonction $\varphi$, la fonction de comptage

$$n_\varphi(z) = \operatorname{card}\{w : \varphi(w) = z\}$$

c'est le nombre de zéros de la fonction $(\varphi - z)$. Rappelons aussi que $N_{\varphi,0} = n_\varphi$.
Nous obtenons une majoration de $n_\varphi$ par la norme dans $\mathcal{D}_0$ des itérées de $\varphi$. Plus précisément, nous montrons dans la section suivante que :

$$\inf_{\frac{1}{n+1}\leq 1-|z|\leq \frac{1}{n}} n_\varphi(z) \lesssim \mathcal{D}_0(\varphi^{n+1}) \tag{4.2.2}$$

## 4.3 Lien entre la fonction de comptage de Nevanlinna $n_\varphi$ et $\mathcal{D}(\varphi^n)$

Nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.3.1.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors*

$$\int_{1-\frac{1}{m}\leq|z|\leq 1} n_\varphi(z)dA(z) \leq \frac{e^4}{(1+m)^2}\mathcal{D}_0(\varphi^{m+1}), \qquad m \geq 2.$$

*Démonstration.*

Comme $N_{\varphi,0} = n_\varphi$, d'après le lemme 4.1.3 on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_0(\varphi^{m+1}) &= (m+1)^2\int_{\mathbb{D}} |\varphi'(z)|^2|\varphi^m(z)|^2 dA(z)\\
&= (m+1)^2\int_{\mathbb{D}} n_\varphi(w)|w|^{2m}dA(w)\\
&\geq (m+1)^2\int_{1-\frac{1}{m}\leq|w|\leq 1} n_\varphi(w)|w|^{2m}dA(w)\\
&\geq (m+1)^2\big(1-\frac{1}{m}\big)^{2m}\int_{1-\frac{1}{m}\leq|z|\leq 1} n_\varphi(w)dA(w)\\
&\geq e^{-4}(m+1)^2\int_{1-\frac{1}{m}\leq|z|\leq 1} n_\varphi(w)dA(w), \qquad m\geq 2,
\end{aligned}$$

donc

$$\int_{1-\frac{1}{m}\leq|z|\leq 1} n_\varphi(z)dA(z) \leq \frac{e^4}{(1+m)^2}\mathcal{D}_0(\varphi^{m+1}), \qquad m \geq 2.$$

□

Le résultat suivant est le théorème principale dans cette section, il donne le lien entre le comportement en moyenne de $n_\varphi$ et la norme des itérés de $\varphi^m$.

**Théorème 4.3.2.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors*

$$\inf_{1-\frac{1}{m} \leq |z| \leq 1-\frac{1}{m+1}} n_\varphi(z) \leq \frac{e^4}{\pi} \mathcal{D}_0(\varphi^{m+1}), \qquad m \geq 2$$

*Démonstration.*

On a l'inégalité suivante :

$$\int_{1-\frac{1}{m} \leq |z| \leq 1} n_\varphi(z) dA(z) \geq \frac{\pi}{(m+1)^2} \inf_{1-\frac{1}{m} \leq |z| \leq 1-\frac{1}{m+1}} n_\varphi(z).$$

Alors d'après lemme (4.3.1), pour $m \geq 2$ on a :

$$\begin{aligned}
\inf_{1-\frac{1}{m} \leq |z| \leq 1-\frac{1}{m+1}} n_\varphi(z) &\leq \frac{(m+1)^2}{\pi} \int_{1-\frac{1}{m} \leq |z| \leq 1} n_\varphi(z) dA(z) \\
&\leq \frac{(m+1)^2}{\pi} \frac{e^4}{(1+m)^2} \mathcal{D}_0(\varphi^{m+1}) \\
&\leq \frac{e^4}{\pi} \mathcal{D}_0(\varphi^{m+1}).
\end{aligned}$$

□

La fenêtre de Carleson est définie par :

$$W(\zeta, \delta) = \{z \in \mathbb{D} : |z| > 1 - \delta; \quad |\arg(\overline{\zeta} z)| < \delta\}, \qquad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Pour $\zeta \in \mathbb{T}$ et $\delta \in (0, 1)$, on pose :

$$\mathcal{N}(\zeta, \delta) := \int_{W(\zeta,\delta)} n_\varphi(w) dA(w).$$

Pour la suite on a besoin du lemme de Zorboska **[43, 27]** suivant :

**Lemme 4.3.3.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors*

*(i)* $C_\varphi$ *est borné sur* $\mathcal{D}$ $\iff$ $\sup_{\zeta \in \mathbb{T}} \mathcal{N}(\zeta, \delta) = O(\delta^2) \quad \delta \to 0.$

*(ii)* $C_\varphi$ *est compact sur* $\mathcal{D}$ $\iff$ $\sup_{\zeta \in \mathbb{T}} \mathcal{N}(\zeta, \delta) = o(\delta^2) \quad \delta \to 0.$

D'après le lemme 4.3.2 et le lemme 4.3.3 on obtient le résultat suivant, qui a été démontré par El-Fallah-Kellay-Shabankah-Youssfi **[19]**.

**Corollaire 4.3.4.** *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors*

*(i) Si $\mathcal{D}_0(\varphi^n) = O(1)$ alors $C_\varphi$ est borné sur $\mathcal{D}$.*

*(ii) Si $\mathcal{D}_0(\varphi^n) = o(1)$ alors $C_\varphi$ est compact sur $\mathcal{D}$.*

*Démonstration.*
Supposons que $\mathcal{D}_0(\varphi^n) = O(1)$. Soit $\delta > 0$ et soit $m \geq 1$ tel que $1/(m+1) \leq \delta \leq 1/m$. D'après le lemma 4.3.2 on a :

$$\sup_{\zeta \in \mathbb{T}} \mathcal{N}(\zeta, \delta) \leq \int_{1-\frac{1}{m} \leq |z| \leq 1} n_\varphi(z) dA(z) = O(1/(1+m)^2) = O(\delta^2).$$

Le lemme 4.3.3 nous permet de conclure.

Pour la compacité c'est la même preuve.

□

En 2015, Li-Queffélec-Rodríguez-Piazza ont montré que ce résultat est optimal dans leur article intitulé "Two results on composition operators on the Dirichlet space" et qui a parue dans "Journal of Mathematical Analysis and Applications" [29].

## 4.4 Exemples

Rappelons que pour $f \in H^2$, la limite radiale $f^*$ de $f$ est donnée par :

$$f^*(e^{it}) := \lim_{r \to 1-} f(re^{it}).$$

D'après le théorème de Fatou, la limite radiale $f^*$ existe presque partout sur $\mathbb{T}$. Notons que $\log |f^*| \in L^1(\mathbb{T})$.

On rappelle qu'une fonction $f$ est dite éxterieure si

$$\log |f(0)| = \int_{\mathbb{T}} \log |f^*(\zeta)| \frac{|d\zeta|}{2\pi}.$$

Dans ce cas, $f$ a la représentation intégrale suivante :

$$f(z) = \exp \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log |f^*(\zeta)| \frac{|d\zeta|}{2\pi}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Soit $K$ un ensemble fermé de $\mathbb{T}$, et soit $\Omega \in \mathcal{C}^1([0.2\pi])$ telle que $\Omega(0) = 0$ et

$$\int_{\mathbb{T}} \Omega(d(\zeta, K))|d\zeta| < \infty.$$

La fonction distance correspondant à $\Omega$ et $K$ est une fonction éxtérieure $\varphi_{\Omega,K}$ satisfaisant l'égalité suivante :

$$|\varphi_{\Omega,K}(\zeta)| = e^{-\Omega(d(\zeta,K))} \qquad p.p \quad \text{sur} \quad \mathbb{T}. \tag{4.4.1}$$

Ainsi

$$\varphi_{\Omega,K}(z) = \exp \int_{\mathbb{D}} \frac{z + \zeta}{z - \zeta} \Omega(d(\zeta, K)) \frac{|d\zeta|}{2\pi}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Si $\Omega$ vérifie la condition de Dini

$$\int_0^{\pi} \frac{\Omega(t)}{t} < \infty,$$

alors la fonction $\varphi_{\Omega,K}$ appartient à l'algèbre du disque [26, p105-106]. Dans ce cas on a $|\varphi_{\Omega,K}(z)| \leq 1$ et l'ensemble des point de contact de $\varphi_{\Omega,K}$ sur le cercle coincide avec $K$, cela signifie que :

$$|\varphi_{\Omega,K}| = 1 \quad \text{sur } K.$$

Rappelons d'abord la construction du Cantor généralisé sur $\mathbb{T}$.

Soit $K_0 = \mathbb{T}$ et $\ell_0 = 2\pi$.

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de réels positive avec $a_1 < 1/2$. Nous enlevons l'intervalle de longueur $a_1$ du milieu de $K_0$, on obtient deux intervalles de longueur $\ell_1$ qu'on notera $K_1$.

Puis nous enlevons encore une fois deux intervalles centrés de longueur $a_2$ de chaque intervalle de $K_1$. Soit $K_2$ l'union de $2^2$ intervalles qui restent chacun de longueur

$\ell_2$. A la n'ième étape nous aurons un ensemble compact $K_n$ de $2^n$ intervalles de longueur $\ell_n$. Notons que

$$2\ell_n + a_n = \ell_{n-1}.$$

Le compact

$$K = \bigcap_{n \geq 1} K_n$$

est appelé le Cantor généralisé.

Il est facile de voir que $K$ a la mesure de Lebesgue nulle si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} a_n = 2\pi.$$

il est à remarquer que, lorsque $\ell_n = (1/3)^n$, $K$ est appelé le Cantor tri-adique.

Soit $t > 0$. Pour $K$ un ensemble fermé de $\mathbb{T}$, le $t$–voisinage de $K$ est donné par :

$$K_t = \{\zeta \in \mathbb{T} : d(\zeta, K) \leq t\}.$$

Pour les ensembles de Cantor généralisé nous avons une estimation de $|K_t|$ donnée par la proposition suivante ([17]) :

**Proposition 4.4.1.** *Soit $K$ le Cantor généralisé associé à la suite $(a_n)_n$. Si*

$$\lambda_K := \sup_{n \geq 1} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}, \tag{4.4.2}$$

*alors*

$$|K_t| = O(t^{\mu_K}) \qquad t \to 0 \tag{4.4.3}$$

*où $\mu_K = 1 - \log 2/\log(1/\lambda_K)$.*

*Démonstration.*

Soit $t \in (0, a_0]$, on choisit $n$ tel que $a_n < t \leq a_{n-1}$. alors

$$|K_t| \leq 2^n(a_n + 2t) \leq 3.2^n t,$$

et aussi

$$2^{n-1} = (\frac{1}{\lambda_K^{n-1}})^{\frac{\log 2}{\log(\frac{1}{\lambda_K})}} \leq (\frac{a_0}{t})^{\frac{\log 2}{\log(\frac{1}{\lambda_K})}},$$

donc

$$|K_t| \leq c(a_0, \lambda_K) t^{1-\log 2/\log(1/\lambda_k)}.$$

L'ensemble de Cantor classique $K$ correspond à $\mu_K = 1 - \log 2/\log 3$. □

Pour ce qui suit on aura besoin du théorème suivant, qui est donné dans **[17]** dans le cas $\alpha \in (0,1]$, et dans **[18]** dans le cas où $\alpha = 0$.

**Théorème 4.4.2.** *Soit $\alpha \in [0,1]$. Soit $K$ un ensemble fermé de $\mathbb{T}$ qui vérifie (4.4.2). Soit $\Omega : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que $t \to \Omega(t^\gamma)$ est concave pour $\gamma > 2/(1-\alpha)$. Soit $f_\Omega$ une fonction extérieure vérifiant :*

$$|f_\Omega^*(\zeta)| = \Omega(d(\zeta, K) \qquad p.p \quad sur \quad \mathbb{T},$$

*alors*

$$\mathcal{D}_\alpha(f_\Omega) \leq c(\alpha, \gamma, K) \int_{\mathbb{T}} \Omega'(d(\zeta, K))^2 d(\zeta, K)^{\alpha+1} |d\zeta|.$$

**Lemme 4.4.3.** *Soit $K$ un ensemble fermé de $\mathbb{T}$ et $h : [0, \pi] \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable on a :*

$$\int_{\mathbb{T}} h(d(\zeta, K))|d\zeta| = \int_0^1 h(t)\mathcal{N}_K(t)dt,$$

*où $\mathcal{N}_K(t) = 2\sum_j \chi_{\{|I_j|>2t\}}, \quad 0 < t < \pi$, avec $\pi/K = \cup_j I_j$.*

Notons que si $h(t) = \chi_{[0,\delta]}$ alors :

$$\int_0^\delta \mathcal{N}_K(t)dt = \int_\pi |\{d(\zeta, K) < \delta\}| = |K_\delta|.$$

En particulier $\delta\mathcal{N}_K(\delta) \leq |K_\delta|$.

La formule enoncé dans le lemme suivant nous permet de calculer explicitement la norme pour la fonction extérieure $\varphi_{\Omega,K}$.

**Lemme 4.4.4.** *Soit $\alpha \in [0,1]$. Soit $K$ l'ensemble fermé de $\mathbb{T}$ qui vérifie (4.4.2) et soit $\Omega : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que $t \to \Omega(t^\gamma)$ soit concave pour $\gamma > 2/(1-\alpha)$. Alors*

$$\mathcal{D}_\alpha(\varphi_{\Omega,K}) \leq c \int_0^{2\pi} \Omega'(t)^2 e^{-2\Omega(t)} t^\alpha |K_t| dt,$$

*avec $c$ une constante positive.*

*Démonstration.*
Soit $\alpha \in [0,1]$. Soit $K$ l'ensemble qui vérifie (4.4.2) et soit $\Omega : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que $t \to \Omega(t^\gamma)$ soit concave pour $\gamma > 2/(1-\alpha)$. Soit la fonction extérieure $\varphi_{\Omega,K}$ satisfaisant l'égalité :

$$|\varphi_{\Omega,K}(\zeta)| = e^{-\Omega(d(\zeta,K))} \qquad p.p \quad sur \quad \mathbb{T}.$$

Alors, d'après le théorème 4.4.2 on a :

$$\mathcal{D}_\alpha(\varphi_{\Omega,K}) \leq c \int_{\mathbb{T}} \Omega'(d(\zeta,K)) e^{-2\Omega(d(\zeta,K))} d(\zeta,K)^{\alpha+1} |d\zeta|,$$

et d'après le lemme 4.4.3 on a :

$$\mathcal{D}_\alpha(\varphi_{\Omega,K}) \leq c \int_0^{2\pi} \Omega'(t)^2 e^{-2\Omega(t)} t^\alpha |K_t| dt,$$

avec $c$ une constante positive. □

### 4.4.1 Exemples d'estimations de la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna

Dans ce paragraphe nous allons donner quelques estimations de la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna associée à la fonction distance donnée dans la relation (4.4.1), ce qui nous permet de donner quelques exemples d'opérateurs de composition bornés et compacts sur les espaces de Dirichlet par le corollaire 4.2.3. Commençons par le cas de l'espace de Hardy ($\alpha = 1$).

**Lemme 4.4.5.** *Soit $K$ un ensemble fermé de $\mathbb{T}$ et soit $\Omega : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que $\Omega(0) = 0$. Soit $\varphi = \varphi_{\Omega,K}$, alors*

$$N_\varphi(z) \lesssim \inf_{\varepsilon>0}\{|K_\varepsilon| + e^{-2\frac{\Omega(\varepsilon)}{1-|z|}}\}, \qquad |z| < 1.$$

*Démonstration.*

Soit $\varepsilon > 0$. Par le lemma 4.2.2 et pour

$$1/n \leq 1 - |z| \leq 1/(n-1), \quad \text{où} \quad n \geq 2$$

on a :

$$\begin{aligned} N_\varphi(z) &\lesssim \int_{\mathbb{T}} e^{-2(n+1)\Omega(d(\zeta,K))} \frac{|d\zeta|}{2\pi} \\ &= \int_{\zeta\in K_\varepsilon} e^{-2(n+1)\Omega(d(\zeta,K))} \frac{|d\zeta|}{2\pi} + \int_{\zeta\in\mathbb{T}\setminus K_\varepsilon} e^{-2(n+1)\Omega(d(\zeta,K))} \frac{|d\zeta|}{2\pi} \\ &\lesssim |K_\varepsilon| + e^{-2(n+1)\Omega(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

□

**Théorème 4.4.6.** *Soit $K$ le Cantor généralisé associé à la suite $(a_n)_n$ vérifiant (4.4.2) et soit $\Omega(t) = t^\beta$ telle que $\beta > \mu_K$, alors*

$$N_\varphi(z) = O((1 - |z|)^{\mu_K/\beta}(\log 1/(1 - |z|))^{\mu_K/\beta}), \qquad |z| \to 1^-$$

*Démonstration.*

D'après (4.4.3) et le lemme 4.4.5, on obtient :

$$N_\varphi(z) \lesssim \inf_{\varepsilon>0}\{\varepsilon^{\mu_K} + e^{-\frac{2\varepsilon^\beta}{1-|z|}}\}, \qquad |z| < 1.$$

Il suffit de choisir $\varepsilon^\beta = (1 - |z|)(\log 1/(1 - |z|)^{\mu_K/\beta})$. □

Pour le deuxième cas, on considère l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$ où $0 < \alpha < 1$.

**Théorème 4.4.7.** *Soit $0 < \alpha < 1$. Soit $K$ le cantor généralisé associé à la suite $(a_n)_n$ qui vérifie (4.4.2) telle que $\alpha + \mu_K \geq 1$.*
*Soit $\Omega(t) = t^\beta$ telle que $\beta < \min\{(1-\alpha)/2, \alpha + \mu_K - 1\}$. Soit $\varphi = \varphi_{\Omega,K}$, alors*

$$N_{\varphi,\alpha}(z) = O((1-|z|)^{(\alpha+\mu_K-1)/\beta}), \qquad (z \to 1-).$$

*Démonstration.*
Soient $0 < \alpha < 1$ et $K$ le cantor généralisé associé à la suite $(a_n)_n$ qui vérifie (4.4.2) telle que $\alpha + \mu_K \geq 1$. Soit $\Omega(t) = t^\beta$ telle que $\beta < \min\{(1-\alpha)/2, \alpha + \mu_K - 1\}$. Soit $\varphi = \varphi_{\Omega,K}$.
Car $\beta < (1-\alpha)/2$, il existe $\gamma > 2/(1-\alpha)$ telle que $\Omega(t^\gamma)$ soit concave.
Notons que :

$$\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n_{\Omega,K}) = \mathcal{D}_\alpha(\varphi_{n\Omega,K})$$

Ainsi, par le lemme 4.4.4 et la relation (4.4.2)

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n_{\Omega,K}) &= \mathcal{D}_\alpha(\varphi_{n\Omega,K}) \\
&\leq c_1 n^2 \int_0^{2\pi} \Omega'(t)^2 t^\alpha |K_t| e^{-2n\Omega(t)} dt \\
&= c_1 n^2 \int_0^{2\pi} t^{2\beta-2+\alpha+\mu_K} e^{-2nt^\beta} dt \\
&\leq c_2 n^2 \int_0^1 u^{(\beta+\alpha+\mu_K-1)/\beta} e^{-nu} du \\
&= O(1/n^{(\alpha+\mu_K-1)/\beta}).
\end{aligned}$$

Le théorème 4.2.2 nous permet de conclure.

□

### 4.4.2 Exemples des opérateurs de composition de la classe de Hilbert-Schmidt

Dans ce qui suit, nous allons donner des exemples d'opérateurs de composition de la classe de Hilbert-Schmidt.
Soient $H$ un espace de Hilbert et $T$ un opérateur défini de $H$ dans $H$. On dit que $T$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt si pour toute base orthonormale $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ de $H$ on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty.$$

La norme $\|.\|$ est la norme associée au produit scalaire de $H$.

On désigne par $\mathcal{S}_2(H)$ la classe d'opérateurs de Hilbert Schmidt.

Nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.4.8.** *Soit $0 \leq \alpha < 1$ et soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Les assertions suivantes sont équivalentes,*

*(i)* $C_\varphi \in \mathcal{S}_2(\mathcal{D}_\alpha)$.

*(ii)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n)}{(1+n)^{1-\alpha}} < \infty$.

*(iii)* $\displaystyle\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2+\alpha}}\, dA_\alpha(z) < \infty$.

*(iv)* $\displaystyle\int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi_\alpha}(z)}{(1-|z|^2)^{2+\alpha}} dA(z) < \infty$.

*Démonstration.*
Soient $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe et $0 \leq \alpha < 1$.
Nous allons montré l'équivalence entre (i) et (ii).
Soit

$$e_n = z^n/(1+n)^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

Puisque $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ une base orthonormale de $\mathcal{D}_\alpha$ et $C_\varphi(e_n) = \varphi^n/(1+n)^{\frac{1-\alpha}{2}}$, alors $C_\varphi \in S_2(\mathcal{D}_\alpha)$ si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|C_\varphi(e_n)\|_\alpha^2 \;=\; \sum_{n\geq 1} \frac{|\varphi(0)|^{2n}}{(1+n)^{1-\alpha}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n)}{(1+n)^{1-\alpha}} < \infty.$$

Notons que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|\varphi(0)|^{2n}}{(1+n)^{1-\alpha}} \asymp \frac{|\varphi(0)|^2}{(1-|\varphi(0)|^2)^\alpha} < \infty.$$

Ensuite nous montrons l'équivalence entre (ii) et (iii). On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n)}{(1+n)^{1-\alpha}} &\asymp \int_{\mathbb{D}} \sum_{n=1}^{\infty} (1+n)^{1+\alpha} |\varphi(z)|^{2n-2} |\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) \\ &\asymp \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2+\alpha}}\, dA_\alpha(z). \end{aligned}$$

Enfin, l'équivalence entre (iii) et (iv) découle du lemme de changement de variable 4.1.3. □

Le résultat suivant a été démontré par El-Fallah, Kellay, Shabankhah et Youssfi dans leurs article intitulé "Level sets and Composition operators on the Dirichlet space" en 2011 **[19]** dans les espaces de Dirichlet où $\alpha = 0$.

**Théorème 4.4.9.** *Soit $0 \leq \alpha < 1$. Soit $K$ le cantor généralisé qui vérifie (4.4.2), et soit $\Omega : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que $t \to \Omega(t^\gamma)$ soit concave pour $\gamma > 2/(1-\alpha)$.*
*Si*

$$\int_0^1 \frac{\Omega'(t)^2}{\Omega(t)^{2+\alpha}}\, t^\alpha |K_t| dt \; < \; \infty, \tag{4.4.4}$$

*alors*

$$C_{\varphi_{\Omega,K}} \in S_2(\mathcal{D}_\alpha).$$

*Démonstration.*

D'après le lemme 4.4.8 et le lemme 4.4.4, on a :

$$\mathcal{D}_\alpha(\varphi_{\Omega,K}) \leq c \int_0^{2\pi} \Omega'(t)^2\, e^{-2\Omega(t)}\, t^\alpha |K_t|\, dt.$$

Car $\varphi_{\Omega,K}^n = \varphi_{n\Omega,K}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'_{\Omega,K}(z)|^2}{(1-|\varphi_{\Omega,K}(z)|^2)^{2+\alpha}}\, dA_\alpha(z) &\asymp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{D}_\alpha(\varphi_{n\Omega,K})}{n^{1-\alpha}} \\
&\leq c_1 \int_0^1 \Omega'(t)^2\, t^\alpha |K_t| \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha e^{-2n\Omega(t)} \\
&\leq c_2 \int_0^1 \frac{\Omega'(t)^2}{[1-e^{-2\Omega(t)}]^{2+\alpha}}\, t^\alpha |K_t|\, dt,
\end{aligned}$$

où $c_1$ et $c_2$ sont des constantes positives. Notons que :

$$1 - e^{-2\Omega(t)} \asymp \Omega(t),$$

on obtient :

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'_{\Omega,K}(z)|^2}{(1-|\varphi_{\Omega,K}(z)|^2)^{2+\alpha}}\, dA_\alpha(z) < \infty$$

Donc et d'après le lemme 4.4.8 $C_{\varphi_{\Omega,K}} \in S_2(\mathcal{D}_\alpha)$. □

# Bibliographie

[1] P.Ahern, D. Clark, On functions orthogonal to invariant subspaces, Acta Math, 124(1), (1970), 191–204.

[2] P. Ahern, D. Clark, Radial limits and invariant subspaces. Amer. J. Math, 92 ,(1970), 332–342.

[3] S.Axler, S.Chang, D. Sarason, Products of Toeplitz operators, Int. Equa.Op. Th, 1, (1978), 285–309.

[4] S.Axler, D.Zheng, Toeplitz algebras on the disk, J. Funct. Anal, 243 ,(2007), 67–86.

[5] A.Baranov, R. Bessonov et V. Kapustin, Symbols of truncated Toeplitz operators. J. Funct. Anal. 261, (2011), 3437-3456.

[6] Z.Bendaoud, F.Korrichi, L.Merghni, A.Yagoub, Estimates of generalized Nevanlinna counting function and applications to composition operators, extracta Mathematicae, Vol-30(2), (2015), 221–234.

[7] A.Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta Math.81(17), 239-255.

[8] A.Brown, P.R.Halmos, Algebraic properties of toeplitz operators. J. Reine Agnew. Math, 123, 89-102,1963-1964.

[9] A.Baranov, I. Chalendar, E. Fricain, J. Mashreghi et D. Timotin, Bounded symbols and reproducingkernel thesis for truncated Toeplitz operators. J. Funct. Anal. (2010), 259 2673-2701.

[10] H.Benazzouz, O. El-Fallah, K. Kellay, H. Mahzouli, Contact points and Schatten composition operators, Math. Z. 279, no. 1-2, (2015), 407–422.

[11] J. A.Cima, S. R. Garcia, W. T. Ross et W. R. Wogen, Truncated Toeplitz operators, spatial isomorphism, unitary equivalence, and similarity. Indiana Univ. Math. J.,59 ,(2010), 595-620.

[12] J. A.Cima, W. T. Ross et W. R. Wogen, Truncated Toeplitz operators on finite dimensional espaces. Operators and Matrices, 2(3), ( 2008),357-369.

[13] D.Clark, One dimensional perturbations of restricted shifts, J. Analyse Math, 25, (1972), 169–191.

[14] L. P.Duren, Theory of Hp spaces, Academic Press, New York, (1970).

[15] O.El-Fallah, M.El Ibbaoui, H.Naqos, Composition operators with univalent symbol in Schatten classes. J. Funct. Anal. 266 (2014), no. 3, 1547–1564.

[16] O.El-Fallah, K. Kellay, J. Mashreghi, T. Ransford. A primer on the Dirichlet space. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[17] O. El-Fallah ; K. Kellay ; T. Ransford, Cantor sets and cyclicity in weighted Dirichlet spaces, J. Math. Anal. Appl, 372 (2), (2010) 565–573.

[18] O. El-Fallah ; K. Kellay, T. Ransford. On the Brown–Shields conjecture for cyclicity in the Dirichlet space,Adv. Math.222 (2009), 2196-2214.

[19] O. El-Fallah ; K. Kellay, M. Shabankhah, H. Youssfi, Level sets and Composition operators on the Dirichlet space. J. Funct. Anal 260 (2011), 1721-1733.

[20] E.A. Gallardo-Gutiérrez ; M.J. González, Exceptional sets and Hilbert–Schmidt composition operators, J. Funct. Anal. 199, (2003), 287–300.

[21] S. R. Garcia ; D. E. Poore et W. T. Ross, Unitary equivalence to a truncated Toeplitz operator, analytic symbols. Proc. Amer. Math. Soc, 140(4), (2012), 1281-1295.

[22] S. R.Garcia, D. E. Poore et M. K. Wyse, Unitary aquivalence to a complex symmetric matrix, a modulus criterion. Operators and Matrices, 5(2), (2011), 273-287.

[23] S.R. Garcia ; M. Putinar, Complex symmetric operators and applications II. Trans. of the Amer.Math. Soc, (2007), 359(8), 3913-3931.

[24] S. R.Garcia, W. T. Ross, Model Spaces, a Survey, Math and Computer Science, 2013.

[25] S. R.Garcia, W. T. Ross et W. R. Wogen, Spatial isomorphisms of algebras of truncated Toeplitz operators, Indiana Univ. Math. J, 59, (2010),1971-2000.

[26] J. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, New York, 1981.

[27] K. Kellay and P. Lefévre, Compact composition operators on weighted Hilbert spaces of analytic functions, J. Math. Anal. Appl.386 (2012), 718-727.

[28] P. Lefèvre ; D. Li ; H. Queffélec ; L. Rodríguez-Piazza, Approximation numbers of composition operators on the Dirichlet space. Ark. Mat. 53 (2015), no 1, 155–175.

[29] D.Li ; H. Queffélec ; L. Rodríguez-Piazza, Two results on composition operators on the Dirichlet space. J. Math. Anal. Appl. 426 (2015), no 2, 734–746.

[30] N. Nikolski, Treatise on shift operator, spectral functions theory, (1986).

[31] N. Nikolski, Operators, functions, and systems : an easy reading, volume 2. Mathematical Surveysand Monographs. American Mathematical Society, (2002).

[32] Rudin. W, Real and complex analysis. McGraw Hill, 3e édition, 1987.

[33] D.Sarason, Algebraic properties of truncated Toeplitz operators. Operators and Matrices, 1(2), (2007), 491-526.

[34] D.Sarason, Unbounded Toeplitz Operators. Integral Equations Operator Theory, 61, (2008),281-298.

[35] D.Sarason, Self-adjoint truncated Toeplitz operators on finite-dimensional model spaces. Indagationes Mathematicae, 23, (2012), 650-662.

[36] D.Sarason, Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disc, John Wiley and sons, Inc, New York, 1994.

[37] N.Sedlock, Properties of truncated Toeplitz operators. Thèse de doctorat, Washington University in St. Louis, 2010.

[38] J. H. Shapiro, Composition operators and classical function theory, Springer Verlag, New York, 1993.

[39] J. H. Shapiro, The essential norm of a composition operator. Annals of Math.125, (1987), 375-404.

[40] J.H. Shapiro, What do composition operators know about inner functions ?, Monatsh. Math.130, (2000), 57–70.

[41] E.Stroue, D. Timotin et M. Zarrabi, Unitary equivalence to truncated Toeplitz operators. J.Indiana Univ. Math. J, 61(2), 525-538, 2012.

[42] K. Zhu, Operator theory in function spaces, volume 139 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., New York, 1990.

[43] N. Zorboska, Composition operators on weighted Dirichlet spaces. Proc. Amer.Math. Soc. 126 (1998), no 7, 2013-2023.