

UNIVERSITE MOHAMED KHIDER

-BISKRA-

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

ET DES SCIENCES DE LA NATURE

ET DE LA VIE

\*\*\*\*\*

## MEMOIRE

Présentée pour obtenir le grade de

**MAGISTER EN MATHÉMATIQUES**

Spécialité: ANALYSE ET MODELISATION ALEATOIRE

\*\*\*\*\***TITRE**\*\*\*\*\*

**COMPRESSION ET DEBRUITAGE PAR  
ONDELETTES.**

\*\*\*\*\*

par

**ABDELMALEK BOUSSAAD**

Soutenue le ..... 2009 devant la commission d'examen:

# Table des matières

<b>Table des Figures</b>	<b>5</b>
<b>Introduction General</b>	<b>5</b>
<b>1 Introduction à la théorie des ondelettes</b>	<b>9</b>
1.1 Analyse de Fourier . . . . .	9
1.1.1 Séries de Fourier . . . . .	10
1.1.2 Transformée de Fourier des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	11
1.1.3 Transformée de Fourier des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	12
1.2 L'analyse temps-fréquence . . . . .	13
1.2.1 La Transformée de Fourier à court terme . . . . .	13
1.2.2 La transformée de Gabor . . . . .	16
1.3 L'analyse des signaux par ondelettes . . . . .	18
1.3.1 La transformée en ondelettes . . . . .	19
1.3.2 Mise en oeuvre numérique . . . . .	21
1.3.3 Le problème des moments de l'ondelette . . . . .	22
1.4 Ondelettes orthogonales . . . . .	23
1.4.1 Analyse multirésolution . . . . .	24
1.4.2 Représentation par ondelettes . . . . .	29
1.4.3 Exemple : L'ondelette de Haar . . . . .	31
1.4.4 Les ondelettes de Daubechies . . . . .	32
1.4.5 Ondelettes de Daubechies à support compact . . . . .	35
1.5 Implémentation de la transformée en ondelette discrète . . . . .	37

1.5.1	Décomposition d'un signal dans le domaine des onde- lettes . . . . .	38
1.5.2	Reconstruction d'un signal . . . . .	43
<b>2</b>	<b>La transformée en ondelettes et compression des images</b>	<b>46</b>
2.1	Introduction . . . . .	46
2.1.1	Généralités sur la compression. . . . .	46
2.2	Compression avec perte . . . . .	48
2.2.1	Transformée discrète . . . . .	48
2.2.2	La Quantification . . . . .	50
2.2.3	Le Codage de source . . . . .	53
2.2.4	L'algorithme proposé . . . . .	58
2.2.5	Simulation de l'algorithme proposé . . . . .	58
2.3	Conclusion . . . . .	64
<b>3</b>	<b>La transformée en ondelettes et débruitage des signaux</b>	<b>65</b>
3.1	Débruitage par ondelettes . . . . .	65
3.1.1	Algorithme de débruitage par la transformée en onde- lettes . . . . .	66
3.1.2	Formulation mathématiques du problème . . . . .	66
3.1.3	Les méthodes de seuillage . . . . .	67
3.1.4	Sélection du seuil . . . . .	68
3.1.5	Seuillage global . . . . .	70
3.1.6	Seuillage dépendant du niveau . . . . .	70
3.2	Simulation de l'algorithme proposé par Donoho . . . . .	71
3.3	Conclusion . . . . .	78
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>79</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>80</b>

# Table des figures

1.1	Le Sinus Cardinal . . . . .	14
1.2	Fenetre triangulaire en temps et frequence . . . . .	15
1.3	Quelques exemples d'ondelettes . . . . .	37
1.4	Algorithme de décomposition d'un signal . . . . .	42
1.5	Algorithme de la reconstruction d'un signal . . . . .	44
2.1	Schema de compression d'une image avec perte . . . . .	49
2.2	Exemple de fonction de quantification . . . . .	51
2.3	Exemple du Codage de Huffman . . . . .	54
2.4	Exemple de codage arithmetique . . . . .	57
2.5	Image boat originale et reconstruite avec OM db2 . . . . .	59
2.6	Image boat reconstruite avec Om db8 . . . . .	60
2.7	Image boat reconstruite avec Om Coef1 . . . . .	61
2.8	Image boat originale et reconstruite avec TH=20 . . . . .	62
2.9	Image boat reconstruite avec TH=35 . . . . .	62
2.10	Image boat reconstruite avec TH=50 . . . . .	63
2.11	Image boat reconstruite avec TH=60 . . . . .	63
3.1	Graphe de la fonction du seuillage dur . . . . .	68
3.2	Graphe de la fonction du seuillage doux . . . . .	69
3.3	Signal ECG 117 non Corrompu et Corrompu . . . . .	72
3.4	Débruitage de signal 117 avec OM db2 N=2 seuillage dur . . .	73
3.5	Débruitage de signal 117 avec OM db2 N=3 seuillage dur . . .	74
3.6	Débruitage de signal 117 avec OM db2 N=2 seuillage doux . .	75

3.7	Débruitage de signal 117 avec OM db2 N=3 seuillage doux . .	75
3.8	Débruitage de signal 117 avec OM db8 N=2 seuillage dur . . .	76
3.9	Débruitage de signal 117 avec OM db8 N=3 seuillage dur . . .	77
3.10	Débruitage de signal 117 avec OM db8 N=2 seuillage doux . .	77
3.11	Débruitage de signal 117 avec OM db8 N=2 seuillage doux . .	78

# Liste des tableaux

- 2.1 Résultat de la première partie de simulation avec un seuille fixe 59
- 2.2 Résultat de simulation simulation avec une onde mère db2 . . . 61

# Introduction Generale

Les ondelettes, comme nouvel outil mathématique notable, se sont imposées dans de divers domaines d'application. Par leur capacité extraordinaire de concentration de l'énergie et par leur pouvoir fascinant de détection d'irrégularités, l'implication de cette transformée dans les algorithmes les plus imposants en compression et en débruitage viennent comme une utilisation naturellement logique.

Dans ce contexte, la problématique que nous avons fixée au début de notre travail était la mise en œuvre des ondelettes en compression et en débruitage de signaux. La lecture persévérante de plusieurs ouvrages de références ainsi que les articles de recherche les plus appropriés à ce sujet nous a permis de choisir :

- La compression avec perte dédiée aux images à niveaux de gris, ceci est pour pouvoir descendre sous la célèbre limite théorique appelée l'entropie.
- D'autre part, le schéma de l'éminent Professeur D.L. Donoho a été mise en œuvre, tout en essayant de mettre le point sur un tas de questions telles que : Quelle est la meilleure onde mère à utiliser ? Quelles significations portent les seuillages dur (Hard thresholding) et doux (soft thresholding) ? Est-il possible d'éliminer le bruit additif de distribution gaussienne d'une manière achevante ?

Le présent manuscrit est structuré de la manière suivante :

**Chapitre I** Donne d'une manière détaillée la transformée de Fourier qui représente un outil classique pour l'analyse des signaux sur leur com-

portement fréquentiel et leurs propriétés.

L'inconvénient majeur de cette méthode d'analyse, c'est qu'elle nous permet pas de connaître les composantes fréquentielles d'un signal sans localiser les instants de l'apparition de celle-ci, puis nous exposons la théorie des ondelettes qui représente un outil sophistiqué pour l'analyse des signaux. L'idée de base de cette analyse est à partir d'une fonction ( $\psi \in \mathbb{R}$ ) qui possède une intégrale nulle et oscillante appelée onde mère, on construit une famille de fonctions élémentaires ( $\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{z}}\psi(\frac{t-b}{a})$ ) tel que ( $a, b \in \mathbb{R}$ ). Les coefficients du signal  $f$  sont alors les nombres ( $C_f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\bar{\psi}(t)dt$ ), à partir de ces derniers on peut analyser un signal quelconque. Malheureusement dans la pratique si on applique cette technique nous rencontrons une redondance d'information donnée par les coefficients ( $C_f(a, b)$ ). Cette dernière est obtenue du fait que on a : un nombre de coefficients non dénombrables ( $C_f(a, b)$ ) tel que ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), mais dans la pratique on veut des coefficients dénombrables ou finis ( $C_f(j, k)$ ) tel que ( $j, k \in \mathbb{Z}$ ).

À la fin de ce chapitre nous décrivons l'analyse multirésolution développée par S.Mallat [11] et systématisée par Ingrid Daubechies [4] dans le but de construire une base orthogonale ( $\psi_{j,k}$ ) tel que ( $j, k \in \mathbb{Z}$ ) pour l'espace ( $L^2(\mathbb{R})$ ) en minimisant les redondances d'information, nous expliquons comment on décompose un signal et on le reconstruit selon l'algorithme de S.Mallat.

**Chapitre II** Expose des définitions concernant la compression et inclut des notions de base de la théorie d'information ainsi que quelques mesures de qualité utilisées communément pour évaluer les deux types de compression (avec et sans perte). Par la suite, nous focalisons l'attention sur la compression avec perte. Nous proposons un algorithme incluant les ondelettes, comme outil mathématique qui concentre l'énergie en peu de coefficients, la théorie de la quantification, et finalement nous montrons quelques codeurs les plus utilisés en compression. Des simulations



sont élaborées à la fin de ce chapitre pour valider l'étude théorique et la mise en valeur du schéma suggéré en tirant en conclusion que l'onde mère de I. Daubechies db2 est la meilleure onde adaptée à notre algorithme.

**Chapitre III** introduit d'une façon succincte le débruitage des signaux 1D/2D.

L'algorithme proposé par D. L. Donoho est expliqué d'une manière claire tout en mettant le doigt sur les deux variantes (débruitage par seuillage dur et par seuillage doux). En se basant sur le critère du risque minimum, la détermination du seuil est effectuée en suite. Arrivant à son terme, le chapitre est clôturé par des simulations confirmant notre compréhension théorique de la problématique évoquée.

A la fin, une conclusion générale est rédigée pour résumer les résultats du travail accompli.

# Chapitre 1

## Introduction à la théorie des ondelettes

### 1.1 Analyse de Fourier

L'analyse de Fourier [1] est une méthode qui permet d'analyser un signal sur son comportement fréquentiel et ses propriétés. Pour réaliser cette tâche, on décompose le signal sur une base des éléments simples appelés fonctions élémentaires. Les fonctions élémentaires qui contribuent dans l'analyse de Fourier sont les fonctions sinusoïdales, elles dépendent d'un paramètre représentant la fréquence. Cette méthode nous permet de connaître les composantes fréquentielles d'un signal sans localiser les instants de l'apparition de celle-ci. Les informations fréquentielles ainsi obtenues sont au détriment de la description temporelle du signal. Cette méthode ne s'adapte pas avec tous les types des signaux, spécifiquement les signaux non stationnaires qui se distinguent par l'apparition d'événements transitoires. Elle est aussi faible pour décrire les caractéristiques évolutives du signal.

### 1.1.1 Séries de Fourier

Dans un mémoire célèbre daté de 1807, Joseph Fourier annonça sa fameuse théorie [1] qui précise que toute fonction périodique de période  $a$  peut être décomposée par une série infinie de la forme :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (1.1)$$

Avec

$$c_n = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) e^{in\omega t} dt, \omega = \frac{2\pi}{a} \quad (1.2)$$

Où :

les  $c_n$  représentent les coefficients de Fourier.

$a$  la période.

$\omega$  la fréquence fondamentale.

En fait les coefficients de Fourier minimisent l'écart quadratique entre la fonction  $f(t)$  et le développement (1.1). En effet la valeur (1.2) est obtenue en dérivant par rapport au coefficient d'indice  $n$  l'expression :

$$\int_0^a (f(t) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t})^2 dt$$

et en annulant cette dérivée.

Une série de Fourier peut s'écrire aussi sous la forme trigonométrique suivante :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega n t) + 2b_n \sin(\omega n t) \quad (1.3)$$

Où les valeurs de  $a_n$  et  $b_n$  sont définis par les expressions :

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \cos(\omega n t) dt \quad (1.4)$$

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \sin(\omega n t) dt \quad (1.5)$$

### 1.1.2 Transformée de Fourier des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$

On part d'une fonction  $f(t)$ , définie sur toute la droite réelle, intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire vérifiant  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$ .

On pose :

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

Alors cette fonction  $\widehat{f}(\omega)$  est continue sur la droite réelle et tend vers 0 quand  $\omega \rightarrow +\infty$ .

Voici quelques propriétés de la transformée de Fourier. Si  $g, h$  appartiennent à  $L^1(\mathbb{R})$ , il en est de même pour leur produit de convolution  $f = g * h$  défini par :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau)h(\tau) d\tau \quad (1.7)$$

En fait l'intégrale est absolument convergente pour presque tout  $t$  et l'on a par un calcul immédiat

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{g}(\omega)\widehat{h}(\omega) \quad (1.8)$$

Si  $f$  appartient à  $L^1(\mathbb{R})$ , il est en général inexact que l'on ait  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ . Par exemple si  $f(x) = 1$  sur  $[-1, 1]$  et  $f(x) = 0$  si  $|x| > 1$ , on aura  $\widehat{f}(\omega) = 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega}$  et cette fonction n'appartient pas à  $L^1(\mathbb{R})$ .

Mais si  $f$  et  $\widehat{f}$  appartiennent à  $L^1(\mathbb{R})$  alors  $f(t)$  est nécessairement continue et l'on a :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (1.9)$$

L'intégrale est (par hypothèse) absolument convergente et (1.9) est la formule d'inversion de Fourier.

L'interprétation de (1.9) est la suivante : on regarde  $\omega$  comme un indice et

l'intégrale par rapport à  $\omega$  comme une combinaison linéaire. Les fonctions de  $t$  qui sont les " building blocks " ou " briques de base " sont  $e^{i\omega t}$  et l'on construit l'édifice  $f(t)$  en empilant ces " briques de base ". On observera qu'il y a une incohérence car les briques de base n'appartiennent pas à l'espace fonctionnel considéré (à savoir  $L^1(\mathbb{R})$ ) et les considérations d'algèbre linéaire que nous venons de présenter sont absurdes. Cette incohérence est la source de nombreux problèmes et ces problèmes seront résolus lorsque les ondes (à savoir les fonctions  $t \rightarrow e^{i\omega t}$ ) seront remplacées par les ondelettes (que nous définirons par la suite).

### 1.1.3 Transformée de Fourier des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$

Si  $f$  et sa transformée de Fourier  $\hat{f}$  appartiennent à  $L^2(\mathbb{R})$ , on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \quad (1.10)$$

et l'opérateur  $J$  défini par  $J(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$  se prolonge en un isomorphisme isométrique de  $L^2(\mathbb{R})$  sur  $L^2(\mathbb{R})$ . Si  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  mais  $f(t) \notin L^1(\mathbb{R})$ , alors l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} dt$  n'existe plus au sens usuel.

On doit considérer les intégrales tronquées

$$\int_{-m}^{+m} f(t)e^{i\omega t} dt = \hat{f}_m(\omega) \text{ et l'on a : } \|\hat{f}(\omega) - \hat{f}_m(\omega)\|_{2 \rightarrow 0} (m \rightarrow +\infty)$$

Avec

$$\|f\|_2 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

On a également, si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  et  $g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle \quad (1.11)$$

Où:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{g}(t)dt$$

On observera que les deux intégrales figurant dans (1.11) sont absolument convergentes.

## 1.2 L'analyse temps-fréquence

Les perspectives actuelles sont dominées par les applications industrielles de l'analyse et du traitement des signaux : géophysique, sismique, analyse et synthèse des sons, imagerie médicale, etc.. Il s'agit d'extraire d'un signal les informations pertinentes, sous forme de valeurs numériques caractéristiques et pas trop nombreuses.

L'analyse de Fourier est la plus ancienne de ces techniques. Elle est performante, depuis de l'invention de la transformée de Fourier rapide (TFR), notamment pour l'analyse de signaux périodiques et suffisamment réguliers. Dans ce cas les paramètres de Fourier  $c_n$  deviennent vite négligeables quand  $n$  augmente. Quelques coefficients numériques suffisent ainsi à caractériser pratiquement le signal dans le domaine des fréquences. Mais dès que le signal devient irrégulier, la liste des paramètres à conserver s'allonge. L'analyse de Fourier présente des inconvénients majeurs qui ne permettent pas une analyse satisfaisante de toutes les sortes de signaux. Ainsi, dans le spectre  $\hat{f}(\omega)$  tous les aspects temporels du signal disparaissent, par exemple le début et la fin pour un signal fini, ou l'instant d'apparition d'une singularité. On souhaiterait que les paramètres réalisent une analyse à la fois en temps et en fréquence, à la manière d'une portée musicale où sont indiquées à la fois la fréquence et la durée des notes. La transformée de Fourier est incapable de donner le contenu fréquentiel local d'un signal. En d'autres termes, l'analyse temps-fréquence en est absente.

### 1.2.1 La Transformée de Fourier à court terme

Une première idée consiste à tronquer le signal en ne le considérant que sur un intervalle fini  $[-a, +a]$ . C'est bien ce qu'on est contraint de faire quand on fait le calcul numérique. Ceci revient à multiplier le signal  $f(t)$  par le créneau  $\chi_{[-a,a]} = \tau_a$ , ou un translaté et donc à transformer le spectre  $\hat{f}(\omega)$  en:

$$\widehat{g}(\omega) = \tau_a \widehat{f}(\omega) = \left( \frac{\sin(2\pi a \omega)}{\pi \omega} \right) * \widehat{f}(\omega) = (S_a * \widehat{f})(\omega)$$

La troncature du signal se traduit donc sur le spectre par une convolution avec le sinus cardinal.

$$S_a(\omega) = \frac{\sin(2\pi a \omega)}{\pi \omega}$$

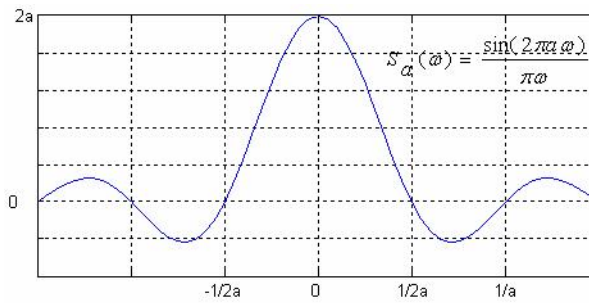


FIGURE 1.1 – Le Sinus Cardinal

L'approximation de  $\widehat{f}$  par  $\widehat{g}$  est d'autant meilleure que  $a$  est grand, c'est-à-dire que  $S_a$  approche mieux l'impulsion de Dirac. Mais les calculs deviennent vite très volumineux. Surtout, le sinus cardinal s'amortit très lentement et présente des lobes importants près de l'origine. Afin de les diminuer, on utilise de préférence des fonctions plus régulières, toutes appelées fenêtres, concentrée autour de l'origine.

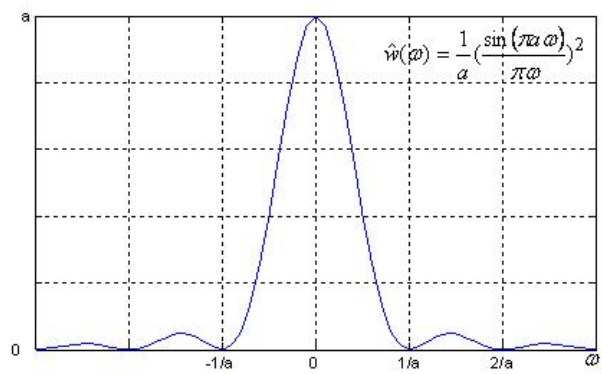
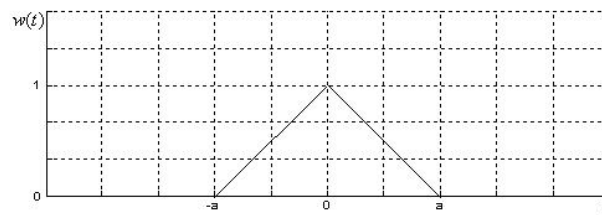


FIGURE 1.2 – Fenêtre triangulaire en temps et fréquence

Ces fenêtres sont effectivement très utilisées et améliorent sensiblement le calcul du spectre. On est ainsi amené à faire glisser cette fenêtre devant le



graphe du signal de façon à prendre en compte toutes ses valeurs. On obtient alors une famille de coefficients à deux paramètres réels  $\omega$  et  $b$  :

$$W_f(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{w}(t-b)e^{-i\omega t} dt. \quad (1.12)$$

qui remplace  $\widehat{f}(\omega)$  .

L'application  $f \rightarrow W_f$  s'appelle la transformée de Fourier à fenêtre glissante. Le paramètre  $\omega$  joue le rôle d'une fréquence, localisée autour de l'abscisse  $b$  du signal temporel.  $W_f(\omega, b)$  donne ainsi une indication sur ce qui se passe autour de l'abscisse  $t = b$  pour la fréquence  $\omega$ . Dans la formule (1.12), c'est par raison de commodité qu'on fait figurer  $\bar{w}$  au lieu de  $w$  , la fenêtre pouvant être, a priori, à valeurs Complexes:

on a un produit scalaire dans  $L^2(\mathbb{R})$  :

$$\begin{cases} W_f(\omega, b) = \langle f, w_{\omega, b} \rangle \\ w_{\omega, b}(t) = w(t-b)e^{i\omega t} \end{cases} \quad (1.13)$$

## 1.2.2 La transformée de Gabor

Il est intuitif de prévoir que, réciproquement la connaissance des  $W_f(\omega, b)$  pour toutes les valeurs réelles de  $\omega$  et  $b$  détermine complètement le signal  $f$ . On peut même pronostiquer qu'il y aura redondance d'informations puisqu'on a remplacé une famille à un paramètre  $\widehat{f}(\omega)$  par une autre à deux paramètres.

D. Gabor, dans les années 1940 a utilisé essentiellement la fenêtre de Gauss  $w(t) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$  . On voit ici que l'on s'affranchit du fait d'avoir une fenêtre ressemblant à un créneau, celle-ci étant nettement aplatie. Un des mérites de D. Gabor a été d'expliciter la formule inverse donnant  $f$  à partir des  $W_f(\omega, b)$ . On a le résultat suivant :

**Théorème 1.** *Soit  $w \in L^1 \cap L^2$  une fenêtre telle que  $|\widehat{w}|$  soit une fonction paire et  $\|w\|_2 = 1$  . On pose:*

$$w_{\omega, b}(t) = w(t-b)e^{i\omega t} \quad (\omega, b \in \mathbb{R})$$

pour tout signal  $f \in L^2$  on considère les coefficients:

$$W_f(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{w_{\omega, b}(t)} dt$$

Alors on a

(a) conservation de l'énergie :

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} |W_f(\omega, b)|^2 d\omega db = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \quad (1.14)$$

(b) La formule de reconstruction:

$$f(t) = \int \int_{\mathbb{R}^2} W_f(\omega, b) w_{\omega, b}(t) d\omega db \quad (1.15)$$

au sens suivant si :

$$g_a(t) = \int \int_{|\omega| \leq a, b \in \mathbb{R}} W_f(\omega, b) w_{\omega, b}(t) d\omega db$$

alors  $g_a \rightarrow f$  dans  $L^2$  quand  $a \rightarrow +\infty$

La démonstration de ce théorème est longue et technique. Nous référons le lecteur à [10].

Pour la transformée de Fourier à fenêtre glissante dans  $L^2$ , on a donc des formules analogues à la transformée de Fourier simple dans  $L^2$  : Conservation de l'énergie (formule de parseval) et formule d'inversion. Il y a une très belle harmonie dans les formules, harmonie qu'on retrouvera avec les ondelettes.

Dans les cas pratiques on prendra naturellement une fonction  $w$  localisée autour de  $t = 0$ , par exemple une gaussienne. La fonction  $w_{\omega, b}$  est alors localisée autour du point  $t = b$ ,  $\widehat{w}_{\omega b}$  donnée par :

$$\widehat{w}_{\omega b}(\xi) = e^{-i(\xi - \omega)b} \widehat{w}(\xi - \omega) \quad (1.16)$$

est localisée autour du point  $\xi = \omega$ . Ceci fait que

$$W_f(\omega, b) = \langle f, w_{\omega b} \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{w}_{\omega b} \rangle$$

contient une information à la fois en temps et en fréquence autour du point  $(b, \omega)$ .

Dans la mise en oeuvre numérique on calculera les coefficients  $W_f(\omega, b)$  sur une grille  $(m\omega_0, nb_0)$  avec  $m, n \in \mathbb{Z}$  et  $\omega_0, b_0$  réels positifs. On obtient ainsi une suite double  $W_{m,n}(f) = W_f(m\omega_0, nb_0)$  discrétisée de la fonction des deux variables réelles  $\omega$  et  $b$ . Mais la méthode de Gabor présente l'inconvénient majeur d'avoir une fenêtre de longueur fixe, handicap patent lorsqu'on veut traiter des signaux dont les variations peuvent avoir des ordres de grandeur très variables. C'est le cas notamment en traitement du son : l'attaque de la note est une phase très brève siége de hautes fréquences et caractéristique de l'instrument et de l'interprète, tandis que le reste de la note contient des fréquences relativement plus basses. C'est également le cas pour l'analyse des turbulences en mécanique des fluides où apparaissent des phénomènes significatifs à des échelles à la fois macroscopiques et microscopiques. Le géophysicien J.Morlet a constaté ces inconvénients en prospection pétrolière, pour l'analyse de signaux sismiques captés après réflexion sur des couches géologiques. Ceci l'a amené à proposer en 1983 une méthode nouvelle où la fenêtre varie par translation mais aussi par dilatation ou contraction. C'était le début de l'utilisation des ondelettes en traitement des signaux numériques.

### 1.3 L'analyse des signaux par ondelettes

La méthode de D.Gabor date des années 1940. Avec les ondelettes nous entrons de plein pied dans l'actualité scientifique puisque les premières publications sur le sujet remontent seulement à 1984 avec, notamment, l'article d'Alex Grossman et Jean Morlet Les idées essentielles sont nées d'une convergence entre les travaux théoriques déjà anciens (notamment ceux de Littlewood et Paley, de Zygmund, puis vers 1960 de Calderon sur les noyaux singuliers d'opérateurs), et des idées récentes mises en avant à propos, soit du traitement numérique de certain signaux(J.Morlet), soit d'outils mathématiques utilisés en physique théorique(A.Grossmann). L'idée de base est a partir d'une fonction de base  $\psi$ , appelée ondelette-mère ou ondelette analysante, on construit une famille de fonctions élémentaires :

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad b \in \mathbb{R}, a > 0 \quad (1.17)$$

les coefficients du signal  $f$  sont alors les nombres

$$C_f(a, b) = \langle f, \psi_{ab} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{\psi}_{ab}(t)dt \quad (1.18)$$

Les caractéristiques de  $\psi$  sont assez nettement différentes de celles d'une fenêtre. Celle-ci avait plus ou l'allure d'un créneau.  $\psi$  au contraire sera d'intégrale nulle et oscillante. On s'efforcera ici encore d'imposer à  $\psi$  et  $\widehat{\psi}$  une bonne localisation, donc, à l'infini, une convergence vers 0 assez rapide. On obtient ainsi une fonction qui ressemble à une vague : elle oscille et s'amortit.

D'où son nom. Dans un premier temps, Morlet utilisa  $\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t)$ , mais des dérivées gaussiennes sont aussi largement utilisées.

### 1.3.1 La transformée en ondelettes

**Théorème 2.** Soit  $\psi \in L^1 \cap L^2$  une fonction, appelée ondelette-mère, vérifiant les conditions suivantes :

- (i)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = K < +\infty$ .
- (ii)  $\|\psi\|_2 = 1$ .

On construit alors les ondelettes de base:

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad b \in \mathbb{R}, a > 0$$

et pour tout signal  $f \in L^2$  on considère  $C_f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi_{ab}(t)} dt$  est appelée la transformée en ondelettes du signal  $f$ , ou  $C_f(a, b)$  sont les coefficients d'ondelettes.

Alors on a:

- (a) conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{K} \int \int_{\mathbb{R}^2} |C_f(a, b)|^2 \frac{dadb}{a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \quad (1.19)$$

- (b) La formule de reconstruction:

$$f(t) = \frac{1}{K} \int \int_{\mathbb{R}^2} C_f(a, b) \psi_{ab}(t) \frac{dadb}{a^2} \quad (1.20)$$

au sens suivant si:

$$f_\epsilon(t) = \frac{1}{K} \int \int_{|a|>\epsilon, b \in \mathbb{R}} C_f(a, b) \psi_{ab}(t) \frac{dadb}{a^2}$$

alors  $f_\epsilon \rightarrow f$  dans  $L^2$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

La démonstration de ce théorème est aussi longue et technique. Nous référons le lecteur à [10].

**Remarque 1.** *L'hypothèse (i) sur  $\psi$  implique, puisque  $\widehat{\psi}$  est continue, que  $\widehat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 0$ . Dans tous les cas pratiques, cette condition est également suffisante.*

**Exemple 1. (a)** *Nous avons déjà indiqué que l'ondelette initialement utilisée par J.Morlet*

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t) \tag{1.21}$$

*N'est pas normalisée, mais ceci est de peu d'importance. Par contre, l'hypothèse (i) n'est pas vérifiée puisque*

$$\widehat{\psi}(0) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{25}{2}} > 0$$

*On a donc  $K = +\infty$ . Mais cette valeur  $\widehat{\psi}(0)$  est de l'ordre  $10^{-5}$ . Dans un calcul en ordinateur on peut estimer qu'elle est numériquement nulle, et donc être assez proche des conditions d'applications du théorème, qui reste, malgré tout, inapplicable dans ce cas précis.*

**(b)** *L'exemple le plus simple de fonction  $\psi$  est évidemment celui d'une fonction constante par morceaux c'est l'ondelette de Haar définie par*

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*On a dans ce cas :*

$$\widehat{\psi}(\xi) = ie^{-i\pi\xi} \frac{1 - \cos(\pi\xi)}{\pi\xi}$$

(c) *Pratiquement, toute fonction  $\psi$  oscillante, bien localisée ainsi que  $\widehat{\psi}$  et d'intégrale nulle fera l'affaire. Par exemple le chapeau mexicain :*

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{\frac{1}{4}}}(1 - x^2)e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (1.22)$$

ou l'on a:

$$\widehat{\psi}(\xi) = K\xi^2 e^{-2\pi^2\xi^2}$$

### 1.3.2 Mise en oeuvre numérique

On restreint les paramètres  $a$  et  $b$  à sous ensemble discret (et même fini) de  $\mathbb{R}$ . Par exemple

$$a_m = 2^{-m} \text{ et } b_n = n2^{-m} \text{ avec } (n, m \in \mathbb{Z})$$

d'où :

$$\psi_{a_m b_n}(t) = 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m t - n)$$

ou plus généralement, avec  $\alpha > 1$  et  $\beta > 0$  :

$$\psi_{a_m b_n}(t) = \alpha^{\frac{m}{2}} \psi(\alpha^m t - n\beta)$$

Plus  $\alpha$  est proche de 1 et  $\beta$  proche de 0, et plus l'information est redondante, nécessitant d'ailleurs de gros calculs. I. Daubechies des laboratoires Bell, a étudié dans quelles conditions l'application:

$$C : f \rightarrow C_f = (C_f(a_m, b_n))_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$$

de  $L^2$  dans  $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$  est injective (c'est-à-dire que les coefficients d'ondelettes caractérisent bien le signal, ce qui est le cas le plus souvent), mais aussi d'inverse continue sur son domaine, à des fins de stabilité numérique. Cette

dernière condition se traduit par l'existence de deux constantes positives  $A$  et  $B$  telles que :

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_{a_m, b_n}, f \rangle|^2 \leq B\|f\|_2^2$$

I. Daubechies a montré que, dans ce cas, la formule de reconstruction peut s'écrire :

$$f = \frac{2}{A+B} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} C_f(a_m, b_n) \psi_{a_m, b_n} + Rf$$

où le reste  $Rf$  est suffisamment petit pour q'on puisse soit le négliger, soit l'estimer par une itération supplémentaire([3])

### 1.3.3 Le problème des moments de l'ondelette

Posons pour simplifier  $n = 2^j$ , et étudions la convergence vers 0 de

$$u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{\psi}(nt) dt = \frac{1}{\sqrt{n}} c_{j,0}$$

la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à  $f$  en  $t = 0$  donne à l'ordre  $q$  :

$$u_n = \sum_{\ell=0}^q f^{(\ell)}(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^\ell}{\ell!} \bar{\psi}(nt) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} R(t) \bar{\psi}(nt) dt$$

Avec,

$$R(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^q}{q!} f^{(q+1)}(x) dx$$

En notant  $M_\ell$  les moments de la fonction  $\bar{\psi}$ , c'est-à-dire :

$$M_\ell = \int_{-\infty}^{+\infty} t^\ell \bar{\psi}(t) dt \quad (\ell \in \mathbb{N})$$

et  $r_n$  le reste, on obtient :

$$U_n = \sum_{\ell=0}^q \frac{f^{(\ell)}(0) M_\ell}{\ell! n^{\ell+1}} + r_n$$

Or un calcul facile montre que  $|r_n| \leq \frac{C}{n^{q+2}}$ .

On obtient donc le développement limité de  $u_n$  :

$$U_n = \frac{f'(0)}{n^2} \frac{M_1}{1!} + \frac{f''(0)}{n^3} \frac{M_2}{2!} + \dots + \frac{f^q(0)}{n^{q+1}} \frac{M_q}{q!} + O\left(\frac{1}{n^{q+2}}\right).$$

La vitesse de convergence de  $u_n$  vers 0 est donc réglée par le premier moment non nul de  $\bar{\psi}$ . Pour l'ondelette de Haar, on a tout de suite  $M_1 \neq 0$ , d'où des difficultés numériques liées au manque de concentration des coefficients. On est ainsi amené [3] à la définition d'une ondelette ayant un certain ordre de régularité.

**Définition 1.** Soit  $r \in \mathbb{N}$ . On appelle ondelette d'ordre  $r$  toute fonction  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $\psi^r \in C_M^0(\mathbb{R})$  et  $x^q \psi \in L^1$ ,  $q = 0, 1, \dots, r$  et vérifiant :

1.

$$|\psi^m(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^{r+m+1}} \quad m = 0, 1, 2, \dots, r \quad (1.23)$$

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^q \psi(x) dx = 0 \quad q = 0, 1, 2, \dots, r \quad (1.24)$$

ou,  $C_M^0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tel que } f \text{ bornée et intégrable sur } \mathbb{R}\}$

## 1.4 Ondelettes orthogonales

On sent bien maintenant que, eu égard à la redondance d'informations donnée par les coefficients  $C_f(a, b)$  sur la base des  $\psi_{ab}$ , le défi était de trouver



une famille, que nous noterons encore  $\psi_{jk}$  pour simplifier ( $j, k \in \mathbb{Z}$ ), d'ondelettes orthogonales sur lesquelles on pourrait décomposer tout signal  $f \in L^2$  en série double :

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}$$

$$\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$$

On aurait ainsi une base orthogonale, au sens usuel, de l'espace de Hilbert  $L^2$ , avec des coefficients  $c_{jk} = C_f(j, k)$  indépendants les uns des autres. Dans une telle base orthonormée, on obtient une décomposition du signal  $f$  en "voix"  $f_j$ :

$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f_j \text{ avec } f_j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}$$

Il s'agit ici d'un chœur à une infinité de voix. L'approximation

$$F_n = \sum_{j=-\infty}^{n-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}$$

Projection orthogonal de  $f$  sur  $V_n$ , tend vers  $f$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . La voix  $f_j$  représente également le détail que l'on ajoute à  $F_j$  pour obtenir  $F_{j+1}$  approximation plus fine, Ces idées ont conduit à la notion d'analyse multirésolution de l'espace  $L^2$ , introduit par S.Mallat et Y.Meyer [5].

### 1.4.1 Analyse multirésolution

**Définition 2.** Une analyse multirésolution (AMR) est une suite de sous-espaces fermés  $V_j, (j \in \mathbb{Z})$  de  $L^2(\mathbb{R})$  qui satisfont :

1.

$$\dots V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots \quad (1.25)$$

2.

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\} \quad (1.26)$$

3.

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \text{ dense dans } L^2(\mathbb{R}) \quad (1.27)$$

4.

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z}, \quad f(2^j x) \in V_j \iff f(x) \in V_0 \quad (1.28)$$

5.

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x) \in V_0 \iff f(x - k) \in V_0 \quad (1.29)$$

6. *Il existe une fonction  $\phi$  tel que l'ensemble  $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , soit une base de Riesz de  $V_0$*

Donnons maintenant une explication simple de chacune de ces propriétés.

1. L'approximation d'un signal à la résolution  $2^{j+1}$  contient toute l'information nécessaire pour approximer le même signal à la résolution inférieure  $2^j$ . Cette propriété est appelée la propriété de causalité.
2. En approxinant  $f(x)$  à la résolution  $2^j$ , on perd de l'information. Donc plus la résolution devient grossière, moins on a d'information. Ceci implique qu'à la résolution minimale, on perd toute l'information.
3. Par contre, lorsque la résolution augmente, on gagne de l'information. D'où on obtient que plus la résolution augmente et s'approche de l'infini, plus le signal se rapproche du signal original.
4. A chaque résolution, la méthode d'approximation est la même. Ceci nous permet d'obtenir les espaces des approximations des fonctions à partir des autres espaces en dilatant chaque approximation par un facteur égal à leur résolution. Cette propriété est vraie pour un facteur de résolution quelconque (il peut être différent de 2). Voir Mallat[5].
5. L'approximation  $E_j f(x)$  du signal  $f(x)$  peut être caractérisée par des échantillons mesurés à intervalle de  $2^j$ . De plus, si  $f(x)$  est translaté d'une longueur proportionnelle à  $2^{-j}$ , alors  $E_j f(x)$  sera translaté par la même distance et sera caractérisé par les mêmes échantillons qui auront aussi été translatés. La condition (1.28) permet d'exprimer cette condition pour  $V_0$ .
6. Les fonctions,  $\phi(x - k)$  forment une base de Riesz pour  $V_0$  si et seulement si elles génèrent  $V_0$ , et si  $\forall (c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ ,

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \left\| \sum_k \phi(x - k) \right\|_2^2 \leq B \sum_k |c_k|^2 \quad (1.30)$$

où  $A > 0$ ,  $B < +\infty$  sont indépendants des  $c_k$ .

L'ensemble des opérateurs  $E_j$  qui sont associés à une approximation multirésolution et qui satisfont les propriétés suivantes permettent d'obtenir l'approximation de n'importe quelle fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  à la résolution  $2^j$ .

1.  $E_j$  est un opérateur linéaire. De plus l'approximation de l'approximation d'une fonction à la résolution  $2^j$  reste inchangée. En termes formels  $E_j \circ E_j = E_j$ . On a donc que l'opérateur  $E_j$  est un opérateur de projection sur l'espace  $V_j$ .
2.  $\forall g(x) \in V_j, \|g(x) - f(x)\| \geq \|E_j f(x) - f(x)\|$ . L'opérateur  $E_j$  est la projection orthogonale de  $f(x)$  sur l'espace vectoriel  $V_j$ . L'approximation de  $f(x)$  à la résolution  $2^j$ ,  $E_j f(x)$  que nous noterons  $f_j(x)$  est donc la projection orthogonale de  $f(x)$  sur  $V_j$ . Pour être en mesure de calculer cette projection, il faut trouver la base de  $V_j$ . On exprimera alors la fonction  $f_j$  comme une combinaison linéaire des éléments de la base de  $V_j$ , Mallat démontre dans [6] le théorème suivant qui indique comment trouver une base orthonormée de  $V_j$ .

**Théorème 3.** *Soit  $V_j$  une approximation multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ . Il existe une fonction unique  $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  appelée la fonction d'échelle dont la transformée de Fourier est :*

$$\widehat{\phi}(\omega) = \frac{\widehat{\phi}(\omega)}{\left( \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |\widehat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.31)$$

tel que si nous posons

$$\phi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k), \quad (j \in \mathbb{Z}) \quad (1.32)$$

alors  $\{\phi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_j$ .

Ce théorème montre qu'une analyse multirésolution est entièrement caractérisée par une fonction d'échelle  $\phi(x)$ . L'inverse n'est cependant pas vrai.

La question est de savoir comment caractériser une fonction  $\phi$  qui soit la fonction d'échelle d'une analyse multirésolution. Nous allons, pour répondre à cette question, étudier les propriétés de cette fonction afin que pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , l'ensemble  $(2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une famille orthogonale et que si  $V_j$  est un espace vectoriel généré par cette famille de fonctions, alors  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ . Nous n'entrerons pas dans les détails des théorèmes et résultats que nous allons énoncer. Le lecteur intéressé pourra se référer à [14, 4, 13] pour des preuves formelles. Mais tout d'abord, nous allons imposer une condition de régularité sur les approximations multirésolutions de  $L^2(\mathbb{R})$  qui provient de [14].

**Définition 3.** Une fonction  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  est régulière si et seulement si elle est continûment différentiable et si elle satisfait:

$$\exists C > 0, \text{ pour } x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq C(1+x^2)^{-1} \text{ et } |f'(x)| \leq C(1+x^2)^{-1}$$

Une analyse multirésolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est régulière si et seulement si  $\phi(x)$  est régulière.

Par la propriété (1.28),

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{x}{2}\right) \in V_{-1} \subset V_0 \quad (1.33)$$

Cette fonction peut être représentée comme une combinaison linéaire des fonctions de base de  $V_0$  :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k \phi(x - k) \quad (1.34)$$

ou :

$$h_k = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{x}{2}\right), \phi(x - k) \right\rangle \quad (1.35)$$

L'équation (1.34) est appelé l'équation d'échelle. La décroissance asymptotique de  $h_k$  satisfait  $|h_k| = O(1+k^2)^{-1}$  car l'analyse multirésolution est régulière. La suite de coefficients  $h_k$  de l'équation d'échelle est interprétée comme étant un filtre discret. Nous verrons plus loin en quoi il est utilisé et la raison de cette appellation.

En prenant la transformée de Fourier de de l'équation d'échelle, on obtient

$$\widehat{\phi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{h}(2\omega) \widehat{\phi}(\omega) \quad (1.36)$$

ou:

$$\widehat{h}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-ik\omega} \quad (1.37)$$

**Théorème 4.** *La fonction  $\widehat{h}(\omega)$  définie ci-dessus satisfait :*

$$|\widehat{h}(\omega)|^2 + |\widehat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (1.38)$$

$$\widehat{h}(0) = \sqrt{2} \quad (1.39)$$

Notons que  $\widehat{h}(\omega)$  est une fonction périodique de période  $2\pi$ . Ce théorème nous donne une condition nécessaire mais non suffisante pour l'orthonormalité de  $\phi(x)$ . Le prochain théorème donne une condition suffisante sur  $\widehat{h}(\omega)$  permettant de calculer la transformée de Fourier d'une fonction  $\phi(x)$  qui génère une analyse multirésolution.

**Théorème 5.** *Soit la fonction  $\widehat{h}(\omega)$  définie ci-dessus qui satisfait (1.38) et (1.39). Si elle est périodique de période  $2\pi$  et continûment différentiable dans le voisinage de  $\omega = 0$  et satisfait aussi :*

$$\text{Inf}_{\omega \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} |\widehat{h}(\omega)| > 0 \quad (1.40)$$

Alors la fonction:

$$\widehat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\widehat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} \quad (1.41)$$

est la transformée de Fourier d'une fonction  $\phi(x)$  pour laquelle  $(\phi(x-k))_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée du sous-espace fermé  $V_0$  de  $L^2(\mathbb{R})$ . Si la fonction  $\phi(x)$  est régulière, alors la suite d'espaces vectoriels  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  définie à partir de  $V_0$  par (1.28) est une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ .

La preuve de ce théorème est longue et technique. Nous référons le lecteur à [12] pour une preuve complète et détaillée.

La fonction  $f_j(x)$  se décomposera dans la base orthonormée de  $V_j$  comme suit :

$$f_j(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \langle f, \phi_{jk} \rangle \phi_{jk}(x) \quad (1.42)$$

L'ensemble des produits scalaires

$$c_j = (\langle f, \phi_{jk} \rangle)_{k \in \mathbb{Z}} = (c_{jk})_{k \in \mathbb{Z}} \quad (1.43)$$

caractérise de façon unique  $f_j(x)$  est appelé l'approximation discrète de  $f(x)$  à la résolution  $2^j$ .

## 1.4.2 Représentation par ondelettes

Nous avons vu que l'analyse multirésolution donne l'approximation d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  à des résolutions successives allant de la résolution la plus grossière à la résolution la plus fine. Nous avons aussi vu que les détails d'un signal à une résolution donnée sont égaux à la différence d'information contenue dans deux approximations successives. Ces détails sont obtenus en décomposant le signal en une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$  engendrée par une fonction unique appelée l'ondelette mère. L'approche que nous allons suivre pour expliquer les ondelettes est celle de Mallat [11, 12, 13] car c'est l'approche la plus commune.

Soit une analyse multirésolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  donnée de  $L^2(\mathbb{R})$  et soit  $W_j$ , le complément orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ . Nous avons, par définition du complément orthogonal, que:

$$x \in W_j \iff \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in V_j \quad (1.44)$$

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad (1.45)$$

$$W_j \perp W_{j'} \quad \forall j \neq j' \quad (1.46)$$

De plus, puisque  $W_{j-1} \subset V_j \perp W_j$  on a pour  $\ell < j$  que  $V_j = V_\ell \oplus \bigoplus_{i=\ell}^{j-1} W_i$ . Tout ces sous-espaces sont orthogonaux les uns aux autres. Ceci implique (1.26) et (1.27) que:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \quad (1.47)$$

Par le théorème de projection, nous montrons facilement que les détails d'un signal à l'échelle  $j + 1$  sont donnés par la projection orthogonale de  $f(x)$  sur le complément orthogonal  $W_j$  de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ . En d'autres mots, soit  $E_j f(x)$  et  $E_{j+1} f(x)$  les projections orthogonales de  $f(x)$  sur  $V_j$  et  $V_{j+1}$  respectivement. En appliquant le théorème de projection, nous avons que  $E_{j+1} f(x) = E_j f(x) + D_j f(x)$  où  $D_j f(x)$  représente la projection orthogonale de  $f(x)$  sur  $W_j$ .

Pour être en mesure de calculer  $D_j f(x)$ , il faut trouver une base orthonormée de  $W_j$ . Considérons que  $(\psi_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  constitue une telle base pour  $W_j$ . Par (1.47), (1.26) et (1.27) ceci implique que l'ensemble complet  $(\psi_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . Le théorème suivant montre comment trouver une telle base.

**Théorème 6.** *Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multiresolution avec une fonction d'échelle  $\phi(x)$  pour laquelle  $\hat{h}$  est la fonction définie en (1.37). Soit  $\psi(x)$  la fonction dont la transformée de Fourier est donnée par:*

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (1.48)$$

Avec:

$$\hat{g}(\omega) = e^{-i\omega} \overline{\hat{h}(\omega + \pi)} \quad (1.49)$$

Si l'on pose:

$$\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) \quad (1.50)$$

Alors  $(\psi_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_j$  et  $(\psi_{jk})_{k,j \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .

La fonction  $\psi(x)$  est appelée une ondelette orthogonale.

Le lecteur trouvera la preuve de ce théorème dans [12, 13]. Pour calculer une ondelette, il suffit donc de définir une fonction  $\hat{h}(\omega)$  qui satisfait les

conditions (1.38). à (1.40), de calculer la fonction d'échelle correspondante par l'équation (1.41) et enfin de calculer l'ondelette avec (1.48).

Il est maintenant possible d'affirmer que pour toute fonction  $f$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , si un ensemble d'espaces  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est une analyse multirésolution, alors il existe une base orthonormée d'ondelettes  $(\psi_{jk})_{k,j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  donnée par (1.50) tel que :

$$E_{j+1}f = E_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk} \quad (1.51)$$

L'ensemble des produits scalaires

$$d_j = (\langle f, \psi_{jk} \rangle)_{k \in \mathbb{Z}} = (d_{jk})_{k \in \mathbb{Z}} \quad (1.52)$$

Caractérise de façon unique  $D_j f$ , les détails du signal à la résolution  $2^j$ . Cet ensemble est appelé l'ensemble des coefficients d'ondelettes à la résolution  $2^j$ .

### 1.4.3 Exemple : L'ondelette de Haar

Parmi la famille des ondelettes que nous montrons en exemple est celle de Haar, nous désirons montrer les caractéristiques d'une famille d'ondelettes même si elle n'est pas beaucoup appliquée en pratique.

Considérons l'espace  $V_j$  des fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  qui sont constantes sur chaque intervalle  $[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  i.e :

$$V_j = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z} : f|_{[k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]} = C\}$$

où  $C$  est une constante.

La condition (1.28) implique que  $V_0$  est l'espace des fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  qui sont constantes sur chaque intervalle  $[k, k+1]$  pour  $k \in \mathbb{Z}$ . Les autres conditions se vérifient facilement. On démontre aisément que la fonction d'échelle est la fonction indicatrice sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'équation d'échelle  $\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k \phi(x-k)$  équivaut à:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(x-1)$$



D'où les coefficients  $h_k$  sont données par  $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $h_k = 0$  pour  $k > 2$ .

$$\text{Nous obtenons } \widehat{h}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-ik\omega} = \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega}) = e^{-i\frac{\omega}{2}} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

L'ondelette correspondante est :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que l'analyse multirésolution de Haar n'est pas régulière et que l'ondelette correspondante n'est pas continue.

#### 1.4.4 Les ondelettes de Daubechies

Au chapitre 2, nous voyons de quelle manière, les ondelettes peuvent être appliquées dans le domaine de la compression. Ce qui est important lors de l'application des ondelettes à un champ particulier (compression, débruitage,...) est le choix des onde-mère de base qui servent à décomposer la fonction dans le domaine des ondelettes. Les auteurs que nous citons dans ce chapitre et dont nous expliquons les théories utilisent tous les ondelettes de Daubechies.

En effet, les ondelettes de Daubechies possèdent des propriétés intéressantes qui sont très répandues. Dans cette section, nous allons décrire ces ondelettes. Mais tout d'abord nous allons discuter de ces propriétés comme le fait Mallat [12].

##### Propriétés

##### Moments nuls

L'ondelette mère  $\psi$  a  $p$  moments nuls si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad 0 \leq k < p. \quad (1.53)$$

Mallat prouve dans [12] que si  $f$  est régulière et que  $\psi$  a un nombre suffisant de moments nuls, alors les coefficients d'ondelettes donnés en (1.52) en

valeur absolue,  $|\langle f, \psi_{jk} \rangle|$  sont très petits aux échelles les plus fines. L'avantage des moments nuls est que les parties de la fonction qui sont lisses sont représentées par des coefficients d'ondelettes proches de zéro et les singularités de la fonction par des coefficients plus élevés. Une base orthogonale générée par une ondelette mère  $\psi$  possédant un nombre suffisant de moments nuls va donc représenter  $f$  avec un nombre limité de coefficients d'ondelettes de large amplitude. La proposition suivante permet d'établir un lien entre  $\psi$ , sa transformée de Fourier  $\widehat{\psi}(\omega)$  et  $\widehat{h}(\omega)$ .

**Proposition 1.** *Considérons l'ondelette mère  $\psi$ , Si  $\widehat{\psi}(\omega)$  est  $p$  fois différentiables à  $\omega = 0$ , alors les trois conditions sont équivalentes :*

1. *L'ondelette  $\psi$  a  $p$  moments nuls.*
2.  *$\widehat{\psi}(\omega)$  et ses  $p - 1$  premières dérivées sont égales à 0 au point  $\omega = 0$ .*
3.  *$\widehat{h}(\omega)$  et ses  $p - 1$  premières dérivées sont égaux à 0 au point  $\omega = \pi$ .*

### Support compact

Rappelons qu'une fonction est à support compact s'il existe un intervalle fermé et borné tel que la fonction est égale à zéro en dehors de cet intervalle. Le plus petit intervalle fermé dans lequel cette fonction possède des valeurs non nulles est appelé le support de la fonction.

La taille du support de l'ondelette mère  $\psi$  est reliée au nombre de coefficients de large amplitude. En effet, si  $t_0$  est une singularité isolée de la fonction  $f$  et si la taille du support de  $\psi$  est  $K$ , alors, à chaque niveau de résolution, il y a  $K$  ondelettes dont les supports contiennent  $t_0$ . Le fait est que lorsque  $t_0$  est inclus dans le support d'une ondelette  $\psi_{jk}$  alors le coefficient d'ondelette correspondant, défini en (1.52), peut avoir une large amplitude. Par conséquent, si on veut avoir un nombre restreint de coefficients de large amplitude, il faut réduire la taille du support de  $\psi$ . La proposition suivante permet d'établir le support de  $\psi$  à partir de celui de la fonction d'échelle et de la fonction  $h$  défini en (1.35).

**Proposition 2.** *La fonction d'échelle définie en (1.31) est à support compact si et seulement si la fonction  $h$  est à support fini, et leurs supports sont identiques. Si le support de la fonction d'échelle est  $[N_1, N_2]$ , le support de l'ondelette  $\psi$  est  $[\frac{N_1 - N_2 + 1}{2}, \frac{N_2 - N_1 + 1}{2}]$ .*

## Régularité

La propriété de régularité s'exprime par le fait que si  $p = 0$ ,  $\psi(x)$  appartient à  $L^\infty(\mathbb{R})$  et si  $p \geq 1$ ,  $\psi$  ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre de  $p$ , appartiennent à  $L^\infty(\mathbb{R})$ .

Plus une ondelette est régulière, plus elle est lisse. Le théorème suivant donné dans [18] et démontré dans [4] permet de relier la régularité des ondelettes, le nombre de moments nuls et la forme de la fonction  $\widehat{h}$ .

**Théorème 7.** *Soit  $(\psi_{jk})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$  avec les fonctions  $\psi_{jk}$  définie en (1.50)*

$$|\psi(x)| \leq \frac{C_1}{(1 + |x|)^\alpha}, \quad \alpha > N \quad (1.54)$$

et  $\psi \in C^{N-1}(\mathbb{R})$  ou  $\psi^k(x)$  est bornée pour  $k \leq N - 1$ . On a alors que  $\psi$  a  $N$  moments nuls.

Si on a en plus que:

$$|\phi(x)| \leq \frac{C_2}{(1 + |x|)^\alpha}, \quad \alpha > N \quad (1.55)$$

alors la fonction associée  $\widehat{h}(\omega)$  est de la forme

$$\widehat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left( \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^p \lambda(\omega) \quad (1.56)$$

où  $\lambda(\omega)$  est une fonction périodique de période  $2\pi$ .

Nous donnons aussi les deux résultats suivants qui sont démontrés dans [12].

1. Il n'existe pas d'ondelette orthogonale à support compact dont on peut obtenir les dérivées à l'infini.
2. La régularité des ondelettes augmente avec le nombre de moments nuls pour certaines classes de familles d'ondelettes.

### 1.4.5 Ondelettes de Daubechies à support compact

Lorsqu'on désire choisir les ondelettes de base pour décomposer une fonction donnée, on fait face à un problème de choix entre le nombre de moments nuls et la taille du support de l'ondelette. Ce qui est souhaitable, c'est d'avoir une ondelette qui possède un grand nombre de moments nuls tout en ayant un support de petite taille. Cependant, Daubechies prouve dans [4] que si  $\psi$  a  $p$  moments nuls et  $\psi$  est une ondelette orthogonale, alors son support est au moins de taille égale à  $2p - 1$ , ce qui signifie que la taille du support dépend du nombre de moments nuls, car il augmente avec lui.

Le problème de choix se pose explicitement comme suit. Si la fonction  $f$  contient peu de singularités et est très régulière entre les singularités, une ondelette avec beaucoup de moments nuls est appropriée car elle produira un grand nombre de coefficients d'ondelettes presque nuls. Si par contre, elle contient beaucoup de singularités, l'ondelette devra avoir un support de petite taille ce qui a pour conséquence qu'elle a aussi un petit nombre de moments nuls.

Daubechies a été la première à créer des ondelettes orthonormales à support compact avec un nombre prédéterminé de degrés de lissage. De plus, ses ondelettes possèdent la propriété d'avoir un support de taille minimum pour un nombre de moments nuls donné. Nous référons le lecteur à [4] pour un développement complet de la théorie sur laquelle se base la construction de ses ondelettes. Nous allons seulement donner l'idée globale des ondelettes de Daubechies.

Supposons que  $\psi$  possède  $p$  moments nuls; alors la proposition 1 montre que  $\hat{h}$  a un zéro d'ordre  $p$  au point  $\omega = \pi$ , Par le théorème 5, la fonction  $\hat{h}$  est de la forme:

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left( \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right) \lambda(\omega) \quad (1.57)$$

Où  $\lambda(\omega)$  est un polynôme trigonométrique. On veut trouver un polynôme  $\lambda(\omega)$  de degré minimum  $m$  tel que  $\hat{h}$  satisfasse :

$$|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2 \quad (1.58)$$

**Théorème 8.** *Le filtre  $h$  réel qui est tel que  $\hat{h}$  possède  $p$  zéros au point  $\omega = \pi$  a au moins  $2p$  coefficients non-nuls. Les filtres de Daubechies ont  $2p$  coefficients non-nuls.*

La preuve de ce théorème est technique mais elle permet de construire et de calculer les filtres de Daubechies. Le lecteur peut se référer à [7] pour connaître cette preuve. Nous ferons seulement remarquer que le résultat obtenu est une ondelette  $\psi$  qui a  $p$  moments nuls et dont le support est  $[-p + 1, p]$ .

Si  $p = 1$ , on obtient l'ondelette de Haar. La fonction d'échelle  $\phi$  correspondante à un support qui est  $[0, 2p - 1]$  Notons aussi que les ondelettes de Daubechies sont très asymétriques de par leur construction. Cependant, si on désire avoir des bases d'ondelettes régulières sur un intervalle fini et non pas sur l'axe réel, il faut que l'ondelette mère ainsi que sa fonction d'échelle associée soient symétriques ou antisymétriques.

Daubechies [4] a montré que la seule ondelette orthogonale symétrique à support compact est l'ondelette de Haar. Elle a alors créé des ondelettes appelées *Symmlet*. Ces ondelettes ont elles aussi un support minimum  $[-p + 1, p]$  avec  $p$  moments nuls mais elles sont le moins asymétriques possible.

Nous montrons dans la figure (1.3) quelques exemples d'ondelettes qui sont intégrées dans un toolbox de Matlab pour l'utilisation des ondelettes.

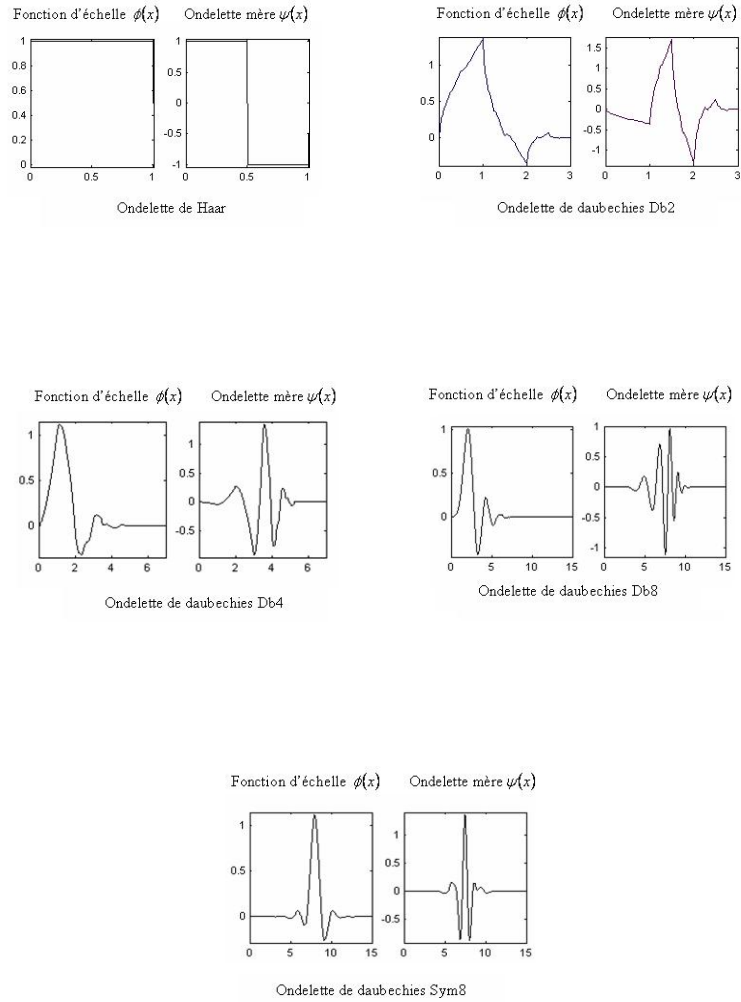


FIGURE 1.3 – Quelques exemples d'ondelettes

## 1.5 Implémentation de la transformée en ondelette discrète

Dans la pratique, les signaux que les ordinateurs peuvent traiter sont des signaux discrets. De plus, les appareils de mesure ne peuvent mesurer qu'un

nombre fini d'échantillons. Nous allons donc nous intéresser aux signaux discrets de taille finie  $N$ .

Dans le cas à une dimension, ces signaux sont représentés par des vecteurs finis. Désignons par  $(x(n))_{1 \leq n \leq N}$  un signal discret quelconque. Le résultat de l'application de la transformée en ondelettes discrète au vecteur  $x$  est un vecteur de coefficients d'ondelettes de même taille. La forme de ce vecteur sera explicitée plus loin. La transformée en ondelettes discrète est mathématiquement équivalente à multiplier le signal  $x$  par une matrice orthogonale  $W$  de taille  $N \times N$  associée à la base orthogonale d'ondelettes choisie.

On a :

$$d = Wx \quad (1.59)$$

où  $d$  est le vecteur des coefficients d'ondelettes de taille  $N \times 1$ . La transformée en ondelettes inverse permet de reconstruire le signal à partir de ses coefficients d'ondelettes. Notons que puisque la matrice  $W$  est orthogonale, la transformée en ondelette inverse est tout simplement donnée par :

$$x = W'd \quad (1.60)$$

où  $W'$  est la transposée de la matrice  $W$ . Pour calculer la transformée en ondelettes discrète d'un signal et son inverse, on utilise deux algorithmes développés par Mallat[11] lorsque  $N = 2^j$ ,  $j$  est un entier quelconque. Nous allons décrire ces algorithmes après avoir donné les fondements mathématiques sur lesquels chacun d'entre eux se base comme le fait Mallat dans [11].

### 1.5.1 Décomposition d'un signal dans le domaine des ondelettes

Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution et soit  $\phi(x)$ , la fonction d'échelle correspondante. La famille de fonctions  $(2^{-\frac{j+1}{2}} \phi(2^{j+1}x - n))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_{j+1}$  et la fonction  $(2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^j x - n) \in V_j \subset V_{j+1} \quad \forall n$ .

On peut donc écrire  $2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^j x - n)$  comme une combinaison linéaire des éléments de la base de  $V_{j+1}$  :

$$2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - n) = 2^{\frac{j+1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j u - n), 2^{\frac{j+1}{2}}\phi(2^{j+1}u - k) \rangle \phi(2^{j+1}x - k). \quad (1.61)$$

ou:

$$\begin{aligned} \langle 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j u - n), 2^{\frac{j+1}{2}}\phi(2^{j+1}u - k) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2}2^j \phi(2^j u - n) \phi(2^{j+1}u - k) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \phi\left(\frac{u}{2}\right) \phi(u - (k - 2n)) du \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{u}{2}\right), \phi(u - (k - 2n)) \right\rangle \quad (1.62) \end{aligned}$$

De l'équation (1.61), on a

$$\langle f(u), 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j u - n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{u}{2}\right), \phi(u - (k - 2n)) \right\rangle \langle f(u), 2^{\frac{j+1}{2}}\phi(2^{j+1}x - k) \rangle$$

Soit:

$$h(n) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{u}{2}\right), \phi(u - n) \right\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (1.63)$$

Et soit  $\tilde{h}(n) = h(-n)$ , l'équation (1.63) devient :

$$\langle f(u), 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j u - n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(2n - k) \langle f(u), 2^{\frac{j+1}{2}}\phi(2^{j+1}u - k) \rangle \quad (1.64)$$

Donc on peut écrire cette équation comme suit.

$$c_j(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(2n - k) c_{j+1}(k) \quad (1.65)$$

d'ou:

$$c_j(n) = (\tilde{h} * c_{j+1})(2n) \quad (1.66)$$



Où  $c_j(n) = c_{j,n}$  et  $c_{j+1}(n) = c_{j+1,n}$  sont définis en (1.26). Si on pose  $j = j_0$  ou  $j \leq 0$  le signal  $x = (x_n)_{1 \leq n \leq N} = c_{j_0}$ . Le principe de causalité nous dit qu'on peut calculer toutes les approximations discrètes  $c_j$  à partir de  $c_{j_0}$  pour  $j < j_0$  en répétant le processus donné en (1.49) pour chaque  $n$ ,  $1 \leq n \leq N$  chaque approximation discrète  $c_j (j \leq j_0)$  aura  $2^j N$  échantillons. Nous supposons que le signal est symétrique par rapport à  $n = 0$  et  $n = N$  afin d'éviter les problèmes aux frontières lorsqu'on calcule l'approximation discrète  $c_j$ .

$$x_n = \begin{cases} x_{-n} & \text{si } -N \leq n < 0 \\ x_{2N-n} & \text{si } 0 \leq n < N \end{cases}$$

Si  $h(n) = \tilde{h}(n)$  alors  $c_j$  sera symétrique par rapport à  $n = 0$  et  $n = 2^j N$ . Nous allons maintenant montrer l'algorithme d'un point de vue théorique pour trouver les coefficients d'ondelettes. Nous savons que la fonction  $2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - n) \in W_j \subset V_{j+1}, \forall n \in \mathbb{Z}$ .

Comme nous l'avons vu en (1.61), on peut écrire cette fonction de la manière suivante :

$$2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - n) = 2^{\frac{j+1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j u - n), 2^{\frac{j+1}{2}} \phi(2^{j+1} u - k) \rangle \phi(2^{j+1} x - k). \quad (1.67)$$

Où

$$\langle 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j u - n), 2^{\frac{j+1}{2}} \phi(2^{j+1} u - k) \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{u}{2}\right), \phi(u - (k - 2n)) \right\rangle \quad (1.68)$$

De l'équation (1.67), on obtient

$$\langle f(u), 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j u - n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{u}{2}\right), \phi(u - (k - 2n)) \right\rangle \langle f(u), 2^{\frac{j+1}{2}} \phi(2^{j+1} x - k) \rangle$$

Si on définit

$$g(n) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{u}{2}\right), \phi(u - n) \right\rangle, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (1.69)$$

et  $g(-n) = \tilde{g}(n)$  alors :

$$\langle f(u), 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j u - n) \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(2n - k) \langle f(u), 2^{\frac{j+1}{2}} \phi(2^{j+1} u - k) \rangle$$

$$d_j(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(2n - k) c_{j+1}(k)$$

d'où

$$d_j(n) = (\tilde{g} * c_{j+1})(2n) \quad (1.70)$$

Où  $d_j(n) = d_{j,n}$  est défini en (1.52)

Nous venons de décrire l'algorithme pyramidal de Mallat qui permet de décomposer un signal discret  $x = (x_n)_{1 \leq n \leq N}$  en un ensemble de coefficients d'ondelettes en décomposant successivement  $c_{j+1}$  en  $c_j$   $d_j$  pour  $-J \leq j \leq j_0$ ,  $j_0 \leq 0$  afin d'obtenir la représentation en ondelettes du signal  $x$  donnée par  $d = \{(c_j), (d_j), -J \leq j \leq j_0\}$  sur  $L$  niveaux de résolution où  $L = J + j_0 - 1$ .

Dans la théorie du traitement du signal,  $h(n)$  et  $g(n)$  sont les réponses impulsionnelles des filtres discrets  $H$  et  $G$  respectivement et  $\tilde{h}(\omega)$  et  $\tilde{g}(\omega)$ , sont les réponses impulsionnelles des filtres  $H$  et  $G$  respectivement.

Le filtre discret  $H$  dont la fonction de transfert est  $\tilde{h}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-in\omega}$

satisfait les conditions du théorème 2. Il est interprété comme étant un filtre discret passe-bas. Mallat [11, 13] montre que le filtre discret  $G$  a pour fonction de transfert la fonction  $G(\omega)$  donné par (1.49). Ce filtre est interprété comme étant un filtre discret passe-haut. On appelle  $H$  et  $G$  les filtres miroirs en quadrature car leurs réponses impulsionnelles sont reliées par:

$$g(n) = (-1)^{1-n} h(1 - n)$$

Cette relation est démontrée en calculant la transformée de Fourier inverse de l'équation (1.49).

La transformée en ondelettes discrète consiste donc en trois étapes un filtre passe-bas, un filtre passe-haut et une opération de sous-échantillonnage

élémentaire du signal par suppression d'un terme sur deux divisant ainsi sa longueur par deux. Les équations (1.66) et (1.71) permettent de calculer les coefficients  $c_j$  et  $d_j$  en convoluant  $c_{j+1}$  avec un filtre passe-bas et un filtre passe-haut et en sous-échantillonnant par deux les sorties pour  $-J \leq j \leq -1$ . Le Signal original doit être de longueur dyadique.

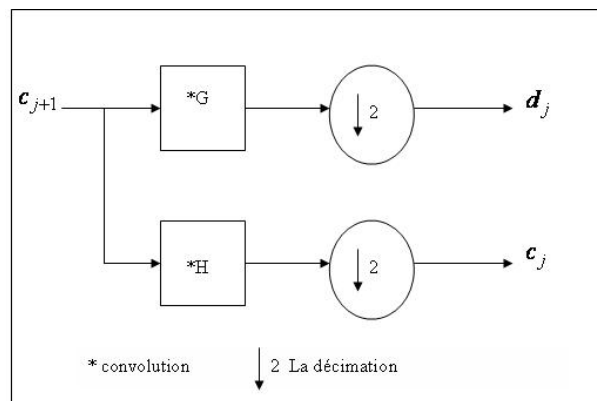


FIGURE 1.4 – Algorithme de décomposition d'un signal

## 1.5.2 Reconstruction d'un signal

Nous avons vu que  $W_j$ , est le complément orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$  ce qui implique que la combinaison des bases de ces deux sous-ensembles forme

une base de  $V_{j+1}$  d'où  $(2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - n), 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - n))$  est une base orthonormée de  $V_{j+1}$ .

La fonction  $2^{\frac{j+1}{2}}\phi(2^{j+1}x - n) \in V_{j+1}$  pour un  $n$  quelconque peut donc se décomposer comme une combinaison linéaire de cette base.

$$\begin{aligned} 2^{\frac{j+1}{2}}\phi(2^{j+1}x - n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j u - k), 2^{\frac{j+1}{2}}\phi(2^{j+1}u - n) \rangle 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k) \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j u - k), 2^{\frac{j+1}{2}}\phi(2^{j+1}u - n) \rangle 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k) \end{aligned} \quad (1.71)$$

On calcule le produit scalaire de  $f(x)$  avec chaque côté de l'équation (1.71) pour avoir

$$\begin{aligned} \langle f(u), 2^{\frac{j+1}{2}}\phi(2^{j+1}u - n) \rangle &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j u - k), 2^{\frac{j+1}{2}}\phi(2^{j+1}u - n) \rangle \langle f(u), 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j u - k) \rangle \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j u - k), 2^{\frac{j+1}{2}}\phi(2^{j+1}u - n) \rangle \langle f(u), 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j u - k) \rangle \end{aligned} \quad (1.72)$$

En remplaçant les produits scalaires  $\langle 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j u - k), 2^{\frac{j+1}{2}}\phi(2^{j+1}u - n) \rangle$  et  $\langle 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j u - k), 2^{\frac{j+1}{2}}\phi(2^{j+1}u - n) \rangle$  par leurs expressions équivalentes données par (1.62) et (1.68) qui sont  $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(\frac{u}{2}), \phi(u - (n - 2k)) \rangle$  et  $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(\frac{u}{2}), \phi(u - (n - 2k)) \rangle$  et en utilisant les filtres  $H$  et  $G$  dont les réponses impulsionnelles sont définies en (1.63) et (1.69) respectivement, on a :

$$\begin{aligned} \langle f(u), 2^{\frac{j+1}{2}} \phi(2^{j+1}u - n) \rangle &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n - 2k) \langle f(u), 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j u - k) \rangle \\ &+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n - 2k) \langle f(u), 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j u - k) \rangle \end{aligned}$$

d'où:

$$c_{j+1}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n - 2k) c_j(k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n - 2k) d_j(k)$$

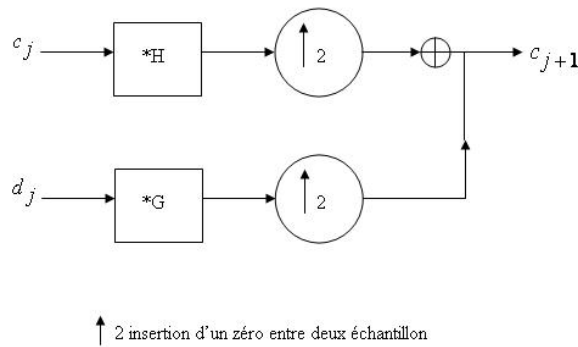


FIGURE 1.5 – Algorithme de la reconstruction d'un signal

Si on définit  $c'_j(2n) = c_j(n)$  et  $c'_j(2n + 1) = 0$ ,  $d'_j(2n) = d_j(n)$  et  $d'_j(2n + 1) = 0$  on a :

$$c_{j+1}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n - 2k) c'_j(k) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n - 2k) d'_j(k)$$

d'ou:

$$c_{j+1}(n) = (h * c'_j)(n) + (g * d'_j)(n) \quad (1.73)$$

L'équation (1.63) montre qu'on peut reconstituer  $c_{j+1}$  en dilatant  $c_j$  et  $d_j$  par insertion de zéros entre chaque échantillon et en convoluant les signaux résultants  $c'_j$  et  $d'_j$  avec  $h$  et  $g$  respectivement. Cette opération de reconstruction est appliquée de manière itérative en commençant par la résolution la plus grossière pour obtenir le signal original.

# Chapitre 2

## La transformée en ondelettes et compression des images

### 2.1 Introduction

L'application la plus répandue de la transformée en ondelettes est la compression des données (signaux 1D, images,) Ceci est lié au fait que la DWT est attachée étroitement à la décomposition en sous-bandes, qui a été déjà utilisé pour la compression. Avec le temps la liaison entre la décomposition en sous-bandes et la transformée en ondelettes a été établie par Mallat.

Ce chapitre focalise l'attention sur le schéma de compression des images, comment utiliser la DWT pour la compression, finalement nous proposons un Algorithme de compression des images qui est basé sur la transformée en ondelette , avec une simulation dans le but de choisir une onde mère orthogonale qui nous offre un meilleur taux de compression .

#### 2.1.1 Généralités sur la compression.

La compression de données a pour but de réduire l'espace requis pour le stockage d'une certaine quantité d'information. Généralement le fichier ou l'image traité contient des informations qui ne sont pas essentielles, la redondance de données est la base essentielle des méthodes de compression. Notons qu'il existe deux types de compression :

### Compression sans perte :

permet de retrouver exactement toute l'information contenue dans l'image originale. La majorité de ces méthodes sont basées sur le codage ou la prédiction.

### Compression avec perte :

Ce type de compression comporte une perte de données pendant le processus. Le résultat qu'on peut obtenir est une version dégradée de l'image originale. Le but de ce type de compression est d'éliminer le plus d'information possible sans diminuer la qualité de l'image perçue par le système visuel humain. Etant donné que l'objectif d'une méthode de compression est de minimiser la quantité d'information qui nécessite à la représentation d'une image, on définit la quantité  $CR$  comme suit :

$$CR = \frac{\text{Nombre de bits de l'image original}}{\text{Nombre de bits de l'image compressé}} \quad (2.1)$$

Cette quantité est le taux de compression. Il existe une autre quantité permettant de définir le taux de compression maximale concernant les méthodes de compression sans perte, c'est l'entropie  $H$  définie ci-dessous

$$H = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2(p_i) \quad (2.2)$$

où  $p_i$  est la probabilité de présence de niveau de gris  $i$  dans l'image qui est supposée être représentée par  $N$  niveaux.

L'importance de l'entropie est issue de la théorie de l'information plus précisément le théorème de codage de Shannon, qui précise qu'une source d'information  $S$  (fichier, image, ...), ayant une entropie  $H$  peut être codée sans perte d'information avec des codes ayant un nombre  $M$  de bits si  $H \leq M \leq H + \epsilon$  ou  $\epsilon$  est une quantité relativement faible.

Donc on peut définir dans le cas du codage sans perte d'information le taux de compression maximal par  $CR_{max} = \frac{k}{M}$  pour une source d'information codée sur  $k$  bits. Ceci ne peut être réalisé seulement qu'avec des techniques sans perte. Avec les autres techniques on peut obtenir un taux de compression  $CR$  supérieure à  $CR_{Max}$ , avec d'autant plus de perte que  $CR$  est grand.

Concernant notre cas la compression des images cette perte se traduit par la dégradation de l'aspect visuel de l'image qui peut se quantifier par



des mesures de qualité de la reconstruction. Il s'agit de définir des mesures permettant d'estimer numériquement la qualité de l'image reconstruite. Si on note  $I_0$  l'image originale de taille  $m \times n$  et  $I_1$  l'image de même taille après reconstruction, on peut définir :

$$MSE = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (I_0(i, j) - I_1(i, j))^2 \quad (2.3)$$

L'erreur quadratique moyenne (Mean square Error) et

$$PSNR = 20 \log \frac{(255)^2}{MSE} \quad (2.4)$$

Le rapport signal maximal sur bruit (peak Signal to Noise Ratio).  $I_0$  est une image représentée sur 256 niveaux de gris variant de 0 à 255. Dans ce mémoire nous intéressons seulement par les méthodes de compression avec perte.

## 2.2 Compression avec perte

Un schéma de compression avec perte [10] est composé d'un module de transformée, un module de quantification et enfin un codeur.

### 2.2.1 Transformée discrète

La majorité des méthodes de compression avec perte sont basées sur la première étape concernant la transformée discrète, dans ce cas la méthode n'agit pas directement sur l'image numérique dans sa représentation canonique, mais sur le domaine de sa transformé. Cette transformation peut être linéaire ou non. Il est bien connu qu'une transformation peut permettre de mettre en évidence certaines propriétés de l'image que la représentation originale ou canonique ne laisse pas apparaître. En partant d'un ensemble de valeurs numériques corrélées d'une image, le but est d'obtenir un autre ensemble de valeurs le moins corrélées possible dans l'espace transformé. En général, les schémas de compression par transformation subdivisent l'image de taille  $N \times N$  en sous-images de taille plus petites avant de faire subir à

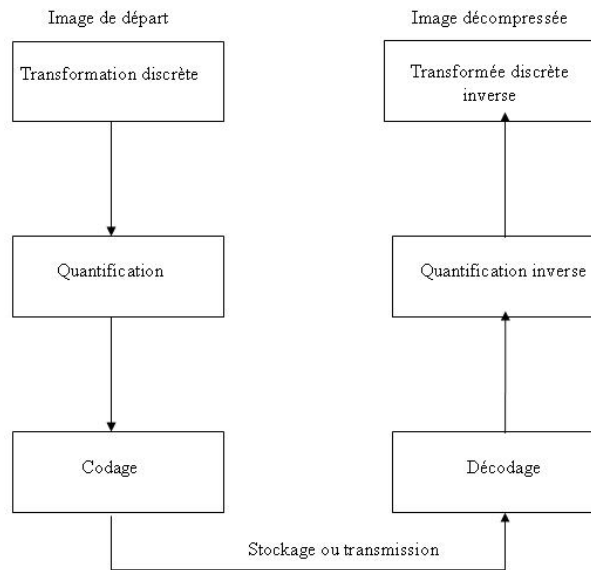


FIGURE 2.1 – Schema de compression d’une image avec perte

chacune de ces sous images une transformation. On privilégie les transformations qui sont unitaires et qui conservent l’énergie.

La transformation consiste à décomposer une image selon une base adéquate de fonction telles que :

- les coefficients de la transformée soient indépendants
- un nombre minimum de ces coefficients contient une proportion importante de l’énergie de l’image

Ainsi, on pourra mettre à zéro certains d’entre eux sans nuire de manière significative ni à la quantité d’énergie, ni à l’aspect visuel de l’image reconstruite.

On peut distinguer plusieurs transformées [11].

- Transformation de Fourier discrète (DFT)
- Transformation de Karhunen-Loeve (KLT)
- Transformation de Hadamard (HT)
- Transformation en cosinus discrète (DCT)
- Transformation par ondelette discrète (DWT)

Concernant notre exposé, nous intéressons par la dernière transformée.

Actuellement, la transformée qui est sujette à multitudes recherches et qui a été utilisée comme standard du JPEG2000 [12] est la transformée en ondelette, elle est caractérisée par la grande capacité de concentrer l'énergie d'une image autour de peu de coefficients. La transformée en ondelettes concentre l'information pertinemment dans les basses fréquences.

Cette transformée a révolutionné plusieurs domaines de l'imagerie notamment la compression d'images, où elle permet un meilleur taux de compression que les autres et ceci avec une meilleure qualité d'image.

## 2.2.2 La Quantification

La quantification est un processus qui permet d'associer à un nombre réel (resp vecteur réel) un nombre entier (resp vecteur entier). Dans un certain sens on peut considérer qu'elle réalise une compression implicite (passage des réels aux entiers) en réduisant le nombre de bits nécessaire à la représentation de l'information d'une image. On distingue deux type de quantification la quantification scalaire et la quantification vectorielle [13]

Dans notre cas nous intéressons par la quantification scalaire.

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $p(x)$ . Une quantification est une fonction  $Q$  définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  qui associe à chaque  $x$  une valeur  $q$ , En général, l'image de  $Q$  est un ensemble fini  $\{q_i/i = 1, 2, \dots, N\}$  où  $N$  est le nombre de niveaux de quantification. On choisit souvent pour  $Q$ , une fonction en escalier.

La règle de quantification est alors la suivante : on définit  $\{c_j/j = 1, 2, \dots, N + 1\}$ , un ensemble croissant de niveaux de transition et l'application  $Q$  est alors définie par  $Q([c_j, c_{j+1}] = q_j) \forall j = 1, \dots, N$ , ceci revient à subdiviser l'ensemble des valeurs de  $X$  en  $N$  intervalles  $]c_j, c_{j+1}]$  et à associer à chaque  $x$  appartenant à l'intervalle  $]c_j, c_{j+1}]$  la valeur  $q_j$ . L'objectif de la quantification scalaire revient à déterminer les niveaux de transition  $c_j$  et de quantification  $q_j$  optimum, connaissant la densité de probabilité et se fixant un critère optimisation.

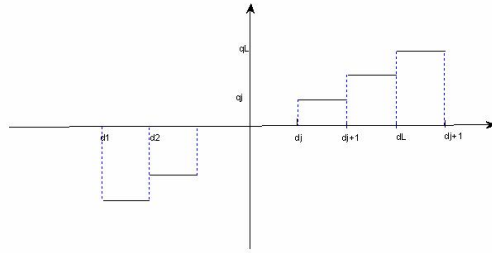


FIGURE 2.2 – Exemple de fonction de quantification

De toute évidence, l'application ainsi définie introduit par conséquent une distorsion entre les valeurs de  $x$  et  $Q(x)$  qu'il faut rendre minimale. Si l'on prend pour critère d'optimisation, la minimisation de l'erreur quadratique moyenne, pour un nombre donné de niveaux de transition, on obtient un quantificateur optimal au sens des moindres carrés. C'est le quantificateur de Lloyd-Max [11].

En désignant par  $\{c_j/j = 1, 2, \dots, N + 1\}, \{q_j/j = 1, 2, \dots, N\}$  les niveaux de transition (resp de quantification) et par  $p(x)$  la fonction de densité de probabilité, l'erreur quadratique est définie par :

$$MSE = \sum_{j=1}^n \int_{c_j}^{c_{j+1}} (x - Q(x))^2 p(x) dx \quad (2.5)$$

La minimisation de cette fonction revient à trouver les quantités  $c_j$  et  $q_j$  solution du système d'équation suivant :

$$c_j = \frac{1}{2}(q_j + q_{j-1})$$

(2.6)

$$q_j = \frac{\int_{c_j}^{c_{j+1}} xp(x)dx}{\int_{c_j}^{c_{j+1}} p(x)dx} \quad (2.7)$$

Notons que ces  $2N-1$  équations sont obtenues par annulation des dérivées de (2.5) par rapport à  $c_j$  et  $q_j$ . Ces équations sont non linéaires et par conséquent nécessitent la mise en oeuvre d'algorithmes spécifiques à des systèmes non linéaires. Elles montrent que les niveaux de décision sont les centres des intervalles délimités par les niveaux de reconstruction et que les niveaux de quantification sont les moyennes normalisées dans chaque intervalle de décision.

On modélise le plus souvent la distribution de densité des niveaux de gris par une gaussienne ou une laplacienne. Ces deux densités de probabilité sont des cas particuliers de la gaussienne généralisée dont la formule est donnée par:

$$p(x) = \alpha^* e^{-|\beta x|^r} \quad (2.8)$$

$$\text{Avec } \alpha = \frac{\beta r}{2\Gamma(\frac{1}{r})} \text{ et } \beta = \frac{1}{\sigma} \left[ \frac{\Gamma(\frac{3}{r})}{\Gamma(\frac{1}{r})} \right]^2,$$

où  $\sigma^2$  est la variance de l'image, et  $\Gamma(r)$  la fonction Gamma. Notons que pour  $r = 1$ , on a la densité de probabilité laplacienne et celle de la gaussienne pour  $r = 2$ .

Si on suppose que la densité de probabilité est uniforme, les niveaux de décision  $C_j$  et de quantification  $q_j$  du quantificateur optimal sont alors définis par :

$$c_j = c_1 + (j - 1) * D \quad (2.9)$$

$$q_j = c_j + \frac{D}{2} \quad (2.10)$$

$$D = \frac{c_{N+1} - c_1}{N} \quad (2.11)$$

Ce quantificateur est souvent appelé quantificateur linéaire. Au lieu de la fonction densité de probabilité, on peut utiliser l'histogramme de l'image à quantifier. En général, les lois ne sont pas connues ou sont complexes à évaluer, ce qui complique le calcul de  $c_j$  et  $q_j$ . Pour certaines lois classiques (loi normale, loi de laplace ...), ces valeurs sont données par des tables, ce qui facilite la mise en oeuvre de la quantification quand on utilise ces modèles.

### 2.2.3 Le Codage de source

Dans la plupart des images, les probabilités d'occurrence de différentes intensités changent, cette propriété peut être employée en appliquant un code de longueur variable, c'est à dire en assignant de plus longs codes à des symboles de basse probabilité et des codes plus courts à des symboles de probabilité plus élevées. Ce processus est réversible et améliore le taux de compression  $CR$ . On peut citer quelques méthodes de codages les plus utilisées dans la compression d'images

#### **Codage de Huffman :**

La méthode de huffman engendre des codes à longueurs variables sur un nombre entier de bits, son principe est basé sur la distribution des symboles d'un message (densité de probabilité). L'idée est d'attribuer aux deux symboles de plus faibles probabilités des codes plus longs. Ces deux codes ne se différencient que par leur dernier bit. Le principe de l'algorithme d'après [10] est le suivant :

1. Trouver les fréquences  $f_i$  des symboles.
2. Classer les symboles selon leurs fréquences d'occurrence dans l'ordre décroissant
3. Regrouper les paires de symboles de plus faibles fréquences, calculer  $j = f_n + f_{n+1}$  des deux faibles fréquences.
4. Choisir le plus petit indice  $k$  tel que  $j$  soit supérieur ou égal à  $f_k$ , remplacer  $k$  par  $k + 1$ .
5. Recomposer la table des fréquences en plaçant à la  $k$  ème position la valeur  $j$  et en décalant les autres d'une position vers le bas. Puis décrémenter  $n$  d'une unité, poursuivre jusqu'à ce que la table des fréquences ne comporte plus que deux éléments.

6. Coder avec retour arrière depuis le dernier groupe, en ajoutant un 0 ou un 1 pour différencier les symboles préalablement regroupés.

Pour exprimer la méthode, on va donner un exemple :

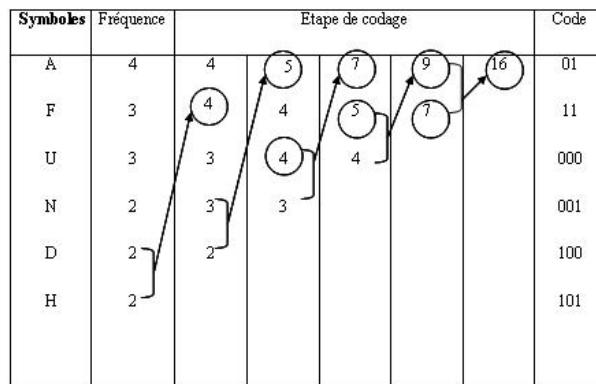


FIGURE 2.3 – Exemple du Codage de Huffman

### Codage RLE:

Le codage RLE (Run-Length Encoding) est comme son nom l'indique, un codage de 'course', c'est-à-dire qu'il élimine certaines séquences de caractères en les remplaçant par un code spécifique. Chaque 'course' de  $k$  éléments ( $2 < k \leq 9$ ) est remplacée par un caractère non utilisé (ex : /) suivi de l'entier  $k$  et du caractère substitué.

**Exemple :** "XW31111394444526D/A2" devient "XW3/4139/44526D/A2"

Une condition est nécessaire pour que cette compression soit utile : La séquence répétée doit contenir au moins 4 éléments pour obtenir un gain.

## Codage Arithmétique :

Le codage arithmétique est une méthode qui permet d'améliorer le taux de compression selon un modèle bien développé. Sa force est que le code est proche de l'entropie, il est classé parmi les meilleurs codeurs qui sont utilisés dans le domaine de la compression. Depuis sa découverte, il a été un sujet de plusieurs recherches. La première version de ce codeur optimisé a été proposée par Witten et Moffat [14], cette version est inspirée de la méthode de Langdon [15]. Parmi les recherches qui ont suivies, on peut citer Howard et Vitter [16].

Le principe de base de cet algorithme est le suivant: on associe à chaque symbole à coder un intervalle  $[\alpha_k, \beta_k[$  de  $[0, 1[$ . On itère ce processus jusqu'à la fin du traitement de toute la séquence. La séquence est alors codée par un réel de l'intervalle  $[0,1[$ .

## Algorithme de codage :

Cet algorithme comporte 5 étapes successives :

1. Initialisation de l'intervalle de codage  $[\alpha_c, \beta_c[$  avec les valeurs  $\alpha_c = 0$  et  $\beta_c = 1$ , cet intervalle a une longueur  $L = \beta_c - \alpha_c = 1$ .
2. cet intervalle est partitionné en  $N$  sous-intervalles ( $N$  nombre de symboles de l'alphabet de la source) proportionnellement aux probabilités  $p(s_k)$  de chaque symbole  $s_k$ , cette partition est constituée de sous-intervalles  $[\alpha_k, \beta_k[$  tels que :

$$\beta_k - \alpha_k = p(s_k) \text{ avec } \alpha_k = \alpha_c + L \times \sum_{i=1}^{k-1} p(s_i) \text{ et } \beta_k = \alpha_k + L \times \sum_{i=1}^{k-1} p(s_i)$$

3. On choisit le sous-intervalle correspondant au prochain  $s_k$  à coder dans la séquence et on met à jour les valeurs  $\alpha_c$  et  $\beta_c$  de la manière suivante :

$$\alpha_c = \alpha_c + L\alpha_k \text{ et } \beta_c = \alpha_c + L\beta_k$$

4. Avec le nouvel intervalle  $[\alpha_c, \beta_c[$  on recommence le processus de l'étape 2.
5. Les étapes 2,3 et 4 sont répétés jusqu'à épuisement des symboles de la



séquence et obtention du dernier intervalle  $[\alpha_k, \beta_k[$ . La représentation binaire de tout réel  $x_c$  de l'intervalle  $[\alpha_c, \beta_c[$  est un code de la séquence.

### Exemple : Codage Arithmétique

On considère la source  $S = \{a, b, c, d, e\}$  avec les probabilités respectives d'occurrence des symboles suivantes  $p(a) = 0.3$ ,  $p(b) = 0.25$ ,  $p(c) = 0.2$ ,  $p(d) = 0.15$  et  $p(e) = 0.1$ . On souhaite coder la séquence  $[bdcea]$ . Pour coder cette séquence on divise l'intervalle  $[0, 1]$  en 5 sous-intervalles, puis on se place sur le sous-intervalle correspondant au premier symbole de la séquence à coder, il s'agit du symbole "b". Pour le symbole suivant de la séquence "d" on subdivise le sous intervalle de "b",  $[0.3, 0.55]$  en 5 sous-intervalles correspondant au nombre de symboles de l'alphabet de la source  $S$ . On procède ainsi récursivement pour toute la séquence (voir figure ci-dessous).

#### Algorithme de décodage :

Cet algorithme comporte six étapes successives :

1. Initialisation de  $\alpha_c = 0$ , et  $\beta_c = 1$ .
2. Calcul de la largeur du sous-intervalle  $L = \beta_j - \alpha_j$
3. Trouver le sous intervalle  $[\alpha_k, \beta_k[$  du symbole  $s_k$  avec  $1 \leq k \leq N$  tel que :  
 $\alpha_k \leq x_c - \alpha_c L < \beta_k$  tel que  $x_c$  est le réel codant la séquence.
4. On obtient le symbole  $s_k$ .
5. On met à jour le sous intervalle de codage :  
 $\alpha_c = \alpha_c + L \times \alpha_k$  et  $\beta_c = \alpha_c + L \times \beta_k$ .
6. On répète les 2, 3,4 et 5 jusqu'à obtenir le décodage et de tous les symboles de la séquence.

#### Exemple : Décodage de la séquence précédente.

On considère la valeur  $x_c = 0.51508125$  codant la séquence **Etape 1**  
 On initialise  $\alpha_c = 0$ ,  $\beta_c = 1$ .

#### Etape 2

On calcule la largeur du sous-intervalle du code :  $L = \beta_c - \alpha_c$ .

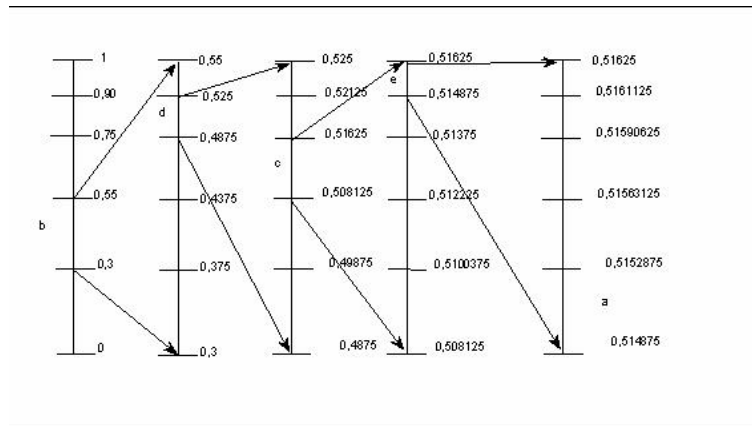


FIGURE 2.4 – Exemple de codage arithmetique

### Etape 3

On calcule le nombre  $x_c - \alpha_c L$  dont la valeur est 0.51508125 et on cherche  $k$  tel que ce nombre soit compris dans la partition initiale.

### Etape 4

$k = 2$ , Il s'agit du sous-intervalle  $[0.3, 0.55]$  [qui correspond au symbole  $b$ ].

### Etape 5

On met à jour le sous-intervalle de codage  $\alpha_c = \alpha_c + L \times \alpha_k$  et  $\beta_c = \alpha_c + L \times \beta_k$ , donc:

$$\alpha_c = 0 + 1 \times 0.3 = 0.3 \text{ et } \beta_c = 0 + 1 \times 0.55 = 0.55.$$

On répète l'étape 2 :  $L = 0.55 - 0.3 = 0.25$ .

**Etape 3** :  $(0.51508125-0.3)/0.25 = 0,860325$

**Etape 4** :  $k = 4$ , il s'agit du sous-intervalle  $[0.75, 0.90]$  [qui correspond au symbole  $d$ . On revient à l'étape 5 et ainsi de suite

## 2.2.4 L'algorithme proposé

Notre algorithme proposé est constitué des étapes suivantes

**Etape 01** : Décomposition d'une image niveaux de gris par la transformée en ondelette discrète (DWT), en utilisant L'algorithme pyramidal de Mallat

**Etape 02** : seuillage des coefficients ondelettes par un seuil choisi par un critère.

**Etape 03** : Quantification scalaire

**Etape 04** : codage RLE plus le codage arithmétique

## 2.2.5 Simulation de l'algorithme proposé

Cette partie est consacrée à la simulation de l' algorithme proposé via la programmation dans un environnement Matlab. Notre simulation se constitue de deux parties :

**Première partie** : Fixons un seuil  $TH = 0$  et un  $PSNR$ , puis nous varions l'onde mère dans le but d'obtenir un meilleur taux de compression CR. Dans cette opération nous utilisons les ondelettes orthogonales qui sont intégrée dans Matlab. Une comparaison de ces résultats sera établie pour définir la meilleure onde mère qui s'adapte avec notre méthode.

**Deuxième partie** : Avec l'onde mère que nous avons obtenu de la première partie, nous essayons d'améliorer le taux de compression avec les variations du seuil TH en préservant la qualité d'image reconstruite. Le but de cette partie est de trouver un meilleur TH sans distorsion de l'image reconstruite, avec un taux de compression amélioré

Dans ce qui suit nous présentons quelques résultats concernant la première étape de notre simulation, en utilisant une image " boat.bmp " niveaux de gris de format BMP.

Onde mère	Db2	Db3	Db4	Db5	Db6	Db7
PSNR	39,34	38,45	37,88	36,05	35,96	37,79
CR	3 ,16	2,81	2,44	2 ,41	2,36	2,29

Onde mère	Db8	Sym2	Sym3	Sym4	Sym5	Sym6
PSNR	36,56	39,34	38,45	37,56	37,39	36,37
CR	3,51	3 ,16	2,81	2,19	2,73	2,41

Onde mère	Sym7	Sym8	Coif1	Coif2	Coif3	Coif4	Coif5
PSNR	37,42	36,98	39,03	36,82	37,02	37,12	37,30
CR	2,30	3,09	3,13	2,16	2 ,23	1,96	2,31

TABLE 2.1 – Résultat de la première partie de simulation avec un seuille fixe

Quelques résultats visuels de la première partie de simulation sont présentés dans les figures ci dessous

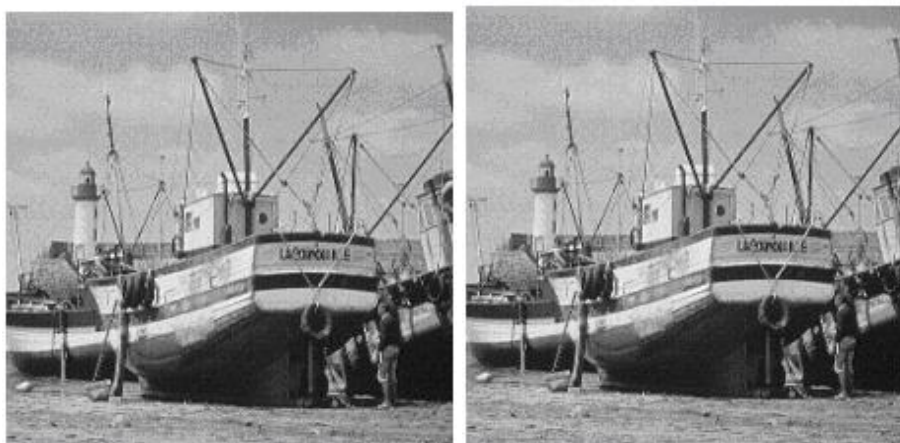


FIGURE 2.5 – Image boat originale et reconstruite avec OM db2

Le résultat de la figure (2.5) est obtenu par l'onde mère de daubechies " db2 " et un seuil  $TH = 0$ . Le taux de compression dans ce cas est  $CR = 3,16$  avec un  $PSNR = 39,34$



FIGURE 2.6 – Image boat reconstruite avec Om db8

Le résultat de la figure (2.6) l'onde mère de daubechies " db8 " et un seuil  $TH = 0$ . Le taux de compression dans ce cas est  $CR = 3,51$  avec un  $PSNR = 36,56$ .

Le résultat de la figure (2.7) est obtenu par l'onde mère de type Coiflet " Coif1 " et un seuil  $TH = 0$ . Le taux de compression dans ce cas est  $CR = 3,13$  avec un  $PSNR = 39,03$ .

A partir de cette première étape de simulation nous pouvons choisir l'ondelette de daubechies "db2" comme la meilleure ondelette qui s'adapte avec notre algorithme. Le choix de cette onde mère est basé sur le taux de compression CR et PSNR qui représente la préservation de la qualité d'image reconstruite.

Dans la deuxième étape de simulation nous fixons l'ondelette que nous avons obtenu de la première étape, c'est l'ondelette de daubechies " db2" et nous varions le seuil TH dans le but d'améliorer le taux de compression CR et tenir en compte la qualité d'image, enfin nous déduisons le lien qui existe entre le PSNR et le taux de compression CR quand TH varie. Dans ce qui suit on présente quelques résultats concernant la deuxième étape de notre



FIGURE 2.7 – Image boat reconstruite avec Om Coef1

simulation

TH	0	5	10	15	20	25
PSNR	39,34	39,34	37,13	35,56	34 ,36	33 ,44
CR	3,16	3,16	5,7	8 ,20	10 ,11	12,07

TH	30	35	40	45	50	55	60
PSNR	32,67	31,98	31,43	30,93	30,54	30 ,18	29,87
CR	13,77	15,52	17 ,11	18 ,66	20 ,00	21 ,17	22,30

TABLE 2.2 – Résultat de simulation simulation avec une onde mère db2

Quelques résultats visuels de la deuxième partie de simulation sont présentés dans les figures ci-dessous



FIGURE 2.8 – Image boat originale et reconstruite avec  $TH=20$

Le résultat de la figure (2.8) est obtenu par l'onde mère de daubechies " db2 " et un seuil  $TH = 20$ . Le taux de compression dans ce cas est  $CR = 10,11$  avec un  $PSNR = 34,36$



FIGURE 2.9 – Image boat reconstruite avec  $TH=35$

Le résultat de la figure (2.9) est obtenu par l'onde mère de daubechies " db2 " et un seuil  $TH = 35$ . Le taux de compression dans ce cas est  $CR = 15,52$

avec un  $PSNR = 31,98$ .



FIGURE 2.10 – Image boat reconstruite avec  $TH=50$

Le résultat de la figure (2.10) est obtenu par l'onde mère de daubechies ” db2 ” et un seuil  $TH=50$ . Le taux de compression dans ce cas est  $CR=20,00$  avec un  $PSNR=30,54$



FIGURE 2.11 – Image boat reconstruite avec  $TH=60$



Le résultat de la figure (2.11) est obtenu par l'onde mère de daubechies " db2 " et un seuil  $TH = 60$ . Le taux de compression dans ce cas est  $CR = 29,87$  avec un  $PSNR = 29,87$

Dans cette partie de simulation nous pouvons déduire le résultat suivant:

A partir d'un certain seuil  $TH > 40$  nous obtenons une image reconstruite de mauvaise qualité ( $PSNR < 31$ ), tel que 31 c'est une valeur de PSNR acceptable de cette image. Par exemple avec un seuil  $TH = 45$  nous obtenons un taux de compression  $CR=18,66$  associé à un  $PSNR = 30,93$  indiquant une mauvaise qualité de l'image reconstruite. Cette remarque, persiste tout en augmentant le seuil TH. Donc, il existe un seuil TH optimale qui nous donne un bon taux de compression  $CR$  et qui préserve la qualité d'image reconstruite. Dans notre cas nous pouvons choisir  $TH = 40$  comme un seuil pour notre algorithme.

## 2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en oeuvre les ondelettes orthogonales dans un algorithme de compression avec perte. Les simulations effectuées ont permis de constater que l'onde mère db2 présente la meilleure performance et elle satisfait au mieux le compromis CR-PSNR. D'autre part, nous affirmons par notre étude menée qu'il existe un seuil optimal permettant d'avoir un taux de compression acceptable tout en préservant la qualité de l'image reconstruite.

# Chapitre 3

## La transformée en ondelettes et débruitage des signaux

Ce Chapitre comporte deux parties principales, la première constitue une description complète des méthodes de débruitage par la transformée en ondelettes qui sont basées sur un seuillage. La deuxième partie est consacrée à la simulation des deux méthodes de débruitage par ondelettes qui sont basées sur le seuil de D Donoho via la programmation dans un environnement matlab, traitant le cas d'un signal ECG corrompu par un bruit additif gaussien.

### 3.1 Débruitage par ondelettes

Parmi l'un des plus grand succès de la transformée en ondelettes est le débruitage [6]. En effet cette technique est basée sur la construction d'estimateurs statistiques à base d'ondelettes qui nécessite le calcul d'un seuil qui correspond à l'amplitude maximal du bruit et dépend de l'énergie du signal et du bruit. Ces méthodes exploitent la caractéristique essentielle de la transformée en ondelettes qui est la concentration de l'énergie du signal autour de peu de coefficients et l'on n'a donc besoin d'estimer que quelques grands coefficients pour obtenir une bonne estimation de la fonction.

### 3.1.1 Algorithme de débruitage par la transformée en ondelettes

L'algorithme de base de débruitage par la transformée en ondelettes peut être constitué de trois étapes essentielles [5] :

1. Décomposition d'un signal par la transformée en ondelettes.
2. Seuillage des coefficients obtenus par la décomposition.
3. Reconstruction par la transformée en ondelettes inverse.

En effet, à partir d'un signal à débruiter, on décompose le signal sur une base orthogonale d'ondelettes. On applique un seuillage qui consiste à éliminer les coefficients qu'on considère comme du bruit ou à les réduire en fonction du seuil calculé. En dernier lieu, on récupère le signal débruité par la transformée en ondelettes inverse sur les coefficients seuillés.

### 3.1.2 Formulation mathématiques du problème

Soit  $y$  un signal corrompu par un bruit Gaussien  $\eta \sim N(0, 1)$  . On peut écrire :

$$y(n) = x(n) + \eta(n) \quad (n = 0, 1, \dots, N - 1) \quad (3.1)$$

Avec  $N$  est la taille du signal  $y$ ,  $x$  le signal initial non corrompu.

On applique la transformée en ondelettes discrète (DWT) sur l'équation (3.1) on obtient:

$$DWT_y = DWT_x + DWT_\eta \quad (3.2)$$

Soit  $S$  la fonction de seuillage par ondelettes. On applique la fonction  $S$  sur le vecteur  $DWT_y$ , on obtient :

$$\hat{x}(n) = IDWT(S(DWT_y)) \quad (3.3)$$

Avec  $S(DWT_y)$  est le vecteur des coefficients de la  $DWT$  seuillés.  $\hat{x}$  le signal débruité.

Ceci s'interprète tout simplement, par l'application de la  $DWT$  sur le signal bruité  $y$ , on obtient le vecteur des coefficients de la  $DWT$  ( $DWT_y$ ) sur lequel on applique un seuillage par la fonction de seuillage  $S(DWT_y)$ . Le signal débruité  $\hat{x}$  est obtenue par la ransformée en ondelettes inverse  $IDWT$  sur les coefficients seuillés  $IDWT(S(DWT_y))$ .

### 3.1.3 Les méthodes de seuillage

Les méthodes de seuillage les plus connues sont introduites par D Donoho [6]. Il y a deux méthodes :La méthode de seuillage dur (hard thresholding) et la méthode de seuillage doux (soft thresholding). Des versions de ces méthodes ont été développées. Dans notre cas nous nous intéressons par les deux méthodes de seuillage dur et doux.

- **Seuillage dur** : Le seuillage dur [17] considère un coefficient donné soit comme représentant totalement un bruit pur donc à éliminer, ou comme un coefficient représentant le signal donc à conserver.

La fonction de seuillage dur  $S_{dur}$  appliquée dans ce cas est définie par :

$$S_{dur}(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| > TH \\ 0 & \text{si } |x| \leq TH \end{cases} \quad (3.4)$$

Où  $TH$  est la valeur du seuil.

Le graphe de la figure (3.1) est un exemple de seuillage dur appliqué sur la fonction  $y = t$  avec un seuil  $TH = 0,5$

- **Seuillage doux** : Le seuillage doux [5, 6] consiste a éliminer chaque coefficient au dessous du seuil, et a soustraire ce seuil des autres coefficients.

La fonction de seuillage doux  $S_{doux}$  appliquée dans ce cas est définie par l'équation :

$$S_{doux}(x) = \begin{cases} sign(x)(|x| - TH) & \text{si } |x| \geq TH \\ 0 & \text{si } |x| < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

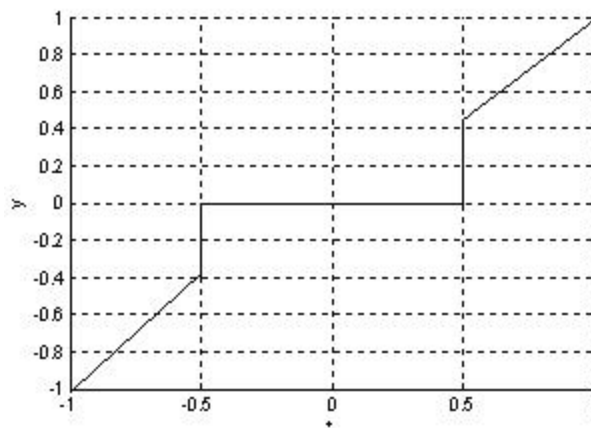


FIGURE 3.1 – Graphe de la fonction du seuillage dur

Où  $TH$  est la valeur du seuil.

Le graphe de la figure (3.2) est un exemple de seuillage doux appliqué sur la fonction  $y = t$  avec un seuil  $TH = 0,5$

### 3.1.4 Sélection du seuil

L'application d'une méthode basée sur un seuillage nécessite un calcul du seuil, cette tâche très importante dans le cadre où on estime le niveau de la contribution du bruit dans le signal en fonction de sa nature et la nature du signal. Avec l'hypothèse que le bruit est un bruit blanc Gaussien de variance  $\sigma^2$ .

Donoho et Johnstone ont alors montré [6] que dans le domaine des ondelettes, la partie essentielle du bruit blanc est localisée dans la bande des coefficients de haute fréquence du signal (bande des détails), et le risque induit par un seuillage (dur ou doux) sur les coefficients d'ondelettes de la bande des détails pouvait être encadré par des valeurs proches de la borne

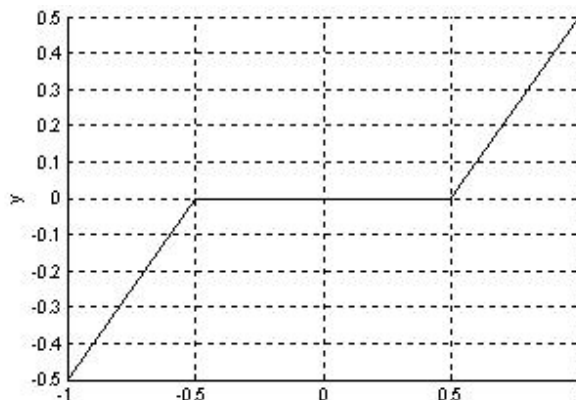


FIGURE 3.2 – Graphe de la fonction du seuillage doux

inférieure obtenue avec des estimateurs d'oracle. Un estimateur d'oracle est un estimateur construit en connaissant le signal recherché.

Le risque est défini par l'équation :

$$R(x, \hat{x}) = E(\|x - \hat{x}\|^2) = E \sum_{i=0}^{N-1} (\|x(i) - \hat{x}(i)\|^2) \quad (3.6)$$

Où  $N$  est la taille du signal  $x$ .

Le théorème de Donoho et Johnstone définit un seuil  $T_H$  pour les coefficients des détails de la transformée en ondelettes [18] et dont la valeur est:

$$T_H = \sigma \sqrt{2 \log(N)} \quad (3.7)$$

avec un risque  $R_d(x)$  qui est encadré par deux valeurs comme le montre l'inéquation :

$$A(x) \leq R_d(x) \leq (2 \log(N) + 1)(\sigma^2 + A(x)) \quad (3.8)$$

Où:

$$A(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \min(d_i^2, \sigma^2) \quad (3.9)$$

et les  $d_i$  représentent les coefficients de la transformée en ondelettes de  $x$ .

Lorsqu'on utilise le seuil de Donoho et Johnstone, il est nécessaire d'avoir une estimation de la variance  $\sigma^2$  du bruit.

L'estimateur utilisé est celui de la médiane des coefficients d'ondelettes proposé par Donoho.

Cette estimation nous ramène à distinguer les différents cas suivants :

- Seuillage global.
- Seuillage dépendant du niveau de décomposition

### 3.1.5 Seuillage global

Une méthode de seuillage globale est basée sur l'estimation d'un seuil unique quelque soit le niveau de décomposition. Le seuil [17,18] est calculé en utilisant l'équation (3.8) où  $\sigma$  est l'écart-type ou le niveau du bruit qui est estimé par l'équation :

$$\sigma = \frac{\text{mediane}(|d_i|)}{0.6745} \quad (3.10)$$

Où  $d_i$  les coefficients des détails obtenus au niveau 1.

### 3.1.6 Seuillage dépendant du niveau

Johnstone et Silverman [9] ont proposé un seuil dépendant du niveau donné par:

$$T_{H_j} = \sigma_j \sqrt{2 \log(N)} \quad (3.11)$$

Où  $j$  représente le niveau de décomposition et  $\sigma_j$  l'écart-type du bruit calculé dépendamment du niveau qui est donné par :

$$\sigma_j = \frac{\text{mediane}(|d_i^j|)}{0.6745} \quad (3.12)$$

Où  $d_i^j$  les coefficients des détails obtenus au niveau  $j$ .

### 3.2 Simulation de l'algorithme proposé par Donoho

Dans cette partie nous effectuons une simulation des deux méthodes de débruitage par la transformée en ondelette qui sont basées sur le seuil de Donoho, en traitant le cas d'un signal *ECG* corrompu par un bruit gaussien  $N(0, \sigma)$  additif. Pour évaluer la qualité du signal reconstruit, on se base sur un critère utilisé largement dans les tests de simulation et qui est celui du rapport signal bruit (*SNR*) exprimé en décibel (*dB*) défini par l'équation:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{\sum_{i=1}^N |x(i)|^2}{\sum_{i=1}^N |x(i) - \hat{x}(i)|^2} \quad (3.13)$$

Où  $x$  est le signal corrompu avec le bruit gaussien,  $\hat{x}$  est le signal débruité et  $N$  la taille du signal.

Dans la pratique on ne sait pas le signal original (le signal non corrompu) et la variance du bruit. Alors le débruitage représente une estimation du signal non corrompu à partir du signal corrompu. De l'équation (3.1) on peut estimer aussi le bruit de la façon suivante Soit  $y(n)$  un signal corrompu et  $\hat{x}(n)$  est le signal estimé (débruité) à partir de  $y(n)$ . De l'équation (3.1) nous pouvons estimer le bruit comme suit :

$$\hat{\eta}(n) = y(n) - \hat{x}(n)$$

Puisque nous sommes dans le cas d'un bruit additif.



Concernant notre simulation , elle se déroule de la manière suivante :

1. Nous ajoutant un bruit gaussien à un signal non corrompu.
2. Nous appliquant l'algorithme de débruitage sur le signal corrompu.
3. A partir du signal débruité que nous avons obtenu à l'étape 2 et le signal corrompu, nousn estimant le bruit.
4. Nous affichant l'histogramme du signal  $\hat{\eta}(n)$  qui représente la distribution statistique des coefficients du signal  $\hat{\eta}(n)$ .

Cette distribution est une mesure qui nous indique que si elle est proche d'une gaussien nous pouvons dire que la contribution du bruit dans le signal est réduite.

Dans ce qui suit nous présentons quelques résultats visuels des deux types de débruitage, en utilisant des signaux *ECG* type d'ARRYTHMIA., ce signal est le 1.17,. Concernant la décomposition du signal, en variant le niveau de décomposition et le type d'onde mère (en comparant les deux onde mère de daubechies *db2* et *db8* qui sont intégrées dans Matlab).

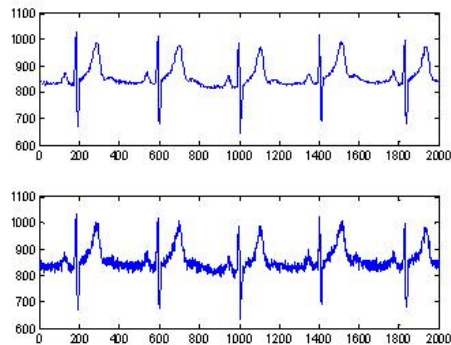


FIGURE 3.3 – Signal ECG 117 non Corrompu et Corrompu

La figure (3.3) montre dans le premier graphe un signal *ECG117* non corrompu et dans le deuxième graphe le même signal corrompu avec un bruit gaussien de variance =10.

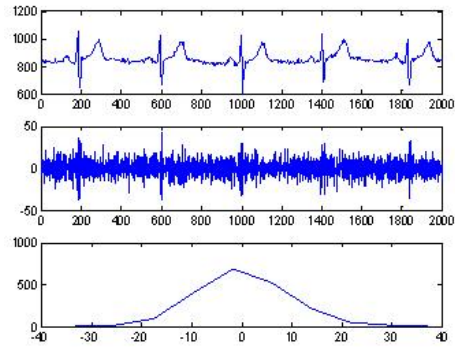


FIGURE 3.4 – Débruitage de signal 117 avec OM db2 N=2 seuillage dur

La figure (3,4) représente le signal 117 débruité avec un seuillage dur. L'onde mère de décomposition est la *db2* avec un niveau de décomposition  $n = 2$ .  $SNR = 39,22dB$ .

Dans ce cas nous remarquons que la distribution du bruit estimé approche de  $N(0, 10)$ , donc on peut dire que la contribution de bruit dans le signal est réduite, aussi nous obtenons un  $SNR$  acceptable.

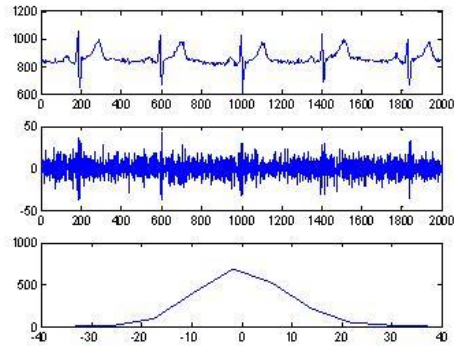


FIGURE 3.5 – Débruitage de signal 117 avec OM db2 N=3 seuillage dur

La figure (3,5) représente le signal 117 débruité avec un seuillage dur. L'onde mère de décomposition est la *db2* avec un niveau de décomposition  $n = 3$ .  $SNR = 36,24dB$ .

Dans ce cas nous remarquons que la distribution des coefficients du bruit est totalement différente de  $N(0, 10)$  ce qui nous indique que la contribution du bruit n'est pas réduite, aussi le  $SNR$  est diminuée.

Nous pouvons déduire rapidement qu'il y a un lien entre la qualité du signal reconstruit et le niveau de décomposition dans un seuillage dur utilisant la *db2* dans la décomposition du signal.

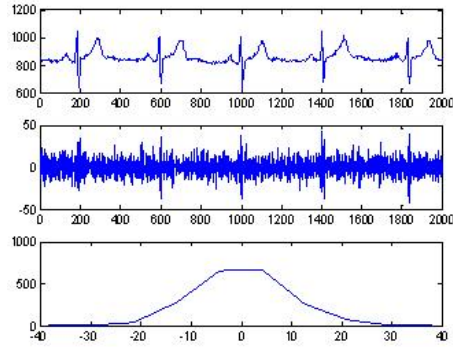


FIGURE 3.6 – Débruitage de signal 117 avec OM db2 N=2 seuillage doux

La figure (3,6) représente le signal 117 débruité avec un seuillage doux. L'onde mère de décomposition est la *db2* avec un niveau de décomposition  $n = 2$ .  $SNR = 39,08$  dB.

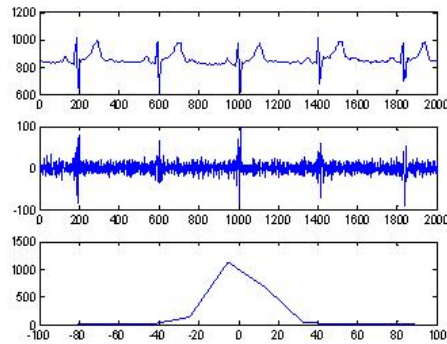


FIGURE 3.7 – Débruitage de signal 117 avec OM db2 N=3 seuillage doux

La figure (3,7) représente le signal 117 débruité avec un seuillage doux.

L'onde mère de décomposition est la *db2* avec un niveau de décomposition  $n = 3$ ,  $SNR = 36,17dB$ .

Avec l'onde mère *db2* et un seuillage doux nous obtenons presque les mêmes résultats dans le cas du débruitage dur.

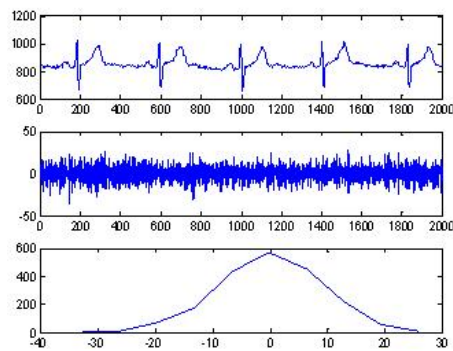


FIGURE 3.8 – Débruitage de signal 117 avec OM *db8*  $N=2$  seuillage dur

La figure (3,8) représente le signal 117 débruité avec un seuillage dur. L'onde mère de décomposition est la *db8* avec un niveau de décomposition  $n = 2$ ,  $SNR = 39,60dB$

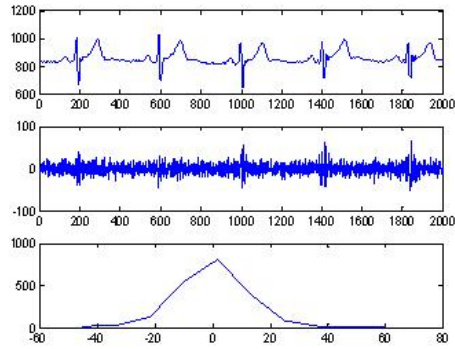


FIGURE 3.9 – Débruitage de signal 117 avec OM db8 N=3 seuillage dur

La figure (3,9) représente le signal 117 débruité avec un seuillage dur. L'onde mère de décomposition est la *db8* avec un niveau de décomposition  $n = 3$ ,  $SNR = 37,00dB$ .

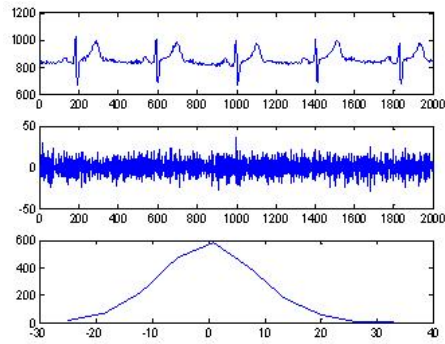


FIGURE 3.10 – Débruitage de signal 117 avec OM db8 N=2 seuillage doux

La figure (3,10) représente le signal 117 débruité avec un seuillage doux. L'onde mère de décomposition est la *db8* avec un niveau de décomposition

$n = 2, SNR = 39,76dB.$

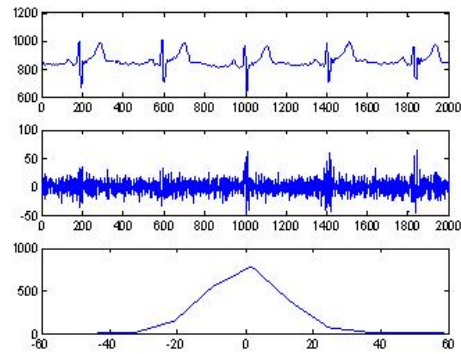


FIGURE 3.11 – Débruitage de signal 117 avec OM db8 N=2 seuillage doux

La figure (3,11) représente le signal 117 débruité avec un seuillage doux. L'onde mère de décomposition est la *db8* avec un niveau de décomposition  $n = 3, SNR = 36,98$

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé les deux méthodes de débruitage des signaux par la transformée en ondelette de donoho .A partir de cet exposé nous pouvons déduire que ces dernières sont basées sur le seuil estimé, les simulations effectuées ont permis de remarquer que dans la pratique le signal débruité reste toujours contaminé avec le bruit gaussien d'une manière visible. La question que nous posons à la fin de ce chapitre est ce que le seuil de donoho qui est utilisé dans les méthodes de débruitage par la transformée en ondelette est optimal ?

# Conclusion Générale

Durant l'élaboration de ce modeste travail que nous nous sommes fixé, plusieurs questions survolaient l'esprit, telles que : Pourquoi les ondelettes sont apparues ? Quels sont leurs fondements théoriques de base ? Et où sont-elles impliquées en pratique ? En essayant de répondre à ces questions, nous avons pu englober, d'une manière suffisante, les notions de fond de la théorie des ondelettes. La lecture attentive de plusieurs références et articles de recherches en liaison avec les applications d'ondelettes, nous a conduit de choisir les deux applications les plus répandues dans la littérature spécialisée du domaine et qui sont : la compression d'images numériques et le débruitage des signaux 1D/2D.

Les résultats obtenus, en compression d'images, issus de l'algorithme proposé sont encourageants. Néanmoins, la réflexion dans la direction de la construction d'une onde mère la plus concentrant d'énergie et dédiée à la compression semble être tout à fait logique.

Concernant le deuxième volet qu'est le débruitage, les résultats sont aussi satisfaisants et montre bien la capacité de la transformée en ondelettes à réduire le bruit additif gaussien d'une manière assez efficace. Un travail se focalisant sur l'estimation du seuil en redéfinissant le critère d'optimisation et en incluant d'autres outils mathématiques alliés aux ondelettes, fera l'objet des travaux future.

A la fin, nous nous considérons heureux d'avoir eu cette opportunité inestimable de s'introduire au domaine fascinant de la recherche scientifique. Nous espérons avoir la capacité de continuer à explorer le vaste monde des ondelettes.



# Bibliographie

- [1] G. Bacheman L.Narici and E. Beckenstein, Fourier and wavelet analysis, *Springer Verlag 2000*.
- [2] Y. T. Chan, wavelet basics, *Kluwert academic publishers (1995)*.
- [3] I.Daubechies, Orthonormal basis with finite support. Connexion with discrete filters, *Bell labo, 1987*
- [4] I.Daubechies, Ten lectures on wavelets, *Siam Edition 1992*.
- [5] DL. Donoho, Denoising by soft thresholding, *IEEE Trans Information theory Vol 41 , n o3 , pp 613-627 (1995)*.
- [6] DL. Donoho, I. M. Johnstone, Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage, *Biometrika Vol 81, n 03, pp 425-455 (1994)*.
- [7] J. P. Guillois, Techniques de compression des images, *Paris Hermès (1996)*.
- [8] Haward and Vitter, Arithmetic coding for data compression, *Proceeding of the IEEE Vol 82 N: 06 (1994)*.
- [9] I. M. Johnstone, B.W. Silverman, wavelet threshold estimators for data with correlated noise. *wavelet threshold estimators for data with correlated noise. J. Roy. Statist.Soc B 59 : 319-351 (1997)*.
- [10] G. Kaiser, A Friendly Guide to Wavelets, *Birkhauser, berlin 1994*.
- [11] S.Mallat, A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation, *IEEE transaction on pattern analysis and machine intelligence Vol II, N:07, 1989*.
- [12] S. Mallat, A wavelet tour of signal processing, *Academic press, 1998*.
- [13] S.Mallat, Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of  $L^2(R)$ , *Transaction of tha AMS 315 69-87 septembre 1989*.
- [14] Y. Meyer, Ondelettes et opérateurs. *Edition Hermann, 1990*.

- [15] A. Netravali, B. Haskel, Digital pictures representation and compression, *New York Plenum (1998)*.
- [16] J. J. Rissanen and G. Longdon, Arithmetic coding, *IBM J. Res. Develop* 23 N:02 pp 156-162 (1979).
- [17] K. Sayood, Introduction to data compression, *Morgan Kaufman Publishers (1996)*.
- [18] B. Vidacovic, Statistical modelling by wavelets, *John Wiley 1999*.
- [19] I. H. Witten, R. M. Neal and J. G. Cleary, Arithmetic coding for data compression, *Communications of the ACM*, Vol 30 N :06 (1987).