Table des matières

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur de thèse, monsieur ***Laabed Boubakeur****. Je le remercie de m'avoir orienter vers ce sujet lors de mon mémoire, il a pris le temps nécessaire pour m'éveiller à la recherche, montrant constamment une trés grande rigueur et précision durant ces trois années. Il a toujours été disponible, toujours de bonne humeur, il n'a jamais cessé de me soutenir et de m'encourager dans tous les moments. Un trés grand merci à lui, et toute ma reconnaissance.*

Mes remerciements vont ensuite à monsieur ***Melkemi khaled*** *qui a accepté d'être président de jury de ma thèse. Il a porté beaucoup d'attention à mes travaux ; je leur en suis trés reconnaissante.*

Mes remerciements vont ensuite à ***Mokhtari Zouhir****,* ***Chighoub Farid*** *qui ont aussi accepté d'être examinateurs de cette thèse et de l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.*

Mes remerciements vont aussi à monssieur ***Hafidi Nadjib*** *qui m'a toujours encouragé par ses précieux conseils et son soutien moral.*

Mes remerciements s'adressent aussi à tous mes collègues jeunes chercheurs d'Ecole Doctorale avec lesquels j'ai partagé ces années.

Je remercie enfin mes parents ***Ammar*** *(que le bon dieu le bénit) et* ***Houria*** *dont le travail n'aurait pu aboutir sans leur soutien et encouragements. Je tiens également à remercier mes soeurs* ***Liza, Salima, Hayette, Nadia, Amina, Samra, Wafa,*** *pour leur présence et leur soutien constant. Merci de m'avoir poussé et encouragé à aller au delà de mes capacités.*

Je dédie ce travail
A ma mère qui m'a entouré de sa sollicitude
et de son soutien moral.
A mon père que le bon dieu le bénit
A mes soeurs pour leur soutien moral sans faille
et leur précieux conseils, depuis toujours, sans relâche, à travers des moments pénibles.
A mes amies et tous ceux qui me sont chers.

Résumé

L'objet de ce mémoire est l'étude d'existence des solutions périodiques d'une équation différentielle fonctionnelle, élliptique, précisement l'équation de Rayleigh p-Laplacien, en utilisant la méthode de compacité, théorie du degré topologique.

Mots clés : Degré topogique, p-Laplacien , existence des solutions, équation différentielle fonctionnelle, équation de Rayleigh.

Introduction Générale

L'opérateur p-Laplacien est un modèle d'opérateurs élliptiques quasi-linéaires qui permet de modéliser des phénomènes physiques tels que les problèmes de fluides non-Newtoniens, réactions-diffusion, élasticité non-linéaire, glacéologie, extraction de pétrole, astronomie, courant à travers les milieux poreux, etc ...(voir par exemple [1] , [2], [9]).

Dans les dernières années, l'existence des solutions périodiques des équations différentielles avec retard a eu beaucoup d'attention, par exemple dans [6], [7], [21], [22], les équations différentielles du deuxième ordre :

$$\begin{aligned}
x''(t) + f(x'(t)) + g(x(t-\tau)) &= p(t), \\
x''(t) + m^2 x(t) + g(x(t-\tau)) &= p(t), \\
x''(t) + f(t, x'(t-\tau)) + g(x(t-\sigma)) &= p(t),
\end{aligned}$$

ont étudié.Un peu d'articles discute l'équation de Rayleigh. Dans [20] Lu et Ge ont étudié l'équation de Rayleigh suivante :

$$x''(t) + f(x'(t)) + g(x(t-\tau(t))) = p(t),$$

par l'utilisation du théorème de degré topologique de coinsidence, les auteurs ont obtenu des conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques de l'équation précédente.

Ce travail porte sur l'éxistence des solutions périodiques de l'équation de Rayleigh p-Laplacien de la forme

$$\left(\varphi_p(x'(t))\right)' + f(t, x'(t-\sigma(t))) + g(t, x(t-\tau(t))) = e(t)$$

tels que $p > 1$ et $\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\varphi_p(s) = |s|^{p-2} s$ pour $s \neq 0$ et $\varphi_p(0) = 0, f, g$ sont des fonctions continues définies dans $\mathbb{R}^2$ et périodiques pour t avec $f(t,.) = f(t+2\pi,.), g(t,.) = g(t+2\pi,.), f(t,0) = 0$ pour $t \in \mathbb{R}$,e, σ et τ sont des fonctions continues périodiques définies dans $\mathbb{R}$ de période 2π et $\int\limits_0^{2\pi} e(t)dt = 0.$

Et de la forme

$$\left(\varphi_p\left(x\left(t\right)-cx\left(t-\sigma\right)\right)'\right)'+f\left(x'\left(t\right)\right)+g\left(x\left(t-\tau\left(t\right)\right)\right)=e\left(t\right)$$

tels que $\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définit par $\varphi_p\left(u\right) = \left|u\right|^{p-2} u$. Alors φ_p est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ avec l'inverse $\varphi_q\left(u\right) = \left|u\right|^{q-2} u$, et f, g, e sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; τ et e sont de période T, T est une constante positive ; c, σ sont des constantes réelles tel que $|c| \neq 1$.

Dans le premier chapitre on s'intéresse au degré topologique de Brouwer et de Schauder, on les construit un par un et comme application de ces degrés on voit le théorème du point fixe de Brouwer, et le théorème de point fixe de Leray-Schauder, puis on parle de la non linéairité de type Leray-Schauder.

Différentes propriétés de ces degré sont établies.

Dans le deuxième chapitre on parle du p-Laplacien, de leur régularité et leur différentiabilité, puis on définit les fonctions super-harmoniques.

Dans les deux derniers chapitres, on démontre l'existence des solutions périodiques de l'équation de Rayleigh p-Laplacien avec retard, puis neutrale. En utilisant le lemme de Mawhin qui est démontré au troisième chapitre.

Chapitre 1

Degrés topologiques

Soient $y \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application au moins continue et soit l'équation

$$f(x) = y, \tag{1.1}$$

Est-ce qu'on peut assurer qu'il existe une solution à (1.1)?
C'est très simple dans le cas où f est linéaire, on calcule le déterminant s'il est non nul, il existe une solution et même une seule à (1.1), pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Sinon on peut rien dire puisqu'il peut exister des solutions pour certaine y, mais ces solutions ne sont pas stables (si on perturbe y ou f, la solution peut ne plus exister).

Mais dans le cas où f est non linéaire c'est pas de la même simplicité, on estime développer un outil jouant, pour les applications non linéaires, ce rôle de déterminant pour les applications linéaires.
On appelle cet outil le degré, qui assure par sa non nullité que (1.1) a au moins une solution stable. Le degré dépendra de f, y et de l'ensemble sur lequel on cherche les solutions à (1.1) .
Les degrés topologiques les plus connus sont de Brouwer pour les espaces de dimension finie, et de Leray-Schauder pour la dimension infinie.

1.1 Degré topologique de Brouwer

1.1.1 Cas particulier ; dimension 1

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, ne s'annule ni en 0 ni en 1, et soit $d(f) = \frac{1}{2}(sgnf(1) - sgnf(0))$. Si $d(f) \neq 0$ alors $f(0)$ et $f(1)$ ont des signes différents, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists x \in [0,1]$ tel que

$$f(x) = 0. \tag{1.2}$$

donc l'entier $\deg(f)$ permet d'assurer qu'il existe au moins une solution de (1.2) dans $[0,1]$.
Ces solutions sont stables ; si on perturbe f des petites perturbations ou on modifie f continuement, avec les valeurs au bord de $[0,1]$, alors l'existence des solutions reste vraie.
On décomposant Ω en ses composantes connexes $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I}]a_i, b_i[$, on peut définir

$$d(f,\Omega,y) = \frac{1}{2}\sum_{i\in I}\left(sgn\left(f(b_i) - y\right) - sgn\left(f(a_i) - y\right)\right),$$

Ce degré est adapté à (1.1) tel que $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continue et ne s'annule pas sur $\partial\Omega$.

1.1.2 Construction du degré de brouwer

Définition 1.1.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $f \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Si $y \notin f(\partial\Omega)$ et $J_f(y) \neq 0$, alors on définit*

$$d(f,\Omega,y) = \sum_{x\in f^{-1}(y)} sgn J_f(x),$$

tel que $d(f,\Omega,y) = 0$ si $f^{-1}(y) = \emptyset$.
On note que J_f est le Jacobien de f.

Le résultat suivant nous donne une autre définition équivalente à celle de la $1^{ère}$ définition .

Proposition 1.1.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $f \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Si $y \notin f(\partial\Omega)$ et $J_f(y) \neq 0$ et*

$$\Phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} c\varepsilon^{-n}\exp^{\left(\frac{-1}{1-|\varepsilon^{-1}x|}\right)}, & si\ |x| < 1 \\ 0 & , sinon \end{cases}$$

et c est une constante tel que $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_\varepsilon(x)\,dx = 1$. Alors $\exists\varepsilon_0 = \varepsilon_0(y,f)$ tel que

$$d(f,\Omega,y) = \int\limits_{\Omega} \Phi_\varepsilon\left(f(x) - y\right) J_f(x)\,dx, \forall\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$$

Définition 1.1.3 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné et* $f \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$. *Si* $y \notin f\left(\partial\Omega\right)$. *Alors on définit*

$$d\left(f, \Omega, y\right) = d\left(f, \Omega, y'\right)$$

y' *est une valeur régulière de* f *tel que* $|y - y'| < (y, f\left(\partial\Omega\right))$.

Définition 1.1.4 *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné,* $f \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ *et* $y \notin f\left(\partial\Omega\right)$.

Alors on définit

$$d\left(f, \Omega, y\right) = d\left(g, \Omega, y\right),$$

où $g \in \mathcal{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)$ *et* $|g - f| < (y, f\left(\partial\Omega\right))$.

Théorème 1.1.5 *Soit* $n \geqslant 1$ *et* A *l'ensemble des triplets* (f, Ω, y) *où* Ω *et un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *et* $y \in \mathbb{R}^n$ $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *une application continue et telle que* $y \notin f\left(\partial\Omega\right)$, *alors il existe une et une seule application* $d : A \to \mathbb{Z}$ *qui vérifié les propriétés suivantes :*

1. *(Normalisation) si* $y \in \Omega, d\left(Id, \Omega, y\right) = 1$.
2. *(Additivité) Soient* Ω_1, Ω_2 *deux ouverts disjoints inclus dans* Ω *tels que* $y \notin f\left(\overline{\Omega} \diagdown (\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)$, *alors*

$$d\left(f, \Omega, y\right) = d\left(f, \Omega_1, y\right) + d\left(f, \Omega_2, y\right).$$

3. *(Invariance par homotopie) Si* $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to R^n$ *et* $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *sont continues, et pour tout* $t \in [0,1], y\left(t\right) \notin h\left(t, \partial\Omega\right)$. *Alors,*

$$d\left(h\left(0,.\right), \Omega, y\left(0\right)\right) = d\left(h\left(1,.\right), \Omega, y\left(1\right)\right).$$

d est appelé le degré topologique de Brouwer.

1.1.3 Unicité du degré de Brouwer

Réduction aux applications et valeurs régulières

Proposition 1.1.6 *Si* K *est un compact de* $\mathbb{R}^n$, *alors* $\{f\ |_K, f \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)\}$ *est dense dans* $\mathcal{C}\left(K\right)$.

Théorème 1.1.7 (de Sard) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1\left(\Omega\right)^n$ *et* $C_f = \{x \in \Omega, J_{\boldsymbol{f}}\left(x\right) = 0\}$. *Alors* $|f\left(C_f\right)| = 0$.

On va démontrer que le degré, définit sur $A = \{\ (f, \Omega, y)\ \diagup \Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ est continue et telle que $y \notin f\left(\partial\Omega\right)\ \}$, est en fait entièrement déterminé par ses valeurs sur un sous-ensemble particulier de A.

Fixons Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et notons $A_\Omega = \{(f, y), (f, \Omega, y) \in A\} \subset \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)^n \times \mathbb{R}^n$.

Il est clair que A_Ω est un ouvert de $\mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)^n \times \mathbb{R}^n$: en effet, si $(f, y) \in A_\Omega$, alors $y \notin f\left(\partial\Omega\right)$ c'est à dire $r = \left(y, f\left(\partial\Omega\right)\right) > 0$, soit $(g, z) \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)^n \times \mathbb{R}^n$ tel que $\underset{\overline{\Omega}}{sup}\left|g - f\right| < \frac{r}{2}$ et $z \in B\left(y, \frac{r}{2}\right)$, alors, on a pour tout $x \in \partial\Omega$, $\left|g(x) - z\right| \geq \left|f(x) - z\right| - \left|g(x) - f(x)\right| \geq \left|f(x) - y\right| - \left|y - z\right| - \left|g(x) - f(x)\right| > r - \frac{r}{2} - \frac{r}{2} > 0$ et donc$(g, z) \in A_\Omega$.

En notons $\mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^n$ l'ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$, la proposition précédente montre que $\mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^n$ est dense dans $\mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)^n$. Comme A_Ω est un ouvert de $\mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)^n \times \mathbb{R}^n$, on en déduit que

$$A_\Omega^\infty = \left\{(f, y) \in A_\Omega, f \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^n\right\}$$

est dense dans A_Ω.

Pour f régulière sur Ω, on note $C_f = \left\{x \in \Omega, J_f \in \mathcal{C}^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^n\right\}$ et $R_f = \mathbb{R}^n \diagdown f\left(C_f\right)$ l'ensemble des valeurs régulières de f ; ce sont les $y \in \mathbb{R}^n$ qui vérifient que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = y$, $f'(x)$ est inversible (notons qu'une y qui n'est pas dans l'image de f est en particulier une valeur régulière de f). Le théorème de Sard affirme que $\left|f\left(C_f\right)\right| = 0$, et donc en particulier que R_f est dense dans $\mathbb{R}^n$. Ceci permet de voir que

$$A_\Omega^{\infty,R} = \left\{(f, y) \in A_\Omega^\infty \diagdown y \in R_f\right\}$$

est dense dans A_Ω^∞ pour la topologie de $\mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)^n \times \mathbb{R}^n$, et donc aussi dans A_Ω pour cette même topologie.

Mais on sait que $d(., \Omega, .)$ est continu sur A_Ω . L'application $d(., \Omega, .)$ est donc entièrement déterminée sur A_Ω par ses valeurs sur $A_\Omega^{\infty,R}$, et il suffit de connaître le degré sur $A^{\infty,R} = \left\{(f, \Omega, y) \in A \diagdown f \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^n, y \in R_f\right\}$, pour le connaître sur A.

Réduction au cas linéaire

Nous allons voir ici qu'il suffit en fait de déterminer le degré sur les applications linéaires et avec $y = 0$ pour le déterminer sur $A^{\infty,R}$.

Soit $(f, \Omega, y) \in A^{\infty,R}$. Comme y est une valeur régulière de f. si x est un antécédent de y par f ,alors x est forcément dans Ω (et non sur $\partial\Omega$) et $f'(x)$ est inversible; par le théorème d'inversion locale, f est donc un difféomorphisme local d'un voisinage de x sur un voisinage de y; cela montre en particulier que, au voisinage de x, il ne peut exister d'autre antécédent de y (f est injective au voisinage de x). Ces antécédents sont donc isolés et, comme Ω est borné, cela montre qu'ils sont en nombre fini (sinon, ils auraient un point d'accumulation qui serait lui-meme un antécédent, mais non isolé).
Si δ est choisi assez petit de sorte que les boules centrées sur les antécédents de y et de rayon δ soient deux à deux disjointes, comme y n'a pas d'antécédent par f en dehors de ces boules

$$\begin{aligned} d(f, \Omega, y) &= \sum_{z \in f^{-1}(\{y\})} d(f, B(z, \delta), y), \\ &= \sum_{z \in f^{-1}(\{y\})} d(f - y, B(z, \delta), 0), \end{aligned}$$

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{z \in f^{-1}(\{y\})} d(f(z + .) - y, B(0, \delta), 0). \tag{1.3}$$

et ce pour tout δ assez petit.
Soit z un antécédent de y, Comme f' est uniformement continue sur Ω car $f \in \mathcal{C}^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)^n$, le théorème des accroissements finis donne

$$|f(x+z) - y - f'(z)x| \leq \sup_{t \in [0,1]} \|f'(z+tx) - f'(z)\| \, |x| \leq w(|x|)\,|x| \tag{1.4}$$

ou $\|.\|$ est la norme d'endomorphisme induite par $|.|$ et $w(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$. Considerons l'homotopie $h(t,x) = t(f(x+z) - y) + (1-t) f'(z) x$ et prenons $\delta > 0$; s'il existe $x \in \partial B(0,\delta)$ et $t \in [0,1]$ tel que $h(t,x) = 0$, alors $t(f(z+x) - y - f'(z)x) = -f'(z)x$ et, par (1.4), $|f'(z)x| \leq \omega(\delta)\delta$. Mais, comme $f'(z)$ est inversible, on peut trouver $C_z > 0$ indépendant de δ et x tel que $|f'(z)x| \leq C_z|x| = C_z\delta$ et on aboutirait donc à $C_z \leq \omega(\delta)$, ce qui n'est pas possible lorsque δ est assez petit. Dans cette situation, on peut alors appliquer l'invariance par homotopie du degré pour voir que

$$d(f(z+.) - y, B(0,\delta), 0) = d(f'(z), B(0,\delta), 0).$$

En utilisant ceci avec un δ suffisamment petit qui convient à tous les antécédents de y, (1.3) donne

$$d(f,\Omega,y) = \sum_{z\in f^{-1}(\{y\})} d\left(f'(z), B(0,\delta), 0\right).$$

Pour chaque antécédent z, la seule solution de $f'(z)\,x = 0$ est $x = 0$; l'additivité du degré topologique permet donc de voir que cette formule est en fait valable pour tout $\delta > 0$.
Donc le degré est entièrement déterminé par les valeurs qu'il prend sur les applications linéaires inversibles.

Degré d'un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$

Il reste donc à calculer $d(A, B(0,\delta), 0)$ lorsque $\delta > 0$ et A est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Nous avons besoin pour cela d'un peu d'algèbre linéaire.
La décomposition polaire de A nous assure qu'il existe un endomorphisme S symétrique défini positif et un endomorphisme O orthogonal tel que $A = SO$.
Toutes les valeurs propres de S sont strictement positives, et S est diagonalisable. En choisissant une base dans laquelle S est diagonal et en effectuant, dans cette base, des homotopies dans $\mathbb{R}_*^+$ entre chacune de ses valeurs propres et 1, nous obtenons une homotopie d'endomorphismes $S(t)$ ayant tous des valeurs propres strictement positives entre S et Id.
La décomposition en rotation 2×2 des endomorphismes orthogonaux $O(t)$ entre O et

$$J_A = P \begin{pmatrix} sgn(\det(A)) & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & & & . \\ . & & . & . & . & . \\ . & & & . & . & . \\ . & & & & . & 0 \\ 0 & & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

avec P une matrice de passage (remarquons que $\det(O) = sgn(\det(A))$ puisque S est symétrique définie positive).
L'application $t \to S(t)\,O(t)$ est donc une homotopie d'isomorphisme entre A et J_A. Comme chaque $S(t)\,O(t)$ est un isomorphisme, il est clair qu'il ne peut y

avoir de solution de $S(t)\,O(t)\,x = 0$ sur $\partial B(0,\delta)$ et l'invariance par homotopie du degré donne donc $d(A, B(0,\delta), 0) = d(J_A, B(0,\delta), 0)$.
Si $\det(A) > 0$ alors on a fini : $J_A = Id$ et la propriété de normalisation du degré donne $d(A, B(0,\delta), 0) = 1$.

1.1.4 Quelques propriétés

Proposition 1.1.8 *Le degré topologique de Brouwer verifie les propriétés suivantes :*

1. *Si* $d(f,\Omega,y) \neq 0$, *alors il existe un* $x \in \Omega$ *tel que* $f(x) = y$.
2. *Pour tout* $z \in \mathbb{R}^n, d(f,\Omega,y) = d(f - z, \Omega, y - z)$.
3. *Pour tout* $z \in \mathbb{R}^n, d(f,\Omega,y) = d(f(. - z), \Omega + z, y)$.

Comme une conséquence du théorème 1.1.5, on a les résultats suivants :

Théorème 1.1.9 *Soit* $f : \overline{B(0,R)} \subset R^n \to \overline{B(0,R)}$ *une application continue. Si* $|f(x)| \leq R$ *pour tout* $x \in \partial B(0,R)$, *alors* f *a un point fixe dans* $\overline{B(0,R)}$.

Preuve. On suppose que $x \neq f(x), \ \forall x \in \partial B(0,R)$.
Soient $h(t,x) = x - tf(x), \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times \overline{B(0,R)}$ et $y(t) = 0, \forall t \in [0,1]$.
Alors $0 \neq h(t,x)\ \forall (t,x) \in [0,1] \times \partial B(0,R)$ donc $y(t) \notin h(t,\partial B)$.
D'après l'invariance par homotopie du degré de Brouwer alors

$$d(h(0,x), B(0,R), y(0)) = d(h(1,x), B(0,R), y(1)),$$

c'est à dire

$$d(I, B(0,R), 0) = d(I - f, B(0,R), 0),$$

donc

$$d(I - f, B(0,R), 0) = 1 \neq 0,$$

(d'après la normalisation du degré de Brouwer)
On résulte que $\exists x \in \overline{B(0,R)}$ tel que $f(x) - x = 0$ (d'après 1 de la proposition 1.1.7),donc $\exists x \in \overline{B(0,R)}$ tel que $f(x) = x$. ∎

Théorème 1.1.10 (le théorème du point fixe de Brouwer) *Soit* $C \subset \mathbb{R}^n$ *un sous ensemble non vide, fermé, borné, et convexe et* $f : C \to C$ *une application continue. Alors* f *a un point fixe dans* C.

Preuve. Soit $B(0,R)$ tel que $C \subset B(0,R)$ et soit $f|_{\overline{B(0,R)}} : \overline{B(0,R)} \to C$ d'après le théorème précédent $\exists x \in \overline{B(0,R)}$ tel que $f|_{\overline{B(0,R)}}(x) = x$.donc $\exists x \in \overline{B(0,R)} \subset C$ tel que $f|_{\overline{B(0,R)}}(x) = f(x) = x$.d'où f a un point fixe dans C. ∎

Théorème 1.1.11 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue et $0 \in \Omega$ et Ω un sous ensemble ouvert, borné de $\mathbb{R}^n$. Si $(f(x), x) > 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$, alors*

$$d(f, \Omega, 0) = 1.$$

Corollaire 1.1.12 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Si*

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{(f(x), x)}{|x|} = +\infty,$$

alors $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Théorème 1.1.13 (de Borsuk) *Soit Ω un ouvert borné et symétrique de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, avec $0 \in \Omega$. Si $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est impaire et $0 \notin f(\partial\Omega)$, alors $d(f, \Omega, 0)$ est impaire.*

Théorème 1.1.14 *Soit Ω un sous ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$,, $1 \leq m < n$, et soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue et $g = I - f$. Si $y \notin (I - f)(\partial\Omega)$, alors*

$$d(g, \Omega, y) = d(g_m, \Omega \cap \mathbb{R}^m, y),$$

avec g_m est la restriction de g dans $\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m$.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et soit $f \in C(\overline{\Omega})$. Par l'invariance d'homotopie de $d(f, \Omega, y)$, on sait que le $d(f, \Omega, y)$ est l'image de y à travers le composant connexe U de $\mathbb{R}^n \diagdown f(\partial\Omega)$. Donc, c'est raisonnable quand on note cet entier par $d(f, \Omega, U)$. Le composant connexe illimité est noté U_∞.
Maintenant, on vas définir la formule du produit :

Théorème 1.1.15 *Soient Ω un sous ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ et soient U_i des composants connexes bornés de $\mathbb{R}^n \diagdown f(\partial\Omega)$.*
Si $y \notin (gf)(\partial\Omega)$, alors

$$d(gf, \Omega, y) = \sum_i d(f, \Omega, U_i)\, d(g, U_i, y).$$

tel qu'il y a un nombre fini de termes, qui ne sont pas nuls.

1.1.5 Généralisation du degré de Brouwer dans un espace vectoriel de dimension finie

Pour chaque F espace vectoriel normé de dimension finie, on a besoin de d_F le degré topologique sur F.
On suppose que $\dim F = n$ alors il existe un isomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^n \to F$.
Soit $A_F = \{(f, \Omega, y) / \ \Omega$ est un ouvert borné de F, $y \in F$ et $f : \overline{\Omega} \to F$ est une application continue et $y \notin f(\partial\Omega)\}$.
Il est clair que $(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi, \varphi^{-1}(\Omega), \varphi^{-1}(y)) \in A$.
On pose $d_F(f, \Omega, y) = d(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi, \varphi^{-1}(\Omega), \varphi^{-1}(y))$ tel que d est le degré topologique de Brouwer dans $\mathbb{R}^n$.
On sait que le degré est unique donc si d_F est un tel degré et $\varphi : \mathbb{R}^n \to F$ est un isomorphisme, alors

$$d(g, U, z) = d_F\left(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, \varphi(U), \varphi(z)\right),$$

est un degré topologique sur $\mathbb{R}^n$ qui est égal au degré topologique de Brouwer .
Cela prouve que cette définition ne dépond pas de l'isomorphisme φ, puisque on peut construire un degré sur F à l'aide d'un autre isomorphisme.
Dans la proposition suivante, on compare les degrés topologiques des différents espaces.

Proposition 1.1.16 *Soit G un espace verctoriel normé de dimension finie et F un sous-espace de G. Soit Ω un ouvert borné de $G, y \in F$ et $f : \overline{\Omega} \to F$ une application continue telle que $y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$. Alors*

$$d_G(Id - f, \Omega, y) = d_F\left(Id - f|_{\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, y\right).$$

1.2 Degré topolgique de Leray-Schauder

En 1934,Leray et Schauder ont généralisé le degré topologique de Brouwer au dimension infinie.

1.2.1 Construction du degré de Leray-Schauder

Exemple 1.2.1 *Dans cet exemple on perd l'espoir de trouver un degré topologique pour une application continue sur un espace de dimension infinie*

Soit $E = l^{\infty} = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} \text{ des suites bornées} \right\}$ *et* $S : E \to E$ *définit par* $s(x) = (0, x_1, x_2, ...)$ *pour chaque* $x = (x_1, x_2, ...) \in E$
Soit l'homotopie naturelle entre Id *et* S,

$$h(t,x) = tx + (1-t)S(x) = (tx_1, tx_2 + (1-t)x_1, tx_3 + (1-t)x_2, ...),$$

$$\forall t \in [0,1]\,; h(t,x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} tx_1 = 0 \\ tx_2 + (1-t)0 = 0 \\ . \\ . \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, ...) = (0, 0, 0, ...).$$

donc la seule solution de $h(t,x) = 0$ *est la suite nulle.*
S'il existe un degré pour tous les applications continues sur E *,alors on aurait* $1 = d(Id, B(0,1), 0) = d(S, B(0,1), 0)$ *d'aprés l'invariance d'homotopie du degré*
D'où $d(S, B(0,1), z) = 1 \neq 0 \quad \forall z \in E$ *proche de* 0.
C'est à dire tout z *proche de* 0 *aurait un antécédent par* S *ce qui est faux car* $z = (\varepsilon, 0, 0, ...)$ $\varepsilon \neq 0$ *n'a pas d'antécédent par* S.

On va donner des resultats d'approximation des fonctions compactes par des fonctions de dimension finie.

Lemme 1.2.2 *Soit* E *un espace réel de Banach,* $\Omega \subset E$ *un sous-ensemble ouvert, borné et* $T : \overline{\Omega} \to E$ *une application compacte continue. Alors, pour chaque* $\varepsilon > 0$*, il existe un espace* F *de dimension finie et une application continue* $T_{\varepsilon} : \overline{\Omega} \to F$ *telle que*

$$\|T_{\varepsilon}x - Tx\| < \varepsilon \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Lemme 1.2.3 *Soit* E *un espace réel de Banach,* $B \subset E$ *un sous-ensemble fermé, borné et* $T : \overline{B} \to E$ *une application compacte continue. On suppose que* $Tx \neq x$ *pour tout* $x \in B$*. Alors il existe un* $\varepsilon > 0$ *avec* $x \neq tT_{\varepsilon_1}x + (1-t)\,T_{\varepsilon_2}x$ *pour tout* $t \in [0,1]$ *,* $x \in B$ *et* $\varepsilon_i \in \left]0, \varepsilon_0\right[$ *,tels que* F_{ε_i} *sont des espaces de dimension finie , et* $T_{\varepsilon_i} : B \to F_{\varepsilon_i}$ $i = 1, 2$ *sont des applications continues telles que*

$$\|T_{\varepsilon_i}x - Tx\| < \varepsilon_i, \forall x \in B.$$

Définition 1.2.4 *Soit* E *un espace réel de Banach,* $\Omega \subset E$ *un sous-ensemble ouvert, borné et* $T : \overline{\Omega} \to E$ *une application compacte continue. On suppose que* $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$*. Alors, par le lemme précédent, il existe un* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que*

$x \neq tT_{\varepsilon_1}x + (1-t)\,T_{\varepsilon_2}x$ pour tout $t \in [0,1]$, $x \in \partial\Omega$.avec $\varepsilon_i \in \left]0, \varepsilon_0\right[$, F_{ε_i} des espaces de dimension finie et $T_{\varepsilon_i} : \overline{\Omega} \to F_{\varepsilon_i}$ $i = 1, 2$ des applications continues, donc le degré de Brouwer $d\,(I - T_\varepsilon, \Omega \cap F_\varepsilon, 0)$ est bien définit, et on peut définir

$$d\,(I - T, \Omega, 0) = d\,(I - T_\varepsilon, \Omega \cap F_\varepsilon, 0)\,,$$

avec $\varepsilon \in \left]0, \varepsilon_0\right[$.
Par l'invariance d'homotopie du degré de Brouwer, on a

$$d\,(I - T_{\varepsilon_1}, \Omega \cap span\,\{F_{\varepsilon_1} \cap F_{\varepsilon_2}\}\,, 0) = d\,(I - T_{\varepsilon_2}, \Omega \cap span\,\{F_{\varepsilon_1} \cap F_{\varepsilon_2}\}\,, 0)\,.$$

Mais $T_{\varepsilon_i} : \overline{\Omega} \cap span\,\{F_{\varepsilon_1} \cup F_{\varepsilon_2}\} \to F_i$ pour $i = 1, 2$ donc par le théorème 1.1.13 on a

$$d\,(I - T_{\varepsilon_1}, \Omega \cap span\,\{F_{\varepsilon_1} \cap F_{\varepsilon_2}\}\,, 0) = d\,(I - T_{\varepsilon_1}, \Omega \cap F_{\varepsilon_1}, 0)\,,$$

et

$$d\,(I - T_{\varepsilon_2}, \Omega \cap span\,\{F_{\varepsilon_1} \cap F_{\varepsilon_2}\}\,, 0) = d\,(I - T_{\varepsilon_2}, \Omega \cap F_{\varepsilon_2}, 0)\,,$$

donc on a

$$d\,(I - T_{\varepsilon_1}, \Omega \cap F_{\varepsilon_1}, 0) = d\,(I - T_{\varepsilon_2}, \Omega \cap F_{\varepsilon_2}, 0)\,,$$

et le degré définit dans la définition est bien définit. Pour le cas général, si $y \notin (I - T)\,(\partial\Omega)$, on définit

$$d\,(I - T, \Omega, y) = d\,(I - T - y, \Omega, 0)\,.$$

Définition 1.2.5 *Soient E un Banach et A_c l'ensemble des triplets $(Id - f, \Omega, y)$ où Ω est un ouvert borné de E, $y \in E$ et $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une application compacte telle que $y \notin (Id - f)\,(\partial\Omega)$. Il existe une application $d : A_c \to \mathbb{Z}$ telle que*

1. *(Normalisation) $d\,(Id, \Omega, y) = 1$, si $y \in \Omega$.*
2. *(Additivité) Si Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $y \notin (Id - f)\left(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)$, alors*

$$d\,(Id - f, \Omega, y) = d\,(Id - f, \Omega_1, y) + d\,(Id - f, \Omega_2, y)\,.$$

3. *(Invariance par homotopie) Si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to E$ est compacte, $y : [0,1] \to E$ est continue et, pour tout $t \in [0,1]$, $y\,(t) \notin (Id - h\,(t,.))\,(\partial\Omega)$, alors*

$$d\,(Id - h\,(0,.)\,, \Omega, y\,(0)) = d\,(Id - h\,(1,.)\,, \Omega, y\,(1))\,.$$

d est appelé le degré topologique de Leray-Schauder.

1.2.2 Quelques propriétés et applications

Théorème 1.2.6 *Soient E un Banach, C un sous ensemble convexe, fermé, borné et non-vide de E et $T : C \to C$ une fonction compacte continue. Alors T a un point fixe dans C.*

Exemple 1.2.7 *Soit $t : l^2 \to l^2$ une application définit par*

$$T(x_1, x_2, ...) = (1 - \|x\|, x_1, x_2, ...)$$

pour tout $x = (x_1, x_2, ...) \in l^2$.
Alors $T : \overline{B(0,1)} \to \overline{B(0,1)}$ est continue sans point fixe dans $\overline{B(0,1)}$.

Théorème 1.2.8 *Soient E un espace de Banach et Ω un sous ensemble ouvert borné de E.*
Si $T : \overline{\Omega} \to E$, $S : E \to E$ des applications compactes continues et $y \notin (I - S)(I - T)(\partial\Omega)$, alors

$$d((I - S)(I - T), \Omega, y) = \sum_{i \in I} d(I - T, \Omega, U_i) d(I - S, U_i, y)$$

tels que les $\{U_i\}_{i \in I}$ des composants connexes de $E \diagup (I - T)(\partial\Omega)$ et

$$d\left(I - T, \Omega, U_i\right) = d(I - T, \Omega, z), \ \forall z \in U_i.$$

Théorème 1.2.9 *Soient E un espace de Banach, E_0 un sous espace fermé de E et Ω un sous ensemble ouvert borné de E. Si $T : \overline{\Omega} \to E_0$ est une application compacte continue et $y \in E_0$, alors*

$$d(I - T, \Omega, y) = d(I - T, \Omega \cap E_0, y).$$

Théorème 1.2.10 *Soient E un espace de Banach et Ω un sous ensemble ouvert borné de E contenant 0. Si $T : \overline{\Omega} \to E$ est une application compacte continue ; alors on a :*

- *T a un point fixe dans $\overline{\Omega}$, ou*
- *$\exists \lambda > 1$ et $x \in \partial\Omega$ tel que $Tx = \lambda x$.*

Lemme 1.2.11 *Soient E un espace de Banach de dimension infinie, et $0 \in \partial\Omega$ avec Ω un sous ensemble ouvert, borné de E. Soit $T : \overline{\Omega} \to E$ une application compacte continue.*
On suppose que $Tx \neq \mu x \ \forall \mu \in [0, 1], x \in \partial\Omega$, et $0 \notin \overline{T\partial\Omega}$. Alors

$$d(I - T, \Omega, 0) = 0.$$

Théorème 1.2.12 *Soient* E *un espace de Banach de dimension infinie,* $0 \in \Omega_0 \subset \Omega$ *avec* Ω_0, Ω *sont deux sous ensembles ouverts bornés de* E. *Soit* $T : \overline{\Omega \diagdown \Omega_0} \to E$ *une application compacte continue.*
On suppose que :

- $Tx \neq \lambda x \quad \forall \lambda > 0,\ x \in \partial\Omega_0,$
- $Tx \neq \mu x \quad \forall \mu \in [0, 1[,\ x \in \partial\Omega$ *et* $0 \notin \overline{T\partial\Omega}$.

Alors T *a point fixe dans* $\overline{\Omega \diagdown \Omega_0}$.

Corollaire 1.2.13 *Soient* E *un espace de Banach de dimension infinie et* $0 \in \Omega_0 \subset \Omega$ *, avec* Ω_0, Ω *sont deux sous ensembles ouverts bornés de* E.
Soit $T : \overline{\Omega \diagdown \Omega_0} \to E$ *une application compacte continue.*
On suppose que :

- $\|Tx\| \leq \|x\| \quad \forall x \in \partial\Omega_0,$
- $\|Tx\| \geq \|x\| \quad \forall x \in \partial\Omega.$

Alors T *a un point fixe dans* $\overline{\Omega \diagdown \Omega_0}$..

Chapitre 2

p-Laplacien

2.1 Introduction

L'opérateur p-Laplacien est un modèle d'opérateurs élliptiques quasi-linéaires qui permet de modéliser des phénomènes physiques tels que les problèmes de fluides non-Neutoniens, réactions-diffusion, élasticité non-linéaire, glacéologie extraction de pétrole, astronomie, courant à travers les milieux poreux, ect ...(voir par exemple [1] , [2], [9]).
L'équation de Laplace $\Delta u = 0$ où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

est l'équation d'Euler Lagrange d'intégral de Dirichlet

$$D(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \int \cdots \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right] dx_1 ... dx_n.$$

Pour $p \in \mathbb{Z}_*^+$ l'intégral de Dirichlet est

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx = \int \cdots \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dx_1 ... dx_n.$$

L'équation d'Euler Lagrange correspondante est

$$\operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) = 0,$$

donc $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$

$$\Delta_p u = |\nabla u|^{p-4}\left\{|\nabla u|^2 \Delta u + (p-2)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u^2}{\partial x_i \partial x_j}\right\}.$$

Si $p = 1$

$$\Delta_1 u = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = -H(x).$$

Dans $\mathbb{R}^2$

$$\Delta_1 u = -H = -\frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{\left(u_x^2 + u_y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si $p = 2$

$$\Delta_2 u = \Delta u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Si $p = n$

$$\int_\Omega |\nabla u|^n \, dx = \int \cdots \int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right\}^{\frac{n}{2}} dx_1 ... dx_n.$$

Si $p = \infty$

$$\Delta_\infty u = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u^2}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

C'est l'équation harmonique infinie.

L'équation $\Delta_p u = 0$ a des nombreuses généralisations. Par exemple on peut changer l'intégral de Dirichlet par :

$$\int |\nabla u|^p \, w dx.$$

$$\int |\nabla u(x)|^{p(x)} \, dx.$$

$$\int \left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{\frac{p}{2}} dx.$$

$$\int \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p + ... + \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|^p\right) dx.$$

On peut voir l'opérateur p-Laplacien dans :L'équation p-Poisson :

$$\Delta_p u = f(x).$$

Les équations comme :

$$\Delta_p u = f(x).$$

Les équations paraboliques comme :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta_p v.$$

où $v = v(x,t) = v(x_1, ..., x_n, t)$.
Et plusieurs autre.

Remarque 2.1.1 *La norme dans L^p est :*

$$\|v\|_{L^p} = \left(\int v(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

La norme dans l'espace de Sobolev de premier ordre est

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left\{\int\limits_\Omega |v|^p \, dx + \int\limits_\Omega |\nabla v|^p \, dx\right\}^{\frac{1}{p}},$$

tel que Ω est toujours un sous ensemble ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$.

2.2 Problème de Dirichlet et solutions faibles

Soit l'intégrale de Dirichlet

$$I(u) = \int\limits_\Omega |\nabla u|^p \, dx.$$

avec $1 < p < \infty$. On peut minimiser l'intégral si :

$$\int\limits_\Omega < |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \eta > dx = 0, \tag{2.1}$$

pour tout $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Sous des conditions qui convient on a

$$(2.1) \Leftrightarrow \int\limits_\Omega \eta \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) dx = 0.$$

L'équation est vérifiée pour tout $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ alors :

$$\Delta_p \equiv \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) = 0.$$

Donc l'équation p-Laplacienne est l'équation d'Euler Lagrange pour l'intégral de Dirichlet.
La solution classique est une solution qui a des dérivées partielles secondes continues, tant que la solution faible est une solution qui ne demande pas de différentiabilité, il faut juste qu'elles sont dans $W^{1,p}(\Omega)$ ou dans $W^{1,p}_{Loc}(\Omega)$.

Définition 2.2.1 *Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$. On dit que $u \in W^{1,p}_{Loc}(\Omega)$ est une solution faible de l'équation p-harmonique dans Ω, si*

$$\int < |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \eta > dx = 0,$$

pour tout $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Si, en plus, u est continue, alors on dit que u est une fonction p-harmonique.
On suppose que $|0|^{p-2}\, 0 = 0$, $\forall 1 < p < \infty$.
Tous les solutions faibles sont continues.

Théorème 2.2.2 *Les conditions suivantes sont équivalente pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$:*

(i) *u est minimisée*

$$\int |\nabla u|^p \, dx \leq \int |\nabla v|^p \, dx, \text{ tel que } v - u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

(ii) $\displaystyle\int < |\nabla u|^{p-2} |\nabla u|, \nabla \eta > dx = 0$ *pour* $\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Si, en plus, $\Delta_p u$ est continue, alors les conditions sont équivalentes à $\Delta_p u = 0$ dans Ω.

On note que $B_r = B(x_0, r)$ et $B_{2r} = B(x_0, 2r)$.

Lemme 2.2.3 (de Cacciopoli) *Si u est une solution faible dans Ω, alors*

$$\int_\Omega \varepsilon^p |\nabla u|^p \, dx \leq p^p \int_\Omega |u|^p |\nabla \varepsilon|^p \, dx.$$

pour chaque $\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$. En particulier, si $B_{2r} \subset \Omega$, alors

$$\int_{B_r} |\nabla u|^p \, dx \leq p^p r^{-p} \int_{B_{2r}} |u|^p \, dx.$$

On considère que $\Delta_p v \leq 0$ pour les faibles supersolutions, et $\Delta_p v \geqslant 0$ pour les solutions faibles.

Définition 2.2.4 *On dit que* $v \in W^{1,p}_{Loc}(\Omega)$ *est une supersolution dans* Ω, *si*

$$\int_\Omega < |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla \eta > dx \geqslant 0$$

pour tout $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *non-négative, pour les sous-solutions l'inégalité est boulversée.*

Lemme 2.2.5 *Si* $v > 0$ *est une solution faible dans* Ω, *alors*

$$\int_\Omega \varepsilon^p |\nabla \log v|^p \, dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_\Omega |\nabla \varepsilon|^p \, dx,$$

pour tout $\varepsilon \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $\varepsilon \geqslant 0$.

Dans le cas linéaire le principe de comparaison est une répétition de principe du maximum.

Théorème 2.2.6 (Principe de comparaison) *On suppose que u et v des fonctions p-harmonique dans un domaine borné* Ω. *Si pour tout* $\varepsilon \in \partial\Omega$.

$$\lim_{x \to \varepsilon} sup u(x) \leq \lim_{x \to \varepsilon} \inf v(x),$$

on inclue la situation $\infty < \infty$ *et* $-\infty < -\infty$, *alors* $u \leq v$ *dans* Ω.

Remarque 2.2.7 *Si u est une sous-solution faible et v est une super-solution faible, alors le principe de comparaison reste validé.*

On va étudier l'existence des fonction p-harmonique avec des valeurs bornées données. On peut utiliser le théorème du Lax-Miligram, mais on utilise là la méthode directe dans les calcules variationnelles (Lebesgue 1907).

Théorème 2.2.8 *On suppose que* $g \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *tel que* Ω *est un ouvert borné dans* $\mathbb{R}^n$, *donné. Il existe une unique* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *avec des valeurs bornées* $u - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tel que*

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \leq \int_\Omega |\nabla v|^p \, dx.$$

pour tout v similaire. Ce u est une solution faible. $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ aprés la redéfinition.
Si, en plus, $g \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ et Ω est suffisamment régulier, alors $u \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ et $u|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$.

On a évité quelques pièges comme :
Si on suppose que les valeurs bornés sont continues, $g \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ donc c'est possible que $I(v) = \infty$ pour des fonctions raisonables $v \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ avec des valeurs thèses bornés g.
J.Hadamard a donné un exemple pour $p = n = 2$: si on a Ω le disque unité dans un plan et on définit

$$g(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n!}\cos(n\theta)}{n^2}$$

en coordonées polaires. La fonction $g(r,\theta)$ est harmonique dans le cas où $r < 1$ et continue dans le cas où $r \leq 1$. L'intégrale de Dirchlet est infinie.
On a évité le phénomène par le suppose de $g \in W^{1,p}(\Omega)$.
Le deuxième piège c'est l'exemple de Weistress. Il a remarqué que l'intégral variationnel de dimmension un :

$$I(u) = \int_{-1}^{1} x^2 u'(x)^2 \, dx.$$

n'a aucun minimiseur avec les valeurs bornés $u(-1) = -1$ et $u(+1) = +1$.

Théorème 2.2.9 *On suppose que $u \in W^{1,p}_{Loc}(\Omega)$ est une solution faible pour l'équation p-harmonique. Alors*

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x-y|^{\alpha}$$

pour tous $x, y \in B(x_0, r)$ à condition que $B(x_0,r) \subset\subset \Omega$. $\alpha = \alpha(p,n)$ et $L = L\left(n, p, \|u\|_{L^p(B_{2r})}\right)$.

Théorème 2.2.10 (L'inégalité de Harnack) *On suppose que $u \in W^{1,p}_{Loc}(\Omega)$ est une solution faible et que $u \geqslant 0$ dans $B_{2r} \subset \Omega$. Alors si*

$$m(r) = \inf_{B_r} essu, M(r) = \underset{B_r}{sup} essu$$

on a $M(r) \leq cm(r)$,
tel que $c = c(n,p)$.
Le constant c est unique pour tous les solutions faibles.

L'inégalité de Harnack implique la continuité de Holder.
On applique l'inégalité de Harnack pour deux solutions non-négatives faibles $u(x) - m(2r)$ et $M(2r) - u(x)$, tel que r est suffisamment petit.
Alors $M(r) - m(2r) \leq c(m(r) - m(2r))$

$$M(2r) - m(r) \leq c(M(2r) - M((r))),$$

donc $w(r) \leq \frac{c-1}{c+1} w(2r)$.
tel que $w(r) = M(r) - m(r)$

$$\lambda = \frac{c-1}{c+1} < 1$$

$w(r) \leq \lambda w(2r)$, on trouve $w\left(2^{-k} r\right) \leq \lambda^k w(r)$. On conclut que
$w(\varrho) \leq A\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\alpha} w(r)\,;\ 0 < p < r$
pour quelques $\alpha = \alpha(n,p) > 0$ et $A = A(n,p)$.
Donc l'inégalité de Harnack implique la continuité de Holder.

Corollaire 2.2.11 (principe du maximum fort) *Si une fonction p-harmonique atteint leur maximal dans un point intérieur, alors la fonction réduit à un constant*
.

Remarque 2.2.12 *Le principe du comparaison n'est pas connu pour plusieurs dimensions, $n \geqslant 3$, quand $p \neq 2$.*

2.3 Théorème de Régularité

Les solutions faibles de l'équation p-harmonique sont, par définition, des membres de l'espace de Sobolev $W^{1,p}_{Loc}(\Omega)$. Ils sont aussi de classe $\mathcal{C}^{\alpha}_{Loc}(\Omega)$. C'est à dire, on peut redéfinir la solution faible dans un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, alors la nouvelle fonction est localement Holder continue avec $\alpha = \alpha(n,p)$.

Pour qu'on obtient la continuité Holdérienne, on distingue trois cas, dépendent de la valeur de p. n est la dimension.

1)Le cas de $p > n$
Toutes les fonctions de l'espace de Sobolev $W^{1,p}_{Loc}(\Omega)$ sont continues et

$$|v(y) - v(x)| \leq C_{\Omega} |x-y|^{1-\frac{n}{p}} \|\bigtriangledown v\|_{L^p(\Omega)}, \forall v \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

2)Le cas de $p = n$; pour prouver la continuité Holdérienne, on peut utiliser " the hole filling technique".

3)Le cas de $p < n$. Il y a trois méthodes, sont développées par :

-E.DeGiorgi 1957

-J.Nash 1958

-J.Moser 1961 pour prouver la continuité de Holder (voir [4], [5], [19], [15], [10], [14]).

2.4 La différentiabilité

On a vu la continuité de Holder des fonctions p-harmoniques.
En réalité le gradient est aussi localement Holder continu c'est à dire la fonction p-harmonique appartient à $\mathcal{C}^{1,\alpha}_{Loc}(\Omega)$, donc si u est une fonction p-harmonique dans Ω et $D \subset\subset \Omega$ alors

$$|\nabla u(x) - \nabla u(y)|^{\alpha} \leq L_D |x - y|$$

tels que $x, y \in D$, $\alpha = \alpha(n, p)$ et $L_D = L_D(n, p, dist(D, \partial\Omega), \|u\|_{\infty})$
c'était prouvé par N.Uraltseva en 1968.
Cette régularité est trés compliquée, on va voir une autre plus simple et plus faible :

1) Si $1 < p \leq 2$; alors $u \in W^{2,p}_{Loc}(\Omega)$, c'est à dire u a une deuxième dérivée au sens d'espace de Sobolev.

2) Si $p \geqslant 2$; alors $|\nabla u|^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \in W^{1,2}_{Loc}(\Omega)$, donc les dérivées au sens d'espace de Sobolev

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u| \frac{p-2}{p} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

existent, mais le passage au $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ est trés difficile au point critique $\nabla u = 0$.
On va étudier $F(x) = |\nabla u(x)|^{\frac{p-2}{2}} \nabla u(x)$
dans le cas où $p \geqslant 2$. C'est claire que

$$\int_{\Omega} |F|^2 \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx.$$

Théorème 2.4.1 (Bojarski-Iwaniec) *Soit $p > 2$. Si u est p-harmonique dans Ω, alors $F \in W^{1,2}_{Loc}(\Omega)$ pour chaque sous-domaine $G \subset\subset \Omega$.*

$$\|DF\|_{L(G)} \leq \frac{c(n,p)}{dist(G, \partial\Omega)} \|F\|_{L^2(\Omega)}.$$

Lemme 2.4.2 *Soit* $f \in L^1_{Loc}(\Omega)$. *Alors*

$$\int_\Omega \varphi(x) \frac{f(x+he_k)-f(x)}{h} dx = -\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \left(\int_0^1 f(x) the_k dt \right) dx.$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

On utilise ce lemme dans la démonstration du théorème suivant :

Théorème 2.4.3 *Soit* $1 < p < 2$. *Si* u *est p-harmonique dans* Ω, *alors* $u \in W^{2,p}_{Loc}(\Omega)$. *De plus*

$$\int_D \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|^p dx \leq c_D \int_\Omega |\nabla u|^p dx$$

quand $D \subset\subset \Omega$.

2.5 Fonctions super-harmoniques

2.5.1 Définition et exemples

Définition 2.5.1 *Une fonction* $v : \Omega \to]-\infty, \infty]$ *est dite p-super-harmonique dans* Ω, *si :*

1) v *est semi-continue faiblement dans* Ω.

2)$v \not\equiv \infty$ *dans* Ω. *c'est à dire au moins dans un point, autrement dit* $\{v < \infty\}$ *est dense dans* Ω.

3)pour tout domaine $D \subset\subset \Omega$ *le principe de comparaison est validé : si* $h \in \mathcal{C}\left(\overline{D}\right)$ *est p-harmonique dans* D.

Une fonction $u : \Omega \to [-\infty, \infty[$ *est dite sous-harmonique si* $v = -u$ *est p-harmonique.*

C'est clair qu'une fonction est p-harmonique, si elle est à la fois p-super-harmonique et p-sous-harmonique.

Théorème 2.5.2 *On suppose que* $v \in \mathcal{C}(\Omega) \cap W^{1,p}_{Loc}(\Omega)$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\int_D |\nabla v|^p dx \leq \int_D |\nabla (v+n)|^p dx$ *pour tout* $D \subset\subset \Omega$ *et* $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *est non-négative.*

ii) $\int < |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla \eta > dx \geqslant 0$ *pour tout* $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ *est non-négative.*

iii) v *est p-super-harmonique dans* Ω.

Remarque 2.5.3 *La semi-continuité faible dans un espace de Sobolev est suffisante pour l'équivalence de i) et ii)*
En dimension un, la fonction p-harmonique est la ligne $h(x) = ax + b$, *et la fonction p-super-harmonique est la fonction concave d'une seule variable.*
Aux autres dimensions, les fonctions concaves sont des fonctions p-super-harmoniques pour tout p, mais il y a beaucoup plus d'eux.

Proposition 2.5.4 *Si* v *est p-super-harmonique dans* Ω, *alors l'ensemble où* $v = \infty$ *ne contient aucune boule.*

2.5.2 Problème obstacle et approximation

On a vu que les fonctions p-harmoniques viennent du problème de minimisation dans les calcules variationnelles. Si on ajoute une restriction aux fonctions admissibles, quand on minimise des super-solutions faibles d'équation p-harmonique sont parues.
On suppose que Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$. Soit la fonction $\Psi \in \mathcal{C}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. On considère le problème de minimiser l'intégrale $\int_\Omega |\nabla v|^p dx$ parmi tous les fonctions dans la classe :

$$F_\Psi(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{C}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega) \text{ tels que } v \geqslant \Psi \text{ dans } \Omega \text{ et } v - \Psi \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}$$

Ψ a le rôle obstacle .

Théorème 2.5.5 *Soit* $\Psi \in \mathcal{C}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$, *il existe un unique minimiseur* v_Ψ *dans la classe* $F(\Omega)$, *c'est à dire*

$$\int_\Omega |\nabla v_\Psi|^p dx < \int_\Omega |\nabla v|^p dx$$

pour tout v *similaire. La fonction* v_Ψ *est p-super-harmonique dans* Ω *et p-harmonique dans l'ensemble ouvert* $\{v_\Psi > \Psi\}$. *Si, en plus,* Ω *est suffisamment régulier et* $\Psi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, *alors* $v_\Psi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ *et* $v_\Psi = \Psi$ *dans* $\partial\Omega$.

Théorème 2.5.6 *On suppose que v est une fonction p-super-harmonique dans le domaine Ω. Soit D un sous domaine de Ω, $D \subset\subset \Omega$ il y a des fonctions p-super-harmoniques $v_j \in \mathcal{C}\left(\overline{D}\right) \cap W^{1,p}(\Omega)$ tels que*

$$v_1 \leq v_2 \leq ... \text{ et } v \equiv \lim_{j\to\infty} v_j$$

pour tout point dans D. Si, en plus, v est majoré dans Ω, alors $v \in W^{1,p}_{Loc}(\Omega)$, et on peut choisir les approximants v_j tel que

$$\lim_{j\to\infty} \int_D |\nabla (v - v_j)|^p \, dx = 0.$$

Corollaire 2.5.7 *On suppose que v est p-super-harmonique et locallement borné dans Ω . Alors $v \in W^{1,p}_{Loc}(\Omega)$ et v est une solution faible :*

$$\int_\Omega < |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla \eta > dx \geqslant 0$$

pour tout non-négative $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Théorème 2.5.8 (Théorème de convergence de Harnack) *On suppose que h_j est p-harmonique et $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq .....$, $h = \lim h_j$. pointwise dans Ω. Alors, $h \equiv \infty$ ou h est une fonction p-harmonique dans Ω.*

2.5.3 Modification de Poisson

Proposition 2.5.9 *On suppose que v est p-super-harmonique dans Ω et que $D \subset\subset \Omega$. Alors la modification de Poisson*

$$V = P(v, D) = \begin{cases} v \text{ dans } \Omega / D \\ h \text{ dans } D \end{cases}$$

est p-super-harmonique dans Ω, p-harmonique dans D, et $V \leq v$. De plus, si v est locallement borné, alors

$$\int_G |\nabla V|^p \, dx \leq \int_G |\nabla v|^p \, dx$$

pour $D \subset G \subset\subset \Omega$.

2.5.4 Sommabilité des fonctions p-super-harmoniques illimitées

On a vu que l'ensemble $F = \{x \in \Omega \diagup v(x) = \infty\}$ tel que v est une fonction p-super-harmonique, et ne contient aucun ensemble ouvert (la proposition 51). F est vide, dans le cas où $p > n$ et a mesure de Lebsgue nulle dans tous les cas. On va étudier la fonction p-super-harmonique

$$v_k = v_k(x) = \min\{v(x), k\}; k = 1, 2, 3, ...$$

v_k est locallement borné, alors

$$\int_{\Omega} < |\nabla v_k|^{p-2} \nabla v_k, \nabla \eta > dx \geqslant 0$$

pour tout non-négative $\eta \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$ et aussi les estimations des super-solutions faibles sont valables.

Théorème 2.5.10 *Si v est p-super-harmonique dans Ω, alors*

$$\int_{D} |v|^q \, dx < \infty$$

quand $D \subset\subset \Omega$ et $0 \leq q < n(p-1) \diagup (n-p)$ dans le cas $1 < p \leq n$.
Dans le cas où $p > n$ la fonction v est continue.

Chapitre 3

Solutions périodiques pour les équations de Rayleigh p-Laplacien

3.1 Equation de Rayleigh

L'équation de Rayleigh est une équation différentielle ordinaire non-linéaire de la forme :

$$x'' + f(x') + g(x) = e(t), x' = \frac{dx}{dt}$$

tel que les fonctions f, g, e sont continues et la fonction $e(t)$ est périodique.

L'équation de Rayleigh décrit un système typique non-linéaire avec un degré de liberté, tel qu'il admet l'auto-oscillation. Cette équation est nommée d'après Lord Rayleigh, qui a étudié les équations de ce type associé au problème dans la théorie de l'acoustique (voir [11]).

Il y a de nombreux d'études concernent l'éxistence et l'unicité des conditions pour une cycle limitée de l'équation de Rayleigh, sous ces conditions l'auto-oscillation s'est produit.

Le problème des solutions périodiques est aussi étudiée dans différentes généralisations de l'équation de Rayleigh.

Et dans ce chapitre on va étudier l'éxistence des solutions périodiques pour les équations de Rayleigh type P-Laplacien de la forme

$$\left(\varphi_p\left(x'\left(t\right)\right)\right)' + f\left(t, x'\left(t - \sigma\left(t\right)\right)\right) + g\left(t, x\left(t - \tau\left(t\right)\right)\right) = e\left(t\right) \tag{3.1}$$

tels que $p > 1$ et $\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\varphi_p(s) = |s|^{p-2} s$ pour $s \neq 0$ et $\varphi_p(0) = 0, f, g$ sont des fonctions continues définies dans $\mathbb{R}^2$ et périodiques pour t avec $f(t,.) = f(t + 2\pi, .), g(t,.) = g(t + 2\pi, .), f(t,0) = 0$ pour $t \in \mathbb{R}$, e, σ et τ sont des fonctions continues périodiques définies dans $\mathbb{R}$ de période 2π et $\int\limits_0^{2\pi} e(t)dt = 0$.

Par l'utilisation du théorème de degré topologique et un peut de l'analyse, on obtient les conditions suffisantes pour l'éxistence des solutions périodiques de l'équation (3.1).

soient $C_T^1 = C_T^1[0,T] = \{x \in C^1[0,T], x(0) = x(T), x'(0) = x'(T), T > 0\}$.

$$\left(\varphi_p(x'(t))\right)' = f(t,x,x'), x(0) = x(T), x'(0) = x'(T) \tag{3.2}$$

avec $F \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

3.2 Existence des solutions périodiques pour les équations de Rayleigh p-Laplacien

Lemme 3.2.1 *Soit Ω un ouvert borné de C_T^1 ; on suppose que*

(i) Pour chaque $\lambda \in]0,1[$ le problème

$$\left(\varphi_p(x'(t))\right)' = \lambda f(t,x,x'), \quad x(0) = x(T), x'(0) = x'(T) \tag{3.3}$$

n'a pas de solution dans $\partial\Omega$.

(ii) L'équation

$$\digamma(a) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t,a,0)\,dt = 0, \tag{3.4}$$

n'a pas de solution dans $\partial\Omega \cap \mathbb{R}$.

(iii) Le degré topologique de Brouwer de $\digamma$,

$$d(\digamma, \Omega \cap \mathbb{R}, 0) \neq 0. \tag{3.5}$$

Alors (3.2) a au moins une solution périodique dans $\overline{\Omega}$.

Définition 3.2.2 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ définit par $(x,u) \to f(x,u)$ de Carathéodory si*

$$u \to f(x,u)$$

continue pour presque tout $x \in \Omega$, et $x \to f(x,u)$ est mesurable pour tout $u \in \mathbb{R}^m$.
Soit f une fonction de Carathéodory, et soit une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, on peut définir une autre fonction par la composition $F(u)(x) = f(x, u(x))$.
F est l'opérateur de Nemytskii.

preuve du lemme (voir [18]). Soit

$$\left(\varphi_p\left(x'\right)\right)' = \lambda N_f(x) + (1-\lambda) QN_f(x), x(0) = x(T), x'(0) = x'(T) \tag{3.6}$$

tel que $N_f : C_T^1 \to \mathbb{R}^n$ est l'opérateur de Nemytski de f, et $Q : C_T \to C_T$ qui est définit par $h \to \frac{1}{T}\int_0^T h(s)\,ds$.
Donc $\left(\varphi_p\left(x'\right)\right)' = \lambda f(t,x,x') + (1-\lambda)\left[\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s), x'(s))\,ds\right], x(0) = x(T), x'(0) = x'(T)$
Pour $\lambda \in]0,1]$, on observe que si x est une solution de (3.3), ou une solution de (3.6) . on a nécessairement

$$QN_f(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s), x'(s))\,ds = 0. \tag{3.7}$$

Donc (3.3) et (3.6) ont les mêmes solutions pour $\lambda \in]0,1]$.
f est une carathéodory donc $N : C_T^1 \times [0,1] \to L^1$ définit par

$$N(x,\lambda) = \lambda N_f(x) + (1-\lambda) QN_f(x) \tag{3.8}$$

est continue et l'image des ensembles bornés par N sont des ensembles équi-intégrables.
On définit : $P : C_T^1 \to C_T^1 \quad u \to u(0)$
et

$$H(h)(t) = \frac{1}{T}\int_0^T h(s)\,ds, h \in C_T.$$

Alors on peut obtenir que si $y \in C_T^1$ est une solution de l'équation $\left(\varphi_p\left(y'\right)\right)' = F(y)$, alors y satisfait l'équation :

$$y = Py + QN_f(x) + K(N_f(x)) \tag{3.9}$$

tel que l'opérateur $K : C_T \to C_T^1$ est définit par :

$$K(h)(t) = H\left\{\varphi_p\left[a\left((I-Q)h\right) + H\left((I-Q)h\right)\right]\right\}(t), h \in C_T$$

et $a : C_T \to \mathbb{R}$.
donc

$$\left(\varphi_p\left(x'(t)\right)\right)' = \lambda N_f\left(t,x,x'\right) + (1-\lambda) QN_f\left(t,x,x'\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} x(t) &= Px + QN_f\left(t,x,x'\right) + \left(K \circ \left[\lambda N_f\left(t,x,x'\right) + (1-\lambda) QN_f\left(t,x,x'\right)\right]\right)(x) \\ &= Px + QN_f\left(t,x,x'\right) + \left(K \circ \left[\lambda N_f\left(t,x,x'\right) + QN_f\left(t,x,x'\right) - \lambda QN_f\left(t,x,x'\right)\right]\right)(x). \end{aligned}$$

d'après (3.7)

$$x(t) = Px + QN_f\left(t,x,x'\right) + \left(K \circ \left[\lambda N_f\left(t,x,x'\right) - \lambda QN_f\left(t,x,x'\right)\right]\right)(x)$$

$$x(t) = Px + QN_f\left(t,x,x'\right) + \left(K \circ \left[\lambda (I-Q) N_f\left(t,x,x'\right)\right]\right)(x) = G_f(x,\lambda) \quad (3.10)$$

donc

$$(3.6) \Leftrightarrow (3.10) \quad (3.11)$$

L'hypothèse (i) assure que (3.10) n'a pas de solution pour $(x,\lambda) \in \partial\Omega \times]0,1]$.
Pour $\lambda = 0$ on a

$$(3.6) \Leftrightarrow \left(\varphi_p\left(x'\right)\right)' = 0N_f(x) + (1-0) QN_f(x), x(0) = x(T), x'(0) = x'(T)$$

$$\Leftrightarrow \left(\varphi_p\left(x'\right)\right)' = QN_f(x),\ x(0) = x(T), x'(0) = x'(T)$$

$$(3.6) \Leftrightarrow \left(\varphi_p\left(x'\right)\right)' = \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x(s), x'(s)\right) ds, x(0) = x(T), x'(0) = x'(T) \quad (3.12)$$

Et si f est une solution de ce problème, d'après (3.7) il faut que

$$\int_0^T f\left(s, x(s), x'(s)\right) ds = 0 \quad (3.13)$$

donc $\left(\varphi_p\left(x'\right)\right)' = 0 \Rightarrow \varphi\left(x'\right) = c \Rightarrow x' = \varphi_p^{-1}(c)$

tel que c est une contante réelle.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_0^T x'(t)\,dt = \int_0^T \varphi_p^{-1}(c)\,dt \\
&\Rightarrow x(t)\big|_0^T = \varphi_p^{-1}(c)\,t\big|_0^T \\
&\Rightarrow x(T) - x(0) = \varphi_p^{-1}(c)\,T \\
&\Rightarrow 0 = \varphi_p^{-1}(c)\,T \\
&\Rightarrow \varphi_p^{-1}(c) = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t x'(t)\,dt &= \int_0^t \varphi_p^{-1}(c)\,dt \\
\int_0^t x'(t)\,dt &= \int_0^t 0dt
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x(t) = x(0) = d$$

tel que d est une constante.
Donc $x'(t) = \varphi_p^{-1}(c) = 0$ et $x(t) = d$.
D'où

$$(3.13) \Leftrightarrow \int_0^T f(s,d,0)\,ds = 0$$

d'après l'hypothèse (ii), on a $x = d \notin \partial\Omega$. donc on a pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a prouvé que **??** n'a pas de solution $\forall(x,\lambda) \in \partial\Omega \times [0,1]$ donc on a pour tout $\lambda \in [0,1]$ le degré topologique de Leray-Schauder $d_{LS}(I - G_f(.,\lambda), \Omega, 0)$ est bien définit, et par l'invariance d'homotopie du d_{LS} on a

$$d_{LS}(I - G_f(.,1), \Omega, 0) = d_{LS}(I - G_f(.,0), \Omega, 0) \tag{3.14}$$

On a d'après (3.11)

$$x = G_f(x,\lambda) \Leftrightarrow \left(\varphi_p(x')\right)' = \lambda f(t,x,x') + (1-\lambda)\,Qf(t,x,x')$$

donc

$$x = G_f(x,1) \Leftrightarrow \left(\varphi_p(x')\right)' = f(t,x,x')$$

$$x = G_f(x,1) \tag{3.15}$$

c'est à dire (3.2) $\Leftrightarrow$ (3.15) et (3.14) implique que (3.15) a une solution si $d_{LS}(I - G_f(.,1), \Omega, 0) \neq 0$. On va le démontrer.
On a

$$G_f(x,0) = Px + QN_f x + K(0) \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
K(0) &= H\left\{\varphi_p\left[a\left((I-Q)0\right) + H\left((I-Q)0\right)\right]\right\}(t) \\
K(0) &= H\left\{\varphi_p\left[0 + H(0)\right]\right\}(t) \\
K(0) &= H(0)(t) = \int_0^t 0dt = 0.
\end{aligned}$$

D'où

$$G_f(x,0) = Px + QN_f x$$

donc

$$x - G_f(x,0) = x - Px - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s), x'(s))\,ds$$

$$d_{LS}(I - G_f(.,0), \Omega, 0) = (-1)^n d_B(\digamma, \Omega \cap \mathbb{R}^n, 0)$$

tel que d_B est le degré de Brouwer, d'après l'hypothèse (iii) le $d_B(\digamma, \Omega \cap \mathbb{R}^n, 0) \neq 0$ donc (3.15) qui est équivalente à (3.2) a une solution. ■

Théorème 3.2.3 *On suppose qu'il existe des constantes positives K, D, M tels que :*
(H_1) $|f(t,x)| \leq K$ pour $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
(H_2) $xg(t,x) > 0$ et $|g(t,x)| > K$ pour $|x| > D$ et $t \in \mathbb{R}$.
(H_3) $g(t,x) \geqslant -M$, pour $x \leq -D$ et $t \in \mathbb{R}$.
Alors l'équation (3.1) a au moins une solution périodique de période 2π.

Preuve. On considère l'équation

$$\left(\varphi_p(x'(t))\right)' + \lambda f(t, x'(t-\sigma(t))) + \lambda g(t, x(t-\tau(t))) = \lambda e(t) \quad \lambda \in]0,1[\tag{3.17}$$

Soit $x(t) \in C^1_{2\pi}$ une solution arbitraire de l'équation (3.17) .On intègre les deux cotés de l'équation (3.17), et on note que $x'(0) = x'(2\pi)$ on a

$$\begin{aligned}
(3.17) \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda f(t, x'(t-\tau(t))) + \lambda g(t, x(t-\tau(t))) + \left(\varphi_p(x'(t))\right)' = \lambda e(t), \\
(3.17) \quad &\Leftrightarrow \quad \int_0^{2\pi} \lambda\left\{f(t, x'(t-\tau(t))) + g(t, x(t-\tau(t)))\right\}dt + \int_0^{2\pi}\left(\varphi_p(x'(t))\right)' dt = \lambda\int_0^{2\pi} e(t)dt.
\end{aligned}$$

On sait que

$$\int_0^{2\pi} e(t)dt = 0,$$

et

$$\int_0^{2\pi} \left(\varphi_p\left(x'\left(t\right)\right)\right)' dt = \varphi_p\left(x'\left(t\right)\right)\Big|_0^{2\pi} = \varphi_p\left(x'\left(2\pi\right)\right) - \varphi_p\left(x'\left(0\right)\right) = \varphi_p\left(x'\left(2\pi\right)\right) - \varphi_p\left(x'\left(2\pi\right)\right) = 0$$

car $x'\left(2\pi\right) = x'\left(0\right)$.

Donc

$$\int_0^{2\pi} \lambda \left\{ f\left(t, x'\left(t - \tau\left(t\right)\right)\right) + g\left(t, x\left(t - \tau\left(t\right)\right)\right) \right\} dt = 0$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} \left\{ f\left(t, x'\left(t - \tau\left(t\right)\right)\right) + g\left(t, x\left(t - \tau\left(t\right)\right)\right) \right\} dt = 0 \tag{3.18}$$

$x\left(0\right) = x\left(2\pi\right) \Rightarrow \exists t_0 \in \left[0, 2\pi\right]$ tel que $x'\left(t_0\right) = 0$ (théorème des accroissements finis)

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \left(\varphi_p\left(x'\left(s\right)\right)\right)' ds &= \varphi_p\left(x'\left(s\right)\right)\Big|_{t_0}^{t} \\
\int_{t_0}^{t} \left(\varphi_p\left(x'\left(s\right)\right)\right)' ds &= \varphi_p\left(x'\left(t\right)\right) - \varphi_p\left(x'\left(t_0\right)\right) \\
\int_{t_0}^{t} \left(\varphi_p\left(x'\left(s\right)\right)\right)' ds &= \varphi_p\left(x'\left(t\right)\right) - \varphi_p\left(0\right) \qquad /\varphi_p\left(0\right) = 0 \\
\int_{t_0}^{t} \left(\varphi_p\left(x'\left(s\right)\right)\right)' ds &= \varphi_p\left(x'\left(t\right)\right).
\end{aligned}$$

$$\left|\varphi_p\left(x'\left(t\right)\right)\right| = \left|\int_{t_0}^{t} \left(\varphi_p\left(x'\left(s\right)\right)\right)' ds\right|$$

$$\left|\varphi_p\left(x'\left(t\right)\right)\right| \leq \left|\int_0^{2\pi} \left(\varphi_p\left(x'\left(s\right)\right)\right)' ds\right|$$

car $t \geqslant 0$ et $t_0 \in [0.2\pi]$ donc $t_0 \leq 2\pi$

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_p\left(x'(t)\right)\right| &\leq \lambda\int_0^{2\pi}\left|f\left(t,x'\left(t-\tau(t)\right)\right)\right|dt+\lambda\int_0^{2\pi}\left|g\left(t,x\left(t-\tau(t)\right)\right)\right|dt+\lambda\int_0^{2\pi}\left|e(t)\right|dt\\
&\leq \int_0^{2\pi}\left|f\left(t,x'\left(t-\tau(t)\right)\right)\right|dt+\int_0^{2\pi}\left|g\left(t,x\left(t-\tau(t)\right)\right)\right|dt+\int_0^{2\pi}\left|e(t)\right|dt/\lambda\leq 1\\
&\leq \int_0^{2\pi}Kdt+\int_0^{2\pi}\left|g\left(t,x\left(t-\tau(t)\right)\right)\right|dt+\int_0^{2\pi}\max_{t\in[0,2\pi]}\left|e(t)\right|dt\\
/\left|f(t,x)\right| &\leq K \text{ pour } (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\\
&\leq Kt\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\left|g\left(t,x\left(t-\tau(t)\right)\right)\right|dt+\max_{t\in[0,2\pi]}\left|e(t)\right|t\Big|_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

$$\left|\varphi_p\left(x'(t)\right)\right|\leq 2\pi K+\int_0^{2\pi}\left|g\left(t,x\left(t-\tau(t)\right)\right)\right|dt+2\pi\max_{t\in[0,2\pi]}\left|e(t)\right|. \tag{3.19}$$

On va démontrer qu'il existe une constante $D_1 > 0$ tel que

$$\int_0^{2\pi}\left|g\left(t,x\left(t-\tau(t)\right)\right)\right|dt\leq 4\pi D_1+2\pi K. \tag{3.20}$$

D'après (H_1), $\forall (t,x)\in\mathbb{R}^2$ $\left|f(t,x)\right|\leq K\Rightarrow -\left|f(t,x)\right|\geqslant -K$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\left\{g\left(t,x\left(t-\tau(t)\right)\right)-K\right\}dt &\leq \int_0^{2\pi}\left\{g\left(t,x\left(t-\tau(t)\right)\right)-\left|f\left(t,x'\left(t-\tau(t)\right)\right)\right|\right\}dt\\
\text{c'est clair que } -|f| &\leq f\\
\int_0^{2\pi}\left\{g\left(t,x\left(t-\tau(t)\right)\right)-K\right\}dt &\leq \int_0^{2\pi}\left\{g\left(t,x\left(t-\tau(t)\right)\right)+f\left(t,x'\left(t-\tau(t)\right)\right)\right\}dt\\
&= 0 \text{ d'après } (3.18)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\int_0^{2\pi}\left\{g\left(t,x\left(t-\tau(t)\right)\right)-K\right\}dt\leq 0$$

On définit

$$E_1=\left\{t: t\in[0,2\pi], x\left(t,x\left(t-\tau(t)\right)\right)>D\right\}$$

$E_2 = \{t : t \in [0,2\pi], x(t, x(t-\tau(t))) \leq D\} \cup \{t : t \in [0,2\pi], x(t, x(t-\tau(t))) < -D\}$

alors on a

$$\int_{E_2} |g(t, x(t-\tau(t)))|\, dt \leq 2\pi \max\left\{M, \sup_{t\in[0,2\pi],|x|\leq D} |g(t,x)|\right\} \tag{3.22}$$

dans $E_1 : x > D > 0 \Rightarrow |x| < D$ et

$$\begin{aligned} xg(t,x) &> 0 \Rightarrow g(t,x) > 0 \\ &\Rightarrow |g(t,x)| = g(t,x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{E_1} \{|g(t, x(t-\tau(t)))| - K\}\, dt &= \int_{E_1} \{g(t, x(t-\tau(t))) - K\}\, dt \\ &\leq -\int_{E_2} \{g(t, x(t-\tau(t))) - K\}\, dt \text{ c'est claire que } -g \leq |g| \\ &\leq \int_{E_2} \{g(t, x(t-\tau(t))) + K\}\, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{E_1} |g(t, x(t-\tau(t)))|\, dt &\leq \int_{E_2} |g(t, x(t-\tau(t)))|\, dt + \int_{E_1} K dt + \int_{E_2} K dt \\ &\leq \int_{E_2} |g(t, x(t-\tau(t)))|\, dt + \int_{E_1+E_2} K dt \\ &= \int_{E_2} |g(t, x(t-\tau(t)))|\, dt + 2\pi K \end{aligned}$$

$$\int_{E_1} |g(t, x(t-\tau(t)))|\, dt \leq \int_{E_2} |g(t, x(t-\tau(t)))|\, dt + 2\pi K \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |g(t, x(t-\tau(t)))|\, dt &= \int_{E_1} |g(t, x(t-\tau(t)))|\, dt + \int_{E_2} |g(t, x(t-\tau(t)))|\, dt \\ &\leq 2\int_{E_2} |g(t, x(t-\tau(t)))|\, dt + 2\pi K \text{ de } (3.23) \\ &\leq 4\pi \max\left\{M, \sup_{t\in[0,2\pi],|x|\leq D} |g(t,x)|\right\} + 2\pi K \\ &= 4\pi D_1 + 2\pi K \end{aligned}$$

tel que $D_1 = \max\left\{ M, \underset{t\in[0,2\pi],|x|\leq D}{sup} |g(t,x)| \right\}$,d'où l'inégalité (3.20) est réalisée.
En remplaçant l'inégalité (3.20) dans (3.19) on aura :

$|\varphi_p(x'(t))| \leq 4\pi D_1 + 4\pi K + 2\pi \max_{t\in[0,2\pi]} |e(t)| = M_1$

Par la monotonocité de φ_p, on aura :

$|\varphi_p(x'(t))| \leq M_1 \Rightarrow \exists M_2 > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$ $|x'(t)| \leq M_2$

(3.21) $\Rightarrow \exists t_1 \in]0, 2\pi[$ tel que

$$f(t_1, x'(t_1 - \tau(t_1))) + g(t_1, x(t_1 - \tau(t_1))) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad -f(t_1, x'(t_1 - \tau(t_1))) = g(t_1, x(t_1 - \tau(t_1))) \\
&\Rightarrow \quad |-f(t_1, x'(t_1 - \tau(t_1)))| = |g(t_1, x(t_1 - \tau(t_1)))|
\end{aligned}$$

D'après (H_1), $|g(t_1, x(t_1 - \tau(t_1)))| = |-f(t_1, x'(t_1 - \tau(t_1)))| \leq K$
D'après (H_2), $|g(t,x)| > K$ pour $|x| > D$ et $t \in \mathbb{R}$, alors, dans ce cas on a $|g(t,x)| \leq K$ pour $|x| \leq D$ et $t \in \mathbb{R}$ donc $|x(t_1 - \tau(t_1))| \leq D$.
$x(t)$ périodique de période 2π, alors $t_1 - \tau(t_1) = 2n\pi + t_2, t_2 \in]0, 2\pi[$, n est un entier tel $|x(t_2)| \leq D$.
Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\int_{t_2}^{t} x'(s)\,ds &= x(t) - x(t_2) \\
|x(t)| &= \left| x(t_2) + \int_{t_2}^{t} x'(s)\,ds \right| \\
|x(t)| &\leq |x(t_2)| + \left| \int_{t_2}^{t} M_2 ds \right|
\end{aligned}$$

$$|x(t)| \leq D + 2\pi M_2 = M_3 \tag{3.24}$$

Soit $\Omega = \{x \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tels que $|x| \leq M_3 + 1, |x'| \leq M_2 + 1\}$.
Quand $x(t) \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}$, $x(t) = M_3 + 1$ ou $x(t) = -M_3 - 1$, de (3.10) on a

$D+2\pi M_2=M_3$, donc $M_3+1>D$, on voit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{g(t,M_3+1)+e(t)\}\,dt &= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}g(t,M_3+1)\,dt+\int_0^{2\pi}e(t)\,dt\right\}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t,M_3+1)\,dt\end{aligned}$$

D'après (H_2) pour $x=M_3+1>D\ xg(t,x)>0$
donc

$$(M_3+1)\,g(t,M_3+1)>0,$$

et

$$M_3+1>0\Rightarrow g(t,M_3+1)>0,$$

D'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{g(t,M_3+1)+e(t)\}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t,M_3+1)\,dt>0.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{g(t,-M_3-1)+e(t)\}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t,-M_3-1)\,dt<0$$

car $-M_3-1<0\Rightarrow g(t,-M_3-1)<0$

Donc si $x(t)\in\partial\Omega\cap\mathbb{R}$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{g(t,M_3+1)+e(t)\}\,dt$ n'a pas de solution, d'où la condition (ii) est satisfaite.

Soit

$$H(x,\mu)=\mu x+(1-\mu)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t,x)\,dt,$$

quand $x\in\partial\Omega\cap\mathbb{R},\mu\in[0,1]$ on a

$$xH(x,\mu)=\mu x^2+(1-\mu)\,x\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t,x)\,dt$$

pour $x\in\partial\Omega$, $|\ x(t)|>D$ de (H_2), $xg(t,x)>0\Rightarrow x\ H(x,\mu)>0$

Soient $H:[0,1]\times\overline{\Omega\cap\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}H &: [0,1]\times\overline{\Omega\cap\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^n\\ H(x,\mu) &= \mu x+(1-\mu)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t,x)\,dt\end{aligned}$$

$y : [0,1] \to \mathbb{R}^n \quad y(t) = 0$ sont des fonctions continues
En utilisant l'invariance par homotopie du degré topologique on aura

$$d\left(H(0,.), \Omega \cap \mathbb{R}, y(0)\right) = d\left(H(1,.), \Omega \cap \mathbb{R}, y(1)\right)$$

$$d\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t,x)\,dt, \Omega \cap \mathbb{R}, 0\right) = d\left(x, \Omega \cap \mathbb{R}, 0\right)$$

$$d\left(F, \Omega \cap \mathbb{R}, 0\right) = d\left(x, \Omega \cap \mathbb{R}, 0\right) \neq 0$$

donc la condition (iii) est satisfaite.
D'après le lemme précédent, il existe au moins une solution périodique de période 2π. ■

Théorème 3.2.4 *On suppose qu'il existe des constantes positives K, D, M tels que :*

(H_1) $|f(t,x)| \leq K$ *pour* $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(H_2) $xg\ (t,x) > 0$ *et* $|g(t,x)| > K$ *pour* $|x| > D$ *et* $t \in \mathbb{R}$.

(H_3) $g(t,x) \leq M$, *pour* $x \geqslant D$ *et* $t \in \mathbb{R}$.

Alors l'équation (3.1) *a au moins une solution périodique de période* 2π.

Comme application, on considère l'équation suivante :

$$\left(\varphi_p\left(x'(t)\right)\right)' + \cos t \sin x'(t - \sin t) + \arctan\left(\frac{x(t - \sin t)}{1 + \cos^2 t}\right) = \cos(t) \qquad (3.25)$$

avec $f(t,x) = \cos t \sin x, g(t,x) = \arctan \frac{x}{1+\cos^2 t}, \sigma(t) = \tau(t) = \sin t$ et $e(t) = \cos t$. Et on choisit $K = 1, D > \frac{\pi}{2}$ et $M = \frac{\pi}{2}$.
On peut vérifier les conditions du théorème 3.2.3. (H_1) est réalisée parce que $|f(t,x)| = |\cos(1)|\,|\sin(x)| \leq 1, \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. C'est clair que (H_2) et (H_3) sont réalisées (d'après le graphe de la fonction $g(t,x) = \arctan \frac{x}{1+\cos^2 t}$), du théorème 3.2.3 l'équation (3.25) a au moins une solution périodique de période 2π.

Chapitre 4

Solutions périodiques pour l'équation P-Laplacien neutrale de Rayleigh avec retard

Soient $1 < p < \infty$ une constante réelle, q est le conjugué de p, c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et $\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application définit par $\varphi_p(u) = |u|^{p-2} u$. Alors φ_p est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ avec l'inverse $\varphi_q(u) = |u|^{q-2} u$. Dans ce chapitre on va étudier l'éxistence des solutions périodiques pour l'équation de Rayleigh avec retard suivante :

$$\left(\varphi_p\left(x(t) - cx(t-\sigma)\right)'\right)' + f\left(x'(t)\right) + g\left(x\left(t - \tau(t)\right)\right) = e(t) \tag{4.1}$$

tels que f, g, e sont des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; τ et e sont de période T, T une constante positive ; c, σ sont des constantes réelles tel que $|c| \neq 1$.

4.1 Préliminaire

Soit $C_T = \{x : x \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), x(t+T) = x(t)\}$ avec la norme $\|x\|_\infty = \max\limits_{t \in [0,w]} |x(t)|$, $C_T^1 = \{x : x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), x(t+T) = x(t)\}$ avec la norme $\|x\| = \max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\}$. C'est clair que C_T et C_T^1 sont des espaces de Banach. Dans la suite, on note $\|.\|_p$ la norme de L^p dans C_T, c'est à dire $\|x\|_p = \left(\int\limits_0^T |x(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$, et on définit l'opérateur linéaire A comme suit : $A : C_T \to C_T, (Ax)(t) = x(t) - cx(t-\sigma)$.

Lemme 4.1.1 *Si $|c| \neq 1$, alors A a un inverse borné continue dans C_T, et*

(1) $\|A^{-1}x\|_\infty \leq \frac{\|x\|_\infty}{|1-|c||}, \forall x \in C_T$,

(2)

$$\left(A^{-1}x\right)(t) = \begin{cases} \sum\limits_{j\geqslant 0} c^j x(t-j\sigma), |c| < 1 \\ -\sum\limits_{j\geqslant 1} c^{-j} x(t+j\sigma), |c| > 1 \end{cases} \tag{4.2}$$

(3) $\int\limits_0^T |(A^{-1}x)(t)|\, dt \leq \frac{1}{|1-|c||} \int\limits_0^T |x(t)|\, dt, \forall x \in C_T$.

Lemme 4.1.2 *Pour $a_i, x_i \geqslant 0$ et $\sum\limits_{i=1}^n a_i = 1$, les inégalités suivantes sont satisfaites pour chaque $p > 1$:*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)^p \leq \sum_{i=1}^n a_i x_i^p.$$

Lemme 4.1.3 *Si $|c| \neq 1$ et $p > 1$, alors*

$$\int\limits_0^T \left|\left(A^{-1}x\right)(t)\right|^p dt \leq \frac{1}{|1-|c||^p} \int\limits_0^T |x(t)|^p\, dt, \forall x \in C_T \tag{4.3}$$

Preuve. de (4.2) on a

$$\left|\left(A^{-1}x\right)(t)\right|^p \leq \left(\sum_{j\geqslant 0} |c|^j |x(t-j\sigma)|\right)^p, |c| < 1.$$

Soit $a_j = \frac{(1-|c|)|c|^j}{1-|c|^n}$, alors $a_j \geqslant 0$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1} a_j &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(1-|c|)|c|^j}{1-|c|^n} \\
&= \frac{(1-|c|)}{1-|c|^n} + \frac{(1-|c|)|c|}{1-|c|^n} + \frac{(1-|c|)|c|^2}{1-|c|^n} + \dots + \frac{(1-|c|)|c|^{n-1}}{1-|c|^n} \\
&= \frac{(1-|c|) + (1-|c|)|c| + (1-|c|)|c|^2 + \dots + (1-|c|)|c|^{n-1}}{1-|c|^n} \\
&= \frac{1-|c| + |c| - |c|^2 + |c|^2 - |c|^3 + \dots + |c|^{n-1} - |c|^n}{1-|c|^n} \\
&= \frac{1-|c|^n}{1-|c|^n} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

du lemme 4.1.2 on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=0}^{n-1}|c|^j|x(t-j\sigma)|\right)^p &= \left(\frac{1-|c|^n}{1-|c|}\right)^p\left(\sum_{j=0}^{n-1}a_j|x(t-j\sigma)|\right)^p \\
&\leq \left(\frac{1-|c|^n}{1-|c|}\right)^p\sum_{j=0}^{n-1}a_j|x(t-j\sigma)|^p \\
&= \left(\frac{1-|c|^n}{1-|c|}\right)^{p-1}\sum_{j=0}^{n-1}|c|^j|x(t-j\sigma)|^p
\end{aligned}$$

quand $n\to\infty$ alors ;

$$\left|\left(A^{-1}x\right)(t)\right|^p \leq \left(\sum_{j\geqslant 0}|c|^j|x(t-j\sigma)|\right)^p \leq \frac{1}{(1-|c|)^{p-1}}\sum_{j\geqslant 0}|c|^j|x(t-j\sigma)|^p$$

$$\left|\left(A^{-1}x\right)(t)\right|^p \leq \frac{1}{(1-|c|)^{p-1}}\sum_{j\geqslant 0}|c|^j|x(t-j\sigma)|^p \tag{4.4}$$

On note que la périodicité de $x(t)$,

$$\forall j\geqslant 0\int_0^T|x(t-j\sigma)|^p\,dt=\int_0^T|x(t)|^p\,dt,$$

donc du (4.4) on a (4.3).

La même démonstration pour $|c|>1$. ■

Lemme 4.1.4 *On suppose que $a\geqslant 0, b\geqslant 0$ et $0<p\leq 1$. Alors*

$$(a+b)^p\leq a^p+b^p.$$

Lemme 4.1.5 *Soit Ω un ouvert borné de C_T^1 ; on suppose que*

(i) Pour chaque $\lambda\in\,]0,1[$ le problème

$$\left(\varphi_p\left(x'(t)\right)\right)'=\lambda F\left(t,x,x'\right),\quad x(0)=x(T),x'(0)=x'(T) \tag{4.5}$$

n'a pas de solution dans $\partial\Omega$.

(ii) L'équation

$$\digamma(a)=\frac{1}{T}\int_0^T F(t,a,0)\,dt=0 \tag{4.6}$$

n'a pas de solution dans $\partial\Omega\cap\mathbb{R}$.

(iii) Le degré topologique de Brouwer de $\digamma$

$$d\left(\digamma,\Omega\cap\mathbb{R},0\right)\neq 0 \tag{4.7}$$

Alors (4.5) a au moins une solution périodique dans $\overline{\Omega}$.

4.2 L'éxistence des solutions périodiques

Théorème 4.2.1 *On suppose que* $f(0) = \int_0^T e(t)\,dt = 0$ *et qu'il existe des constantes* $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $r_3 > 0, K > 0$ *et* $d > 0$ *tels que :*

(A_1) $|f(x)| \leq K + r_1 |x|^{p-1}, \forall x \in \mathbb{R}.$

(A_2) $g(x) < -K$ *pour* $x < -d$ *et* $g(x) > K + r_1 r_3 x^{p-1}$ *pour* $x > d.$

(A_3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|g(x)|}{|x|^{p-1}} = r_1 r_2.$

Alors (4.1) *a au moins une solution périodique de période* T *si :*

$$2(1+|c|)\, r_1 \left(r^{\frac{1}{p-1}} + T\right) \left[1 + r_2 \left(r^{\frac{1}{p-1}} + T\right)^{p-1}\right] < |1-|c||^p, r = \max\left\{\frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}\right\}.$$

Preuve. On définit $\|x\| = \max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\}, \|x\|_p = \left(\int_0^T |x(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Pour tout $\lambda \in \left]0,1\right[$, on considère l'équation suivante :

$$\left(\varphi_p\left(x(t) - cx(t-\sigma)\right)'\right)' + \lambda f(x'(t)) + \lambda g(x(t-\tau(t))) = \lambda e(t) \tag{4.8}$$

Soit $x(t)$ une solution périodique de (4.8) de période T, donc

$$\int_0^T \left\{\left(\varphi_p\left(x(t) - cx(t-\sigma)\right)'\right)' + \lambda f(x'(t)) + \lambda g(x(t-\tau(t)))\right\} dt = \lambda \int_0^T e(t)\,dt$$

$\int_0^T e(t)\,dt = 0 \Rightarrow$

$$\varphi_p\left(x(t) - cx(t-\sigma)\right)'\Big|_0^T + \lambda \int_0^T \{f(x'(t)) + g(x(t-\tau(t)))\}\,dt = 0 \tag{4.9}$$

$x(T) - c(T-\sigma), x(0) - c(-\sigma)$ sont des constantes donc $(x(T) - c(T-\sigma))' = (x(0) - c(-\sigma))' = 0.$

On sait que $\varphi_p(0) = 0 \Rightarrow$

$$\varphi_p\left(x(t) - cx(t-\sigma)\right)'\Big|_0^T = 0 \tag{4.10}$$

de (4.9) et (4.10) on a

$$-\int_0^T f(x'(t))\,dt = \int_0^T g(x(t-\tau(t)))\,dt \tag{4.11}$$

f est une fonction continue d'après le théorème de V.I.M, $\exists \eta \in [0, T]$ tel que

$$g\left(x\left(\eta-\tau\left(\eta\right)\right)\right)=\frac{1}{T-0}\int_{0}^{T}g\left(t\right)dt \tag{4.12}$$

de (4.11) et (4.12) on a

$$g\left(x\left(\eta-\tau\left(\eta\right)\right)\right)=g\left(x\left(\zeta\right)\right)=-\frac{1}{T}\int_{0}^{T}f\left(x'\left(t\right)\right)dt \tag{4.13}$$

tel que $\zeta=\eta-\tau\left(\eta\right).$
Si $r_1>0$, soit :

$$\begin{aligned}G\left(Z\right) &= 2\left(1+|c|\right)\left(r_1r_2+Z\right)\left(\left(\max\left\{\frac{1}{r_3},\frac{r_1}{r_1r_2-Z}\right\}\right)^{\frac{1}{p-1}}+T\right)^{p}\\ &\quad +2\left(1+|c|\right)r_1\left(\left(\max\left\{\frac{1}{r_3},\frac{r_1}{r_1r_2-Z}\right\}\right)^{\frac{1}{p-1}}+T\right),\end{aligned}$$

$G\left(Z\right)$ est continue dans $\left[0,\frac{1}{2}r_1r_2\right]$, et

$$\begin{aligned}G\left(0\right) &= 2\left(1+|c|\right)r_1r_2\left(\left(\max\left\{\frac{1}{r_3},\frac{r_1}{r_1r_2}\right\}\right)^{\frac{1}{p-1}}+T\right)^{p}\\ &\quad +2\left(1+|c|\right)r_1\left(\left(\max\left\{\frac{1}{r_3},\frac{r_1}{r_1r_2}\right\}\right)^{\frac{1}{p-1}}+T\right)\\ &= 2\left(1+|c|\right)r_1r_2\left(r^{\frac{1}{p-1}}+T\right)^{p}+2\left(1+|c|\right)r_1\left(r^{\frac{1}{p-1}}+T\right)\\ &= 2\left(1+|c|\right)r_1\left\{r_2\left(r^{\frac{1}{p-1}}+T\right)^{p}+\left(r^{\frac{1}{p-1}}+T\right)\right\}\\ &= 2\left(1+|c|\right)r_1\left(r^{\frac{1}{p-1}}+T\right)\left\{r_2\left(r^{\frac{1}{p-1}}+T\right)^{p-1}+1\right\}<\left|1-|c|\right|^{p}.\end{aligned}$$

$G\left(0\right)<\left|1-|c|\right|^{p}$ donc $\exists Z_0\in\left]0,\frac{1}{2}r_1r_2\right[$ tel que

$$G\left(Z\right)<\left|1-|c|\right|^{p},Z\in\left]0,Z_0\right] \tag{4.14}$$

On choisit $\varepsilon=\min\left\{Z_0,\frac{1}{4(1+|c|)}\left(\frac{r_3|1-|c||}{1+r_3T}\right)p\right\}\Rightarrow 0<\varepsilon\leq Z_0\Rightarrow\varepsilon\in\left]0,Z_0\right]$
donc

$$G\left(\varepsilon\right)<\left|1-|c|\right|^{p} \tag{4.15}$$

de (A_3), $\exists\rho > d$, tel que :

$$\begin{cases} \frac{|g(x)|}{|x|^{p-1}} > (r_1 r_2 - \varepsilon) > 0 \text{ pour } x < -\rho, r_1 > 0 \\ \frac{|g(x)|}{|x|^{p-1}} < (r_1 r_2 + \varepsilon) \text{ pour } x < -\rho, r_1 \geqslant 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

On va démontrer qu'il existe un $t_0 \in [0, T[$ tel que,

$$|x(t_0)|^{p-1} \leq \alpha T^{-\frac{1}{q}} \|x'\|_p^{p-1} + \beta \tag{4.17}$$

avec $\alpha = \max\left\{\frac{1}{r_3}, \frac{r_1}{r_1 r_2 - \varepsilon}\right\}$, $\beta = \rho^{p-1} + \frac{K sgn r_1}{r_1 r_2 - \varepsilon}$, $sgn r_1 = \begin{cases} 1 & r_1 > 0, \\ 0 & r_1 = 0. \end{cases}$
le 1^{er} cas : $r_1 = 0$. Si $|x(\zeta)| > d$

$(A_2) \Rightarrow \quad |g(x(\zeta))| > K$

$(4.13) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |g(x(\zeta))| &= \left| -\frac{1}{T} \int_0^T f(x'(t))\,dt \right| \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(x'(t))|\,dt \end{aligned}$$

$(A_1) \Rightarrow |f(x'(t))| \leq K + r_1 |x'(t)|^{p-1}$ et $r_1 = 0 \Rightarrow |g(x(\zeta))| \leq \frac{1}{T} \int_0^T K dt = \frac{1}{T} T K = K.$

Donc $K < |g(x(\zeta))| \leq K$ et c'est une contradiction, d'où

$$|x(\zeta)| \leq d < \rho \tag{4.18}$$

Le 2^{ème} cas : $r_1 > 0$

(1) Si $x(\zeta) > \rho > d > 0$

de (A_2) on a

$$g(x(\zeta)) > K + r_1 r_3 (x(\zeta))^{p-1}$$

$(4.13) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} g(x(\zeta)) &= -\frac{1}{T} \int_0^T f(x'(t))\,dt \\ &\leq \frac{1}{T} \int_0^T \left(K + r_1 |x'(t)|^{p-1}\right) dt \\ &\leq K + \frac{r_1}{T} \int_0^T |x'(t)|^{p-1}\,dt \end{aligned}$$

donc

$$K + r_1 r_3 (x(\zeta))^{p-1} < g(x(\zeta)) \leq K + \frac{r_1}{T} \int_0^T |x'(t)|^{p-1} dt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r_1 r_3} r_1 r_3 (x(\zeta))^{p-1} < \frac{g(x(\zeta)) - K}{r_1 r_3} \leq \frac{r_1}{r_1 r_3 T} \int_0^T |x'(t)|^{p-1} dt$$

$$\Rightarrow \quad 0 < (x(\zeta))^{p-1} < \frac{g(x(\zeta)) - K}{r_1 r_3} \leq \frac{1}{r_3 T} \int_0^T |x'(t)|^{p-1} dt$$

$$\Rightarrow \quad 0 < (x(\zeta))^{p-1} \leq \frac{1}{r_3} \left(\frac{1}{T} \int_0^T |x'(t)|^p dt \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$0 < (x(\zeta))^{p-1} \leq \frac{1}{r_3} \frac{1}{T^{\frac{P-1}{P}}} \|x'(t)\|_p^{p-1} \tag{4.19}$$

(2) Si $x(\zeta) < -\rho$ de (4.16) et de (4.13) on a

$$\begin{aligned} (r_1 r_2 - \varepsilon) |x(\zeta)|^{p-1} &< |g(x(\zeta))| \leq K + \frac{r_1}{T} \int_0^T |x'(t)|^{p-1} dt \\ &\leq K + r_1 T^{\frac{-1}{q}} \|x'\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

Donc

$$|x(\zeta)|^{p-1} \leq \frac{K}{(r_1 r_2 - \varepsilon)} + \frac{r_1}{(r_1 r_2 - \varepsilon)} T^{\frac{-1}{q}} \|x'\|_p^{p-1} \tag{4.20}$$

(3) Si $-\rho \leq x(\zeta) \leq \rho$, alors

$$|x(\zeta)| \leq \rho \tag{4.21}$$

de $(4.18), (4.19), (4.20), (4.21)$, on a :

$$\begin{aligned} |x(\zeta)|^{p-1} &\leq \max \left\{ \rho^{p-1}, \frac{1}{r_3} T^{-\frac{1}{q}} \|x'\|_p^{p-1}, \frac{K}{r_1 r_2 - \varepsilon} + \frac{r_1}{r_1 r_2 - \varepsilon} T^{-\frac{1}{q}} \|x'\|_p^{p-1} \right\} \\ &\leq \alpha T^{-\frac{1}{q}} \|x'\|_p^{p-1} + \beta. \end{aligned}$$

Soit $\zeta = KT + t_0$, tel que K est un entier et $t_0 \in [0, T[$, donc (4.17) est démontré. Soit $(Ax)(t) = x(t) - cx(t - \sigma)$ alors

$$(4.8) \Leftrightarrow \left(\varphi_p (Ax)'(t) \right)' + \lambda f(x'(t)) + \lambda g(x(t - \tau(t))) = \lambda e(t)$$

$$\begin{aligned}
-(Ax)(t)\left(\varphi_p(Ax)'(t)\right)' &= \lambda(Ax)(t)\left[f(x'(t))+g(x(t-\tau(t)))-e(t)\right] \\
-\int_0^T (Ax)(t)\left(\varphi_p(Ax)'(t)\right)' dt &= \lambda\int_0^T (Ax)(t)\left[f(x'(t))+g(x(t-\tau(t)))-e(t)\right] dt.
\end{aligned}$$

$$\|Ax'\|_p^p \le \lambda\int_0^T \left(\max_{t\in[0,T]}|x(t)|+|c|\max_{t\in[0,T]}|x(t)|\right)\left[f(x'(t))+g(x(t-\tau(t)))-e(t)\right] dt$$

$$\|Ax'\|_p^p \quad \le (1+|c|)\|x\|_\infty \int_0^T \left[|f(x'(t))|+|g(x(t-\tau(t)))|+|e(t)|\right] dt \qquad (4.22)$$

Soient

$$E_1=\{t\in[0,T]\,;x(t-\tau(t))<-\rho\}\,;E_2=\{t\in[0,T]\,;|x(t-\tau(t))|\le\rho\}$$

et

$$E_3=\{t\in[0,T]\,;x(t-\tau(t))>\rho\}\,.$$

Dans E_3 on a $x(t-\tau(t))>\rho>d$ de (A_2) on a $g(x(t-\tau(t)))>K+r_1r_2x^{p-1}>0$

d'où $\int_{E_3}|g(x(t-\tau(t)))|\,dt=\int_{E_3}g(x(t-\tau(t)))\,dt$

de (4.11), on a

$$\begin{aligned}
-\int_0^T f(x'(t))\,dt &= \int_0^T g(x(t-\tau(t)))\,dt \\
&= \left(\int_{E_1}+\int_{E_2}+\int_{E_3}\right)(g(x(t-\tau(t))))\,dt
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_{E_3}|g(x(t-\tau(t)))|\,dt &= \int_{E_3}g(x(t-\tau(t)))\,dt \\
&= -\left(\int_{E_1}+\int_{E_2}\right)g(x(t-\tau(t)))\,dt-\int_0^T f(x'(t))\,dt
\end{aligned}$$

$$\int_{E_3} |g(x(t-\tau(t)))|\,dt \le \left(\int_{E_1} + \int_{E_2}\right) g(x(t-\tau(t)))\,dt + \int_0^T |f(x'(t))|\,dt \quad (4.23)$$

$$\int_0^T |g(x(t-\tau(t)))|\,dt \le \left(\int_{E_1} + \int_{E_2} + \int_{E_3}\right) |g(x(t-\tau(t)))|\,dt$$

de (4.23) on trouve

$$\int_0^T |g(x(t-\tau(t)))|\,dt \le 2\left(\int_{E_1} + \int_{E_2}\right) |g(x(t-\tau(t)))|\,dt + \int_0^T |f(x'(t))|\,dt$$

de (4.16) on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T |g(x(t-\tau(t)))|\,dt &\le 2(r_1r_2+\varepsilon)\int_{E_1} |x(t-\tau(t))|^{p-1}\,dt \\
&\quad +2\int_{E_2} \max_{|x(t-\tau(t))|\le\rho} |g(x(t-\tau(t)))|\,dt + \int_0^T |f(x'(t))|\,dt \\
&\le 2(r_1r_2+\varepsilon)\int_{E_1} \max_{|x(t-\tau(t))|\in[0,T]} |x(t-\tau(t))|^{p-1}\,dt + 2\int_{E_2} g_\rho dt \\
&\quad + \int_0^T |f(x'(t))|\,dt \\
&\le 2(r_1r_2+\varepsilon)\int_0^T \|x\|_\infty^{p-1}\,dt + 2\int_0^T g_\rho dt + \int_0^T |f(x'(t))|\,dt
\end{aligned}$$

$$\int_0^T |g(x(t-\tau(t)))|\,dt \le 2(r_1r_2+\varepsilon)\,T\,\|x\|_\infty^{p-1} + 2Tg_\rho + \int_0^T |f(x'(t))|\,dt \quad (4.24)$$

tel que $g_\rho = \max_{|x|\le\rho} |g(x)|$

de (4.22) on a

$$\begin{aligned}
\|Ax'\|_p^p &\leq (1+|c|)\|x\|_\infty \int_0^T [|f(x'(t))| + |g(x(t-\tau(t)))| + |e(t)|]\,dt \\
&\leq (1+|c|)\|x\|_\infty \left(2\int_0^T |f(x'(t))|\,dt + 2(r_1r_2+\varepsilon)T\|x\|_\infty^{p-1} + 2Tg_\rho + \int_0^T |e(t)|\,dt\right) \\
&\leq (1+|c|)\|x\|_\infty \left(2\int_0^T \left(K + r_1|x'|^{p-1}\right)dt + 2(r_1r_2+\varepsilon)T\|x\|_\infty^{p-1} + 2Tg_\rho + \int_0^T |e(t)|\,dt\right) \\
&\leq 2(1+|c|)\left((r_1r_2+\varepsilon)T\|x\|_\infty^p + KT\|x\|_\infty + r_1T^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T |x'|^p\,dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\|x\|_\infty\right) \\
&\quad +2(1+|c|)\left(Tg_\rho\|x\|_\infty + \frac{1}{2}\int_0^T |e(t)|\,dt\,\|x\|_\infty\right) \\
&\leq 2(1+|c|)\left[(r_1r_2+\varepsilon)T\|x\|_\infty^p + r_1T^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty\|x'\|_p^{p-1}\right] \\
&\quad + (1+|c|)\|x\|_\infty\left[2KT + 2Tg_\rho + \int_0^T |e(t)|\,dt\right]
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\|Ax'\|_p^p \leq 2(1+|c|)\left[(r_1r_2+\varepsilon)T\|x\|_\infty^p + r_1T^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty\|x'\|_p^{p-1}\right] + a_1\|x\|_\infty \tag{4.25}$$

tel que $a_1 = (1+|c|)\left[2KT + 2Tg_\rho + \int_0^T |e(t)|\,dt\right]$.
On peut affirmer qu'il existe une constante $R_1 > 0$, tel que

$$\|x'\|_p \leq R_1 \tag{4.26}$$

comme se suit :

(1) Le cas de $p \geq 2$. $\quad 0 < \frac{1}{p-1} \leq 1$

$$(4.17) \Rightarrow |x(t_0)|^{p-1} \leq \alpha T^{-\frac{1}{q}}\|x'\|_p^{p-1} + \beta$$

de lemme 4.1.3 on a

$$|x(t_0)| \leq \alpha^{\frac{1}{p-1}} T^{-\frac{1}{q(p-1)}}\|x'\|_p + \beta^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\frac{1}{q(p-1)} = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{p-1}\right) = \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p-1}\right) = \frac{p-1}{p}\left(\frac{1}{p-1}\right) = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow |x(t_0)| \leq \alpha^{\frac{1}{p-1}} T^{-\frac{1}{p}} \|x'\|_p + \beta^{\frac{1}{p-1}}$$

$\|x\|_\infty \leq |x(t_0)| + \int\limits_0^T |x'(t)|\, dt$

$$\|x\|_\infty \leq \alpha^{\frac{1}{p-1}} T^{-\frac{1}{p}} \|x'\|_p + \beta^{\frac{1}{p-1}} + T^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T |x'(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|x\|_\infty \leq \alpha^{\frac{1}{p-1}} T^{-\frac{1}{p}} \|x'\|_p + \beta^{\frac{1}{p-1}} + T^{1-\frac{1}{p}} \|x'\|_p \tag{4.27}$$

$$\|x\|_\infty \leq T^{-\frac{1}{p}} \|x'\|_p \left(\alpha^{\frac{1}{p-1}} + T\right) + \beta^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\|x\|_\infty \leq a_0 \|x'\|_p + b_0 \tag{4.28}$$

tels que $a_0 = T^{-\frac{1}{p}}\left(\alpha^{\frac{1}{p-1}} + T\right)$, et $b_0 = \beta^{\frac{1}{p-1}}$.
par l'analyse élémentaire , il existe une constante $h > 0$ indépendante de λ, tel que

$$(1+u)^p < 1 + (1+p)\,u \quad \forall u \in \left]0, h\right] \tag{4.29}$$

Si $\|x'\|_p = 0$, alors $\|x\|_\infty \leq b_0$. Ou bien, si $\frac{b_0}{a_0\|x'\|_p} \geq h$, alors

$$\|x'\|_p \leq \frac{b_0}{a_0 h} \tag{4.30}$$

Si $\frac{b_0}{a_0\|x'\|_p} \leq h$, on a

$$\|x\|_\infty^p \leq \left(a_0 \|x'\|_p + b_0\right)^p = a_0^p \|x'\|_p^p \left(1 + \frac{b_0}{a_0 \|x'\|_p}\right)^p$$

de (4.29) on a

$$\|x\|_\infty^p \leq a_0^p \|x'\|_p^p \left(1 + (p+1)\frac{b_0}{a_0 \|x'\|_p}\right)$$

$$\|x\|_\infty^p \leq a_0^p \|x'\|_p^p + (p+1)\, a_0^{p-1} b_0 \|x'\|_p^{p-1} \tag{4.31}$$

de $(4.25), (4.31), (4.28)$ on trouve

$$\begin{aligned}
\|Ax'\|_p^p &\leq 2(1+|c|)\left[(r_1r_2+\varepsilon)T\|x\|_\infty^p + r_1T^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty\|x'\|_p^{p-1}\right] + a_1\|x\|_\infty \\
&\leq 2(1+|c|)(r_1r_2+\varepsilon)T\left(a_0^p\|x'\|_p^p + (p+1)a_0^{p-1}b_0\|x'\|_p^{p-1}\right) \\
&\quad +2(1+|c|)\left[r_1T^{\frac{1}{p}}\left(a_0\|x'\|_p + b_0\right)\|x'\|_p^{p-1}\right] \\
&\quad +a_1\ a_0\|x'\|_p + a_1b_0 \\
&\leq 2(1+|c|)\|x'\|_p^p\left[(r_1r_2+\varepsilon)Ta_0^p + r_1T^{\frac{1}{p}}a_0\right] \\
&\quad +\|x'\|_p^{p-1}\left[2(1+|c|)(r_1r_2+\varepsilon)T(p+1)a_0^{p-1}b_0 + r_1T^{\frac{1}{p}}b_0\right] + a_2\|x'\|_p + b_1 \\
&\leq 2(1+|c|)\|x'\|_p^p\left[(r_1r_2+\varepsilon)Ta_0^p + r_1T^{\frac{1}{p}}a_0\right] + \|x'\|_p^{p-1}\alpha_1 + a_2\|x'\|_p + b_1 \\
&\leq \|x'\|_p^p\left[2(1+|c|)\left\{(r_1r_2+\varepsilon)T^{1-\frac{p}{p}}\left[\alpha^{\frac{1}{p-1}}+T\right] + r_1T^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p}}\left[\alpha^{\frac{1}{p-1}}+T\right]\right\}\right] \\
&\quad +\|x'\|_p^{p-1}\alpha_1 + a_2\|x'\|_p + b_1 \\
&\leq \|x'\|_p^p\left[2(1+|c|)\left\{(r_1r_2+\varepsilon)\left[\alpha^{\frac{1}{p-1}}+T\right] + r_1\left[\alpha^{\frac{1}{p-1}}+T\right]\right\}\right] \\
&\quad +\|x'\|_p^{p-1}\alpha_1 + a_2\|x'\|_p + b_1
\end{aligned}$$

$$\|Ax'\|_p^p \leq \|x'\|_p^p G(\varepsilon) + \|x'\|_p^{p-1}\alpha_1 + a_2\ \|x'\|_p + b_1 \tag{4.32}$$

tels que $\alpha_1 = 2(1+|c|)(r_1r_2+\varepsilon)T(p+1)a_0^{p-1}b_0 + r_1T^{\frac{1}{p}}b_0, a_2 = a_1\ a_0, b_1 = a_1b_0$.

$|1-|c||^p\|x'\|_p^p = |1-|c||^p\|A^{-1}Ax'\|_p^p$

du lemme 4.1.1 on a

$$|1-|c||^p\int_0^T\left|\left(A^{-1}x\right)(t)\right|^p dt \leq \int_0^T|x(t)|^p dt$$

donc $|1-|c||^p\int_0^T|(A^{-1}Ax')(t)|^p dt \leq \int_0^T|Ax'(t)|^p dt$

d'où $|1-|c||^p\|A^{-1}Ax'\|_p^p \leq \|Ax'\|_p^p$

$\Rightarrow |1-|c||^p\|x'\|_p^p \leq \|Ax'\|_p^p$

de (4.32),(4.15) on trouve

$$|1-|c||^p\|x'\|_p^p \leq \|x'\|_p^p G(\varepsilon) + \|x'\|_p^{p-1}\alpha_1 + a_2\ \|x'\|_p + b_1$$

$$|1-|c||^p\|x'\|_p^p \leq |1-|c||^p\|x'\|_p^p + \|x'\|_p^{p-1}\alpha_1 + a_2\ \|x'\|_p + b_1 \tag{4.33}$$

$p>1$ donc il existe une constante $R_2>0$ tel que

$$\|x'\|_p \leq R_2 \tag{4.34}$$

de $(4.30),(4.34)$ on peut voir que (4.26) est vraie.

(2) Le cas de $1<p<2$ sous cet état on a $0<p-1<1$ et $\frac{1}{p-1}>1$. Il existe une constante $h_1>0$, tel que

$$(1+u)^{\frac{1}{p-1}} \leq 1+\left(1+\frac{1}{p-1}\right)u;\ \ u\in\left]0,h_1\right] \tag{4.35}$$

$\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}=\frac{q-1}{q}\Rightarrow p=\frac{q}{q-1}\Rightarrow\frac{1}{p-1}=\frac{1}{\frac{q}{q-1}-1}=\frac{1}{\frac{q-q+1}{q-1}}=q-1$

$\Rightarrow 1+\left(1+\frac{1}{p-1}\right)u=1+(1+q-1)\,u=1+qu$

Si $\frac{\beta T^{\frac{1}{q}}}{\alpha\|x'\|_p^{p-1}}>h_1$, alors

$$\alpha\left\|x'\right\|_p^{p-1}\leq\frac{\beta T^{\frac{1}{q}}}{h_1}$$

$$\Rightarrow\ \ \left\|x'\right\|_p^{p-1}\leq\frac{\beta T^{\frac{1}{q}}}{\alpha h_1}$$

$$\Rightarrow\ \ \left\|x'\right\|_p\leq\left(\frac{\beta T^{\frac{1}{q}}}{\alpha h_1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\Rightarrow\ \ \left\|x'\right\|_p\leq\left(\frac{\beta}{\alpha h_1}\right)^{\frac{1}{p-1}}T^{\frac{1}{q(p-1)}}$$

$$\frac{1}{q\,(p-1)}=\frac{1}{\frac{p}{p-1}\,(p-1)}=\frac{1}{p}$$

donc

$$\left\|x'\right\|_p\leq\left(\frac{\beta}{\alpha h_1}\right)^{\frac{1}{p-1}}T^{\frac{1}{p}} \tag{4.36}$$

Si $\frac{\beta T^{\frac{1}{q}}}{\alpha\|x'\|_p^{p-1}}\leq h_1$,de (4.17) on a

$$\begin{aligned}
|x\,(t_0)| &\leq \left(\alpha T^{-\frac{1}{q}}\left\|x'\right\|_p^{p-1}+\beta\right)^{\frac{1}{p-1}}\\
&\leq \left(\alpha T^{-\frac{1}{q}}\left\|x'\right\|_p^{p-1}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left(1+\frac{\beta}{\alpha T^{-\frac{1}{q}}\left\|x'\right\|_p^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\\
&\leq \alpha^{\frac{1}{p-1}}T^{-\frac{1}{p}}\left\|x'\right\|_p\left(1+\frac{\beta T^{\frac{1}{q}}}{\alpha}\left\|x'\right\|_p^{1-p}\right)^{\frac{1}{p-1}}
\end{aligned}$$

de (4.35) on a

$$|x\,(t_0)|\leq\alpha^{\frac{1}{p-1}}T^{-\frac{1}{p}}\left\|x'\right\|_p+\frac{q\beta T^{\frac{1}{q}}\alpha^{\frac{1}{p-1}}}{T^{\frac{1}{p}}}\left\|x'\right\|_p^{2-p}$$

d'après (4.27) on a

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty &\leq |x(t_0)| + \int_0^T |x'(t)|\,dt \\ &\leq \alpha^{\frac{1}{p-1}} T^{-\frac{1}{p}} \|x'\|_p + \frac{q\beta T^{\frac{1}{q}} \alpha^{\frac{1}{p-1}}}{\alpha T^{\frac{1}{p}}} \|x'\|_p^{2-p} + T^{1-\frac{1}{p}} \|x'\|_p\end{aligned}$$

$$\|x\|_\infty \leq T^{-\frac{1}{p}} \left[\alpha^{\frac{1}{p-1}} + T\right] \|x'\|_p + \frac{q\beta T^{\frac{1}{q}} \alpha^{\frac{1}{p-1}}}{\alpha T^{\frac{1}{p}}} \|x'\|_p^{2-p} = a_0 \|x'\|_p + b_2 \|x'\|_p^{2-p} \tag{4.37}$$

avec a_0 était définit et

$$b_2 = \frac{q\beta T^{\frac{1}{q}} \alpha^{\frac{1}{p-1}}}{\alpha T^{\frac{1}{p}}}$$

c'est clair que

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty^p &= \|x\|_\infty \|x\|_\infty^{p-1} \leq \left(a_0 \|x'\|_p + b_2 \|x'\|_p^{2-p}\right) \left(a_0 \|x'\|_p + b_2 \|x'\|_p^{2-p}\right)^{p-1} \\ &\leq \left(a_0 \|x'\|_p + b_2 \|x'\|_p^{2-p}\right) \left(a_0^{p-1} \|x'\|_p^{p-1} + b_2^{p-1} \|x'\|_p^{(2-p)(p-1)}\right)\end{aligned}$$

$$\|x\|_\infty^p \leq a_0^p \|x'\|_p^p + b_2 a_0^{p-1} \|x'\|_p + a_0 b_2^{p-1} \|x'\|_p^{(2-p)(p-1)+1} + b_2^p \|x'\|_p^{(2-p)p} \tag{4.38}$$

$$|1-|c||^p \|x'\|_p^p \leq \|Ax'\|_p^p$$

de (4.25) on a

$$\|Ax'\|_p^p \leq 2(1+|c|) \left[(r_1 r_2 + \varepsilon) T \|x\|_\infty^p + r_1 T^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \|x'\|_p^{p-1}\right] + a_1 \|x\|_\infty$$

de (4.37), (4.38) on trouve

$$\begin{aligned}\|Ax'\|_p^p &\leq 2(1+|c|)(r_1 r_2 + \varepsilon) T \left\{a_0^p \|x'\|_p^p + b_2 a_0^{p-1} \|x'\|_p + a_0 b_2^{p-1} \|x'\|_p^{(2-p)(p-1)+1} + b_2^p \|x'\|_p^{(2-p)p}\right. \\ &\quad 2(1+|c|) r_1 T^{\frac{1}{p}} \left\{a_0 \|x'\|_p + b_2 \|x'\|_p^{2-p}\right\} \|x'\|_p^{p-1} + a_1 \left\{a_0 \|x'\|_p + b_2 \|x'\|_p^{2-p}\right\} \\ &\leq \|x'\|_p^p \left[2(1+|c|) \left\{(r_1 r_2 + \varepsilon) T a_0^p + r_1 T^{\frac{1}{p}} a_0\right\}\right] + \\ &\quad \|x'\|_p \left[2(1+|c|)(r_1 r_2 + \varepsilon) T b_2 a_0^{p-1} + a_1 a_0\right] \\ &\quad + \|x'\|_p^{(2-p)(p-1)+1} \left[2(1+|c|)(r_1 r_2 + \varepsilon) T a_0 b_2^{p-1}\right] + 2(1+|c|)(r_1 r_2 + \varepsilon) T b_2^p \|x'\|_p^{(2-p)p} \\ &\quad + r_1 T^{\frac{1}{p}} 2(1+|c|) b_2 \|x'\|_p^{(2-p)+(p-1)} + a_1 b_2 \|x'\|_p^{2-p} \\ &\leq \|x'\|_p^p \left[2(1+|c|) \left\{(r_1 r_2 + \varepsilon) T a_0^p + r_1 T^{\frac{1}{p}} a_0\right\}\right] \\ &\quad + \|x'\|_p \left[2(1+|c|) b_2 \left\{(r_1 r_2 + \varepsilon) T a_0^{p-1} + r_1 T^{\frac{1}{p}}\right\} + a_1 a_0\right] \\ &\quad + \|x'\|_p^{(2-p)(p-1)+1} \left[2(1+|c|)(r_1 r_2 + \varepsilon) T a_0 b_2^{p-1}\right] \\ &\quad + \|x'\|_p^{(2-p)p} \left[2(1+|c|)(r_1 r_2 + \varepsilon) T b_2^p\right] + a_1 b_2 \|x'\|_p^{2-p}\end{aligned}$$

$$\|Ax'\|_p^p \leq G(\varepsilon)\|x'\|_p^p + a_3\|x'\|_p^{(2-p)(p-1)+1} + a_4\|x'\|_p^{(2-p)p} + a_5\|x'\|_p + a_6\|x'\|_p^{2-p} \tag{4.39}$$

avec $a_3 = 2(1+|c|)(r_1r_2+\varepsilon)Ta_0b_2^{p-1}$, $a_4 = 2(1+|c|)(r_1r_2+\varepsilon)Tb_2^p$, $a_5 = 2(1+|c|)b_2\left\{(r_1r_2+\varepsilon\right.$
a_1a_0, $a_6 = a_1b_2$.
de (4.15), il existe une constante $R_3 > 0$ tel que

$$\|x'\|_p \leq R_3 \tag{4.40}$$

de $(4.36), (4.40)$ on a (4.26) est aussi vraie pour $1 < p < 2$.
De $(4.26), (4.28)$ et de (4.37), on peut voir qu'il existe un nombre $R_4 > 0$ tel que

$$\|x\|_\infty \leq R_4 \tag{4.41}$$

de (4.8) on a

$$\int_0^T \varphi_p((Ax')(t))' dt = -\int_0^T f(x'(t))dt - \int_0^T g(x(t-\tau(t)))dt + \int_0^T e(t)dt$$

$$\Rightarrow \int_0^T \left|\varphi_p((Ax')(t))'\right| dt \leq \int_0^T |f(x'(t))|dt + \int_0^T |g(x(t-\tau(t)))|dt + \int_0^T |e(t)|dt$$

de (A_1) on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left|\varphi_p((Ax')(t))'\right| dt &\leq \int_0^T \left[K + r_1|x'(t)|^{p-1}\right]dt + \int_0^T \max_{|x(t-\tau(t))|\leq R_4}|g(x(t-\tau(t)))|dt \\
&\quad + \int_0^T |e(t)|dt \\
&\leq \int_0^T Kdt + \int_0^T r_1|x'(t)|^{p-1}dt + \int_0^T g_{R_4}dt + \int_0^T |e(t)|dt \\
&\leq TK + T^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{T}\int_0^T r_1|x'(t)|^p dt\right)^{\frac{p-1}{p}} + Tg_{R_4} + \int_0^T |e(t)|dt \\
&\leq TK + T^{\frac{1}{p}}\|x'(t)\|_p^{p-1} + Tg_{R_4} + \int_0^T |e(t)|dt
\end{aligned}$$

de (4.26) on a

$$\int_0^T \left|\varphi_p\left(\left(Ax'\right)(t)\right)'\right| dt \leq TK + T^{\frac{1}{p}} R_1^{p-1} + Tg_{R_4} + \int_0^T |e(t)|\, dt = R_5 \tag{4.42}$$

avec $g_{R_4} = \max_{|s| \leq R_4} |g(s)|$.

C'est clair qu'il existe un entier $t_1 \in \left]0, T\right[$ tel que

$\varphi_p\left(\left(Ax'\right)(t_1)\right) = 0$. Alors, pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_p\left(\left(Ax'\right)(t)\right)\right| &= \int_{t_1}^{t} \left|\varphi_p\left(\left(Ax'\right)(t)\right)'\right| ds \\
&\leq \int_0^T \left|\varphi_p\left(\left(Ax'\right)(s)\right)'\right| ds \\
&\leq R_5
\end{aligned}$$

$$\left(Ax'\right)(t) = \varphi_q\left(\varphi_p\left(Ax'\right)(t)\right) \leq \varphi_q\left(R_5\right)$$

donc

$$\max_{t \in \mathbb{R}} \left|\left(Ax'\right)(t)\right| \leq \max_{t \in \mathbb{R}} \varphi_q\left(R_5\right) = \varphi_q\left(R_5\right)$$

$$\Rightarrow \left\|Ax'\right\|_\infty \leq \varphi_q\left(R_5\right) = \left|R_5\right|^{q-2} R_5 = R_5^{q-1}.$$

$$\left\|Ax'\right\|_\infty \leq R_5^{q-1} \tag{4.43}$$

On a

$$\left\|x'\right\|_\infty = \left\|A^{-1}Ax'\right\|_\infty$$

de (1) du lemme 4.1.1 on trouve

$$\left\|x'\right\|_\infty \leq \frac{\left\|Ax'\right\|}{\left|1 - |c|\right|}$$

de (4.43) on a

$$\left\|x'\right\|_\infty \leq \frac{R_5^{q-1}}{\left|1 - |c|\right|} = R_6 \tag{4.44}$$

Soit $y(t) = (Ax)(t)$, alors (4.8) est équivalente à

$$\left(\varphi_p\left(y'(t)\right)\right)' + \lambda f\left(\left(A^{-1}y\right)'(t)\right) + \lambda g\left(\left(A^{-1}y\right)(t - \tau(t))\right) = \lambda e(t) \tag{4.45}$$

Donc, si y est une solution périodiquqe de période T de (4.45), alors $x = A^{-1}y$ est une solution périodique de période T de (4.8) .
Soit

$$F(y)(t) = e(t) - f\left(\left(A^{-1}y\right)'(t)\right) - g\left(\left(A^{-1}y\right)(t - \tau(t))\right) \qquad (4.46)$$

alors (4.45) est (4.5). f et g sont des fonctions et A a un inverse continu, on peut voir que $F : C_T^1 \to C_T$ dans (4.46) est continue et l'image d'un ensemble borné par F est un ensemble borné.
Soient $R_7 = 2(1 + |c|) \max\{R_4, R_6, d\}, \Omega = \{y \in C_T^1 : \|y\| < R_7\}$.
Si $y = Ax$ est une solution de (4.45) dans $\partial\Omega$, alors $\|y\| = R_7, \|y\|_\infty = R_7$ ou $\|y'\|_\infty = R_7$.
Si $\|y\|_\infty = R_7$, alors

$$\|x\|_\infty \geq \frac{\|y\|_\infty}{1 + |c|} = 2\max\{R_4, R_6, d\} > R_4$$

et c'est une contradiction avec (4.41) , le même pour $\|y'\|_\infty = R_7$.
Si $y \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}$, alors y est une constante et $|y| = R_7, x = A^{-1}y = \frac{y}{1-c}$,

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{T}\int_0^T F(y)(t)\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \left[e(t) - f\left(\left(A^{-1}y\right)'(t)\right) - g\left(A^{-1}y\right)\right] dt \end{aligned}$$

y est une constante donc $\left(A^{-1}y\right)' = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{T}\int_0^T \left[e(t) - f(0) - g\left(A^{-1}y\right)\right] dt \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T e(t)dt - \frac{1}{T}\int_0^T g\left(A^{-1}y\right) dt \end{aligned}$$

$g\left(A^{-1}y\right)$ ne dépend pas de t et $\int_0^T e(t)dt = 0$ donc

$$F(y) = -\frac{1}{T} g\left(A^{-1}y\right) t\Big|_0^T = -g\left(A^{-1}y\right)$$

$|x| = |A^{-1}y| \geq 2\max\{R_4, R_6, d\} > d$ de (A_2) on a $g(A^{-1}y) > K + r_1 r_3 (A^{-1}y)^{p-1} > 0$
donc $-g(A^{-1}y) \neq 0$ dans $\partial\Omega \cap \mathbb{R}$.
Soit $H(y,\mu) = \mu(-A^{-1}y) + (1-\mu) F(y), y \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}, \mu \in [0,1]$, alors on a

$$\left(A^{-1}y\right) H(y,\mu) = -\mu \left(A^{-1}y\right)^2 - (1-\mu)\left(A^{-1}y\right) g\left(A^{-1}y\right)$$

on a $(A^{-1}y)^2 > 0 \Rightarrow -\mu (A^{-1}y)^2 < 0$
et $(1-\mu) > 0 \Rightarrow -(1-\mu) < 0$
et de (A_2) on a si

$$A^{-1}y < -d \Rightarrow g\left(A^{-1}y\right) < -K < 0 \Rightarrow \left(A^{-1}y\right) g\left(A^{-1}y\right) > 0$$

sinon

$$A^{-1}y > d \Rightarrow g\left(A^{-1}y\right) > K + r_1 r_3 \left(A^{-1}y\right)^{p-1} > 0 \Rightarrow \left(A^{-1}y\right) g\left(A^{-1}y\right) > 0$$

donc $(A^{-1}y) H(y,\mu) < 0$ c'est à dire $(A^{-1}y) H(y,\mu) \neq 0$ dans $\partial\Omega \cap \mathbb{R}$.
En utilisant l'invariance par homotopie du degré topologique on trouve

$$d(F, \partial\Omega \cap \mathbb{R}, 0) = d\left(-A^{-1}y, \partial\Omega \cap \mathbb{R}, 0\right) = sgn(c-1) \neq 0.$$

Donc pour (4.45), tous les condition du lemme 4.1.4 sont satisfaites. Par le lemme 4.1.4, on résulte que

$$\left(\varphi_p(y'(t))\right)' + f\left(\left(A^{-1}y\right)'(t)\right) + g\left(\left(A^{-1}y\right)(t - \tau(t))\right) = e(t) \tag{4.47}$$

a au moins une solution y périodique de période T . Donc, $x = A^{-1}y$ est une solution périodique de période T de (4.1) . ■
La même démonstration pour :

Théorème 4.2.2 *On suppose que* $f(0) = \int_0^T e(t)\,dt = 0$ *et qu'il existe des constantes* $r_1 > 0,\ r_2 > 0,\ r_3 > 0, K > 0$ *et* $d > 0$ *tels que :*

(A_1) $|f(x)| \leq K + r_1 |x|^{p-1}, \forall x \in \mathbb{R};$
(A_2) $g(x) > K$ *pour* $x > d$ *et* $g(x) < -K - r_1 r_3 x^{p-1}$ *pour* $x < -d;$
(A_3) $\lim_{x \to -\infty} \frac{|g(x)|}{x^{p-1}} = r_1 r_2;$

Alors (4.1) a au moins une solution périodique de période T si :

$$2(1+|c|) r_1 \left(r^{\frac{1}{p-1}} + T\right)\left[1 + r_2 \left(r^{\frac{1}{p-1}} + T\right)^{p-1}\right] < |1-|c||^p, r = \max\left\{\frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}\right\}.$$

Exemple 4.2.3 *On considère l'équation suivante :*

$$\left(\varphi_{\frac{3}{2}}\left(\left(x\left(t\right)-5x\left(t-4\right)\right)'\right)\right)'+f\left(x'\left(t\right)\right)+g\left(x\left(t-\sin\left(t-\tau\left(t\right)\right)\right)\right)=\cos\left(2\pi t\right), \tag{4.48}$$

avec $p=\frac{3}{2}, c=5, \sigma=4, T=1, \tau\left(t\right)=\sin\left(2\pi t\right), e\left(t\right)=\cos\left(2\pi t\right), f\left(x\right)=\frac{1}{9}\sqrt{|x|}, g\left(x\right)=\left\{\begin{smallmatrix} x^2, x\geq 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{9}\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{|x|}, x<0\end{smallmatrix}\right.$

Soit $d=9, K=\frac{2\sqrt{2}}{3}, r_1=\frac{1}{9}, r_2=r_3=2\sqrt{2}.$

On va vérifier les conditions du théorème 4.2.1.

(A_1)

$$|f\left(x\right)|=\frac{1}{9}\sqrt{|x|}etK+r_1\left|x\right|^{p-1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{9}\left|x\right|^{\frac{3}{2}-1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{9}\sqrt{|x|}$$

c'est clair que

$$\frac{1}{9}\sqrt{|x|}\leq\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{9}\sqrt{|x|}$$

donc $|f\left(x\right)|\leq K+r_1\left|x\right|^{p-1}$.

(A_2) *Si* $x<-d$, *alors* $x<-9<0\Rightarrow$

$$\begin{aligned} g\left(x\right) &= \frac{2\sqrt{2}}{9}\sqrt[3]{x}\sqrt[6]{|x|} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{9}\left(-\sqrt[3]{|x|}\right)\sqrt[6]{|x|} \\ &= \frac{-2\sqrt{2}}{9}\left(\sqrt{|x|}\right) \\ &< \frac{-2\sqrt{2}}{9}\times 3 \\ &< \frac{-2\sqrt{2}}{3}=-K \end{aligned}$$

Si $x>d$, *alors* $x>9>0\Rightarrow g(x)=x^2$

on a

$$K+r_1r_3x^{p-1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{9}\sqrt{x}$$

D'après les graphes des fonctions $g(x)=x^2$ *et de* $h(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{9}\sqrt{x}$ *on a*

$$x^2>\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{9}\sqrt{x}, \forall x>9.$$

Donc (A_2) *est réalisée.*

(A_3)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{|g(x)|}{|x|^{p-1}} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left|\frac{2\sqrt{2}}{9}\sqrt[3]{x}\,\sqrt[6]{|x|}\right|}{|x|^{\frac{3}{2}-1}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left|\frac{2\sqrt{2}}{9}\left(-\sqrt[3]{|x|}\right)\sqrt[6]{|x|}\right|}{\sqrt{|x|}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{2\sqrt{2}}{9}\frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}}\\
&= \frac{2\sqrt{2}}{9}=r_1r_2.
\end{aligned}$$

donc (A_3) *est réalisée.*
Et on a

$$|1-|c||^p=|1-|5||^{\frac{3}{2}}=8$$

$$r=\max\left(\frac{1}{r_2},\frac{1}{r_3}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
2(1+|c|)\,r_1\left(r^{\frac{1}{p-1}}+T\right)\left[1+r_2\left(r^{\frac{1}{p-1}}+T\right)^{p-1}\right] &= 2(1+5)\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}-1}}+2(1+5)\frac{1}{9}\\
&\quad +2(1+5)\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}-1}}\times 2\sqrt{2}\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{3}{2}}\right.\\
&\quad +2(1+5)\frac{1}{9}2\sqrt{2}\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\frac{3}{2}-1}}+1\right)^{\frac{3}{2}-1}\\
&= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{8}+1\right)\left[1+2\sqrt{2}\left(\frac{1}{8}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&= \frac{3}{2}(1+3)\\
&= 6<8=|1-|c||^p.
\end{aligned}$$

On a vérifié les conditions du théorème 4.2.1, donc (4.48) *a au moins une solution périodique de période 1.*

Bibliographie

[1] C.Atkinson and K.El-Ali, Some boundary value problems for the Bingham model, J-Non-Newt.Fl.Mech.,41 (1992), 339-363.

[2] C.Atkinson ans C.R .Champion, On some boundary value problems for the equation $\bigtriangledown (F (|\bigtriangledown w|) \bigtriangledown w)$, Pro. K. Soc. London A, 448 (1995), 269-279.

[3] D. O'Ragan, Y.J. Cho, Y. Chen, Topological degree theory and applications, volume 10, Chapman and Hall/CRC, Taylor and Francis Group (2006).

[4] E.De Giorgi, Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, Mem. Accas .Sci .Torino (Classe di Sci.mat.,fis.enat.) (3)3 (1957), 25-43.

[5] E.E. Giusti, Metodi Diretti nel Calcolo delle Variazioni, UMI, Bologna 1994, English translation : Direct Methods in the Calculus of Variations, World Scientfic Publ.Co.,River Edge 2003.

[6] G.Q. Wang, S.S. Cheng, A priori bounds for periodic solutions of a delay Rayleigh equation, Appl. Math. Lett. 12 (1999), 41-44.

[7] G.Wang, J. Yan, On existence of periodic solutions of the Rayleigh equation retarded type, Int. J. Math. Sci. 23 (1) (2000), 65-68.

[8] J. Droniou, Degrés topologiques et applications, Departement de Mathématiques, UMR CNRS 5149, CC051, University Montpellier 2, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France, (2006).

[9] J.I.Diaz, Nonlinear partial equations and free boundarie, Pitman Publ. Program, (1985).

[10] J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Communications on Pure and Applied Mathematics (1961), pp. 577-591.

[11] J. W. [Lord Rayleigh] Strutt, "Theory of sound", 1, Dover, reprint (1945).

[12] M. Renardy, R. C. Rogers, An introduction to Partial Differential Equations, Springer, (2000).

[13] M. Zong, H. Liang, Periodic solutions for Rayleigh type p-Laplacien equation with deviating arguments, Appl. Math. Lett. 20 (2007) 43-47.

[14] N. Trudinger, On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations, Communications on Pure and Applied Mathematics 20 (1967), 721-747.

[15] O. Ladyzhenskaya & N. Uraltseva, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Academic Press, New York (1968).

[16] P. Lindqvist, Notes on the p-Laplace equation, Department of mathematics, NorwegianUniversity of Science and Technology. No-7491 Trondheim, Normy.

[17] R. Agarwal, M. Meehan and D. O'ragan, Fixed point theory and applications, Cambridge University Press, 141 (2004).

[18] R.E. Gaines, J. Mawhin, Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations, Springer, Berlin, Lecture Notes in Mathematics, vol. 568, Springer-Verlag, Berlin, New York, (1977).

[19] R.Jensen, Uniqueness of Lipschitz extensions minimizing the sup-norm of the gradient, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 123 (1993) 51-74.

[20] S. Lu, W. Ge, Some new results on the existence of periodic solutions to a kind of Rayleigh equation with a deviating argument, Nonlinear Anal. 56 (2004), 501-514.

[21] S. Peng, Periodic solutions for p-Laplacien neutral Rayleigh equation with a deviating argument, Appl. Math. Lett. 69 (2007), 1675-1685.

[22] X.Huang, Z. Xiang, On the existence of 2π-periodic solution for delay Duffing equation $x"(t) + g(t, x(t-\tau)) = p(t)$, Chinese Sci. Bull. 39 (3) (1994), 201-203.

[23] Y.Li, Periodic Solutions of the liénard equation with deviating arguments, J. Math. Res. Exposition 18 (4) (1998), 565-570 (in Chinese).