Table des matières

Introduction **2**

1 Equations différentielles stochastiques rétrogrades **4**
1.1 Introduction 4
1.2 Notation et définition 5
1.3 Le cas Lipschitzien 10
1.3.1 EDSR Lipschitziennes non linéaire 10
1.4 Le résultat de Pardoux-Peng 13
1.5 Application 22

2 EDSR à coefficient continu **25**
2.1 Existence 25
2.2 **Preuve des resultats importants** 28

3 Equations différentielles stochastiques rétrogrades avec coefficient localement Lipschitzien **39**
3.1 Notations, hypothèses et définitions 39
3.2 EDSR avec coefficient localement Lipschitzien 41
3.3 Stabilité de la solution 62

4 EDSR avec coefficient discontinu **65**
4.1 Préliminaire 66
4.2 Existence de la solution 69

A Outils du calcul stochastique **77**

Conclusion **80**

Bibliographie **81**

Introduction

Les équations différentielles stochastique rétrogrades (EDSR) est sont une nouvelle classe d'équations différentielles stochastiques, leur valeur est donnée en temps terminale T. Les EDSR ont recevé une attention considérable dans la recherche en probabilité car les EDSR fournissent une représentation probabiliste pour les solutions de certaine classe d'équations aux dérivées partielles quasilinéaires parabolique de second ordre, et ont une relation avec les solutions de viscosité des EDP. La théorie des EDSR a trouvé beaucoup d'applications telles que la théorie du controle stochastique, économie, et à des problèmes de mathématiques financières.

Commencée en 1973, les équations différentielles stochastiques linéaires ont été d'abord introduite par (Bismut, 1973) [2], qui a utilisé ces EDSR pour étudier les problemes de controle optimal stochastique dans la version stochastique du principe de maximum de Pontryagin. Cinq ans plus tard, (Bismut, 1978) [3] prolonge sa théorie et montre l'existence d'une solution unique bornée de l'EDSR de Riccati.

En 1990, la théorie des EDSR a été grandement developpé par de nombreux chercheurs, et il'y avait un grand nombre d'articles publiés consacrés à la théorie des EDSR et leurs applications. Parmi ces auteurs, les plus célèbres sont (Pardoux et Peng, 1990) [31] qui ont considéré des EDSR générale de la forme suivante

$$dY_t = -f(t, Y_t, Z_t)dt + ZdB_t, \qquad Y_T = \xi$$

et montrent l'existence et l'unicité de l'EDSR sous quelques hypothèses telle que la condition de Lipschitz du drift f.

A partir de la, un grand nombre de travaux ont été consacré à l'étude de la thérie des EDSR. La première importante est la recherche fondamentale d'établir l'existence et l'unicité des solutions de l'EDSR sous des des formes plus complexes (par exemple, EDSR avec saut ; EDSR refléchie ; EDSPR, EDSR dirigé par une martingle ; etc) et/ou sous des hypothèses faibles sir les coefficients pour prolonger le résultat initial de Pardoux-Peng. On peut se réferer à Pardoux-Peng [33], El Karoui [9], Lepeltier-San

Martin [24, 25], Kobylanski [22], Briand-Hu [6, 7], Chen [8] , Jia [18, 19, 20], Briand-Delyon-Pardoux-Hu-Stoica [5], Mao [28], Hu-Peng [16], Hu-Yong [17], Peng-Wu [34], Ma-Protter-Yong [26], Ma-Yong [27], Pardoux-Tang [32], Peng-Shi [35], Wu[37, 38] , El Karoui-Kapoudjian-Pardoux-Peng-Quenez [11], Kobylanski-Lepeltier-Quenez-Torres [23], Matoussi [29], Hamadène-Lepeltier-Matoussi [13], Hamadène [14], Hamadène-Lepeltier-Wu [15] et les références là-dedans.

Depuis le premier résultat d'existence et d'unicité, de nombreux articles ont été consacré à l'existence et/ou l'unicité sous des hypothèses faibles. Parmi ces articles on peut distinguer deux classes différentes : les EDSR scalaires et les EDSR multidmensionelles. Dans le premier cas, on peut prendre un avantage du théorème de comparaison. Pour les EDSR multidimensionnelles, il n'y a pas de théorème de comparaison et pour surmonter cette difficulté une hypothèse de monotonicité sur le générateur f dans la variable y est utilisée. Au lieu d'utiliser l'hypothèse de monotoniçité, Mao [.] a proposé une sorte d'hypothèse non Lipschitz pour faire face avec les EDSR multidimensionnelles et avec l'aide de l'inégalité de Bihari, il démontre le résultat d'existence et d'unicité.

Ce mémoire est composé de quatre chapitres :

Le premier chapitre : On donne les résultats classiques d'existence et d'unicité pour les solutions des EDSR (en particulier les EDSR linéaires qui sont classique en finance).

Le deuxième chapitre : On démontre l'existence de la solution d'EDSR unidimensionnel dans le cas où le coefficient est continu,et à ccroissance linéaire et la condition terminale est de carré intégrable.

Le troisième chapitre : On étudie les EDSR multidimensionnelles avec un coefficient localement Lipshitz en (y, z) et la condition terminale est de carré intégrable.

Le quatrième chapitre : On démontre l'existence de la solution de l'EDSR unidimensionnelle avec un coefficient discontinu en y et continu en z.

Chapitre 1

Equations différentielles stochastiques rétrogrades

1.1 Introduction

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) sont un nouveau type d'équations différentielles stochastiques (EDS) qui ne peuvent pas être traitées par les méthodes usuelles pour les EDS Une des principales raisons est qu'on ne peut pas renverser le "temps". Voyons un exemple simple,

Supposons $d = r = 1$.Considérons l'EDS suivante

$$\begin{cases} dY_t = 0, & t\in [0, T]. \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{1.1}$$

Où $\xi\in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$, l'ensemble des variables aléatoires $\mathcal{F}_T$-mesurables et de carré intégrables. Puisque l'unique solution de cette EDS est $Y_t = \xi$,pour tout t, Y est par conséquent n'est pas une solution "adaptée" à (1.1) dans le sens usuel d'Itô. Cependant cet exemple trivial n'a pas de solution adaptée dans les sens usuels.

Dans plusieurs d'applications, il est crucial que la solution de l'EDS soit adaptée à la filtration où le mouvement Brownien est adapté. Un exemple fréquemment cité, qui est l'essentielle à l'origine de la théorie des EDSR, est qu'on appelle le principe de maximum de Pontryagin pour les problèmes de contrôle optimal stochastique.Ceci est la condition nécessaire pour le contrôle optimale, qui contient une "équation adjointe" qui prend la forme d'une EDSR. Motivé par de tels problèmes, Bismut est le premier qui à proposé la méthode suivante pour trouver une solution adaptée pour les EDSR.Prenant le cas simple (1.1) comme un exemple.

On suppose que la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est Brownienne, c'est-à-dire qu'il existe un mouvement Brownien $W = (W_t)$ défini dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\mathcal{F}_t {=} \overline{\mathcal{F}_t^w}^{\mathbb{P}}$, pour tout $t \geq 0$.Ici $\mathcal{F}_t^w {=} \sigma \{W_s : 0 \leq s \leq t\}$, et $\overline{\{.\}}$ défini l'augmentation par les éléments de $\mathbb{P}$-négligable. Supposons maintenant que $\xi {\in} L^2(\Omega; \mathcal{F}_T)$, et notons $Y_t = \mathbb{E}(\xi / \mathcal{F}_t), t \geq 0$.Alors, Y est une L^2 martingale et par la théorème Représentation de martingale existe un processus prévisible Z telle que :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi / \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s. \tag{1.2}$$

la forme différentielle de cette équation est :

$$\begin{cases} dY_t = Z_t dW_t. \\ Y_T = \xi. \end{cases} \tag{1.3}$$

Bismut propose que au lieu de regarder seulement le processus Y comme la solution à l'EDSR on peut considérer le couple (Y, Z) comme une solution de l'EDSR (1.1) et la forme appropriée d'une EDS avec une condition terminale serait de la forme (1.3) que celle de (1.1).

On peut écrire (1.3) comme "une équation intégrale".En effet intégrons (1.3) de t à T on obtient que :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s, \ \forall t {\in} [0, T].$$

Ceci est l'EDSR simple dans sa forme intégrale.

1.2 Notation et définition

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et W un mouvement Brownien de d-dimensionnel (dans $\mathbb{R}^d$) sur cet espace.

$$W = \{W_t^i \ \ t \geq 0, \ \ 1 \leq i \leq d \}$$

On notera $\{\mathcal{F}_t\}$ la filtration naturelle de mouvement Brownien :

$$\mathcal{F}_t = \sigma (W_s \cup N, \ \ 0 \leq s \leq t)$$

Tout processus de $\Omega \times \mathbb{R}_+$ dans ou $\mathbb{R}^{k\times d}$ mesurable par rapport à la tribu previsible $B_{[0,T]} \times \mathcal{F}$ est dit prévisible.

Soit $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ l'espace vectoriel formé des processus Y progréssivement mesurables a valeur dans $\mathbb{R}^d$ telle que :

$$\|Y\|_{s^2}^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} |Y_t|^2\right] < \infty.$$

et $S_c^2(\mathbb{R}^k)$ est un sous espace de $S^2(\mathbb{R}^k)$ formé par les processus continus.

Soit $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ celui formé par les processus Z progréssivement mesurables à valeur dans $\mathbb{R}^{k\times d}$ telle que :

$$\|Z\|_{M^2}^2 = \mathbb{E}\int_0^T \|Z\|^2 \, dt = \mathbb{E}\int_0^T trace\,(ZZ^*)\, dt < \infty.$$

$M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Les espaces S^2, S_c^2, M^2 sont des espace de Banach pour ces normes.

On désigne par $\mathbb{B}^2$ l'espace de Banach $S_c^2(\mathbb{R}^{k\times d}) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

On considère l'équation différentielle stochastique rétrograde $(EDSR)$:

$$\begin{cases} dY_t = f\,(s, Y_t, Z_t)\, dt - Z_t dW_t & 0 \le t \le T. \\ Y_T = \xi. \end{cases}$$

Ou de façon équivalente, sous forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\,(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s.$$

Ou

$$f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k.$$
$$\xi \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^k.$$

Sont des donneés telle que f s'appelle le génerateur et mesurable par rapport $\mathbb{P}_{[0,T]} \times \mathbb{B}$, et ξ est $\mathcal{F}_T$ mesurable carré integrable $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$.

Définition 1.1 *Une solution de cette équation est le couple des processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *vérifiant :*

1- *Y et Z sont progréssivement mesurables à valeurs respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k\times d}$.

2- $\mathbb{P}-p.s.$ $(\int_0^T (|f\ (s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2)ds) < \infty$.

3- $\mathbb{P}-p.s.$ *on a :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\ (s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s \quad t \in [0, T].$$

Où Y est une semi martingale continue $Y \in S_c^2(\mathbb{R}^k)$ et Y_0 est une quantité déterministe.

On peut dire que Y est un processus d'Itô à valeur dans $\mathbb{R}^k$ pour $i = 1, ..., k$.

$$Y_t^i = Y_0^i + \int_0^T f^i\,(s, Y_s, Z_s)\, ds - \sum_{j=1}^{d} \int_0^T Z_s^{ij} dW_s^j,\ t \in [0, T].$$

On peut retenir la notation vectorielle et on écrit :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^T f\,(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_0^T Z_s dW_s,\ t \in [0, T].$$

Avant de donner la démonstration de l'existence et de l'unicité, on montre que sous une hypothèse relativement faible sur le générateur, le processus Y appartient à S_c^2.

Proposition 1.2 *Supposons qu'il existe un processus* $\{f_t\}_{\ 0\ \leq t\ \leq T} \in M^2\,(\mathbb{R})$ *positif et telle que :*

$|f\,(t, y, z)| \leq f_t + \lambda\,(|y| + \|z\|)$.

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\ \leq t\ \leq T}$ *est une solution de l'EDSR telle que* $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ *alors :* $Y \in S_c^2$.

Preuve. On a pour $t \in [0, T]$

$$Y_t = Y_0 - \int_0^T f\ (s, Y_s, Z_s)\, ds + \int_0^T Z_s dW_s.$$

Où Y_0 est déterministe.
En utilisant l'hypothèse sur f,

$$Y_t \leq |Y_0| + \int_0^T |f \ \ (s, Y_s, Z_s)| \, ds + \left| \int_0^T Z_s dW_s \right|.$$

$$\leq |Y_0| + \int_0^T (f_s + \lambda \|Z_s\|) \, ds + \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^T Z_s dW_s \right| + \lambda \int_0^T |Y_s| \, ds.$$

$$|Y_t|^2 \leq \left[|Y_0| + \int_0^t f(s, Y_s, Z_s) \, ds + \left| \int_0^t Z_s dW_s \right| \right]^2.$$

$$\leq \xi^2 \left(|Y_0| + \int_0^t |f(s, Y_s, Z_s)| \, ds \right)^2 + \frac{1}{\xi^2} \left| \int_0^t Z_s dW_s \right|^2.$$

$$|Y_t|^2 \leq \xi^2 \lambda^2 |Y_0|^2 + \frac{\xi^2}{\lambda^2} \int_0^t f(s, Y_s, Z_s)^2 \, ds + \frac{1}{\xi^2} \left| \int_0^t Z_s dW_s \right|^2.$$

$$\leq \xi^2 \lambda^2 |Y_0|^2 + \frac{\xi^2}{\lambda^2} \int_0^t (f_s + \lambda(|Y_s| + \|Z_s\|))^2 \, ds + \frac{1}{\xi^2} \left| \int_0^t Z_s dW_s \right|^2.$$

$$\leq \xi^2 \lambda^2 |Y_0|^2 + \frac{\xi^2}{\lambda^2} K^2 \int_0^T f_s^2 ds + \frac{\xi^2}{\lambda^2 K^2} \lambda^2 \int_0^t (|Y_s| + \|Z_s\|)^2 \, ds$$
$$+ \frac{1}{\xi^2} \left| \int_0^t Z_s dW_s \right|^2.$$

$$\leq \xi^2 \lambda^2 |Y_0|^2 + \frac{\xi^2}{\lambda^2} K^2 \int_0^T f_s^2 ds + \frac{\xi^2}{\lambda^2 K^2} \lambda^2 d^2 \int_0^T |Y_s|^2 \, ds$$

$$+ \frac{\xi^2}{\lambda^2 K^2 d^2} \int_0^T \|Z_s\|^2 \, ds + \frac{1}{\xi^2} \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^T Z_s dW_s \right|^2.$$

$$\sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^2 \leq C_1 |Y_0|^2 + C_2 \int_0^T |f(s,0,0)|^2 \, ds + C_3 \int_0^T |Y_s|^2 \, ds$$

$$+ C_4 \int_0^T \|Z_s\|^2 \, ds + C_5 \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^T Z_s dW_s \right|^2.$$

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^2 \right) \leq C_1 |Y_0|^2 + C_2 \, \mathbb{E} \left(\int_0^T |f \ \ (s,0,0)|^2 \, ds \right)$$

$$+ C_3 \, \mathbb{E} \left(\int_0^T |Y_s|^2 \, ds \right) + C_4 \, \mathbb{E} \left(\int_0^T \|Z_s\|^2 \, ds \right)$$

$$+C_5\ \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^T Z_s dW_s\right|^2\right),\ t\in[0,T].$$

D'après les inégalités de BDG :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^T Z_s dW_s\right|^2\right]\leq C\mathbb{E}\int_0^T \|Z_s\|\,ds<+\infty.$$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|^2\right)\leq C_1|Y_0|^2+C_2\mathbb{E}\left(\int_0^T|f\ \ (s,0,0)|^2\,ds\right)+C_3\mathbb{E}\left(\int_0^T|Y_s|^2\,ds\right)$$

$$+\left(C_4\vee C_5\right)\mathbb{E}\left(\int_0^T\|Z_s\|^2\,ds\right)\leq+\infty.\ \blacksquare$$

Lemme 1.3 *Soient* $Y\in S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ *et* $Z\in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ *alors,* $\left\{\int_0^t Y_s Z_s dW_s; t\in[0,T]\right\}$ *est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. *Les inégalités de BDG donnent :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right]\leq\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right|\right].$$

$$\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T|Y_s|^2\|Z_s\|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

$$\leq C\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|\left(\int_0^T\|Z_s\|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Comme $ab\leq\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{2}$:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right]\leq\grave{C}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T\|Z_s\|^2\,ds\right]\leq\infty.$$

Puisque $\int_0^t Y_s Z_s dW_s$ est une martingale, $\mathbb{E}\left[\int_0^t Y_s Z_s dW_s\right]=0.$ $\blacksquare$

1.3 Le cas Lipschitzien

1.3.1 EDSR Lipschitziennes non linéaire

Considérons les hypothèses (**L**) suivantes :
(**L**)

1. $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ ie, ξ est $\mathcal{F}_T$-mesurable et $\mathbb{E}(|\xi|^2) < \infty$.
2. Condition de lipschitz en (Y, Z);
   $\exists$ une constante λ telle que :
   $\mathbb{P}-p.s.$ pour tout $Y, \grave{Y} \in \mathbb{R}^k$, $Z, \grave{Z} \in \mathbb{R}^{k\times d}$.
   $\left| f\ (t, Y, Z) - f\ (t, \grave{Y}, \grave{Z}) \right| \leq \lambda(\left| Y\ - \grave{Y} \right| + \left| Z - \grave{Z} \right|)$.
3. $\mathbb{E} \int_0^T |f\ (s, 0, 0)|^2 \, ds < +\infty$.

La solution $(Y, Z) \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{B}(\mathbb{R}^{k\times d}) /\ S_c^2(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.
l'espace des processus prévisibles, menu de la norme.

$$\|Y\|^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^2\right] < +\infty.$$

$$\|Z_s\|^2 = \mathbb{E} \int_0^T \|Z_s\|^2 \, ds < +\infty.$$

Qu'il devient un espace de Hilbert ;quand $(Y, Z) \in S_c^2(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$;telle que $Y \in S_c\left(\mathbb{R}^k\right)$ processus continu et

$$\|Y\|_{S_c}^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^2\right] < \infty.$$

$$\|Z\|_{M^2}^2 = \mathbb{E} \int_0^T \|Z_s\|^2 \, ds < \infty.$$

Maintenant on démontre quelques estimations où il s'agit en fait d'étudier la dépendance de la solution de l'EDSR par rapport aux données qui sont (la variable ξ et le processus $\{f\ \ (t, 0, 0)\}\ \ 0 \leq t \leq T)$.

Proposition 1.4 *Soient $(\xi,\ f)$ vérifiés (L) et (Y, Z) La solusion de EDSR telle que $Z \in M^2$, alors il existe une constante C telle que :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^2 + \int_0^T \|Z_s\|^2 \, ds\right] \leq C\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f\ \ (s, 0, 0)|^2 \, ds\right].$$

Preuve. On applique la formule d'ltô à $e^{Bt}\left|Y_t\right|^2$:

$$de^{Bt}\left|Y_t\right|^2 = Be^{Bt}\left|Y_t\right|^2 dt + 2e^{Bt}\left|Y_t\right| dY_t + \left\langle e^{Bt}\left|Y_t\right|\right\rangle dt.$$

$$= Be^{Bt}\left|Y_t\right|^2 dt + 2e^{Bt}\left|Y_t\right|\left(-f\ (t, Y_t, Z_t)dt + Z_t dW_t\right)$$

$$+e^{Bt}\left\|Z_t^2\right\| dt.$$

$$e^{Bt}\left|Y_t\right|^2 + \int_t^T e^{Bs}\left\|Z_s\right\|^2 ds$$

$$\leq e^{BT}\left|\xi\right|^2 + \int_t^T e^{Bs}\left(-BY_s^2 + 2\left|Y_s\right| f\ (s, Y_s, Z_s)\right) ds$$

$$-2\int_t^T e^{Bs} Y_s Z_s dW_s.$$

On a : $\quad 2Yf(t,Y,Z) \leq 2\left|Y\right|\left|f\ (t,0,0)\right| + 2\lambda\left|Y\right|^2 + 2\lambda\left|Y\right|\left\|Z\right\|.$

Et $2ab \leq \varepsilon a^2 + \dfrac{b^2}{\varepsilon}$ pour $\varepsilon = 1, 2.$

$$2Yf(t,Y,Z) \leq \left(1 + 2\lambda + 2\lambda^2\right)\left|Y\right|^2 + \left|f\ (t,0,0)\right|^2 + \frac{\left\|Z\right\|^2}{2}.$$

Pour $B = 1 + 2\lambda + 2\lambda^2$

$$e^{Bt}\left|Y_t\right|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T e^{Bs}\left\|Z_s\right\|^2 ds \leq e^{BT}\left|\xi\right|^2 + \int_t^T e^{Bs}\left|f\ (s,0,0)\right|^2 ds$$

$$-2\int_t^T e^{Bs} Y_s Z_s dW_s.$$

Pour $t = 0$ on a l'espérance :

$$\mathbb{E}\int_0^T e^{Bs}\left\|Z_s\right\|^2 ds \leq 2\mathbb{E}\left[e^{BT}\left|\xi\right|^2 + \int_0^T e^{Bs}\left|f\ (s,0,0)\right|^2 ds\right].$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{Bt}\left|Y_t\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[e^{BT}\left|\xi\right|^2 + \int_0^T e^{Bs}\left|f\ (s,0,0)\right|^2 ds\right]$$

$$+\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_0^T e^{Bs}\left|Y_s\right|\left\|Z_s\right\|dW_s\right].$$

D'après l'inégalité BDG, $\exists C$ telle que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{Bt}\left|Y_t\right|^2\right]\leq\mathbb{E}\left[e^{BT}\left|\xi\right|^2+\int_0^T e^{Bs}\left|f\ (s,0,0)\right|^2 ds\right]$$

$$+C\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{2Bs}\left|Y_s\right|^2\left\|Z_s\right\|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{Bt}\left|Y_t\right|^2\right]\leq\mathbb{E}\left[e^{BT}\left|\xi\right|^2+\textstyle\int_0^T e^{Bs}\left|f\ (s,0,0)\right|^2 ds\right]$$

$$+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{Bt}\left|Y_t\right|^2\right]+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\int_0^T e^{Bs}\left\|Z_s\right\|^2 ds.$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{Bt}\left|Y_t\right|^2\right]\leq 2\mathbb{E}\left[e^{Bt}\left|\xi\right|^2\right]+\int_0^T e^{Bs}\left|f\ (s,0,0)\right|^2 ds$$

$$+C^2\mathbb{E}\int_0^T e^{Bs}\left\|Z_s\right\|^2 ds.$$

Finalement ;

$$\mathbb{E}\left[\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{Bt}\left|Y_t\right|^2\right]+\int_0^T e^{Bs}\left\|Z_s\right\|^2 ds\right]$$

$$\leq 2\mathbb{E}\left[e^{BT}\left|\xi\right|^2+2\int_0^T e^{Bs}\left|f\ (s,0,0)\right|^2 ds\right]$$

$$+C^2 2\mathbb{E}\left[e^{BT}\left|\xi\right|^2+2\int_0^T e^{Bs}\left|f\ (s,0,0)\right|^2 ds\right].$$

$$\left\|Y,Z\right\|_{\mathbf{S}^2_C}\leq 2\left(1+C^2\right)\mathbb{E}\left[e^{BT}\left|\xi\right|^2+2\int_0^T e^{Bs}\left|f\ (s,0,0)\right|^2 ds\right].\ \blacksquare$$

1.4 Le résultat de Pardoux-Peng

Avec les conditions (L)

Cas où $f\ (t, \omega, y, z) = F(t, \omega)$ **ne dépend ni de** y **ni de** z.

On considère l'équation :

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s \qquad \text{où } 0 \leq t \leq T.$$

$$\xi \in L^2(\mathcal{F}_T) \text{ et } F \in M^2(\mathbb{R}^k) \quad \left(\mathbb{E}\int_0^T |F|^2 ds < \infty\right).$$

Lemme 1.5 *Soient* $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$ *l'EDSR posséde une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve. a) L'existence :

Supposons que la solution existe telle que $Z \in M^2$on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_T$.

$$Y_t = \mathbb{E}(Y_t \backslash \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s \backslash \mathcal{F}_t\right].\ 0 \leq t \leq T.$$

Puisque $\int_0^T Z_s dW_s$ est une martigale on a $\mathbb{E}(I(Z)) = 0$.

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T F_s ds - \textstyle\int_0^t F_s ds\ \backslash \mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T Z_s dW_s - \int_0^t Z_s dW_s\ \backslash \mathcal{F}_t\right].$$

$$Y_t = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T F_s ds\ \backslash \mathcal{F}_t\right] - \int_0^t F_s ds.$$

On pose :

$$M_t = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T F_s ds\ \backslash \mathcal{F}_t\right] = Y_t + \int_0^t F_s ds.$$

M_t est une martingale carré intégrable.

D'après le théorème de représentation des martingales il existe un processus prévizible Z carré intégrable ($Z \in M^2$) telle que :

$$M_t = \mathbb{E}\left[M_T\right] + \int_0^t Z_s dW_s \ , \qquad t \in [0,T] \, .$$

Donc :

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_s ds = \mathbb{E}\left[M_0\right] + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds.$$

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_s ds = Y_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds.$$

On vérifiant que (Y, Z) est une solution de l'EDSR comme $Y_T = \xi$.

$$\begin{aligned} Y_t - Y_T = Y_t - \xi = M_0 + \int_0^t Z_s dW_s - \int_0^t F_s ds \\ - \left[M_0 + \int_0^T Z_s dW_s - \int_0^T F_s ds \right]. \end{aligned}$$

$$Y_t - \xi = \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s.$$

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dW_s.$$

b)L'unicité :

Supposons que (Y_1, Z_1) et(Y_2, Z_2) sont deux solutions.
Soient $\hat{Y} = Y_1 - Y_2$, $\hat{Z} = Z_1 - Z_2$ alors :

$$\hat{Y} = \int_t^T \hat{Z} \ dW_s \ , \quad t \in [0,T] \, .$$

Nous allons prouvés que $\hat{Y} = \hat{Z} = 0 \qquad dt \times d\,\mathbb{P} - p.s.$
En effet :
premièrement écrivons ;

$$\hat{Y} = \int_0^T \hat{Z} dW_s - \int_0^t \hat{Z} \ dW_s \ , \qquad t \in [0,T] \, .$$

On applique l'inégalité martingale de Doob, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,T]} |M_t|^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}\left[|M_T|^p \right].$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\hat{Y}_t\right|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[|Y_T|^2\right].$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\hat{Y}_t\right|^2\right] \leq 2\int_0^T \hat{Z}_s ds \leq \infty. \tag{1.4}$$

Nous appliquons la formule d'Itô à $f\,(Y_t) = \left|\hat{Y}_t\right|$ de t à T et on note que : $\hat{Y}_T = \xi - \xi = 0$.

On a :

$$0 = \left|\hat{Y}_t\right|^2 + 2\int_t^T \hat{Y}_s d\hat{Y}_s + \int_0^T \left|\hat{Z}_s\right|^2 ds.$$

Où

$$\hat{Y}_s\ d\hat{Y}_s = -\hat{Y}_s\ \hat{Z}_s dW_s.$$

Donc :

$$\left|\hat{Y}_t\right|^2 + \int_t^T \left|\hat{Z}_s\right|^2 ds = 2\int_t^T \hat{Y}_s\hat{Z}_s dW_s \tag{1.5}$$

Soit $N_t = \displaystyle\int_t^T \hat{Y}_s\hat{Z}_s dW_s$ alors pour tout $t \geq 0$ le processus avariation quadratique;

$$\langle N\rangle_t = \int_0^t \left|\hat{Y}_s\hat{Z}_s\right|^2 ds, \quad t \in [0,T].$$

On utilisant l'estimation (1.4) et l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$|\langle M, N\rangle_t| \leq \sqrt{\langle M\rangle_t}\sqrt{\langle N\rangle_t}\ , \quad t \geq 0.$$

Donc :

$$|\langle N\rangle_t| = |\langle N, N\rangle_T| = \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\hat{Y}_s\hat{Z}_s\right|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\left|\hat{Y}_t\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\hat{Z}_s\right|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \leq \infty. \ \blacksquare$$

Remarque 1.6 *On peut montrer que la martingale locale* $N_t = \{N\}_t$ *est une martingale uniformément intégrable.*

On prenant l'espérance dans (1.5) et appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz on obtient que :

$$\mathbb{E}\left|\hat{Y}_t\right|^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T \left|\hat{Z}_s\right|^2 ds = 0.$$

ceci démontre que $\hat{Y} = 0$ *et* $\hat{Z} = 0$ *donc l'unicité.*

Cas où $f\ (t, \omega, y, z)$ **dépend de** y **et de** z.

Théorème 1.7 *On considère l'EDSR* (ξ, f) *suivante :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\left(s, Y_s, Z_s\right) s - \int_t^T Z_s dW_s.$$

avec l'hypothèse (L) *,l'EDSR admet une solution unique* (Y, Z) *dans* $\mathbb{B}^2 = S_c^2(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Preuve. On utilise l'argument de point fixe dans l'espace de Banach

$$\mathbb{B}^2 = S_c^2(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$$

Soit Ψ une application telle que :

$$\Psi : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2.$$

$$(U, V) \longmapsto \Psi\left(U, V\right) = \left(Y, Z\right).$$

Où $(Y, Z) \in \mathbb{B}^2$ est une solution de l'EDSR(ξ, f).

$Y_t = \xi + \int_t^T f\ \ (s, U_s, V_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s\ , \quad t \in [0, T]$

On pose :

$$F_s = f\left(s, U_s, V_s\right) \in M^2(\mathbb{R}^k).$$

$$|F_s| \leq \left|f\left(s, U_s, V_s\right) - f\ \ (s, 0, 0)\right| + \left|f\left(s, 0, 0\right)\right|.$$

$$\leq \left|f\left(s, 0, 0\right)\right| + \lambda\left|U_s\right| + \lambda\left\|V_s\right\|.$$

Et ces trois derniers processus sont carré intégrables donc F_s est carré integrable.

Soient (U_1, V_1) et (U_2, V_2) deux éléments de $\mathbb{B}^2$;

et $\qquad (Y_1, Z_1) = \Psi(U_1, V_1)\,,\ (Y_2, Z_2) = \Psi(U_2, V_2)\,.$

Notons $\hat{y} = Y_1 - Y_2$, $\hat{z} = Z_1 - Z_2$ et $\hat{y}_T = \xi - \xi = 0$, $\hat{u} = U_1 - U_2$ et $\hat{v} = V_1 - V_2$.

$$d\hat{y}_t = -\left\{f\ \ (t, U_1, V_1) - f\ \ (t, U_2, V_2)\right\} dt + \hat{z}_t dW_t.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t}\left|\hat{y}\right|^2$:

$$d\left(e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2\right) = \alpha e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2 dt + 2e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right| d\hat{y}_t + \left\langle e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2\right\rangle dt.$$

$$= \alpha e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2 dt + e^{\alpha t}\left\|\hat{z}_t\right\|^2 dt$$

$$+2e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|\left[\left\{f\left(t, U_1, V_1\right) - f\left(t, U_2, V_2\right)\right\} dt + \hat{z}_t dW_t\right].$$

$$= \alpha e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2 dt + 2e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right| \hat{z}_t dW_t + e^{\alpha t}\left\|\hat{z}_t\right\|^2 dt$$

$$-2e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|\left[-\left\{f\ \ (t, U_1, V_1) - f\ \ (t, U_2, V_2)\right\} dt\right].$$

On intégrer entre t et T on obtient :

$$e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}\left\|\hat{z}_s\right\|^2 ds$$
$$= \int_t^T e^{\alpha s}\left(-\alpha\left|\hat{y}_s\right|^2 + 2\left|\hat{y}_s\right|\left\{f\ \ (s, U_1, V_1) - f\ \ (s, U_2, V_2)\right\}\right) ds$$
$$-\int_t^T 2e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right| \hat{z}_s dW_s.$$

Et comme f est Lipschitz il vient :

$$\left|f\left(t, U_1, V_1\right) - f\left(t, U_2, V_2\right)\right| \leq k\left[\left|U_1 - U_2\right| + \left|V_1 - V_2\right|\right].$$

$$2\left|\hat{y}_s\right|\left\{f\ \ (s, U_1, V_1) - f\ \ (s, U_2, V_2)\right\} \leq 2\left|\hat{y}_s\right| k\left[\left|U_1 - U_2\right| + \left|V_1 - V_2\right|\right]$$

$$\leq 2k\left|\hat{y}_s\right|\left|\hat{u}_s\right| + 2k\left|\hat{y}_s\right|\left|\hat{v}_s\right|.$$

On a $2ab \leq \varepsilon a^2 + \dfrac{1}{\varepsilon}b^2$

Donc :

$$2\left|\hat{y}_s\right|\left\{f\ \ (s,U_1,V_1)-f\ \ (s,U_2,V_2)\right\}\leq\varepsilon k^2\left|\hat{y}_s\right|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left|\hat{u}_s\right|^2+\varepsilon k^2\left|\hat{y}_s\right|^2$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\left|\hat{v}_s\right|^2.$$

$$\leq 2\varepsilon k^2\left|\hat{y}_s\right|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left|\hat{u}_s\right|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left|\hat{v}_s\right|^2.$$

Pour $\varepsilon=2$ on a :

$$e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|\hat{z}_s\right\|^2 ds$$

$$\leq 4k^2\left|\hat{y}_s\right|^2+\frac{1}{2}\left|\hat{u}_s\right|^2+\frac{1}{2}\left|\hat{v}_s\right|^2.$$

$$\leq\int_t^T e^{\alpha s}\left(-\alpha\left|\hat{y}_s\right|^2+4k^2\left|\hat{y}_s\right|^2+\frac{1}{2}\left|\hat{u}_s\right|^2+\frac{1}{2}\left|\hat{v}_s\right|^2\right)ds$$
$$-\int_t^T 2e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|\left\|\hat{z}_s\right\|dW_s.$$

$$\leq\int_t^T e^{\alpha s}\left(\left[-\alpha+4k^2\right]\left|\hat{y}_s\right|^2+\frac{1}{2}\left[\left|\hat{u}_s\right|^2+\left|\hat{v}_s\right|^2\right]\right)ds$$
$$-\int_t^T 2e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|\left\|\hat{z}_s\right\|dW_s.$$

On pose $\alpha=1+4k^2$

$$e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|\hat{z}_s\right\|^2 ds$$

$$\leq\int_t^T -e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|^2 ds+\frac{1}{2}\int_t^T e^{\alpha s}\left[\left|\hat{u}_s\right|^2+\left|\hat{v}_s\right|^2\right]ds-\int_t^T 2e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|\left\|\hat{z}_s\right\|dW_s.$$

$$e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|\hat{z}_s\right\|^2 ds+\int_t^T e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|^2 ds$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_t^T e^{\alpha s}\left[\left|\hat{u}_s\right|^2+\left|\hat{v}_s\right|^2\right] ds-\int_t^T 2e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|\left\|\hat{z}_s\right\| dW_s.$$

On prend l'espérance :

$$\mathbb{E}\left[e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left\|\hat{z}_s\right\|^2 ds\right]+\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|^2 ds\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left[\left|\hat{u}_s\right|^2+\left|\hat{v}_s\right|^2\right] ds\right]-2\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|\left\|\hat{z}_s\right\| d\ W_s\right].$$

la martingale locale $\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|\left\|\hat{z}_s\right\| dW_s\right]$ est une martingale nulle en 0 puisque $Y_1,Y_2\in S_c^2(\mathbb{R}^k)$ et $Z_1,Z_2\in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.

Donc :

$$\mathbb{E}\left[\left|\hat{y}_0\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|\hat{z}_s\right\|^2 ds\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left|\hat{y}_s\right|^2 ds\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left[\left|\hat{u}_s\right|^2+\left|\hat{v}_s\right|^2\right] ds\right].$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|\hat{z}_s\right\|^2 ds\right]+\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|\hat{y}_t\right|^2\right]$$

$$\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|\hat{u}_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left|\hat{v}_s\right|^2 ds\right].$$

$$\left\|\hat{z}\right\|_\alpha^2+\left\|\hat{y}\right\|_\alpha^2\leq \frac{1}{2}\left\|\hat{u}\right\|_\alpha^2+\left\|\hat{v}\right\|_\alpha^2.$$

Donc l'application Ψ est une contraction de $\mathbb{B}^2$dans $\mathbb{B}^2$ admet un poit fixe (Y,Z) unique dite la solution unique de l'EDSR. ■

EDSR linéaire

Proposition 1.8 *Soient* $(a_t, b_t)_{t\in[0,T]}$*un processus a valeur dans* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ *progressivement mesurable et borné. Soient* $(C_t)_{t\in[0,T]}$ *un élément de* $\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ *et* ξ *une variable aléatoire* F_T*-mesurable carré intégrable à valeur réelles.*

EDSR lineaire :

$$Y_t = \xi + \int_t^T (a_s Y_s + b_s Z_s + C_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s.$$

posséde une unique solution qui vérifiée, $\forall t \ \in [0,T]$:

$$Y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left(\xi\Gamma_T + \int_t^T C_s\Gamma_s ds \backslash \mathcal{F}_t\right).$$

avec :

$$\Gamma_t = \exp\left(\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b_s|^2\, ds + \int_0^t a_s ds\right) .pour\ \forall t \in [0,T]\,.$$

Preuve. **1*** On a $a_sY_s + b_sZ_s + C_s = f\ \ (s,\omega,Y_s,Z_s)$ est Lipschitzien.

i) $$\begin{aligned}\left|f\ \ (s,Y_t,Z_t) - f\ \ \left(s,\grave{Y}_t,\grave{Z}_t\right)\right| &= \left|a_t\left(Y_t-\grave{Y}_t\right) + b_t\left(Z_t-\grave{Z}_t\right)\right| \\ &\le |a_t|\left|Y_t-\grave{Y}_t\right| + |b_t|\left|Z_t-\grave{Z}_t\right| \\ &\le M_1\left|Y_t-\grave{Y}_t\right| + M_2\left|Z_t-\grave{Z}_t\right| \\ &\le (M_1+M_2)\ \left(\left|Y_t-\grave{Y}_t\right| + \left|Z_t-\grave{Z}_t\right|\right) \\ &\le L\left(\left|Y_t-\grave{Y}_t\right| + \left|Z_t-\grave{Z}_t\right|\right).\end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned}|f\ \ (s,Y_t,Z_t)| &\le |a_t|\,|Y_t| + |b_t|\,|Z_t| + |C_t|\,. \\ &\le M_1\,|Y_t| + M_2\,|Z_t| + |C_t|\,.\end{aligned}$$

iii) $|y_t|\,|f\ \ (s,Y_t,Z_t)| \le M_1\,|Y_t|^2 + M_2\,|Y_t|\,|Z_t| + |Y_t|\,|C_t|\,.$

Donc f et ξ vérifiant les conditions du Théorème de l'$\exists$ et l'unicité.

Donc l'EDSR liniéaire posséde une solution $(Y,Z)\in\mathbb{B}^2$.

2* Comme a_t et b_t sont F_t^Wadapté et borné alors l'EDS linéaire

$$\Gamma_t = 1+\int_0^t \Gamma_s b_s dW_s + \int_0^t \Gamma_s a_s ds.$$

Posséde une unique solution dans S^2telle que :

$$\left[\Gamma_t \in S^2, \mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |\Gamma_s|^2\right) < \infty\right].$$

On pose :

$$\Gamma_s b_s = \sigma(s,\Gamma_s).$$

$$\Gamma_s a_s = \mu(s,\Gamma_s).$$

Donc :

$$\begin{aligned}\left|\sigma(s,\Gamma_s) - \sigma\left(s,\acute{\Gamma}_s\right)\right| &= \left|b_s\left(\Gamma_s - \acute{\Gamma}_s\right)\right| \\ &\leq |b_s|\left|\Gamma_s - \acute{\Gamma}_s\right| \leq M_1\left|\Gamma_s - \acute{\Gamma}_s\right|.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\mu(s,\Gamma_s) - \mu\left(s,\acute{\Gamma}_s\right)\right| &= \left|a_s\left(\Gamma_s - \acute{\Gamma}_s\right)\right| \\ &\leq |a_s|\left|\Gamma_s - \acute{\Gamma}_s\right| \leq M_2\left|\Gamma_s - \acute{\Gamma}_s\right|.\end{aligned}$$

Donc σ et μ sont Lipschitz, on écrit Γ sous la forme :

$$\Gamma_t = \exp\left(\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b_s|^2 ds + \int_0^t a_s ds\right).$$

On a $\Gamma_t Y_t$ estF_t adapté puisque Y_t existe et$\mathcal{F}_t$ adapté et Γ_t existe et $\mathcal{F}_t$ adapté .

$$\begin{aligned} d\,(\Gamma_t Y_t) &= \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\,\langle\Gamma, Y\rangle_t. \\ &= -\Gamma_t C_t + (\Gamma_t Z_t + \Gamma_t Y_t b_t)\, dW_t.\end{aligned}$$

On intégrer de 0 à t

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_s C_s ds = \int_0^t \left(\Gamma_s Z_s + \Gamma_s Y_s b_s\right) dW_s.$$

$\displaystyle\int_0^t \left(\Gamma_s Z_s + \Gamma_s Y_s b_s\right) dW_s$ est une martingale.

donc :

$$\Gamma_t Y_t = \mathbb{E}\left[\left(\Gamma_T Y_T + \int_0^T \Gamma_s C_s ds - \int_0^t \Gamma_s C_s ds\right) \backslash \mathcal{F}_t\right].$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\Gamma_T Y_T + \int_t^T \Gamma_s C_s ds\right) \backslash \mathcal{F}_t\right].$$

$$Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}\left[\left(\Gamma_T Y_T + \int_t^T \Gamma_s C_s ds\right) \backslash \mathcal{F}_t\right]. \quad \blacksquare$$

1.5 Application

Modéle de Black Scholes

Un problème fréquent en finance consiste à donner un prix aux options, une option européenne d'achat une (calle) de maturité T et de prix d'exercice K est un contrôle qui donne le droit mais non l'obligation à sons détenteur d'acheter une part de l'action au prix d'exercice K à la date T.

Le vendeur de l'option s'engage donc à payer son détenteur la somme $(S_T - K)^+$ qui représente le profit que permet l'exercice de l'option, plus généralement on peut imaginée un actif contingent dont le bénéfice est une variable aléatoire positive ξ qui dépend de (S_T).

Auquel prix v vendre l'option le vendeur doit s'assurer qu'en vendant l'option à ce prix à la date $t = 0$, il disposera de la somme ξ à la date $t = T$.

Pour trouver v l'idée fondamentale est celle de duplication ; le vendeur vend l'option au prix v et investit cette somme dans le marché en suivant la stratégie (Z) à trouver !.

Donc pour trouver $v_{\ t}$ et Z on a le prix d'une part de l'option est régi par l'EDS :

$$\begin{cases} dS_t = S_t\left(\mu d\ t + \ \sigma d\ W_t\right). \\ S_0 = x. \end{cases}$$

Ou $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, le paramétre σ s'appelle la volatilité.

Donc :

$$S_t = x \exp\left(\sigma W + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right).$$

On note E_t le prix d'une part dans une place sans risque dont le taux de rendement est constant égale à $\mathbb{R}$, est donné par :

$$\begin{cases} dE_t = rE_t dt \\ E_0 = y \end{cases} \qquad i.e. \quad E_t = y \exp rt.$$

la valeur de portefeuille à l'instant t est :

$$V_t = q_t E_t + p_t S_t.$$

Où q_t représente le nombre de parts d'actif sans risque et p_t celui d'actif risqué.

L'évolution de la valeur du portefeuille est d'écrite par :

$$dV_t = q_t dE_t + p_t dS_t = rq_t E_t + p_t S_t\left(\mu dt + \sigma dW_t\right).$$

On a : $\quad q_t E_t = V_t - p_t S_t$

Donc :

$$dV_t = \left(rV_t - rp_t S_t\right) dt + p_t S_t \mu dt + p_t S_t \sigma dW_t \tag{1.6}$$

On note :

$\pi_t = p_t S_t$ la somme d'argent détenue en action.

$Z_t = \pi_t \sigma.$

et $\theta_t = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$ (c'est le risk premium).

On a :

$$dV_t = rV_t dt + \theta_t\ Z_t dt + \ Z_t dW_t.$$

Où $V_T = \xi$ et $V_0 = V$.

On applique la formule d'Ito à $V\left(t, S_t\right)$:

$$dV_t = \frac{\partial V_t}{dt} dt + \frac{\partial V_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} d\ \left\langle S_t, S_t\right\rangle.$$

$$= \frac{\partial V_t}{dt}dt + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}\left(S_t \mu d\ t + S_t \sigma d\ W_t\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}S_t^2\sigma^2 dt.$$

$$= \left(\frac{\partial V_t}{dt} + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}S_t\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}S_t^2\sigma^2\right)dt + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}S_t\sigma dW_t.$$

On compare avec (1.6) on obtient :

$$\frac{\partial V_t}{\partial S_t}S_t\sigma = p_t S_t \sigma \Longrightarrow \frac{\partial V_t}{\partial S_t} = p_t.$$

$$\frac{\partial V_t}{dt} + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}S_t\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}S_t^2\sigma^2 = rV_t + \theta_t\ Z_t.$$

$$\frac{\partial V_t}{dt} + \frac{\partial V_t}{\partial S_t}S_t\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}S_t^2\sigma^2 - rV_t - \frac{\mu - r}{\sigma}S_t\sigma\frac{\partial V_t}{\partial S_t} = 0.$$

$$\frac{\partial V_t}{dt} + \left(S_t\mu - \frac{\mu - r}{\sigma}S_t\sigma\right)\frac{\partial V_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}S_t^2\sigma^2 - rV_t = 0.$$

$$\frac{\partial V_t}{dt} + S_t r\frac{\partial V_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2}S_t^2\sigma^2 + \frac{\partial V_t}{dt} - rV_t = 0.$$

$$V\left(T, S_T\right) = \xi.$$

$$V\left(t, S_t\right) = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left(\xi\Gamma_T \backslash \mathcal{F}_t\right).$$

$$V\left(t, S_t\right) = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left(\xi \exp\left(-\int_0^T \theta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2\ ds - \int_0^T r ds\right)\backslash \mathcal{F}_t\right).$$

$$V_0\left(t, S_t\right) = \mathbb{E}\left(\xi \exp\left(-\theta\left(W_T - W_t\right) + \frac{1}{2}\theta^2\left(T - t\right) - r\left(T - t\right)\right)\right).$$

$$V_0\left(t, S_t\right) = S_t\ \Phi\left(d_1\right) - K\exp\left(-r\left(T - t\right)\right)\Phi\left(d_1 - \sigma\sqrt{T - t}\right).$$

$$d_1 = \frac{1}{2\sigma\sqrt{T - t}}\left(\ln\left(\frac{x\exp\left(r\left(T - t\right)\right)}{K}\right)\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(T - t\right).$$

$$\Phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du.$$

Pour $t = 0$,

$$v = V\left(0, S_0\right) = S_0\Phi\left(d\right) - K\exp\left(-rT\right)\Phi\left(d - \sigma\sqrt{T}\right).$$

Où : $\quad d = d_1\left(t = 0\right).$

Chapitre 2

EDSR à coefficient continu

Dans cette partie on démontre l'existence de la solution pour de l'EDSR en une dimension ($k = 1$) telle que le coefficient est à croissance linéaire et est continu en (y, z) et la condition terminale est de carré intégrable,en plus à cette hypothèse, on utilise un approximation de la générateur et la théorème de comparaison.

Considérons $(W_t)_{t \leq T}$ mouvement Brownienn de d-dimension dans un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On note$\mathbb{P}_{[0,T]}$ la tribu prévisible.

2.1 Existence

Théorème 2.1 *Supposant que* $f \ : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $\mathbb{P}_{\ [0,T]} \otimes \mathbb{B}^2$ *mesurable qui vérifie :*

1. *La croissance linéaire* $\exists K < \infty, \forall t, \omega, y, z, \ |f(t, \omega, y, z)| \leq K(1 + |y| + |z|)$.
2. *Pour* $t, \omega, \ f(t, \omega, ., .)$ *est continue.*
3. $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ *;l'EDSR :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f \ \ (s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s \ , \quad t \in [0, T] .$$

admet une solution unique $(Y, Z) \in \mathbb{B}^2$.

Lemme 2.2 *Soit* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et à croissanse linéaire, il éxiste une constante* $K < \infty$ *telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \ |f\ \ (x)| \leq K\,(1 + |x|)\,.$$

Soit f_n *la suite des fonctions telle que :*

$$f_n\ (x) = \inf_{y \in \mathbb{Q}^p} \{f\ \ (y) + n\,|x - y|\}\,.$$

On a alors pour tout $n \geq K$ *:*

1. $\forall x \in \mathbb{R}^p \quad |f_n\,(x)| \leq K\,(1 + |x|)\,.$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^p,\ |f_n\,(x) - f_n\,(y)| \leq n\,(|x| - |y|)\,.$

3. $\forall x \in \mathbb{R}^p,\ (f_n\,(x))_n$ *est une suite croissante.*

4. *Si* $x_n \underset{n \to +\infty}{\to} x$*, alors* $f_n\,(x_n) \underset{n \to +\infty}{\to} f\,(x)\,.$

Preuve. 1. $f_n\,(t, x) = \inf\left\{f\,(t, q) + n\,|x - q|\,;q \in \mathbb{Q}^{d+1}\right\}.$

On a :
si $n \geq K, \quad f_n\,(t, x) \leq f\,(t, x)\,.$

D'apré la croissance liniare de f pour tout $q \in \mathbb{Q}^{d+1}$,

$f_n\,(t, x) \geq \inf\{-f\,(t, y) + K\,|x - y|\,; y \in \mathbb{Q}^p\}\,.$

$f_n\,(t, x) \geq \inf\{-K - Ky + K\,|x - y|\,; y \in \mathbb{Q}^p\} = -K\,(1 + |x|)\,.$

Donc :

$$-K\,(1 + |x|) \leq f_n\,(t, x) \leq f\,(t, x) \leq K\,(1 + |x|)\,.$$

Ceci montre que f_n est bien définie pour $n \geq K$ et donne la croissance linéaire ;

$$|f_n\,(t, x)| \leq K\,(1 + |x|)\,.$$

2. $f_n\,(t, x) = \inf\{f\,(t, y) + n\,|x - y|\,; y \in \mathbb{Q}^p\}\,.$

donc :

$$f(t,y) + n|x-y| \leq f(t,y) + n|x-y| + |x-y|.$$

$$\leq f\ (t,y) + (n+1)|x-y|.$$

$$\inf\{f(t,y) + n|x-y|; y \in \mathbb{Q}^p\} \leq \inf\{f(t,y) + (n+1)|x-y|; y \in \mathbb{Q}^p\}.$$

Alors : $\quad f_n(t,x) \leq f_{n+1}(t,x)$.

f_n est une suite croissante.

3.Montrons que f_n est n Lipschitz.
Soient t, x et $\acute{x}; \forall y \in \mathbb{Q}^p$.

$$f_n(x) \leq f(y) + n|x-y| \leq f(y) + n|\acute{x}-y| + n|x-\acute{x}|.$$

On a :
$f_n(t,x) \leq f_n(t,\acute{x}) + n|x-\acute{x}|$.

Donc :

$$f_n(t,x) - f_n(t,\acute{x}) \leq n|x-\acute{x}|. \tag{2.1}$$

$\forall \xi \geq 0$.

$$f_n(t,x) \geq f(t,y) + n|x-y| - \xi.$$

$$f_n(t,x) \geq f(t,y) + n|x-y| + n|\acute{x}-y| - n|\acute{x}-y| - \xi.$$

$$f_n(t,x) \geq f(t,y) + n|\acute{x}-y| - n|x-\acute{x}| - \xi.$$

$$f_n(t,x) \geq f_n(t,\acute{x}) - n|x-\acute{x}| - \xi.$$

$$f_n(t,x) - f_n(t,\acute{x}) \geq -n|x-\acute{x}| - \xi. \tag{2.2}$$

de (2.1) et (2.2) on a :

$$|f_n(t,x) - f_n(t,\acute{x})| \leq n|x-\acute{x}|.$$

4.On considère que $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} x,$ pour tout $n \geq K$; prenons $y_n \in \mathbb{Q}^p$ telle que :

$$f(t,x_n) \geq f_n(t,x_n) \geq f(t,y_n) + n|x_n - y_n| - \frac{1}{n}. \tag{2.3}$$

Comme $|f(t,x)| \leq K(1+|x|)$ la bornitude de la suite (x_n) entraine celle de la suite (y_n) puisque ;

$$K(1+|x_n|) \geq -K(1+|y_n|) + n|y_n| - n|x_n| - \frac{1}{n}.$$

ie ; $\quad (n-K)|y_n| \leq (n+K)|x_n| + 2K + \dfrac{1}{n}.$

La croissance de f donne à présent la bornitude de la suite $(f(t,q_n))_n$
On a alors :

$$\underset{n\to+\infty}{Lim} \sup_{t\in[0,T]} n|x_n - q_n| \leq \underset{n\to+\infty}{Lim} \sup_{t\in[0,T]} f(t,x_n) - f(t,q_n) + \frac{1}{n} \leq \infty.$$

Donc : $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_n.$
D'après l'inégalité (2.3),

$$f(x_n) \geq f_n(x_n) \geq f(q_n) - \frac{1}{n}, \text{la continuité de } x \to f(x) \text{on a :}$$

$$\underset{n\to+\infty}{Lim} f(y_n) - \frac{1}{n} \leq \underset{n\to+\infty}{Lim} f_n(x_n) \leq \underset{n\to+\infty}{Lim} f(x_n)$$

$$f(x) \leq \underset{n\to+\infty}{Lim} f_n(x_n) \leq f(x).$$

Donc :

$$\underset{n\to+\infty}{Lim} f_n(t,x_n) = f(t,x). \quad \blacksquare$$

2.2 Preuve des resultats importants

On considère pour tout (t,ω) la suite $f_n(t,\omega,Y,Z)$ associé à f d'après Lemme 2 et $h(t,\omega,Y,Z) = K(1+|Y|+|Z|)$ telle que f_n, h sont $\mathbb{P}_{[0,T]} \times \mathbb{B}^2$ mesurables et Lipschitziens.

Soit $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$;L'EDSR suivante admet une unique solution $S_c^2(\mathbb{R}) \times M^2(\mathbb{R}^d)$ adaptée.

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)\, ds - \int_t^T Z_s^n dW_s,\ n \geq K.$$

$$U_t = \xi + \int_t^T h_n(s, U_s, V_s)\, ds - \int_t^T V_s dW_s.$$

On montre que :

$$\forall n \geq m \geq K, Y_t^m \geq Y_t^n \geq U_t, \qquad dt \times d\mathbb{P} - p.s.$$

On utilise le théorème de comparaison.

Théorème 2.3 (théorème de comparaison) *Supposons* $k = 1$ *et que* $(\xi, f)\,(\grave{\xi}, \grave{f}\,)$*vérifient l'hypothèse* (L) *on note* (Y, Z) *et* $\left(\acute{Y}, \acute{Z}\right)$ *les solutions des EDSR correspondantes,*

On suppose également que :

$$\mathbb{P} - p.s. \quad \xi \leq \grave{\xi} \text{ et } f\ (t, Y_t, Z_t) \leq \grave{f}\ \left(t, \acute{Y}_t, \acute{Z}_t\right).$$

Alors : $\qquad \mathbb{P} - p.s. \quad \forall t \in [0, T] \qquad Y_t \leq \acute{Y}_t.$

Preuve. La preuve s'effectue par linéairité.

On cherche une équation satisfaite par :

$$S_t = \acute{Y}_t - Y_t,\ E_t = \acute{Z}_t - Z_t \text{ et } \zeta = \grave{\xi} - \xi.$$

$$S_t = \zeta + \textstyle\int_t^T \left(\grave{f}\ \left(s, \acute{Y}_s, \acute{Z}_s\right) - f\ (s, Y_s, Z_s)\right) ds - \textstyle\int_t^T E_s dW_s.$$

On découpe l'accroissement des f en trois morceaux en écrivant : :

$$\begin{aligned} \grave{f}\ \left(s, \acute{Y}_s, \acute{Z}_s\right) - f\ (s, Y_s, Z_s) &= \grave{f}\ \left(s, \acute{Y}_s, \acute{Z}_s\right) - \grave{f}\ \left(s, Y_s, \acute{Z}_s\right) \\ &\quad + \grave{f}\ \left(s, Y_s, \acute{Z}_s\right) - \grave{f}\ (s, Y_s, Z_s) \\ &\quad + \grave{f}\ (s, Y_s, Z_s) - f\ (s, Y_s, Z_s). \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} a_s = \dfrac{\grave{f}\ \left(s, \acute{Y}_s, \acute{Z}_s\right) - \grave{f}\ \left(s, Y_s, \acute{Z}_s\right)}{S_s} si U_s \neq 0. \\ a_s = 0 \qquad si\ non. \end{cases}$$

telle que a_s est a valeurs réelles.

Pour définir b ou b est un vecteur(coulonne)dimension d.

On pose :

$$\begin{cases} b_s^i = \dfrac{\grave{f}\ \left(s, Y_s, \acute{Z}_s^{i-1}\right) - \grave{f}\ \left(s, Y_s, Z_s^i\right)}{E_s^i} & si\ V_s^i \neq 0. \\ b_s^i = 0\ si\ non. \end{cases}$$

Puisque $\grave{f}$ est lipschitz ,ces deux processus sont progessivement musurables et bornés.

Avec ces notations on a :

$$S_t = \zeta + \int_t^T (a_s S_s + b_s E_s + C_s)\, ds - \int_t^T E_s dW_s.$$

Où $C_s = \grave{f}\ (s, Y_s, Z_s) - f\ (s, Y_s, Z_s)$.

Par hypothèse on a $\zeta \geq 0$ et $C_s \geq 0$.

Utilisant la formule pour les EDSR linéaires on a pour $t \in [0, T]$:

$$S_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E} \left(\xi \Gamma_T + \int_t^T C_s \Gamma_s ds \setminus \mathcal{F}_t \right).$$

Avec :

$$\Gamma_t = \exp \left(\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |b_s|^2\, ds + \int_0^t a_s ds \right) \text{ pour } \forall t \in [0, T].$$

Cette formule montre que :

$$S_t \geq 0, \text{ i e, } \mathbb{P} - p.s., \ \forall t \in [0, T], \quad Y_t \leq \acute{Y}_t.$$

D'après cette théorème et les propriétés suivantes :
Pour tout $n \geq K$,

$$|f_n (s, Y_s, Z_s)| \leq K (1 + |Y_s| + |Z_s|).$$

$$f_n (s, Y_s, Z_s) \nearrow \quad \text{est croissante.}$$

$$\forall (t, Y, Z), \quad f_n (s, Y_s, Z_s) \leq f_{n+1} (s, Y_s, Z_s) \leq h_n (s, Y_s, Z_s).$$

On a : $\forall\ n + 1 \geq n \geq K, \quad U_t \geq Y^{n+1} \geq Y_t^n, \quad dt \times d\mathbb{P} - p.s.$ ■

Lemme 2.4 *Il existe une constante A qui dépent de $K, T, \mathbb{E}\left(\xi^2\right)$ telle que :*

$\forall n \geq K, \|Y^n\| \leq A, \|Z^n\| \leq A. \|U\| \leq A, \|V\| \leq A.$

Preuve. On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t}\left|Y_t\right|^2$:

$$d\left|Y_t^n\right|^2 = \alpha e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|^2 dt + 2e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right| dY_t + \left\langle e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|^2\right\rangle dt.$$

$$= \alpha e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|^2 dt + 2e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|\left[-f\ \left(t, Y_t^n, Z_t^n\right) dt + Z^n dW_t\right]$$

$$+e^{\alpha t}\left\|Z_t^n\right\|^2 dt.$$

$$= \alpha e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|^2 dt - 2e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|\left[f\ \left(t, Y^n, Z^n\right) dt\right] + 2e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right| Z^n dW_t$$

$$+e^{\alpha t}\left\|Z^n\right\|^2 dt.$$

On intégré entre t et T on obtient :

$$e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n\right\|^2 ds$$

$$= e^{\alpha T}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\alpha s}\left(-\alpha\left|Y_t^n\right|^2 + 2\left|Y_s^n\right| f\ \left(s, Y^n, Z^n\right)\right) ds$$

$$-\int_t^T 2e^{\alpha s}\left|Y_s^n\right|\left|Z_s^n\right| dW_s.$$

Et comme f est :

$$f_n\left(s, Y_s, Z_s\right) \leq K\left(1 + |Y_s| + |Z_s|\right).$$

$$Y_n\ f_n\left(s, Y_s, Z_s\right) \leq KY_n\ \left(1 + |Y_s| + |Z_s|\right) = KY_n + KY_n^2 + KY_n\left|Z_s\right|.$$

On a : $2a \leq a^2\lambda^2 + \dfrac{1}{\lambda^2}$ et $2ab \leq a^2\lambda^2 + \dfrac{b^2}{\lambda^2}$.

$$2Y_n\ f_n\left(s, Y_s, Z_s\right) \leq 2KY_n + 2KY_n^2 + 2KY_n\left|Z_s\right|.$$

$$2Y_n\ f_n\left(s, Y_s, Z_s\right) \leq K^2\lambda^2 + \frac{Y_n^2}{\lambda^2} + K^2Y_n^2\lambda^2 + \frac{Z_s^2}{\lambda^2} + 2KY_n^2.$$

On prend $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$.

$$2Y_n\ f_n\left(s, Y_s, Z_s\right) \leq K^2 + Y_n^2 + 2K^2Y_n^2 + \frac{Z_s^2}{2} + 2KY_n^2.$$

$$2Y_n\ f_n\left(s,Y_s,Z_s\right)\leq\left(1+2K+2K^2\right)Y_n^2+K^2+\frac{Z_s^2}{2}.$$

$$e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n\right\|^2 ds$$

$$=e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left(-\alpha\left|Y_t^n\right|^2+\left(1+2K+2K^2\right)Y_n^2+K^2+\frac{Z_s^2}{2}\right)ds$$

$$-\int_t^T 2e^{\alpha s}\left|Y_s^n\right|Z_s^n dW_s.$$

$$e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n\right\|^2 ds$$

$$=e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left(\left(-\alpha+1+2K+2K^2\right)Y_n^2+K^2+\frac{Z_s^2}{2}\right)ds$$

$$-\int_t^T 2e^{\alpha s}\left|Y_s^n\right|\left\|Z_s^n\right\|dW_s.$$

$$e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|^2+\frac{1}{2}\int_t^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n\right\|^2 ds$$

$$=e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left(\left(-\alpha+1+2K+2K^2\right)Y_n^2+K^2\right)ds$$

$$-\int_t^T 2e^{\alpha s}\left|Y_s^n\right|Z_s^n dW_s.$$

On pose : $\alpha=1+2K+2K^2$.

$$e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|^2+\frac{1}{2}\int_t^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n\right\|^2 ds=e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}K^2 ds$$

$$-\int_t^T 2e^{\alpha s}\left|Y_s^n\right|Z_s^n dW_s.$$

On prend l'espérance :

$$\mathbb{E}\left[e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|^2\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n\right\|^2 ds\right].$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}K^2 ds\right]-\mathbb{E}\left[\int_t^T 2e^{\alpha s}\left|Y_s^n\right|\left\|Z_s^n\right\| W d_s\right]. \tag{2.4}$$

Pour $t=0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n\right\|^2 ds\right] \leq 2\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2\right]+2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}K^2 ds\right]$$

$$-2\mathbb{E}\left[\int_0^T 2e^{\alpha s}\left|Y_s^n\right|\left\|Z_s^n\right\| dW_s\right].$$

La martingale locale $\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left|Y_s^n\right|\left\|Z_s^n\right\| dW_s\right]$ est une martingale nulle en 0.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n\right\|^2 ds\right] \leq 2\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2\right]+2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}K^2 ds\right].$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n\right\|^2 ds\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\left[e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2\right]+K^2\int_0^T e^{\alpha s} ds\right]. \tag{2.5}$$

Revenant à l'inégalité (2.4), les inégalités BDG fournissent :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|^2\right]+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n\right\|^2 ds\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}K^2 ds\right]-\mathbb{E}\left[\int_t^T 2e^{\alpha s}\left|Y_s^n\right|\left\|Z_s^n\right\| dW_s\right].$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}K^2 ds\right]$$

$$-C\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{2\alpha s}\left|Y_s^n\right|^2\left\|Z_s^n\right\|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part :

$$C\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{2\alpha s}\left|Y_s^n\right|^2\left\|Z_s^n\right\|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha s}{2}}\left|Y_s^n\right|\left(\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n\right\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

$$\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha s}\left|Y_s^n\right|^2\right]+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n\right\|^2 ds\right].$$

Il vient alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|^2\right]\leq 2\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}K^2 ds\right]$$
$$+C^2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n\right\|^2 ds\right].$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n\right\|^2 ds\right]$$
$$\leq 2\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}K^2 ds\right]$$
$$+2C^2\mathbb{E}\left[\left[e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2\right]+K^2\int_0^T e^{\alpha s}ds\right]$$
$$+2\mathbb{E}\left[\left[e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2\right]+K^2\int_0^T e^{\alpha s}ds\right].$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|Y_t^n\right|^2\right]+\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|Z_s^n\right\|^2 ds\right]$$
$$\leq \left(2+2C^2\right)\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}\left|\xi\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}K^2 ds\right].$$
$$\leq \left(2+2C^2\right)\left[e^{\alpha T}\mathbb{E}\left|\xi\right|^2+K^2\left(\frac{e^{\alpha T}}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\right)\right] \quad \blacksquare$$

Lemme 2.5 $\{Y_t^n\}_{t\in[0,T]}$ *est une suite de Cauchy dans* $S_c^2(\mathbb{R})$.

Preuve. $\mathbb{P}-p.s.$, pour tout $t \in [0,T]$ la suite $(Y_t^n)_n$est croissante et majorée par U_t donc $(Y_t^n)_n$converge dans $\mathbb{R}$ vert Y_t, de plus, on a, $\mathbb{P}-p.s.$, pour tout t :

$$\sup_{n\geq K} |Y_t^n| \leq \max\left(\left|Y_t^K\right|, |U_t|\right).$$

et ce magerant appartient à $S_c^2(\mathbb{R})$.

Le théorème de convergence dominée implique la convergence de Y_t^n vert Y dans $S_c^2(\mathbb{R})$ ■

Lemme 2.6 *La suite* $\{(Y_t^n, Z_t^n)\}_{t\in[0,T]}$ *est une suite de Cauchy dans* $\mathbb{B}^2$.

Preuve. On utilise La formule d'Itô à l'inégalité, avec les notations usuelles, si $m \geq n \geq K$,

pour tout $t \in [0,T]$:

$$|\delta Y_t|^2 + \int_t^T |\delta Z_s|^2 \, ds \leq 2\int_t^T |\delta Y_s| \left| f_{\ m}(s, Y_s^m, Z_s^m) - f_{\ n}(s, Y_s^n, Z_s^n)\right| ds$$
$$+2\int_t^T \delta Y_s \; \delta Z_s dW_s.$$

En particulier, pour $t = 0$, on obtient :

$$\mathbb{E}\int_0^T |\delta Z_s|^2 \, ds \leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^T |\delta Y_s| \left| f_{\ m}(s, Y_s^m, Z_s^m) - f_{\ n}(s, Y_s^n, Z_s^n)\right| ds\right].$$

Les inégalités BDG fournissent pour C_u universelle :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{\leq 0t\leq T} |\delta Y_t|^2 + \int_0^T |\delta Z_s|^2 \, ds\right]$$
$$\leq C_u \mathbb{E}\left[\int_0^T |\delta Y_s| \left| f_{\ m}(s, Y_s^m, Z_s^m) - f_{\ n}(s, Y_s^n, Z_s^n)\right| ds\right].$$

L inégalité de Hölder entraine, notant $\|.\|$ la norme dans S_c^2.

$$\mathbb{E}\left[\sup_{\leq 0t\leq T} |\delta Y_t|^2 + \int_0^T |\delta Z_s|^2 \, ds\right]$$
$$\leq C_u \|\delta Y_s\| \left(\mathbb{E}\left[\int_t^T \left| f_{\ m}(s, Y_s^m, Z_s^m) - f_{\ n}(s, Y_s^n, Z_s^n)\right|^2 ds\right]\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On utilise l'accroissance linéaire de la suite $f_{\ n}$ et le résultat de lemme 3 :

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T |f_{\ m}(s,Y_s^m,Z_s^m)-f_{\ n}(s,Y_s^n,Z_s^n)|^2\,ds\right]$$

$$=\mathbb{E}\left[\int_0^T |K(1+|Y_s^m|+|Z_s^m|)-K(1+|Y_s^n|+|Z_s^n|)|^2\,ds\right].$$

$$=\mathbb{E}\left[\int_0^T |K+K|Y_s^m|+K|Z_s^m|-K-K|Y_s^n|-K|Z_s^n||^2\,ds\right]$$

$$=\mathbb{E}\left[\int_0^T K|Y_s^m-Y_s^n|+K|Z_s^m-Z_s^n|^2\,ds\right].$$

$$=\mathbb{E}\left[\int_0^T |K|\delta Y_s|+K|\delta Z_s||^2\,ds\right].$$

$$=\mathbb{E}\left[\int_0^T K^2|\delta Y_s^n|^2+K^2|\delta Z_s^n|^2+K|\delta Y_s^n|\,|\delta Z_s^n|\,ds\right].$$

$$\leq K^2\mathbb{E}\left[\int_0^T |\delta Y_s^n|^2+|\delta Z_s^n|^2\,ds\right].$$

$$\sup_{m\geq n\geq K}\mathbb{E}\left[\int_t^T |f_{\ m}(s,Y_s^m,Z_s^m)-f_{\ n}(s,Y_s^n,Z_s^n)|^2\,ds\right]$$

$$\leq K^2\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|\delta Y_s^n|^2+\int_0^T|\delta Z_s^n|^2\,ds\right].$$

$$\leq 2K^2(2+C^2)\,\mathbb{E}\left[e^{\alpha T}|\xi|^2+\int_0^T e^{\alpha s}K^2ds\right]\leq +\infty.$$

Il existe C dépend de $K,T,\mathbb{E}(\xi)$ telle que pour tout $m\geq n\geq K$,

$$\|\delta Z_S\|^2\leq 2C\,\|\delta Y_t\|.$$

donc (Z^n) est une suite de Cauchy dans $M^2(\mathbb{R}^d)$.
On résulte que (Y^n,Z^n) est une suite de Cauchy converge dans $\mathbb{B}^2=\left(S_c^2(\mathbb{R})\times M^2(\mathbb{R}^d)\right)$. ■

Preuve du théorème

Notons (Y, Z) la limite de la suite (Y^n, Z^n) dans l'espace de Banach $\mathbb{B}^2$ on veut passer à la limite terme à terme dans l'équation :

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T f_{\ n}\left(s, Y_s^n, Z_s^n\right) ds \ + \int_t^T Z_s^n \ dW_s, \ 0 \le t \le T \tag{2.6}$$

Pour tout $m \ge n \ge K$ on a $Y_n \le Y_m \le U$ de plus $Y_n \to Y$ dans $S_c^2(\mathbb{R}), dt \otimes d\mathbb{P} - p.s.$

donc :

$$\sup_{n\ge K} |Y_n| \text{ est } dt \otimes d\mathbb{P} \ \text{ intégrable.}$$

Puisque $Z_n \to Z$ dans $M^2(\mathbb{R}^d)$ $, dt \otimes d\mathbb{P} - p.s.$

et $\sup\limits_{n\ge K} |Z_n|$ est $dt \otimes d\mathbb{P}$ integrable.

Comme l'intégrale stochastique est continue ;
On a :

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| \int_t^T Z_s^n dW_s - \int_t^T Z_s dW_s \right| \overset{\mathbb{P}-p.s.}{\to} 0.$$

Pour cela notons :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} |Y_t^n - Y_t|^2 + \left| \int_t^T Z_s^n dW_s - \int_t^T Z_s dW_s \right|^2\right]$$

$$\le 2 \left\|(Y^n, Z^n) - (Y, Z)\right\|^2 \to 0.$$

Il reste à étudié la convergence du terme absolument continu.
D'après la propriété **4.** de la suite f_n :

On déduit que : $f_{\ n}\left(s, Y_s^n, Z_s^n\right) \underset{n\to+\infty}{\to} f\ \left(s, Y_s, Z_s\right)\ dt - p.s.$

et $\left|f_n\left(s, Y_s^n, Z_s^n\right)\right| \le K \left(1 + \sup\limits_{n\ge K} |Y_t^n| + \sup\limits_{n\ge K} |Z_t^n|\right) \in L^1\left([0, T], dt\right).$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_t^T f_n\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)ds-\int_t^T f\left(s,Y_s,Z_s\right)ds\right|^2\right]$$

$$\leq T\ \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|f_n\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)-f\left(s,Y_s,Z_s\right)\right|^2 ds\right]\to 0.$$

Donc uniformément sur t.

$$\int_t^T f_n\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)ds \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_t^T f\left(s,Y_s,Z_s\right)ds \text{ dans } M^2.$$

Passant à la limite sur (2.6) lorsque $n\to+\infty$.
On obtient :

$$Y_t=\xi+\int_t^T f\left(s,Y_s,Z_s\right)ds+\int_t^T Z_s\ dW_s.$$

Chapitre 3

Equations différentielles stochastiques rétrogrades avec coefficient localement Lipschitzien

Depuis le résultat d'existence et d'unicité de EDSR. établir par Doux et Peng (1990), il y a quelque travaux on essayé d'affaiblir la condition de Lipschitz du coefficient.

Dans ce chapitre on étend les résultats de l'existence et l'unicité d'EDSR multidimensionnelles à coefficient localement Lipschitz et condition terminale carré intégrable.

On étudié l'existence et l'unicité comme stabilité de solution, on va établir l'existence et l'unicité si le coefficient f est localement Lipschitz dans les deux variables (y et z) et que le constant Lipschitz L_N dans la boule $B(O,N)$ par exemple $L_N = O(\sqrt{(LogN)})$ donc EDSR a été une unique solution.

3.1 Notations, hypothèses et définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et (W_t) $(t \in [0,1])$ un processus definir dans cet espace.

Soit $(\mathcal{F}_t,\ t \in [0,1])$ la filtration naturelle de (W_t) et ξ une variable aléatoire $(\mathcal{F}_1)$ mesurable d-dimensionnelle carré integrable.

Soit f définit sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times r}$ a valeur dans $\mathbb{R}^d$ telle que :

pour tout $(Y, Z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times r}$ $f(t, \omega, Y, Z)$ est F_t progressivement mesurables.

On considère l'EDSR suivant :

$$Y_t = \xi + \int_t^1 f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^1 Z_s dW_s, \ 0 < t < 1. \tag{3.1}$$

Définition 3.1 *Soit* $(\mathbb{B}^2, \|.\|)$ *l'espace de Banach où* $\mathbb{B}^2$ *l'ensemble des processus* (Y, Z) *de* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *a valeur dans* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times r}$ *telle que :*

$$\|(Y, Z)\|^2 = \mathbb{E}(\sup_{0<t<1} |Y_t|^2 + \int_0^1 |Z_s|^2 ds < +\infty).$$

On considère les hypothèses suivantes :
H$_1$) f est continue en (Y, Z) pour tout (t, ω).
H$_2$) Il existe deux constantes $M > 0$ et $\alpha \in [0, 1]$, telle que :

$$|f\ (t, \omega, Y, Z)| \leq M(1 + |Y|^\alpha + |Z|^\alpha) \ \ \mathbb{P} - p.s. \ \ \forall\ t \in [0, 1].$$

H$_3$) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $L_N > 0$ telle que :

$$\left|f\ (t, \omega, Y, Z) - f\ (t, \omega, \grave{Y}, \grave{Z})\right| \leq L_N\ (\left|\ Y - \grave{Y}\right| + \left|\ Z - \grave{Z}\right|\ ).$$

$\mathbb{P} - p.s.\ \forall\ t \in [0, 1]$.

et $\forall\ Y, \grave{Y}, Z, \grave{Z}$ telle que : $|Y| \leq N$, $\left|\grave{Y}\right| \leq N, |Z| \leq N, \left|\grave{Z}\right| \leq N.$

H$_4$) Il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$\left|f\ (t, \omega, Y, Z) - f\ (t, \grave{\omega}, Y, \grave{Z})\right| \leq L(\left|Y - \grave{Y}\right| + \left|Z - \grave{Z}\right|).$$

$\mathbb{P} - p.s.\ \forall\ t \in [0, 1]$.

Quand les htpothèses (H$_1$) et (H$_2$) sont satisfaites on peut définir une famille de semi-normes $(\rho_n(f))_{n\in N}$ par :

$$\rho_n(f) = (\mathbb{E} \textstyle\int_0^1 \sup\limits_{|Y|,|Z|\leq n} |f\ (s, Y, Z)|^2 ds)^{1/2}.$$

On désigne par Lip_{Loc} (respectivement Lip) l'ensemble des fonctions f vérifiant (H$_3$) (resp(H$_4$)) et par $Lip_{Loc,\alpha}$ l'ensemble des fonctions qui vérifiées l'hypothèses (H$_2$), (H$_4$).

3.2 EDSR avec coefficient localement Lipschitzien

Théorème 3.2 *Soit $f \in Lip_{Loc,\alpha}$ et ξ une variable aléatoire carré intégrable $\left(\mathbb{E}\left|\xi\right|^2 < +\infty\right)$.*

Supposons en plus qu'il existe une constante positive L telle que $L_N = L + \sqrt{\log N}$ alors l'EDSR (3.1) admet une solution unique.

Le corollaire suivant donne une condition faible sur L_N dans le cas où f est uniformement Lipschitzien en Z et localement Lipschitzien en Y.

Corollaire 3.3 *Soit (H_1), (H_2) sont satisfaites et ξ est un variable aléatoire carré intégrable.*

Posons que f est uniformément Lipschitz en Z et localement Lipschitzien en Y.

On disigné par L_N un constant localement à f donc l'equation (3.1) admette une unique solution si $L_N \leq L + \log N$ où L un constant positif.

On besoint les lemmes suivants pour preuvé le théorème et la corollaire.

Lemme 3.4 ***a)*** *Soit (Y, Z) une solution de l'équation (3.1) si f satisfaite l'hypothèse (H_2) alors il existe une constante positive $K = K(M, \xi)$ dépendant seulement de M et de $\mathbb{E}(\xi)$ telle que :*

$$\text{pour tout } t \in [0,1], \mathbb{E}\left(\left|Y_t\right|^2\right) \leq K \text{ et } \mathbb{E}\int_0^1 \left|Z_t\right|^2 ds \leq K.$$

b) *Soit ξ_1, ξ_2 deux variables aléatoires d-dimensionnelle carré intégrables sont F_1 mesurables*

Soient f_1, f_2 telle que f_1 satisfaisant (H_1), (H_2) et (H_3) et f_2 satisfaisant (H_1) et (H_2).

Soit (Y_1, Z_1) (resp (Y_2, Z_2)) solution de l'EDSR, (3.1) (f_1, ξ_1) (resp (f_2, ξ_2)), alors pour tout $N > 1$:

$$\mathbb{E}\int_t^1 \left|Z_s^1 - Z_s^2\right|^2 ds \leq K\left(M, \xi^1, \xi^2\right)\left[\mathbb{E}\left|\xi^1 - \xi^2\right| + \left(\mathbb{E}\int_t^1 \left|Y_s^1 - Y_s^2\right|^2 ds\right)^{1/2}\right]. \tag{3.2}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|Y_t^1 - Y_t^2\right|^2\right) \quad \leq \quad & \left[\mathbb{E}\left|\xi_t^1 - \xi_t^2\right|^2 + \frac{1}{L_N^2}\rho_N^2\left(f^1 - f^2\right)\right. \qquad \textit{(3.3)} \\ & \left. + \frac{K\left(M, \xi^1, \xi^2\right)}{L_N^2 N^{2(1-\alpha)}}\right] \exp\left[2(1-t)\left(L_N^2 - 1\right)\right].\end{aligned}$$

Où $K\left(M,\xi^1,\xi^2\right)$ *est une constante dépend de* $M,\mathbb{E}\left(\left|\xi^1\right|^2\right)$ *et*$\mathbb{E}\left(\left|\xi^2\right|^2\right)$.

Preuve. On a $|x|^\alpha \leq 1+|x|$ pour tout $\alpha \in [0,1]$.

1) L'assertion (**a**) s'ensuite de la formule d'Itô, l'hypothèse (H_2), Lemme de Gronwall et l'inégalité de BDG donc on a :

$$\begin{aligned}|f(t,Y,Z)| &\leq M\left(1+|Y|^\alpha+|Z|^\alpha\right)\\ &\leq M\left(1+1+|Y|+1+|Z|\right)\\ &\leq M\left(3+|Y|+|Z|\right)\\ &\leq 3M+M\ |Y|+M\ |Z|\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}|Y\ |\ |f(t,Y,Z)| &\leq |Y|\ (\ 3M+M\ \ |Y|+M\ \ |Z|).\\ &\leq 3M\ |Y|+M\ |Y|^2+M\ |Y|\ |Z|.\end{aligned}$$

Utilisons le fait que pour $\varepsilon=1$ puis 2 ; $ab \leq \dfrac{1}{\varepsilon}\ a^2+\varepsilon b^2$.

$$\begin{aligned}|Y|\ |f(t,Y,Z)| &\leq 9+M^2|Y|^2+\tfrac{1}{2}M^2|Y|^2+2|Y|^2+2M^2|Y|^2+\tfrac{1}{2}|Z|^2\\ &\leq 9+4M^2|Y|^2+|Y|^2+\tfrac{1}{2}|Z|^2.\end{aligned}$$

On applique la formule d'Itô à $|Y_t|^2$ pour obtenir :

$$d|Y_t|^2=2|Y_t|\left[-f\ \ (t,Y,Z)\,dt+Z_t dW_t\right]+|Z_t|^2\,dt.$$

Intégrant entre t et 1 donc :

$$\xi^2-|Y_t|^2=2\int_t^1-|Y_s|\,|f(s,Y_s,Z_s)|\,ds+2\int_t^1|Y_s|\,|Z_s|\,dW_s+\textstyle\int_t^1|Z_s|^2\,ds.$$

$$|Y_t|^2+\int_t^1|Z_s|^2\,ds=\ \xi^2+2\int_t^1|Y_s|\,|f(s,Y_s,Z_s)|\,ds-2\int_t^1|Y_s|\,|Z_s|\,dW_s.$$

$$|Y_t|^2+\int_t^1|Z_s|^2\,ds\leq\xi^2+\int_t^1\left(9+(1+4M^2)\quad|Y_s|^2+\tfrac{1}{2}|Z_s|^2\right)ds-2\int_t^1|Y_s|\,|Z_s|\,dW_s.$$

Donc :

$$|Y_t|^2+\frac{1}{2}\int_t^1 |Z_s|^2\, ds \leq |\xi|^2+\int_t^1 \left(9+(1+4M^2)\,|Y|^2\right) ds-2\int_t^1 |Y_s|\,|Z_s|\, dW_s.$$

$$|Y_t|^2+\frac{1}{2}\int_t^1 |Z_s|^2\, ds \leq |\xi|^2+\int_t^1 9+(1+4M^2)\,|Y|^2\, ds-2\int_t^1 |Y_s|\,|Z_s|\, dW_s.$$

$$|Y_t|^2+\frac{1}{2}\int_t^1 |Z_s|^2\, ds \leq |\xi|^2+\int_t^1 9ds+(1+4M^2)\int_t^1 |Y|^2\, ds-2\int_t^1 |Y_s|\,|Z_s|\, dW_s.$$

Prenant l'espérance

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|Y_t|^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^1 |Z_s|^2\, ds &\leq \mathbb{E}\left(|\xi|^2\right)+\mathbb{E}\left(\int_t^1 9ds\right)+(1+4M^2)\,\mathbb{E}\left(\int_t^1 |Y|^2\, ds\right)\\ &\quad-\left[2\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s|\,|Z_s|\, dW_s\right].\\ &\leq \left[\mathbb{E}\left(|\xi|^2\right)+\mathbb{E}\int_t^1 9ds\right]+\left[1+4M^2\right]\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s|^2\, ds.\end{aligned}$$

D'après le Lemme de Gronwall :

$$\mathbb{E}\,|Y_t|^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^1 |Z_s|^2\, ds \leq \left[\mathbb{E}\left(|\xi|^2\right)+\mathbb{E}\int_t^1 9ds\right].\exp\left[1+4M^2\right]\left[1-t\right].$$

Pour $t=0$:

$\int_0^1 |Z_s|^2\, ds \leq 2\left[\left(\mathbb{E}\left(|\xi|^2\right)+9\right)\right]\exp\left(1+4M^2\right).$

Donc : $$\int_t^1 |Z_s|^2\, ds \leq K\left(\xi, M\right).$$

Où K une constante dépend de ξ et M.

Revenant à l'inégalité :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|Y_t|^2+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^1 |Z_s|^2\, ds &\leq \mathbb{E}\left(|\xi|^2\right)+\mathbb{E}\left(\int_t^1 9ds\right)\\ &\quad+(1+4M^2)\,\mathbb{E}\left(\int_t^1 |Y|^2\, ds\right)-\left[2\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s|\,|Z_s|\, dW_s\right].\end{aligned}$$

Les inégalités BDG fournissent avec -C universelle- :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|Y_t|^2\right] \leq \left[\mathbb{E}|\xi|^2+9\right]\exp(4M^2+1)$$

$$+C\left[\mathbb{E}(\int_t^1 |Y_s|^2|Z_s|^2\,ds)^{1/2}\right].$$

D'autre part :

$$C\ \mathbb{E}\left[(\int_t^1 |Y_s|^2|Z_s|^2\,ds)^{1/2}\right] \leq C\ \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|Y_t|\left(\int_t^1 |Z_s|^2\,ds\right)^{1/2}\right].$$

$$\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|Y_t|^2\right]+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\int_t^1|Z_s|^2\,ds.$$

Il vient alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|Y_t|^2\right] \leq \left[\left[\mathbb{E}|\xi|^2+9\right]\exp(4M^2+1)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|Y_t|^2\right]+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\int_t^1|Z_s|^2\,ds.$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|Y_t|^2\right] \leq 2\left[\left[\mathbb{E}|\xi|^2+9\right]\exp(4M^2+1)\right]+C^2\mathbb{E}\int_t^1|Z_s|^2\,ds.$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|Y_t|^2\right] \leq 2\left[\left[\mathbb{E}|\xi|^2+9\right]\exp(4M^2+1)\right]$$

$$+2C^2\left[\left(\mathbb{E}\left(|\xi|^2\right)+9\right)\right]\exp\left(1+4M^2\right).$$

$$\leq 2\left[\left[\mathbb{E}|\xi|^2+9\right]\exp(4M^2+1)\left[2+C\left(M\right)\right]\right].$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|Y_t|^2\right] \leq 2\left[1+C\left(M\right)\right]\left[\mathbb{E}|\xi|^2+9\right]\exp(4M^2+1).$$

Donc : $$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|Y_t|^2\right] \leq K\left(M,\xi\right).$$

2) Pour démontré l'inégalité (3.2) On utilise la formule d'Itô et l'inégalité de Schwarz, avec la formule d'Itô en obtient :

$$|Y_t^1 - Y_t^2|^2 + \int_t^1 |Z_t^1 - Z_t^2|^2 \, ds$$

$$= \left|\xi^1 - \xi^2\right|^2 + 2\int_t^1 |Y_s^1 - Y_s^2| \, |f^1(s, Y_s^1, Z_s^1) - f^2(s, Y_s^2, Z_s^2)|$$

$$-2\int_t^1 |Y_s^1 - Y_s^2| \, |Z_t^1 - Z_t^2| \, dW_s.$$

On prend l'espérance :

$$\mathbb{E}\,|Y_t^1 - Y_t^2|^2 + \mathbb{E}\int_t^1 |Z_s^1 - Z_s^2|^2 \, ds$$

$$= \mathbb{E}\left|\xi^1 - \xi^2\right|^2 + 2\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^1 - Y_s^2| \, |f^{\,1}(s, Y_s^1, Z_s^1) - f^{\,2}(s, Y_s^2, Z_s^2)| \, ds.$$

On a d'après Schwarz :

$$\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^1 - Y_s^2| \, |f^{\,1}(s, Y_s^1, Z_s^1) - f^{\,2}(s, Y_s^2, Z_s^2)| \, ds$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\left(\int_t^1 |Y_s^1 - Y_s^2|^2 \, ds\right)^{1/2}\right] \mathbb{E}\left[\int_t^1 |f^{\,1}(s, Y_s^1, Z_s^1) - f^{\,2}(s, Y_s^2, Z_s^2)|^2 \, ds\right]^{1/2}.$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\left(\int_t^1 |Y_s^1 - Y_s^2|^2 \, ds\right)^{1/2}\right]$$

$$\times \mathbb{E}\left[\int_t^1 (3M + |Y_1| + |Z_1| + 3M + |Y_2| + |Z_2|)^2 \, ds\right]^{1/2}.$$

$$\leq K\left(M, \xi^1, \xi^2\right) \mathbb{E}\left[\left(\int_t^1 |Y_s^1 - Y_s^2|^2 \, ds\right)\right]^{1/2}.$$

Donc :

$$\mathbb{E}\int_t^1 |Z_s^1 - Z_s^2|^2 \, ds$$

$$\leq K\left(M, \xi^1, \xi^2\right) \left[\mathbb{E}\left|\xi^1 - \xi^2\right|^2 + \mathbb{E}\left(\int_t^1 |Y_s^1 - Y_s^2|^2\right)^{1/2}\right].$$

Pour démontré l'inégalité (3.3) on utilise la formule d'Itô
On a :

$$|Y_t^1 - Y_t^2|^2 + \int_t^1 |Z_s^1 - Z_s^2|^2 \, ds =$$

$$= \left|\xi^1 - \xi^2\right|^2 + 2\int_t^1 |Y_s^1 - Y_s^2| \, |f^{\ 1}(s, Y_s^1, Z_s^1) - f^{\ 2}(s, Y_s^2, Z_s^2)| \, ds$$

$$-2\int_t^1 |Y_s^1 - Y_s^2| \, |Z_t^1 - Z_t^2|^2 \, dW_s.$$

Soit B une ensemble positive .

Pour $N > 1$ donnée, soit L_N la constante de Lipschitz de $\acute{f}$ dans la boule $B\,(0, N)$.
On pose :

$$A_N := \left\{(s, \omega)\,; |Y_s^1|^2 + |Z_s^1|^2 + |Y_s^2|^2 + |Z_s^2|^2 \geq N^2\right\}.$$

$$A_N^C := \Omega / A_N.$$

Prenant l'espérance dans l'equation précédente,
On déduire que :

$$\mathbb{E}\,|Y_t^1 - Y_t^2|^2 + \mathbb{E}\int_t^1 |Z_s^1 - Z_s^2|^2 \, ds$$

$$\leq \mathbb{E}\left|\xi^1 - \xi^2\right|^2 + \ 2\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^1 - Y_s^2| \, |f^{\ 1}(s, Y_s^1, Z_s^1) - f^{\ 2}(s, Y_s^2, Z_s^2)| \, ds.$$

$$\leq \mathbb{E}\left|\xi^1 - \xi^2\right|^2 + B^2\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^1 - Y_s^2|^2 \, ds$$

$$+\frac{1}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1 f^{\ 1}(s, Y_s^1, Z_s^1) - f^{\ 2}(s, Y_s^2, Z_s^2)^2 \, ds.$$

$$\leq \mathbb{E}\left|\xi^1 - \xi^2\right|^2 + B^2\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^1 - Y_s^2|^2 \, ds$$

$$+\frac{1}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1 \left[|f^{\ 1}(s, Y_s^1, Z_s^1) - f^{\ 2}(s, Y_s^2, Z_s^2)|^2\right] \times \chi_{A_N} ds$$

$$+\frac{1}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1 \left[\left|f^{\ 1}\left(s,Y_s^1,Z_s^1\right)-f^{\ 2}\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)\right|^2\right]\times\chi_{A_N^C}ds.$$

$$\leq \mathbb{E}\left|\xi^1-\xi^2\right|^2+B^2\mathbb{E}\int_t^1\left|Y_s^1-Y_s^2\right|^2 ds$$

$$+\frac{2M}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1\left(1+\left|Y_s^1\right|^\alpha+\left|Z_s^1\right|^\alpha\right)^2\times\chi_{A_N}ds$$

$$+\ \frac{2M}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1\left(1+\left|Y_s^2\right|^\alpha+\left|Z_s^2\right|^\alpha\right)^2\times\chi_{A_N}ds$$

$$+\frac{1}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1 [\left|f^1\left(s,Y_s^1,Z_s^1\right)-f^1\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)+f^1\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)\right.$$

$$\left.+f^2\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)\right|^2\Big]\times\chi_{A_N^C}ds.$$

$$\leq \mathbb{E}\left|\xi^1-\xi^2\right|^2+B^2\mathbb{E}\textstyle\int_t^1\left|Y_s^1-Y_s^2\right|^2 ds$$

$$+\ \frac{6M}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1\left(1+\left|Y_s^1\right|^{2\alpha}+\left|Z_s^1\right|^{2\alpha}+\left|Y_s^2\right|^{2\alpha}+\left|Z_s^2\right|^{2\alpha}\right)\times\chi_{A_N}ds$$

$$+\frac{2}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1 \left[\left|f^{\ 1}\left(s,Y_s^1,Z_s^1\right)-f^{\ 1}\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)\right|^2\right]\times\chi_{A_N^C}ds$$

$$+\frac{2}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1 \left[\left|f^{\ 1}\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)-f^{\ 2}\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)\right|^2\right]\times\chi_{A_N^C}ds.$$

$$\leq \mathbb{E}\left|\xi^1-\xi^2\right|^2+B^2\mathbb{E}\int_t^1\left|Y_s^1-Y_s^2\right|^2 ds$$

$$+\frac{6M}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1\left(1+\left|Y_s^1\right|^{2\alpha}+\left|Z_s^1\right|^{2\alpha}+\left|Y_s^2\right|^{2\alpha}+\left|Z_s^2\right|^{2\alpha}\right)\chi_{A_N}\ ds$$

$$+\frac{2}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1\left|f^1\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)-f^2\left(s,Y_s^2,Z_s^2\right)\right|^2 ds$$

$$+\frac{2}{B^2}L_N\mathbb{E}\int_t^1\left(\left|Y_s^1-Y_s^2\right|^2+\left|Z_s^1-Z_s^2\right|^2\right)ds.$$

On utilise l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Chebychev et le Lemme $(3.4-a)$ pour :

$$\frac{1}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1 \left|f^{\ 1}\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - f^{\ 2}\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right)\right|^2 \chi_{A_N}\ ds$$

$$\leq \frac{6\ M}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1 \left(2 + \left|Y_s^1\right|^{2\alpha} + \left|Z_s^1\right|^{2\alpha} + \left|Y_s^2\right|^{2\alpha} + \left|Z_s^2\right|^{2\alpha}\right)\chi_{A_N} ds$$

$$\leq C\left[\mathbb{E}\left(\left(\int_t^1 \left|2 + \left|Y_s^1\right|^{2\alpha} + \left|Z_s^1\right|^{2\alpha} + \left|Y_s^2\right|^{2\alpha} + \left|Z_s^2\right|^{2\alpha}\right|^{1/\alpha} ds\right)^{\alpha}\right)\right.$$

$$\left.\times\mathbb{E}\left(\left(\int_t^1 1_{A_N}^{1/(1-\alpha)} ds\right)^{1-\alpha}\right)\right].$$

$$\leq C\left[K\ \left(M, \xi^1, \xi^2\right) \times\ \frac{1}{N^{\ 2\ (1-\ \alpha\ )}}\right].$$

Où $K\left(M, \xi^1, \xi^2\right)$ est une constante dépende de $M, \mathbb{E}\left|\xi^1\right|^2, \mathbb{E}\left|\xi^2\right|^2$.
Alors :

$$\mathbb{E}\left|Y_t^1 - Y_t^2\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^1 \left|Z_t^1 - Z_t^2\right|^2 ds$$

$$\leq \mathbb{E}\left|\xi_t^1 - \xi_t^2\right|^2 + \left(B^2 + \frac{2\ L_{\ N}^{\ 2}}{B^2}\right)\mathbb{E}\int_t^1 \left|Y_s^1 - Y_s^2\right|^2 ds$$

$$+\frac{2}{B^2}\rho_N^2\left(f^1 - f^2\right) + \frac{K\ \left(\ M,\ \xi^{\ 1},\ \xi^{\ 2}\right)}{B^{\ 2}N^{\ 2\ (\ 1\ -\ \alpha)}} + \frac{2\ L_{\ N}^{\ 2}}{B^2}\ \mathbb{E}\int_t^1 \left|Z_s^1 - Z_s^2\right|^2 ds.$$

Si on choisit B telle que $\dfrac{2\ L_{\ N}^{\ 2}}{B^{\ 2}} = 1$ et s'ensuite de la formule de Gronwall que, pour $t \in [0, 1]$:

$$\mathbb{E}\left|Y_t^1 - Y_t^2\right|^2 \leq \left[\mathbb{E}\left|\xi_t^1 - \xi_t^2\right|^2 + \frac{1}{L_{\ N}^{\ 2}}\rho_N^2\left(f^1 - f^2\right)\right.$$

$$\left. + \frac{K\ \left(M\ ,\ \xi^1\ ,\ \xi^2\right)}{L_{\ N}^{\ 2}\ \ N^{\ 2\ (\ 1-\ \alpha\ )}}\right]\ \exp\left[\left(2L^2 + 1\right)(1 - t)\right].\ \blacksquare$$

Lemme 3.5 *Soit f une fonction satisfaisant les hypothèses (H_1) et (H_2) alors il existe une suite de fonction (f_n) telle que :*

i) a) *Pour tout n, $f_n \in Lip_\alpha$.*

b) *Pour tout n :*

$$\sup_n |f_n(t,\omega,Y,Z)| \leq |f(t,Y,Z)| \leq M(1+|Y|^\alpha + |Z|^\alpha)$$

$$\mathbb{P}-p.s.\ \mathbb{P}.p.\ t \in [0,1].$$

ii) *Pour chaque N, $\rho_N\ (f_n - f) \to 0$, quand $n \to \infty$.*

Preuve. Soit ψ_n une suite de fonctions régulières telle que :

$$0 \leq \psi_n(x) \leq 1$$

$$\begin{cases} \psi_n(x) = 1 & x \leq n. \\ \psi_n(x) = 0. & x \geq n+1. \end{cases}$$

On définie l'appliquation f_n par $f_n(t,Y,Z) = f\ (t,Y,Z)\,\psi_n(Y)\,\psi_n(Z)$.

Donc :

i)-a) Pour chaque n :

$$\begin{aligned} |\ f_n(\ t,Y,Z\ )\ | &\leq |f(\ t,Y,Z\ )\,\psi_n(Y)\,\psi_n(Z)| \\ &\leq |\ f\ \ (t,Y,Z)\ | \\ &\leq M\ (\ 1+|\ Y\ |^\alpha + |\ Z\ |^\alpha). \end{aligned}$$

-b) Pour tout n :

$$\sup_n |f_n(t,\omega,Y,Z)| = \left| f(t,\omega,Y,Z) \sup_n \psi_n(Y) \sup_n \psi_n(Z) \right|.$$

$$\leq |f(t,\omega,Y,Z)| \leq M(1+|Y|^{\ \alpha} + |Z|^{\ \alpha})\ \mathbb{P}-p.s.p.p\ t \in [0,1].$$

ii) Pour chaque N :

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\ \mathbb{E}\left(\int_0^1 \sup_{|Y||Z|<N} |\ f_n(t,\omega,Y,Z) - f\ \ (t,\omega,Y,Z)|^{\ 2} ds\right)^{1/2}$$

$$\leq \underset{n\to+\infty}{Lim}\ \mathbb{E}\left(\int_0^1 \sup_{|Y||Z|<N} \left|f\left(t,\omega,Y,Z\right)\psi_n\left(Y\right)\psi_n\left(Z\ \right)-f\ \ \left(t,\omega,Y,Z\right)\right|^{\ 2} ds\right)^{1/2}.$$

$$\leq \underset{n\to+\infty}{Lim}\ \mathbb{E}\left(\int_0^1 \sup_{|Y||Z|<N} \left|f\left(t,\omega,Y,Z\right)-f\ \ \left(t,\omega,Y,Z\right)\right|^{\ 2} ds\right)^{1/2}.$$

$$= 0. \ \blacksquare$$

Lemme 3.6 *Soient f et ξ satisfaisants les hypothèses du théorème (3.2). Soit f_n une suite de processus associe à f par lemme (3.5).*

On note (Y^n, Z^n) la solution de l'équation (3.1)(f_n) alors il existe une constante $k = K(M,\xi)$ dépend seulement de M et $\mathbb{E}\left|\xi\right|^2$ telle que :

a) $\sup\limits_n \mathbb{E}\left(\left|Y_t^n\right|^2\right) \leq K.$

b) $\sup\limits_n \mathbb{E}\int_0^1 \left|Z_s^n\right|^2 ds \leq K.$

La démonstration de ce Lemme est comme la démonstration de lemme (3.4-a).

Preuve. On a $|x|^\alpha \leq 1 + |x|$ pour tout $\alpha \in [0,1]$.

1) L'assertion (**a)** s'ensuite de la formule d'Itô, l'hypothèse (H_2), Lemme de Gronwall et l'inégalité de BDG donc on a :

$$\begin{aligned}\left|f\left(t,Y,Z\right)\right| &\leq M\left(1+\left|Y\right|^\alpha+\left|Z\right|^\alpha\right)\\ &\leq M\left(1+1+\left|Y\right|+1+\left|Z\right|\right)\\ &\leq M\left(3+\left|Y\right|+\left|Z\right|\right)\\ &\leq 3M + M\ \left|Y\right| + M\ \left|Z\right|.\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}2\left|Y\ \right|\left|f\left(t,Y,Z\right)\right| &\leq 2\left|Y\right|\left(\ 3M + M\ \ \left|Y\right| + M\ \ \left|Z\right|\right)\\ &\leq 6M\ \left|Y\right| + 2M\ \left|Y\right|^2 + 2M\ \left|Y\right|\ \left|Z\right|.\end{aligned}$$

Utilisons le fait que pour $\varepsilon = 1$ puis 2 ; $2ab \leq \dfrac{1}{\varepsilon}\ a^2 + \varepsilon b^2.$

$$2\left|Y\right| \, \left|f\left(t,Y,Z\right)\right| \leq 9+M^{2}\left|Y\right|^{2}+1M^{2}\left|Y\right|^{2}+\left|Y\right|^{2}+2M^{2}\left|Y\right|^{2}+\tfrac{1}{2}\left|Z\right|^{2}$$

$$\leq 9+4M^{2}\left|Y\right|^{2}+\left|Y\right|^{2}+\tfrac{1}{2}\left|Z\right|^{2}.$$

On applique la formule d'Itô à $\left|Y_t^n\right|^2$ pour obtenir :

$$d\left|Y_t^n\right|^2=2\left|Y_t^n\right|\left[-f_{\ n}\left(t,Y_t^n,Z_t^n\right)dt+Z_t^n dW_t\right]+\left|Z_t^n\right|^2 dt.$$

Intégrant entre t et 1 donc :

$$\xi^2-\left|Y_t^n\right|^2=2\int_t^1 -\left|Y_s^n\right|\left|f\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)\right|ds+2\int_t^1\left|Y_s^n\right|\left|Z_s^n\right|dW_s+\int_t^1\left|Z_s^n\right|^2 ds.$$

$$\left|Y_t^n\right|^2+\int_t^1\left|Z_s^n\right|^2 ds=\ \xi^2+2\int_t^1\left|Y_s^n\right|\left|f\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)\right|ds-2\int_t^1\left|Y_s^n\right|\left|Z_s^n\right|dW_s.$$

$$\left|Y_t^n\right|^2+\int_t^1\left|Z_s^n\right|^2 ds\leq\xi^2+\int_t^1\left(9+\left(1+4M^2\right)\quad\left|Y_s^n\right|^2+\tfrac{1}{2}\left|Z_s^n\right|^2\right)ds-2\int_t^1\left|Y_s^n\right|\left|Z_s^n\right|dW_s$$

Donc :

$$\left|Y_t^n\right|^2+\tfrac{1}{2}\int_t^1\left|Z_s^n\right|^2 ds\leq\left|\xi\right|^2+\int_t^1\left(9+\left(1+4M^2\right)\left|Y_s^n\right|^2\right)ds-2\int_t^1\left|Y_s^n\right|\left|Z_s^n\right|dW_s.$$

$$\left|Y_t^n\right|^2+\tfrac{1}{2}\int_t^1\left|Z_s^n\right|^2 ds\leq\left|\xi\right|^2+\int_t^1 9+\left(1+4M^2\right)\left|Y_s^n\right|^2 ds-2\int_t^1\left|Y_s^n\right|\left|Z_s^n\right|dW_s$$

$$\left|Y_t^n\right|^2+\tfrac{1}{2}\int_t^1\left|Z_s^n\right|^2 ds\leq\left|\xi\right|^2+\int_t^1 9ds+\left(1+4M^2\right)\int_t^1\left|Y_s^n\right|^2 ds-2\int_t^1\left|Y_s^n\right|\left|Z_s^n\right|dW_s$$

Prenant l'espérance :

$$\mathbb{E}\left|Y_t^n\right|^2+\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^1\left|Z_s^n\right|^2 ds\leq\mathbb{E}\left(\left|\xi\right|^2\right)+\mathbb{E}\left(\int_t^1 9ds\right)+\left(1+4M^2\right)\mathbb{E}\left(\int_t^1\left|Y_s^n\right|^2 ds\right)$$

$$-\left[2\mathbb{E}\int_t^1\left|Y_s^n\right|\left|Z_s^n\right|dW_s\right].$$

$$\leq\left[\mathbb{E}\left(\left|\xi\right|^2\right)+\mathbb{E}\int_t^1 9ds\right]+\left[1+4M^2\right]\mathbb{E}\int_t^1\left|Y_s^n\right|^2 ds.$$

D'après le Lemme de Gronwall :

$$\mathbb{E}\left|Y_t^n\right|^2 + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^1 \left|Z_s^n\right|^2 ds \leq \left[\mathbb{E}\left(|\xi|^2\right) + \mathbb{E}\int_t^1 9ds\right].\exp\left[1+4M^2\right]\left[1-t\right].$$

Pour $t=0$:

$$\int_0^1 \left|Z_s^n\right|^2 ds \leq 2\left[\left(\mathbb{E}\left(|\xi|^2\right)+9\right)\right]\exp\left(1+4M^2\right).$$

Donc :

$$\int_0^1 \left|Z_s^n\right|^2 ds \leq K\left(\xi, M\right).$$

Où K une constante dépend de ξ et M.
revenant à l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left|Y_t^n\right|^2+\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\int_t^1 \left|Z_s^n\right|^2 ds \leq \mathbb{E}\left(|\xi|^2\right)+\mathbb{E}\left(\int_t^1 9ds\right)+\left(1+4M^2\right)\mathbb{E}\left(\int_t^1 \left|Y_s^n\right|^2 ds\right)$$
$$-\left[2\mathbb{E}\int_t^1 \left|Y_s^n\right|\left|Z_s^n\right| dW_s\right].$$

les inégalités BDG fournissent avec -C universelle- :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}\left|Y_t^n\right|^2\right] \leq \left[\mathbb{E}\left|\xi\right|^2+9\right]\exp(4M^2+1)$$
$$+C\left[\mathbb{E}(\int_0^1 \left|Y_s^n\right|^2\left|Z_s^n\right|^2 ds)^{1/2}\right].$$

D'autre part :

$$C\ \mathbb{E}\left[(\int_0^1 \left|Y_s\right|^2\left|Z_s^n\right|^2 ds)^{1/2}\right] \leq C\ \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}\left|Y_t^n\right|\left(\int_0^1 \left|Z_s^n\right|^2 ds\right)^{1/2}\right].$$
$$\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}\left|Y_t^n\right|^2\right]+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\int_0^1 \left|Z_s^n\right|^2 ds.$$

Il vient alors :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}\left|Y_t^n\right|^2\right] \leq \left[\left[\mathbb{E}\left|\xi\right|^2+9\right]\exp(4M^2+1)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|Y_t^n|^2\right]+\frac{C^2}{2}\mathbb{E}\int_0^1|Z_s^n|^2\,ds.$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|Y_t^n|^2\right]\leq 2\left[\left[\mathbb{E}\left|\xi\right|^2+9\right]\exp(4M^2+1)\right]$$

$$+C^2\mathbb{E}\int_0^1|Z_s^n|^2\,ds.$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|Y_t^n|^2\right]\leq 2\left[\left[\mathbb{E}\left|\xi\right|^2+9\right]\exp(4M^2+1)\right]+2C^2\left[\left(\mathbb{E}\left(|\xi|^2\right)+9\right)\right]\exp\left(1+4M^2\right)$$

$$+2C^2\left[\left(\mathbb{E}\left(|\xi|^2\right)+9\right)\right]\exp\left(1+4M^2\right).$$

$$\leq 2\left[\left[\mathbb{E}\left|\xi\right|^2+9\right]\exp(4M^2+1)\left[2+C\left(M\right)\right]\right].$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|Y_t^n|^2\right]\leq 2\left[1+C\left(M\right)\right]\left[\mathbb{E}\left|\xi\right|^2+9\right]\exp(4M^2+1).$$

Donc :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}|Y_t^n|^2\right]\leq K\left(M,\xi\right). \quad \blacksquare$$

Lemme 3.7 *Soient f et ξ comme dans la théorème (3.2)*
Soit (f_n) une suite de fonction associée à f d'après lemme(3.5) et on note par (Y^n,Z^n) la solution de l'équation (3.1)(f_n,ξ) alors il existe une processus $(Y,Z)\in\mathbb{B}^2$ telle que :

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\left\|(Y^n,Z^n)-(Y,Z)\right\|=0.$$

Preuve. Pour un calcul plus simple on suppose que $L=0$;

remarquons que pour tout $n\geq N+1$,

$$\left|f_n\left(t,Y,Z\right)-f_n\left(t,\grave{Y},\grave{Z}\right)\right|\leq L_N\left(\left|Y-\grave{Y}\right|+\left|Z-\grave{Z}\right|\right).$$

dans la boule $B(0,N)$.

1)Supposant premièrement que $L_N \leq \sqrt{(1-\alpha)\, logN}$ et comme dans

le lemme (3.4) on pose :

$(Y^1, Z^1, f^{\,1}, \xi^1) = (Y^n, Z^n, f_n, \xi)$,$(Y^2, Z^2, f^2, \xi^2) = (Y^m, Z^m, f_m, \xi)$.

C'a.d :

$$\mathbb{E}\int_t^1 |Z_s^n - Z_s^m|^2\, ds \leq K(M,\xi)\left[\mathbb{E}\left[\int_t^1 |Y_s^n - Y_s^m|^2\, ds\right]^{1/2}\right].$$

$$\mathbb{E}\,|Y_t^n - Y_t^m|^2 \leq \left|\left[\frac{\rho^2(f_n - f_m)}{L_N^2} + \frac{K(M,\xi)}{N^{2(1-\alpha)}L_N^2}\right]\right.$$

$$\left.\exp\left[(2L_N^2 + 1)(1-t)\right]\right|.$$

Passant à la limite en n, m et N successivement :

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\,\mathbb{E}\left[|Y_t^n - Y_t^m|^2\right] \leq \left|\left[\frac{\rho^2(f_n - f) + \rho^2(f - f_m)}{(1-\alpha)\log N} + \frac{K(M,\xi)}{N^{2(1-\alpha)}\,(1-\alpha)\log N.}\right]\right.$$

$$\left.\exp\left[((2(1-\alpha)\log N) + 1)(1-t)\right]\right|.$$

On démontre que (Y^n, Z^n) est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $(\mathbb{B}^2, \|.\|)$.

2) Supposons maintenant que $L_N \leq \sqrt{\log N}$.

Soit δ un nombre strictement positif telle que $\delta > 1-\alpha$ et soit $[t_i, t_{i+1}]$ une subdivision de $[0,1]$ telle que $|t_{i+1} - t_i| \leq \delta$.

On applique lemme (3.4) dans tous les sens-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$. ■

Preuve du théorème (3.2) :

L'unicité

Soit (Y^1, Z^1, f, ξ) et (Y^2, Z^2, f, ξ) deux solutions de EDSR d'après la formule d'Itô que :

$$\mathbb{E}\left[|\Delta Y_t|^2 + \int_t^1 |\Delta Z_s|^2 \, ds\right] = 2\mathbb{E}\left[\int_t^1 |\Delta Y_s| \left|f\left(s, Y^1, Z^1\right) - f\left(s, Y^2, Z^2\right)\right| ds\right].$$

Pour $N \geq 1$;

On a : $A_N := \left\{(s, \omega) \, ; |Y_s^1|^2 + |Y_s^2|^2 + |Z_s^1|^2 + |Z_s^2|^2 \geq N^2\right\}$, $A_N^C := \Omega / A_N$.

puisque $ab \leq B^2 a^2 + \dfrac{1}{B^2} b^2$ pour chaque $B \neq 0$ alors :

$$\mathbb{E}\left[|\Delta Y_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^1 |\Delta Z_s|^2 \, ds\right]$$

$$\leq B^2 \mathbb{E}\int_t^1 |\Delta Y_s|^2 \, ds + \frac{1}{B^2} \mathbb{E}\int_t^1 \left|f\left(s, Y_s^1, Z_s^1\right) - f\left(s, Y_s^2, Z_s^2\right)\right|^2 \chi_{A_N^C} ds.$$

Et comme la preuve du lemme (3.4).b. on a :

$$\mathbb{E}\left[|\Delta Y_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^1 |\Delta Z_s|^2 \, ds\right] \leq \frac{K(M, \xi)}{B^2 N^{2(1-\alpha)}} + \frac{2L_N^2}{B^2} \mathbb{E}\int_t^1 |\Delta Z_s|^2 \, ds$$

$$+ \left(B^2 + \frac{2L_N^2}{B^2}\right) \mathbb{E}\int_t^1 |\Delta Y_s|^2 \, ds.$$

Telle que : $\rho_N^2 (f - f) = 0.$

$\mathbb{E}\,|\xi - \xi| = 0.$

On choisit B telle que $\dfrac{2L_N^2}{B^2} = 1$ et utilisant lemme de Gronwall :

$$\mathbb{E}\left[|\Delta Y_t|^2\right] \leq \left(2L_N^2 + 1\right) \mathbb{E}\int_t^1 |\Delta Y_s|^2 \, ds + \frac{K(M, \xi)}{2L_N^2 N^{2(1-\alpha)}}.$$

$$\mathbb{E}\left[|\Delta Y_t|^2\right] \leq \frac{K(M, \xi)}{2L_N^2 N^{2(1-\alpha)}} \exp\left[2L_N^2 + 1\right].$$

$$\mathbb{E}\int_0^1 |\Delta Z_s|^2 \, ds \leq \frac{K(M, \xi)}{2L_N^2 N^{2(1-\alpha)}} \exp\left[2L_N^2 + 1\right].$$

et ceci applique l'unicité.

L'existence de la solution
Puisque la suite (Y^n, Z^n) est de Cauchy donc converge dans $\mathbb{B}^2$.
D'après lemme (3.7) il existe $(Y, Z) \in \mathbb{B}^2$ telle que :

$$\|(Y^n, Z^n) - (Y, Z)\| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

On a donc : $\underset{n\to+\infty}{Lim}\, \mathbb{E}\left(\sup_{0<s<1} |Y_s^n - Y|^2\right) = 0.$

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\, \mathbb{E} \textstyle\int_0^1 |Z_s^n - Z|^2 = 0.$$

Maintenant on va prouver que :

$\displaystyle\int_t^1 f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)\, ds$ converge vers $\displaystyle\int_t^1 f(s, Y_s, Z_s)\, ds$ en probabilité.

Soit $N > 0$, L_N le constant Lipschitz de f dans la boule $B(0, N)$.

On pose : $A_N := \left\{(s, \omega)\, ; |Y_s^n|^2 + |Z_s^n|^2 + |Y_s|^2 + |Z_s|^2 \geq N^2\right\}$

et $A_N^C := \Omega / A_N$.

On utilise lemme (3.6) et lemme de Fatou, on trouve :

$$\mathbb{E}\int_t^1 f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)\, ds - \int_t^1 f(s, Y_s, Z_s)\, ds$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\int_t^1 f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)\, ds - \int_t^1 f_n(s, Y_s, Z_s)\, ds + \int_t^1 f_n(s, Y_s, Z_s)\, ds \right.$$

$$\left. - \int_t^1 f(s, Y_s, Z_s)\, ds\right].$$

$$\mathbb{E}\int_t^1 f_n(s, Y_s^n, Z_s^n)\, ds - \int_t^1 f(s, Y_s, Z_s)\, ds$$

$$\leq \mathbb{E}\int_t^1 |f_n(s, Y_s, Z_s) - f(s, Y_s, Z_s)|\, ds$$

$$+\mathbb{E}\int_t^1 |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_n(s, Y_s, Z_s)|\, \chi_{A_N^C} ds$$

$$+\mathbb{E}\int_t^1 |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_n(s, Y_s, Z_s)|\, \chi_{A_N} ds.$$

$$\mathbb{E}\int_t^1 |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s, Z_s)|\, ds$$

$$\leq \mathbb{E}\int_0^1 \sup_{|Y||Z|<N} |f_n(s, Y, Z) - f(s, Y, Z)|\, ds + L_N \mathbb{E}\int_0^1 |Y_s^n - Y_s|\, ds$$

$$+ L_N \mathbb{E}\int_0^1 |Z_s^n - Z_s|\, ds + \mathbb{E}\int_t^1 |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_n(s, Y_s, Z_s)|\, \chi_{A_N} ds.$$

On a :

$$\mathbb{E}\int_t^1 |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_n(s, Y_s, Z_s)|\, \chi_{A_N} ds$$

$$\leq \mathbb{E}\int_t^1 \left(|f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_n(s, Y_s, Z_s)|^2\right)^{1/2} \times \mathbb{E}\left(\int_t^1 \chi_{A_N}\right)^{1/2} ds.$$

$$\leq \frac{C(M, \xi)}{(N^2)^{1/2}} \leq \frac{K(M, \xi)}{N}.$$

Où $K(M, \xi)$ est une constante dépend sauf de M et $\mathbb{E}(|\xi|)$.
D'après lemme (3.5)**(ii) ;**
Pour chaque N,

$$\rho_N(f_n.f) \to 0,\ n \to \infty.$$

Donc :

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\, \mathbb{E}\int_0^1 \sup_{|Y||Z|<N} |f_n(s, Y, Z) - f(s, Y, Z)|\, ds \to 0.$$

On prouve que :

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\, \mathbb{E}\int_0^1 |Y_s^n - Y_s|\, ds + \mathbb{E}\int_0^1 |Z_s^n - Z_s|\, ds = 0.$$

On a :

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\, \mathbb{E}\int_0^1 |Z_s^n - Z_s|\, ds = 0 \quad \text{puisque} \quad \underset{n\to+\infty}{Lim}\, \mathbb{E}\int_0^1 |Z_s^n - Z_s|^2\, ds = 0.$$

Pour démontré que : $\underset{n\to+\infty}{Lim}\, \mathbb{E}\int_0^1 |Y_s^n - Y_s|\, ds = 0.$

On utilise :

$$\left[\underset{n\to+\infty}{Lim}\,\mathbb{E}\left|\sup_{|Y||Z|<N}|Y_s^n-Y_s|^2\right|=0\right],\text{ lemme (3.6) }\left(\sup_{|Y||Z|<N}\mathbb{E}\,|Y^n|^2<K\right),$$

lemme de Fatou et théorème de convergence dominé de Lebesgue :

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\,\mathbb{E}\int_0^1|Y_s^n-Y_s|\,ds$$

$$\leq\underset{n\to+\infty}{Lim}\,\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}}|Y_s^n-Y_s|\,\chi_{[0,1]}ds.$$

$$\leq\underset{n\to+\infty}{Lim}\,\mathbb{E}\left[\sup_{|Y||Z|<N}|Y_s^n-Y_s|^2\int_{\mathbb{R}}\chi_{[0,1]}ds\right].$$

$$\leq\underset{n\to+\infty}{Lim}\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\sup_{|Y||Z|<N}|Y_s^n-Y_s|^2+2\left(\int_{\mathbb{R}^+}\chi_{[0,1]}ds\right)^2\right].$$

$$\leq\underset{n\to+\infty}{Lim}\,\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{|Y||Z|<N}|Y_s^n-Y_s|^2+\underset{n\to+\infty}{Lim}\left(\int_{\mathbb{R}^+}\chi_{[0,1]}ds\right)^2\right].$$

Preuve de Corollaire (3.3)

Pour $\alpha=1$ le problème sera étudié comme le cas classic pour $\alpha<1$, posons $L=0$.

Soit $\grave{L}$ une constante uniformément Lipschitz de f sur le variable aléatoire Z.

pour $N>0$, soit L_N une constante Lipschitz sur Y de f dans la boule $B\,(0,N)$

On définie :

$$A_{n,m}^N:=\left\{(s,\omega)\,;|Y_s^n|^2+|Z_s^n|^2+|Y_s^m|^2+|Z_s^m|^2\geq N^2\right\}.$$

et $A_{n,m}^{N_C}:=\Omega/A_{n,m}^N$.

Avec la formule d'Itô on a :

$$\mathbb{E}\left(|Y_t^n-Y_t^m|^2\right)+\mathbb{E}\int_t^1|Z_s^n-Z_s^m|^2\,ds=I_1\,(n,m)+I_2\,(n,m)+I_3\,(n,m)$$

$$+I_4\,(n,m)$$

$$I_1(n,m) = 2\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^n - Y_s^m| \, |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^n, Z_s^n)| \, \chi_{\overline{A}_{n,m}^N} ds$$

$$I_2(n,m) = 2\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^n - Y_s^m| \, |f(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^m, Z_s^m)| \, \chi_{\overline{A}_{n,m}^N} ds$$

$$I_3(n,m) = 2\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^n - Y_s^m| \, |f(s, Y_s^m, Z_s^m) - f_m(s, Y_s^m, Z_s^m)| \, \chi_{\overline{A}_{n,m}^N} ds$$

$$I_4(n,m) = 2\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^n - Y_s^m| \, |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f_m(s, Y_s^m, Z_s^m)| \, \chi_{A_{n,m}^N} ds.$$

On va estimer successivement I_1, I_2, I_3 et I_4.
Soit B_1, B_2 deux constantes strictement positives.

$$\begin{aligned}
(2) I_1(n,m) &\leq 2B^2\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^n - Y_s^m|^2 ds \\
&\quad + \frac{2}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1 |f_n(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^n, Z_s^n)| \, \chi_{\overline{A}_{n,m}^N} ds. \\
&\leq \ 2B^2\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^n - Y_s^m|^2 ds \quad + \frac{2}{B^2}\rho_N^2(f_n - f) \\
&\quad + \frac{2}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1 \left(|Y_s^n - Y_s^n|^2 ds + |Z_s^n - Z_s^n|^2\right) ds. \\
&\leq \ \mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^n - Y_s^m|^2 ds \quad + \rho_N^2(f_n - f).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) I_2(n,m) &\leq \mathbb{E}\int_t^1 2\,|Y_s^n - Y_s^m| \left[\grave{L}\,|Z_s^n - Z_s^m| + L_N\,|Y_s^n - Y_s^m|\right] \chi_{\overline{A}_{n,m}^N} ds. \\
&\leq \mathbb{E}\int_t^1 \Big[2\sqrt{\grave{L}}\,|Y_s^n - Y_s^m|\,\sqrt{\grave{L}}\,|Z_s^n - Z_s^m| \\
&\quad + 2L_N\,|Y_s^n - Y_s^m|^2\Big] \, 1_{\overline{A}_{n,m}^N} ds. \\
&\leq \mathbb{E}\textstyle\int_t^1 \Big[B_1^2\grave{L}\,|Y_s^n - Y_s^m|^2 \, 1_{\overline{A}_{n,m}^N}
\end{aligned}$$

$$+\frac{\grave{L}}{B^2}\left|Z_s^n-Z_s^m\right|^2+2L_N\left|Y_s^n-Y_s^m\right|^2 1_{\overline{A}_{n,m}^N}\Big] ds.$$

$$\leq \mathbb{E}\int_t^1\left(B_1^2\grave{L}+2L_N\right)\left|Y_s^n-Y_s^m\right|^2 1_{\overline{A}_{n,m}^N} ds.$$

$$+\mathbb{E}\int_t^1\frac{\grave{L}}{B^2}\left|Z_s^n-Z_s^m\right|^2 ds.$$

(4) $I_3(n,m)\leq 2B^2\mathbb{E}\int_t^1\left|Y_s^n-Y_s^m\right|^2 ds$

$$+\frac{2}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1\left|f\left(s,Y_s^m,Z_s^m\right)-f_m\left(s,Y_s^m,Z_s^m\right)\right| 1_{\overline{A}_{n,m}^N} ds.$$

$$\leq 2B^2\mathbb{E}\int_t^1\left|Y_s^n-Y_s^m\right|^2 ds \quad +\frac{2}{B^2}\rho_N^2\left(f_m-f\right)$$

$$+\frac{2}{B^2}\mathbb{E}\int_t^1\left(\left|Y_s^m-Y_s^m\right|^2 ds+\left|Z_s^m-Z_s^m\right|^2\right) ds.$$

$$\leq \mathbb{E}\int_t^1\left|Y_s^n-Y_s^m\right|^2 ds \quad +\rho_N^2\left(f_m-f\right).$$

(5)$I_4(n,m)\leq 2\mathbb{E}\int_t^1\Big[\left|Y_s^n-Y_s^m\right|\sqrt{1_{A_{n,m}^N}}$

$$\left|f_n\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)-f_m\left(s,Y_s^m,Z_s^m\right)\right|\sqrt{1_{A_{n,m}^N}}\Big] ds.$$

$$\leq \alpha^2\mathbb{E}\int_t^1\left|Y_s^n-Y_s^m\right|^2 1_{A_{n,m}^N} ds$$

$$+\frac{1}{\alpha^2}\mathbb{E}\int_t^1\left(f_n\left(s,Y_s^n,Z_s^n\right)-f_m\left(s,Y_s^m,Z_s^m\right)\right)^2 1_{A_{n,m}^N} ds.$$

$$\leq \alpha^2\mathbb{E}\int_t^1\left|Y_s^n-Y_s^m\right|^2 1_{A_{n,m}^N} ds$$

$$+\frac{6M}{\alpha^2}\mathbb{E}\int_t^1\left(1+\left|Y_s^n\right|^{2\alpha}+\left|Z_s^n\right|^{2\alpha}+\left|Y_s^m\right|^{2\alpha}+\left|Z_s^m\right|^{2\alpha}\right) 1_{A_{n,m}^N} ds.$$

$$\leq \alpha^2 \mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^n - Y_s^m|^2 1_{A_{n,m}^N} ds + \frac{1}{\alpha^2}\frac{K(M,\xi)}{N^{2(1-\alpha)}}.$$

Où $K(M,\xi)$ est une constante dépend de M et $\mathbb{E}|\xi|^2$.
On choisit $B^2 = \grave{L}$ et $\alpha^2 = 2L_N$.
Alors on utilise (2), (3), (4), (5) et lemme de Granwall pour obtenir :

$$\mathbb{E}|Y_s^n - Y_s^m|^2 \leq \left[\rho_N^2(f_n - f) + \rho_N^2(f_m - f) + \frac{K(M,\xi)}{2L_N N^{2(1-\alpha)}}\right]$$

$$+2L_N \mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^n - Y_s^m|^2 1_{A_{n,m}^N} ds$$

$$+\left(2L_N + \grave{L}^2 + 2\right)\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^n - Y_s^m|^2 1_{\overline{A_{n,m}^N}} ds.$$

Donc :

$$\mathbb{E}|Y_s^n - Y_s^m|^2 \leq \left[\rho_N^2(f_n - f) + \rho_N^2(f_m - f) + \frac{K(M,\xi)}{2L_N N^{2(1-\alpha)}}\right]$$

$$\exp(2L_N)\cdot\exp\left(2L_N + \grave{L}^2 + 2\right).$$

Passons à la limite premièrement en n, m et après en N et on utilisant l'inégalité du Burkholder Davis Gundy :

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\,\mathbb{E}\left|\sup_{0<t<1}|Y_s^n - Y_s^m|^2\right| \leq \left[\underset{n\to+\infty}{Lim}\,\rho_N^2(f_n - f) + \rho_N^2(f_m - f) + \frac{K(M,\xi)}{2(\log N)N^{2(1-\alpha)}}\right]$$

$$\exp(2(\log N))\cdot\exp\left(2(\log N) + \grave{L}^2 + 2\right).$$

$$\mathbb{E}\left|\sup_{0<t<1}|Y_s^n - Y_s^m|^2\right| \leq \left[\rho_N^2(f_m - f) + \frac{K(M,\xi)}{2(\log N)N^{2(1-\alpha)}}\right]$$

$$\exp(2(\log N))\cdot\exp\left(2(\log N) + \grave{L}^2 + 2\right).$$

$$\underset{m\to+\infty}{Lim}\,\mathbb{E}\left|\sup_{0<t<1}|Y_s^n - Y_s^m|^2\right| \leq \left[\underset{m\to+\infty}{Lim}\,\rho_N^2(f_m - f) + \frac{K(M,\xi)}{2(\log N)N^{2(1-\alpha)}}\right]$$

$$\exp(2(\log N))\cdot\exp\left(2(\log N) + \grave{L}^2 + 2\right).$$

$$\mathbb{E}\left|\sup_{0<t<1}\left|Y_s^n - Y_s^m\right|^2\right| \leq \left[\frac{K(M,\xi)}{2(\log N)\ \ N^{2(1-\alpha)}}\right]\exp\left(2(\log N)\right)\cdot\exp\left(2(\log N)+\grave{L}^2+2\right).$$

$$\underset{N\to+\infty}{Lim}\ \mathbb{E}\left|\sup_{0<t<1}\left|Y_s^n - Y_s^m\right|^2\right| = 0.$$

même chose de Banach $(\mathbb{B}^2, \|.\|)$.

3.3 Stabilité de la solution

Dans cette partie on va étudier la stabilité de la résultat pour le solution avec les hypothèses de (f,ξ)

* si f_n converge vers f dans l'espace métrique défini avec la semi-norme (ρ_N)

* ξ_n converge vers ξ dans $L^2(\Omega)$

Alors (Y^n, Z^n) converge vers (Y,Z) en $(\mathbb{B}^2, \|.\|)$.

Soit f_n une suite de fonction$\mathcal{F}_t$ progressivement mesurable pour tout n.

Soit ξ_n une suite de variable aléatoire $\mathcal{F}_1$ mesurable pour tout n, $\mathbb{E}\left|\xi_n\right|^2 < \infty$

Pour tout n l'EDSR (3.1) correspondant avec les données (f_n, ξ_n) n'admettes pas une unique solution chaque solution de l'équation (3.1) (f_n, ξ_n) on dénote par (Y^n, Z^n).

On suppose les hypothèses suivantes :

H_3 : pour chaque $N, \rho_N(f_n - f) \to 0, n \to \infty$.
H_4 : $\mathbb{E}\left(\left|\xi_n - \xi\right|^2\right) \to 0$ quand $n \to \infty$.
H_5 : il existe deux constantes $M > 0$ et $\alpha \in [0,1]$ telle que :

$$\sup_n\left|f_n(t,\omega,Y,Z)\right| \leq M\left(1+|Y|^\alpha+|Z|^\alpha\right)\mathbb{P}-p.s.\ \mathbb{P}-p\ t\in[0,1].$$

Théorème 3.8 *Soient f et ξ satisfaisantes l'hypothèse du théorème 1*
Supposons H_3,H_4 et H_5 sont satisfaites alors (Y_n, Z_n) converges vers (Y,Z) dans l'espace $(\mathbb{B}^2, \|.\|)$.

Preuve. Pour $\alpha = 1$, le résultat est classique.

On passe a la limite pour $n \to +\infty$.

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\,\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,1]}|Y_t^n - Y_t|^2\right) \leq \underset{n\to+\infty}{Lim}\left[\mathbb{E}\left|\xi_t^n - \xi_t\right|^2 + \frac{1}{L_N^2}\rho_N^2\left(f_n - f\right)\right.$$

$$\left. + \frac{K\ (M\ ,\ \xi^n\ ,\ \xi)}{L_N^2}\right] \exp\left[2L^2 + 1\right].$$

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\,\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,1]}|Y_t^n - Y_t|^2\right) \leq \underset{n\to+\infty}{Lim}\frac{K\ (M\ ,\ \xi^n\ ,\ \xi)}{L_N^2}\exp\left[2L^2 + 1\right].$$

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,1]}|Y_t^n - Y_t|^2\right) \leq \frac{K\ (M\ ,\ \xi)}{\log N}\exp\left[2L^2 + 1\right].$$

On passe a la limite pour $N \to +\infty$.

$$\underset{N\to+\infty}{Lim}\,\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,1]}|Y_t^n - Y_t|^2\right) \leq \underset{N\to+\infty}{Lim}\frac{K\ (M\ ,\ \xi)}{\log N}\exp\left[2L^2 + 1\right].$$

$$= 0.$$

et

$$\underset{n\to+\infty}{Lim}\,\mathbb{E}\int_t^1 |Z_s^n - Z_s|^2\,ds \leq \underset{n\to+\infty}{Lim}\,k\left(M, \xi^n, \xi\right)\left[\mathbb{E}\left|\xi_t^n - \xi_t\right|^2\right.$$

$$\left. + \left(\mathbb{E}\int_t^1 |Y_s^n - Y_s|^2\,ds\right)^{1/2}\right].$$

$\underset{N\to+\infty}{Lim}\,\mathbb{E}\int_t^1 |Z_s^n - Z_s|^2\,ds = 0.$

Nous avons étudiés le cas $\alpha < 1$.

Appliquant lemme (3.4) à :

$\left(Y^1, Z^1, f^1, \xi^1\right) = \left(Y^n, Z^n, f_n, \xi^n\right),$
$\left(Y^2, Z^2, f^2, \xi\right) = \left(Y, Z, f, \xi\right)$

et on passe à la limite successivement en n, N pour obtenir le théorème

On a :

$$\underset{N\to+\infty}{Lim}\,\underset{n\to+\infty}{Lim}\;\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,1]}|Y_t^n-Y_t|^2\right)$$

$$\leq \underset{N\to+\infty}{Lim}\,\underset{n\to+\infty}{Lim}\left[\mathbb{E}\,|\xi_t^n-\xi_t|^2+\frac{1}{\log N}\rho_N^2\,(f_n-f)\right.$$

$$\left.+\frac{K\,(M\;,\;\xi^n\;,\;\xi)}{\log N\quad N^{\;2\;(\;1-\;\alpha\;)}}\right]\;\exp\left[2L^2+1\right].$$

$$\underset{N\to+\infty}{Lim}\;\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,1]}|Y_t^n-Y_t|^2\right)\leq\underset{N\to+\infty}{Lim}\frac{K\;\;(M\;\;,\;\xi)}{\log N\quad N^{\;2\;(\;1-\;\alpha\;)}}\;\exp\left[2L^2+1\right].$$

et

$\underset{N\to+\infty}{Lim}\,\underset{n\to+\infty}{Lim}\,\mathbb{E}\int_t^1|Z_s^n-Z_s|^2\,ds$

$$\leq\underset{N\to+\infty}{Lim}\,\underset{n\to+\infty}{Lim}\,k\,(M,\xi^n,\xi)\left[\mathbb{E}\,|\xi_t^n-\xi_t|^2+\left(\mathbb{E}\int_t^1|Y_s^n-Y_s|^2\,ds\right)^{1/2}\right].$$

$$\underset{N\to+\infty}{Lim}\;\mathbb{E}\int_t^1|Z_s^n-Z_s|^2\,ds=0.\;\blacksquare$$

Chapitre 4

EDSR avec coefficient discontinu

Le théorème de comparaison joue un rôle très important dans beaucoup travaux par exemple le travail de Pardoux et Peng (1990) qui sont les premiers étudient l'existence et l'unicité de l'EDSR non linéaire avec quelque conditions sur g et ξ, même Lepletier et San Martin (1997) ont démontré l'existence de la solution de l'EDSR dans le cas où le génératreur est continu et à croissance linéaire, Kobylanski (2000) a démontré l'existence et l'unicité dans le cas où g est continu et à croissance quadratique en z avec condition terminale bornée.

Aussi Guangyan a étudié l'existence de la solution de l'EDSR à une dimension dans le cas où g (le générateur) soit discontinue en y et vérifie les conditions suivantes :

H$_1$) $g(t,.,z)$ est continue à gauche, et $g(t,y,.)$ est continue.

H$_2$) il existe une constante positive A, telle que :
$|g(t,y,z)| \leq A\left(|y|+\|z\|+1\right)$ pour tout $y,z,t\in[0,T]$.

H$_3$) il existe une fonction continue $K(x)$ définie en $\mathbb{R}^{1+d}$ qui satisfaite $|K(x)|\leq A\,|x|$ pour tout $x\in\mathbb{R}^{1+d}$ où A est une constante positive telle que pour tout :

$y_1 \geq y_2 \in \mathbb{R}, t\in[0,T], z_1,z_2\in\mathbb{R}^d$.

on a : $g(t,y_1,z_1)-g(t,y_2,z_2)\geq K(y_1-y_2,z_1-z_2)$.

4.1 Préliminaire

On considère l'EDSR de 1 dimension comme suivant :

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0, T].$$

Telle que $(W_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement Brownien de d-dimension défini sur l'espace complet $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P}\right)$ où $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ est la filtration naturelle avec $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_t, s \leq t\}$.

g : la fonction génératrice de $\Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$.
T : le temps terminal et ξ la variable aléatoire a valeur dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}_t$-adaptée.
Soit P l'ensemble de σ tribu dans $\Omega \times [0, T]$ contient les ensembles $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurables.
Soit M_d^2 un ensemble des processus, P-mesurable,
$V = (V_t)_{t\in[0,T]}$ a valeur dans $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |V_s|^2\, ds\right] < \infty.$$

et soit S_c^2 l'ensemble des processus continus, P-mesurable $V = (V_t)_{t\in[0,T]}$ a valeur dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |V_t|^2\right] < \infty.$$

la solution de l'EDSR (g, T, ξ) est le processus $(Y, Z) = (Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ P-mesurable a valeur dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ telle que :

$$\begin{cases} (Y, Z) \in S_c^2 \times M_d^2. \\ Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0, T]. \end{cases} \tag{4.1}$$

Lemme 4.1 *Soit $K(x)$ une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^{1+d}$, qui satisfaisant $|K(x)| \leq A|x|$ pour chaque $x \in \mathbb{R}^{1+d}$avec A est une constante positive.*
On considère l'EDSR suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T (K(Y_s, Z_s) + \theta_s)\, ds - \int_t^T Z_s dW_s, t \in [0,T]. \tag{4.2}$$

où $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ et $\theta_s \in M^2(\mathbb{R})$, alors :
i) *EDSR (4.2) admet une solution $(Y,Z) \in S_c^2 \times M_d^2$.*
ii) *Pour chaque solution (Y,Z) de (4.2), $\theta_s \geq 0$ et $\xi \geq 0$ implique que :*

$$Y_t \geq 0 \ \mathbb{P} - p.s.pour \ t \in [0,T].$$

Preuve. i) Comme K est continue et $|K(x)| \leq A|x|$ donc :

l'EDSR (4.2) admet au moins une solution (Lepetier et San Martin, 1997)

ii) Soient les EDSR suivantes :

$$Y_t^1 = \xi + \int_t^T \left(-A\left|Y_s^1\right| - A\left\|Z_s^1\right\|\right) ds - \int_t^T Z_s^1 dW_s, t \in [0,T]. \tag{4.3}$$

$$Y_t^2 = \xi + \int_t^T \left(-A\left|Y_s^2\right| - A\left\|Z_s^2\right\|\right) ds - \int_t^T Z_s^2 dW_s, t \in [0,T]. \tag{4.4}$$

Chaque équation admet une solution dans $S_c^2 \times M_d^2$.

D'après le théorème de comparaison (El Karoui et al, 1997) on a que :

$\mathbb{P} - p.s.$ pour tout $t \leq T, Y_t^1 \geq Y_t^2 \equiv 0$.

Alors :

$\mathbb{P} - p.s.$ pour tout $t \leq T, Y_t \geq Y_t^1$.

On utilise la méthode de Lepeltier-San Martin.

On défini la suite des fonctions :

$$K_n(x) = \inf_{u \in \mathbb{R}^{1+d}} \{K(u) + (n+A)|x-u|\}, n \in N.$$

Ces fonctions sont définies pour tout $n \geq 0$ et vérifient :

$\mathbf{k}_{\mathrm{I}}$) $|K_n(X)| \leq A|x|$.
$\mathbf{k}_{\mathrm{II}}$) $|K_n(X_1) - K_n(Y_1)| \leq (n+A)|X_1 - Y_1|$.
$\mathbf{k}_{\mathrm{III}}$) $K_n \leq K_{n+1}$.
$\mathbf{k}_{\mathrm{IV}}$) si $X_n \underset{n\to+\infty}{\to} X$, alors, $K_n(X_n) \underset{n\to+\infty}{\to} K(X)$.

pour $X, X_1, Y_1 \in \mathbb{R}^{1+d}$.

D'après ($\mathbf{k}_{\mathrm{I}}$) et ($\mathbf{k}_{\mathrm{II}}$).On conclut que pour chaque n, il existe une unique solution à l'équation suivante :

$$Y_t^n = \xi + \int_t^T (K_n(Y_s^n, Z_s^n) + \theta_s)\, ds - \int_t^T Z_s^n dW_s \tag{4.5}$$

Pour $t \in [0,T], n = 1, 2, ...$

Avec les resultats sur les EDSR où le coefficient est lipschitz, l'équation (4.5) ($n = 1, 2, ...$) admet une unique solution (respectivement), la solution $(Y^n, Z^n)_{n\in N}$ de l'équation (4.5) converge vers la solution minimale $(\underline{Y}, \underline{Z})$ de (4.2) (comme dans le travaille de Lipleter et San Martin 1997).

Par le théorème de comparaison (Peng 1992, El Karoui et al 1997) pour chaque entier positif $n \geq 0$

On a :

$$Y_t^n \geq Y_t^1$$

avec (Y^1, Z^1) est la solution de (4.3) donc :

$\mathbb{P} - p.s.$ pour $t \leq T$,

$\underline{Y}_t \geq Y_t^1 \geq Y_t^2 \equiv 0.$ ■

4.2 Existence de la solution

On considère la suite des l'EDSR comme suivant :

$$\underline{Y}_t^0 = \xi + \int_t^T \left(-A\left|\underline{Y}_s^0\right| - A\left\|\underline{Z}_s^0\right\| - A\right) ds - \int_t^T \underline{Z}_s^0 dW_s. \tag{4.6}$$

et

$$\underline{Y}_t^i = \xi + \int_t^T \left[g\left(s, \underline{Y}_s^{i-1}, \underline{Z}_s^{i-1}\right) + K\left(\underline{Y}_s^i - \underline{Y}_s^{i-1}, \underline{Z}_s^i - \underline{Z}_s^{i-1}\right)\right] ds - \int_t^T \underline{Z}_s^i dW_s. \tag{4.7}$$

où $i = 1, 2, ...$
Pour $i = 1, 2, ...$ l'existence de la solution de (4.7) est garantie d'après Lemme(4.1).

Dans ce qui suit on considère une solution minimale$\left(\underline{Y}^i, \underline{Z}^i\right)$.
On a une autre EDSR :

$$\overline{Y}_t^0 = \xi + \int_t^T \left(A\left|\overline{Y}_s^0\right| + A\left\|\bar{Z}_s^0\right\| + A\right) ds - \int_t^T \bar{Z}_s^0 dW_s. \tag{4.8}$$

D'après les résultats sur des EDSR avec coefficient Lipschitz les EDSR (4.6) et (4.8) admettent des solutions uniques, on les notes par$\left(\underline{Y}^0, \underline{Z}^0\right)$ et $\left(\overline{Y}^0, \bar{Z}^0\right)$ respectivement.

Pour ces solutions on a les propriétés suivantes :

Lemme 4.2 *Sous les hypothèses $H_1 - H_3$ les propriétés suivantes sont vérifiées*

1) *Pour chaque entier positif i :*

$\underline{Y}_t^0 \leq \underline{Y}_t^i \leq \underline{Y}_t^{i+1}, \mathbb{P} - p.s. pour\ t \leq T.$

2) *Pour chaque entier positif i :*

$\underline{Y}_t^0 \leq \overline{Y}_t^0, \mathbb{P} - p.s. pour\ t \leq T.$

Preuve. 1) On preuve que $\underline{Y}_t^0 \leq \underline{Y}_t^1$ de (4.6) et (4.8), on a :

$$\underline{Y}_t^1 - \underline{Y}_t^0 = \int_t^T \left[K\left(\underline{Y}_s^1 - \underline{Y}_s^0, \underline{Z}_s^1 - \underline{Z}_s^0\right) + \Delta_s^1\right] ds - \int_t^T \left(\underline{Z}_s^1 - \underline{Z}_s^0\right) dW_s.$$

Où $\Delta_s^1 := g\left(s, \overline{Y}_s^0, \bar{Z}_s^0\right) + A\left|\overline{Y}_s^0\right| + A\left\|\bar{Z}_s^0\right\| + A.$

d'après H$_2$, on a :

$$g\left(s, \overline{Y}_s^0, \bar{Z}_s^0\right) \geq -A\left|\overline{Y}_s^0\right| - A\left\|\bar{Z}_s^0\right\| - A + A\left|\overline{Y}_s^0\right| + A\left\|\bar{Z}_s^0\right\| + A.$$

Donc $\Delta_s^1 \geq 0.$

et

$\mathbb{E}\int_0^T \left|\Delta_s^1\right|^2 ds = \mathbb{E}\displaystyle\int_0^T \left|g + A\left|Y\right| + A\left||Z\right|| + A\right|^2 ds.$

$$= \mathbb{E}\int_0^T \left(2A\left|Y\right| + 2A\left||Z\right|| + 2A\right)^2 ds.$$

$$\leq \mathbb{E}\int_0^T 3\left(4A^2\left|Y\right|^2 + 4A^2\left|Z\right|^2 + 4A^2\right) ds.$$

$$\leq +\infty.$$

Donc : $\Delta_s^1 \in M^2(\mathbb{R})$.
On applique le lemme (4.1) on a : $\underline{Y}_t^0 \leq \underline{Y}_t^1$.

On pose que $\underline{Y}_t^{i-1} \leq \underline{Y}_t^i$ et on démontre que :

$$\underline{Y}_t^i \leq \underline{Y}_t^{i+1}.$$

de l'EDSR (4.7) on a :

$$\underline{Y}_t^{i+1} - \underline{Y}_t^i = \int_t^T \left[K\left(\underline{Y}_s^{i+1} - \underline{Y}_s^i, \underline{Z}_s^{i+1} - \underline{Z}_s^i\right) + \Delta_s^{i+1}\right] ds - \int_{ts}^T \left(\underline{Z}_s^{i+1} - \underline{Z}_s^i\right) dW_s.$$

Où $\Delta_s^{i+1} := g\left(s, \underline{Y}_s^i, \underline{Z}_s^i\right) - g\left(s, \underline{Y}_s^{i-1}, \underline{Z}_s^{i-1}\right) - K\left(\underline{Y}_s^i - \underline{Y}_s^{i-1}, \underline{Z}_s^i - \underline{Z}_s^{i-1}\right).$

D'après H$_2$ et H$_3$ on a $\Delta_s^{i+1} \geq 0$ et $\Delta_s^{i+1} \in M^2(\mathbb{R})$ donc :

$$\underline{Y}_t^i \leq \underline{Y}_t^{i+1}.$$

2) On démontre que $\underline{Y}_t^i \leq \overline{Y}_t^0, i = 0, 1, ...$

a) Premièrement on a $\underline{Y}_t^0 \leq \overline{Y}_t^0$, l'EDSR (4.6) et (4.8) donnent que :

$$\overline{Y}_t^0 - \underline{Y}_t^0 = \int_t^T \left(A\left|\bar{Y}_s^0\right| + A\left\|\bar{Z}_s^0\right\| + A\left|\underline{Y}_s^0\right| + A\left\|\underline{Z}_s^0\right\| + 2A\right) ds$$

$$-\int_t^T \left(\bar{Z}_s^0 - \underline{Z}_s^0\right) dW_s.$$

On a le terme drift ≥ 0 et la valeur terminale $= 0$.

Donc : $\qquad \overline{Y}_t^0 \geq \underline{Y}_t^0.$

b) De (4.7) et (4.8) on a :

$$\overline{Y}_t^0 - \underline{Y}_t^1 = \int_t^T \left[A\left|\bar{Y}_s^0\right| + A\left\|\bar{Z}_s^0\right\| + A - g\left(s, \underline{Y}_s^0, \underline{Z}_s^0\right)\right.$$

$$\left. -K\left(\underline{Y}_s^1 - \underline{Y}_s^0, \underline{Z}_s^1 - \underline{Z}_s^0\right) ds\right] - \int_t^T \left(\bar{Z}_s^0 - \underline{Z}_s^1\right) dW_s.$$

$$= \int_t^T \left(-A\left|\overline{Y}_s^0 - \underline{Y}_s^1\right| - A\left\|\bar{Z}_s^0 - \underline{Z}_s^1\right\| + \theta_s^1\right) ds$$

$$-\int_t^T \left(\bar{Z}_s^0 - \underline{Z}_s^1\right) dW_s.$$

Où

$$\theta_s^1 := A\left|\overline{Y}_s^0 - \underline{Y}_s^1\right| + A\left\|\bar{Z}_s^0 - \underline{Z}_s^1\right\| + A\left|\bar{Y}_s^0\right| + A\left\|\bar{Z}_s^0\right\| + A - g\left(s, \underline{Y}_s^0, \underline{Z}_s^0\right)$$

$$-K\left(\underline{Y}_s^1 - \underline{Y}_s^0, \underline{Z}_s^1 - \underline{Z}_s^0\right).$$

$$\geq g\left(s, \underline{Y}_s^1, \underline{Z}_s^1\right) - g\left(s, \underline{Y}_s^0, \underline{Z}_s^0\right) - K\left(\underline{Y}_s^1 - \underline{Y}_s^0, \underline{Z}_s^1 - \underline{Z}_s^0\right).$$

de H_2 et H_3 on a :

$\theta_s^1 \geq 0$ et $\theta_s^1 \in M^2(\mathbb{R})$.

D'après le théorème de comparaison (Peng 1992, Elkaroui et Al 1997) on a :

$$\underline{Y}_t^1 \leq \overline{Y}_t^0.$$

On pose que $\underline{Y}_t^i \leq \overline{Y}_t^0$ et on démontre $\overline{Y}_t^0 \geq \underline{Y}_t^{i+1}$.

De l'équation (4.7) et (4.8) on a :

$$\overline{Y}_t^0 - \underline{Y}_t^{i+1} = \int_t^T \left(-A\left|\overline{Y}_s^0 - \underline{Y}_s^{i+1}\right| - A\left\|\bar{Z}_s^0 - \underline{Z}_s^{i+1}\right\| + \theta_s^{i+1}\right) ds$$

$$-\int_t^T \left(\bar{Z}_s^0 - \underline{Z}_s^{i+1}\right) dW_s.$$

Où

$$\theta_s^{i+1} := A\left|\overline{Y}_s^0 - \underline{Y}_s^{i+1}\right| + A\left\|\bar{Z}_s^0 - \underline{Z}_s^{i+1}\right\| + A\left|\overline{Y}_s^0\right| + A\left\|\bar{Z}_s^0\right\| + A$$

$$-g\left(s, \underline{Y}_s^i, \underline{Z}_s^i\right) - K\left(\underline{Y}_s^{i+1} - \underline{Y}_s^i, \underline{Z}_s^{i+1} - \underline{Z}_s^i\right).$$

$$\geq g\left(s, \underline{Y}_s^{i+1}, \underline{Z}_s^{i+1}\right) - g\left(s, \underline{Y}_s^i, \underline{Z}_s^i\right) - K\left(\underline{Y}_s^{i+1} - \underline{Y}_s^i, \underline{Z}_s^{i+1} - \underline{Z}_s^i\right).$$

$$\geq 0.$$

D'après le théorème de comparaison (de Peng 1992, El Karoui et Al 1997).

On a : $\underline{Y}_t^{i+1} \leq \overline{Y}_t^0$.

Lemme (4.2) implique que la suite de solution minimale des équations (4.6) et (4.7) est croissante admette une borne supérieur de la solution de(4.8) telle que :

$$\underline{Y}_t^0 \leq \underline{Y}_t^i \leq \underline{Y}_t^{i+1} \leq \overline{Y}_t^0, \mathbb{P} - p.s. \text{ pour } i = 1, 2, \ldots \text{et } t \leq T. \tag{4.9}$$

■

Théorème 4.3 *Sous les hypothèses $H_1 - H_3$ les solutions $\left\{\left(\underline{Y}_t^i, \underline{Z}_t^i\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$ de l'équation (4.7) converge dans $S_c^2 \times M_d^2$ vers $(\underline{Y}, \underline{Z})$ qui est la solution de l'équation (4.1).*

Preuve. L'inégalité (4.9) implique que $\left(\underline{Y}^i\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ converge vers Y dans S_c^2 et

$$\sup_i \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\underline{Y}_t^i\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\underline{Y}_t^0\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\underline{Y}_t^0\right|^2\right] < +\infty.$$

Appliquons la formule d'Itô à $\left|\underline{Y}_t^{i+1}\right|^2$ on a :

$$\mathbb{E}\left|\underline{Y}_t^{i+1}\right|^2 = \left|\underline{Y}_0^{i+1}\right|^2 + \mathbb{E}\int_0^T \Big[\left\|\underline{Z}_t^{i+1}\right\|^2 - 2\underline{Y}_t^{i+1}\left(g\left(t, \underline{Y}_t^i, \underline{Z}_t^i\right)\right.$$

$$\left.+K\left(\underline{Y}_t^{i+1} - \underline{Y}_t^i, \underline{Z}_t^{i+1} - \underline{Z}_s^i\right)\right)\Big]\, dt.$$

En suite, on a :

$$\mathbb{E}\int_0^T \left\|\underline{Z}_t^{i+1}\right\|^2 dt$$

$$\leq 2\mathbb{E}\int_0^T \underline{Y}_t^{i+1}\left(g\left(t, \underline{Y}_t^i, \underline{Z}_t^i\right) + K\left(\underline{Y}_t^{i+1} - \underline{Y}_t^i, \underline{Z}_t^{i+1} - \underline{Z}_s^i\right)\right) dt + \mathbb{E}\left|\xi\right|^2.$$

$$\leq C + \tfrac{1}{8}\mathbb{E}\int_0^T \left(\left|\underline{Z}_t^{i+1}\right|^2 + \left|\underline{Z}_t^i\right|^2\right) dt.$$

Où :

$$C = \left[\mathbb{E}\left|\xi\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\int_0^T \left(\left|\underline{Y}_t^i\right|^2 + A\left|\underline{Y}_t^{i+1}\right| + A\left|33A + 2\right|\left|\underline{Y}_t^{i+1}\right|^2\right) dt.$$

Donc implique que :

$$\sup_i \mathbb{E}\int_0^T \left\|\underline{Z}_t^i\right\|^2 dt < \infty.$$

Où la quantité

$$\Psi_t^{i+1} = g\left(t, \underline{Y}_t^i, \underline{Z}_t^i\right) + K\left(\underline{Y}_t^{i+1} - \underline{Y}_t^i, \underline{Z}_t^{i+1} - \underline{Z}_s^i\right).$$

Sont uniformément bornées dans M_1^2.

Soit $C_0 = \sup_i \mathbb{E}\int_0^T \left|\Psi_t^i\right|^2 dt.$

On applique la formule d'Itô à $\left|\underline{Y}_t^{\mathbb{P}} - \underline{Y}_t^q\right|$ on a :

$$\mathbb{E}\left|\underline{Y}_t^{\mathbb{P}} - \underline{Y}_t^q\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^T \left\|\underline{Z}_t^{\mathbb{P}} - \underline{Z}_t^q\right\|^2 ds = \mathbb{E}\int_t^T 2\left(\underline{Y}_s^{\mathbb{P}} - \underline{Y}_s^q\right)\left(\Psi_s^{\mathbb{P}} - \Psi_s^q\right) ds$$

$$\mathbb{E}\left|\underline{Y}_t^{\mathbb{P}} - \underline{Y}_t^q\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^T \left\|\underline{Z}_t^{\mathbb{P}} - \underline{Z}_t^q\right\|^2 ds \leq \mathbb{E}\int_t^T \left(2\left|\underline{Y}_s^{\mathbb{P}} - \underline{Y}_s^q\right|\left|\Psi_s^{\mathbb{P}}\right| + \left|\Psi_s^q\right|\right) ds$$

$$\mathbb{E}\left|\underline{Y}_t^{\mathbb{P}} - \underline{Y}_t^q\right|^2 + \mathbb{E}\int_t^T \left\|\underline{Z}_t^{\mathbb{P}} - \underline{Z}_t^q\right\|^2 ds \leq 4C_0\left[\mathbb{E}\int_0^T \left|\underline{Y}_s^{\mathbb{P}} - \underline{Y}_s^q\right|^2 ds\right]^{1/2}.$$

Donc $\left(\underline{Z}^{i}\right)_{i\in N^{*}}$ est une suite de Cauchy converge vers $\underline{Z}_{t}$ dans M_{d}^{2}.

passons à la limite quand $i\to\infty$ dans l'équation (4.7) on obtient :

$$\underline{Y}_{t}=\xi+\int_{t}^{T}g\left(s,\underline{Y}_{s},\underline{Z}_{s}\right)ds-\int_{t}^{T}\underline{Z}_{s}dW_{s}.$$

finalement $\left(\underline{Y}_{s},\underline{Z}_{s}\right)$ est la solution de l'équation (4.1). ■

Remarque 4.4 *D'après le théorème (3) on voit qu'il existe une solution de l'EDSR (4.1) sur les hypothèses H_1-H_3, mais la solution de l'équation (4.1) n'est pas unique par exemple l'EDSR suivante :*

$$Y_{t}=\int_{t}^{T}1\left(Y_{s}\right)ds-\int_{t}^{T}Z_{s}dW_{s}. \tag{4.10}$$

Où

$$1\left(Y\right)=\begin{cases}1 si\ Y>0\\ 0\ si\ Y\leq 0\end{cases}.$$

On note que l'équation (4.10) satisfaisant H_1-H_3 pour chaque $c\in[0,T]$,
$(Y,Z)=(\max(c-t,0),0)$.

Donc la solution de (4.10) n'est pas unique.

Remarque 4.5 *En particulier,*

si $g(t,Y,Z)=g_1(t,Y)+g_2(t,Z)$ la condition lipschitz en Z est peut relaxe et que g_2 continue en Z

donc dans cet cas l'hypothèse H_3 peut remplacer par la condition suivante :

- Il existe une fonction continue $K(x)$ définie dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $Y_1\geq Y_2\in\mathbb{R},t\in[0,T]$ on a :

$g(t,Y_1)-g(t,Y_2)\geq K(Y_1-Y_2)$ *et* $|K(x)|\leq A|x|$ *pour chaque* $x\in\mathbb{R}$.

On peut écrire l'équation (4.6) comme suite :

$$\underline{Y}_{t}^{i}=\xi+\int_{t}^{T}\left[g_{1}\left(s,\underline{Y}_{s}^{i-1}\right)+K\left(\underline{Y}_{s}^{i}-\underline{Y}_{s}^{i-1}\right)+g_{2}^{i}\left(s,\underline{Z}_{s}^{i}\right)\right]ds-\int_{t}^{T}\underline{Z}_{s}^{i}dW_{s}.$$

où $g_{2}^{i}(t,Z)=\inf\limits_{u\in Q^{d}}\left[g_{2}(t,u)+(i+A)|Z-u|\right]$.

dans Lepeltier et San Martin 1997 on note que :

1- g_2^i est non décroissante en i.
2- g_2^i lipschitzien continue en Z avec i constante.
3- $|g_2^i(t,Z)| \leq A(|Z|+1)$
4- si $Z^i \to Z$, alors $g_2^i(t,Z^i) \to g_2(t,Z)$ quand $i \to \infty$.

En utilisant la condition de Lipschitz , la croissance linéaire de g_2^i,la propriété (4) et les preuves similaires d'après Lepeltier et San Martin 1997 ce n'est difficile de noté que on peut obtenir le même résultat comme le théorème*(4.3)* .

Remarque 4.6 *L'équation (4.6) indique que la suite des solutions de l'équation (4.7) soit décroissante*

- Si il y a un processus $\left(\underline{Y}^0, \underline{Z}^0\right) \in S_c^2 \times M_d^2$, *telle que la solution* $\left(\underline{Y}^1, \underline{Z}^1\right)$ *de l'équation :*

$$\underline{Y}_t^1 = \xi + \int_t^T \left[g\left(s, \underline{Y}_s^0, \underline{Z}_s^0\right) + K\left(\underline{Y}_s^1 - \underline{Y}_s^0, \underline{Z}_s^1 - \underline{Z}_s^0\right)\right] ds - \int_t^T \underline{Z}_s^1 dW_s.$$

satisfaisant que $\underline{Y}_t^0 \leq \underline{Y}_t^1$, *alors la suite* $\left(\underline{Y}^i, \underline{Z}^i\right)_{i=1\ldots\infty}$ *converge vers* $(\underline{Y}, \underline{Z})$

où $(\underline{Y}, \underline{Z})$ *est la solution de (4.1).*

- Si H_1 *est remplacée par la condition suivante :*

H_1 : $g(t,.,z)$ *est continue à gauche et* $g(t,y,.)$ *est continue.*

On peut obtenir qu'il existe un autre résultat, dans ce cas on considère l'équation suivante :

$$\bar{Y}_t^i = \xi + \int_t^T \left[g\left(s, \overline{Y}_s^{i-1}, \bar{Z}_s^{i-1}\right) - K\left(\overline{Y}_s^i - \overline{Y}_s^{i-1}, \bar{Z}_s^i - \bar{Z}_s^{i-1}\right)\right] ds - \int_t^T \bar{Z}_s^i dW_s \tag{4.11}$$

pour $i = 0, 1\ldots$

évidemment, pour tout entier i non négative, l'équation admette la dernière solution respectivement.

Lepeltier et San Martin 1997, on prend comme solution maximale dénotée par $\left(\overline{Y}^i, \bar{Z}^i\right)_{i=0}^{\infty}$.

Nous donnons le résultat suivant :

Corollaire 7 :

Sous les hypothèses H_1, H_2 et H_3 et en supposons que $\left(\overline{Y}^i, \bar{Z}^i\right)_{i=0}^{\infty}$ sont des solutions de l'équation (4.11)

alors :

i) $\underline{Y}_t^0 \leq \overline{Y}_t^{i+1} \leq \overline{Y}_t^i \leq \overline{Y}_t^0, \mathbb{P}-p.s.$pour $i = 0, 1, ...$ et $t \leq T$

ii) $\left(\overline{Y}^i, \bar{Z}^i\right)_{i=0}^{\infty}$ converge vers $\left(\overline{Y}, \bar{Z}\right)$ dans $S_c^2 \times M_d^2$ où $\left(\overline{Y}, \bar{Z}\right)$ est une solution de l'équation (4.1).

Annexe A

Outils du calcul stochastique

Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Théorème A.1 *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoire convergeant p.s vers* X

Supposons qu'il existe une variable aléatoire Y *intégrable telle que* $|X_n| < Y$ *alors* X *est intégrable et* $\mathbb{E}\left[|X_n - X|\right] \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

Lemme de Fatou

Lemme A.2 *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoire réelles positives alors*

$$\int \lim_{n\to\infty} \inf X_n dY \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int X_n dY$$

.

Décomposition de Doob Meyer

Théorème A.3 *Soit* X *une sous-martingale relativement à* $\mathcal{F}_t$ *telle que la famille* $\{X_T, T$ *temps d'arrêt borné*$\}$ *est uniformement intégrable, il existe une* $(\mathcal{F}_t)$ *martingale* M_t *et un processus croissant* $(\mathcal{F}_t)$ *adapté* A *telle que ;*

$X_t = M_t + A_t$ *pour tout* $t \geq 0$

de plus M *et* A *sont uniques à constante additive près*

Lemme de Gronwal

Lemme A.4 *Soit* $T \geq 0$ *et* g *une fonction positive mesurable bornée telle que ;*

$g(t) < a + b\int_0^t g(s)\,ds.$ *pour tout* $t \leq T$

où a *et* b *sont des constantes positives alors,*

$g(t) < ae^{Bt}$ *pour tout* $t \leq T$

Théorème de comparaison

Théorème A.5 *Soit* $\{W_t, t \geq 0\}$ *un mouvement brounien réel,* b_1, b_2 *et* σ *trois fonctions globalement lipschitziennes,* $x_1 \geq x_2$ *deux réels.*

On considère les deux EDS $X_t^i = X_i + \int_0^t b_i\left(X_s^i\right) ds + \int_0^t \sigma\left(X_s^i\right) dWs$ *pour* $i = 1, 2...$

supposons que $b_1(x) \geq b_2(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *alors,*

$x_t^1 \geq x_t^2$ *p.s. pour tout* $t \geq 0$

Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy

Théorème A.6 *Soit* $p > 0$ *un réel, il existe deux constantes* c_p *et* C_p *telles que : pour toute martingale locale continue* X *nulle en zéro.*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\alpha^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_{\mathbb{P}} \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_\alpha^{p/2}\right].$$

Théorème de représentation des martingales

Théorème A.7 *Soit* M *une martingale (cà d làg) de carré intégrable pour la filtration* $(\mathcal{F}_t^w)_{t\in[0,T]}$ *alors il existe un unique processus* $(H_t)_{t\in[0,T]}$ *appartenant à* $M^2(\mathbb{R}^t)$ *telle que ;*

$\mathbb{P} - p.s. \forall t \in [0, T]\ M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s.$

L'inégalité de Cauchy Schwarz

Soient X et Y deux variables aléatoires de L^2 on a ;

$\int XY ds \leq \left(\int X^2 ds\right)^{1/2} \left(\int Y^2 ds\right)^{1/2}.$

L'inégalité de Hölder

$p > 1, q > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, \int XY ds \leq \left(\int X^p ds\right)^{1/p} \left(\int Y^q ds\right)^{1/q}.$

L'inégalité de Chebychev

Soit X variable aléatoire

$p(X > \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)^2}{\varepsilon^2}.$

Formule d'Itô

C'est la formule centrale du calcul stochastique

Théorème A.8 *Soit* $g\left(t,x\right):\left[0,\infty\right]\times\mathbb{R}^{n}\rightarrow\mathbb{R}^{\mathbb{P}}$ *une fonction* $C^{1,2}$

$$g\left(t,x\right)=\Big(g_{1}\left(t,x\right),...g\left(t,x\right)_{p}\Big).$$

alors, le processus $Y\left(t\right)=\left(Y^{1}\left(t\right),...Y^{p}\left(t\right)\right)=g\left(t,X_{t}\right)$ *est un processus d'Itô qui satisfait*

$$dY^{k}\left(t\right)=\textstyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial g_{k}}{\partial x_{i}}\left(t,X_{t}\right)dX_{t}^{i}+\dfrac{\partial g_{k}}{\partial t}\left(t,X_{t}\right)dt$$
$$+\frac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j=1}^{n}\dfrac{\partial^{2}g_{k}}{\partial x_{i}\partial x_{j}}\left(t,X_{t}\right)d\left\langle X^{i},X^{j}\right\rangle_{t}$$

.

Conclusion

L'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades est très importante, pour cela nous avons étudiés les résultats d'existences de l'EDSR unidimensionnel dans le cas ou le générateur soit :

- Continu en y et accroissance linéaire.
- f est discontinu en y et continu en z.

On démontre aussi le théorème d'existence et d'unicité de l'EDSR multidimensionnelle ou le générateur f est localement lipschitz.

En générale des nombreux travaux sur l'étude de l'EDSR qui détermine l'existence et l'unicité de la solution sur des conditions minimales.

Bibliographie

[1] Bahlali, K.,Existence and uniqueness of solutions for Backward stochastic differential equations with locally Lipschitz coefficient, Elect.Comm.in Probab 7, 169-179, 2002

[2] Bismut, J.M., Analyse convexe et probabilités, thèse, Faculté des sciences de Paris, Paris, 1973.

[3] Bismut, J.M., Contrôle des systèmes linéaires quadratiques : applications de l'intégrale stochastique, sémin. Proba. XII., Lect Notes in Maths., 649, 180-264, Springer, 1978.

[4] Bismut, J.M., Conjugate convex functions in optimal stochastic control, SIAM review, 20, 62-78, 1978.

[5] Briand, P., Delyon B., Hu, Y., Pardoux, E. and Stoica, L., $L_{\mathbb{P}}$ solutions of BSDEs, Stochastic process. Appl. 108, 109-129, 2003.

[6] Briand, P., Hu, Y., BSDE with quadratic growth and unbounded terminal value, Probab. Theory Related Fields, 136, 604-618, 2006.

[7] Briand, P., Hu, Y., Quadratic BSDEs with convex generators and unbounded terminal conditions, Probab. Theory Related Fields, 141, 543-567, 2008.

[8] Chen, Z., Existence and uniqueness for BSDE with stopping time, Chinese Sci. Bull., 43, 2, 96-99, 1998.

[9] El Karoui, N., Backward stochastic differential equation : a general introduction. Pitman Research Notes in Mathematics Series (editors : El karoui and Mazliak), 364, 7-26, 1997.

[10] El Karoui, N., Peng, S., Quenez, M.C., Backward stochastic differential eqaution in finance, Mathematical finance, 7(1), 1-71, 1997.

[11] El Karoui, N., Kapoudjian, C., Pardoux, E., Peng, S. and Quenez, M.C., Reflected solutions of backward SDE and related obstacle problems for PDEs, Ann. Probab., 25(2), 702-737, 1997.

[12] Friedman, A., Stochastic differential equations and applications, Academic Press Inc. New York, 1976.

[13] Hamadène, S., Lepeltier, J.P., Matoussi, A., Double barrier backward sdes with continuous coefficients. Pitman Research Notes in Mathematics Series (editors : El karoui and Mazliak), 364, 161-177, 1997.

[14] Hamadène, S., Reflected BSDE's with discontinuous barrier and application, Stochastics and Stochastic Reports, 74, 571-596, 2002.

[15] Hamadène, S., Lepeltier, J.P., and Wu, Z., Infinite horizon reflected BSDEs and applications in mixed control and games problems, Probability and mathematical statistics, 19, 211-234, 1999.

[16] Hu, Y., Peng, S., Solution of forward backward stochastic differential equations, Probab. Theory Related Fields, 103, 273-283, 1995.

[17] Hu, Y., Yong, J., Forward backward stochastic differential equations with nonsmooth coefficients, Stochastic processes and their applications, 87, 93-106, 2000.

[18] Jia, G., A generalized existence theorem of BSDEs, C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 324, 685-688, 2006.

[19] Jia, G., A class of backward stochastic differential equations with discontinuous coefficients, Statistics & Probability Letters, 78, 231-237, 2008.

[20] Jia, G., A uniqueness theorem of solution of backward stochastic differential equation, C.R. Acad. Sci. Paris, Serie I, 346, 439-444, 2008.

[21] Karatzas, I., Shreve, S., Brownian motion and stochastic calculus, Springer-Verlag, New York, 1998.

[22] Kobylanski, M., Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth, Ann. Probab., 18, 256-276, 2000.

[23] Kobylanski, M., Lepeltier, J.P., Quenez, M.C. and Torres, S., Reflected BSDE with superlinear quadratic coefficient, Probability and mathematical Statistics, 22, 51-83, 2002.

[24] Lepeltier, J.P., San Martin, J., Backward stochastic equations with continuous coefficient, Statistics & Probability Letters, 32, 425-430, 1997.

[25] Lepeltier, J.P., San Martin, J., Existence of BSDE with superlinear-quadratic coefficient, Stochastic and Stochastic Reports, 63, 227-240, 1998.

[26] Ma, J., Protter, P., Yong, J., Solving of forward backward stochastic differential equations explicitly- a four step scheme, Probab., Theory Related Fields, 98, 339-359, 1994.

[27] Ma, J., Yong, J., Forward backward stochastic differential equations and their applications, Lecture Notes in mathematics, Vol. 1702, Springer Berlin, 1999.

[28] Mao, X., Adapted solutions of backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients, Stochastic processes and their Applications, 58, 281-292, 1995.

[29] Matoussi, A., Reflected solutions of backward stochastic differential equations with continuous coefficient. Statist. Probab. Lett., 14, 51-61, 1997.

[30] Oksendal, B., Stochastic differential equations, 5th edition, Berlin-New York, Springer, 2003.

[31] Pardoux, E., Peng, S., Adapted solution of a backward stochastic differential equation, Systems and Control letters, 14, 55-61, 1990.

[32] Pardoux, E., Tang, S., Forward backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic PDEs, Probab., Theory Related Fields, 114, 123-150, 1998.

[33] Pardoux, E., Peng, S., Backward doubly stochastic differentail equations and systems of quasilinear SPDEs, Probab., Theory Related Fields, 98(2), 209-227, 1994.

[34] Peng, S., Wu, Z., Fully coupled forward backward stochastic differential equations and applicationsto optimal control, SIAM J. Control optim., 37(3), 825-843, 1999.

[35] Peng, S., Shi, Y., Infinite forward backward stochastic differential equations, stochastic processes and their applications, 85, 75-92, 2000.

[36] Protter, J., Stochastic integration and differential equations, Springer-verlag, New York, 1990.

[37] Wu, Z., Fully coupled FBSDE with Brownian motion and Poisson process in stoping time duration, Journal of the Australian mathematical Society, 74, 249-266, 2003.

[38] Wu, Z., Forward backward stochastic differential equations with Brownian motion and Poisson process, Acta mathematicae Applicatae Sinica, 15(4), 433-443, 1999.