Table des matières

Remerciements

Cette thèse a été dirigée par monsieur L. Melkemi, Maître de conférence à l'Université de Batna, Je tiens à lui exprimer ici ma reconnaissance pour son enthousiasme et son soutien sans faille durant la réalisation de cette thèse. Il a toujours été disponible pour me prodiguer ses conseils.

Je suis sensible à l'honneur que me fait monsieur B. Mezerdi, Professeur à l'Université de Biskra, en présidant le jury de cette thèse. Je rends hommage à ses qualités humaines et scientifiques tout au long de mon cursus universitaire. Je lui adresse mes vifs remerciements.

Je suis heureuse également de remercier, monsieur A. Necir, professeur à l'Université de Biskra d'avoir accepté d'examiner cette thèse et de participer au jury. Je sensible à sa générosité qu'il m'a témoignée et son aide qu'il m'a prodiguée. Je lui exprime ma gratitude pour ses conseils précieux.

Mes remerciements vont aussi à monsieur K. Melkemi, Professeur à l'Université de Biskra, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant d'examiner cette thèse et de faire partie du jury.

J'adresse mes sincères remerciements au Dr. A. Benaissa, Maître de conférence à l'Université de Batna, pour l'intérêt qu'il a manifesté à cette thèse, en acceptant de l'examiner.

Je remercie vivement monsieur A. Mokrane, Maître de Conférence à l'université de Batna, pour la cordialité avec laquelle il a accepté de faire partie de ce jury.

Je voudrais adresser mes remerciements à tous ceux qui m'ont aidé à mener ce travail à son terme. En particulier, le chef de département de Mathématiques, monsieur Z. Mokhtari.

J'exprime ma gratitude à ma famille qui m'a toujours soutenue et encouragée dans la voie que je m'étais fixée. Je remercie particulièrement mes parents qui m'ont stimulée et encouragée pendant la réalisation de ce travail.

Mes vifs remerciements vont également à tous mes enseignants, mes collègues et mes amies, notamment, H. Berkane, S. Adouane, N. Bouziane, S. Bougherara, F. Benabba, Y. Ouanoughi, S. Yakhlef et B. Laadjel.

Listes des algorithmes

Résumés

Résumé

Dans ce travail, nous donnons une étude complète sur les matrices structurées, nous nous intéressons aux matrices Toeplitz et Vandermonde et nous présentons une structure de déplacement de type Sylvester pour les matrices de Vandermonde confluentes qui apparaissent comme une généralisation naturelle connue dans le cas d'un système de Vandermonde simple. Nous montrons aussi qu'un algorithme asymptotiquement rapide peut être conçu pour réaliser la factorisation LU d'une matrice de Vandermonde confluente. Ce résultat est basé sur la structure de déplacement réalisée par ce type des matrices et sur la factorisation des éléments blocs en termes de matrices Toeplitz triangulaires.

Mots-clés : *Structure de déplacement, Matrice de Vandermonde confluente, Complément de Schur.*

Abstract

In This work, we give a complete study on the structured matrices. We are interested in Toeplitz and Vandermonde matrices and we present displacement structure of the Sylvester type for the confluent Vandermonde matrices which appear as a natural generalization well known in the case of the simple Vandermonde system. We show also that an asymptotically fast algorithm may be designed in order to realize a block LU-factorization of confluent Vandermonde matrices. This result is based on a displacement structure satisfied by confluent Vandermonde matrices and on factorization of the block elements in terms of triangular Toeplitz matrices.

Key Words : *Displacement structure, Confluent Vandermonde matrix, Schur complement.*

Chapitre 1

Introduction générale

Les méthodes numériques fournissent un outil extrêmement performant qui permet d'aborder et de résoudre des problèmes dont la solution est inimaginable par les méthodes analytiques classiques. La maîtrise de cet outil est devenue indispensable dans la formation scientifique en général et dans celle des ingénieurs en particulier.

Parmi ces méthodes, on peut citer un ancien problème qui apparait dans presque tous les domaines scientifiques ; c'est le problème de résolution d'un système linéaire vers lequel nous nous orientons dans cette thèse. Le principe de ce problème est toujours le même : on se donne une matrice A et un vecteur b et on cherche a trouver des algorithmes performants et rapides permettant de déterminer le vecteur x solution de l'équation $Ax = b$.

Les algorithmes basés sur les méthodes standards sont inapplicables lorsque n est grand parce qu'ils sont de complexité très élevée. A titre d'exemple, si on veut résoudre un système linéaire de dimension (10×10) par la méthode de Cramer on effectue un nombre d'opérations de l'ordre de 400 millions. Donc la méthode de Cramer est de l'ordre de $n(n+1)!$ pour résoudre un système linéaire de dimension $(n \times n)$. On utilise $O(n^3)$ opérations pour résoudre le même système par la méthode d'éliminations de Gauss. Alors ces méthodes sont très lentes.

Heureusement, plusieurs équations linéaires prennent certaines structures dans l'application. ces structures sont exploitées pour la rapidité du calcul. Les structures de matrices creuses, bandes, symétriques et triangulaires et aussi de Toeplitz, de Hankel, de Vandermonde et de Cauchy qui ont la notion de structure de déplacement qui a vu sa naissance vers la fin des années 70. Cette structure est un opérateur de la forme :

$$A - ZAZ^T$$

où Z est la matrice de déplacement suivante :

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans notre thèse dont l'objet est la résolution d'un système linéaire structuré, nous nous sommes intéressés particulièrement aux matrices de Vandermonde confluentes. Ce sont des matrices bien connues dans la littérature dotées de structures de déplacement convenable dans les applications.

Pour aboutir à une telle structure pour les matrices de Vandermonde confluentes simplement, il faut aboutir à une généralisation naturelle de celle connue dans le cas d'un système de Vandermonde simple. La démonstration de ce résultat tire profit d'une propriété intéressante disant, dans un sens que nous préciserons plus loin, qu'une telle matrice est en fait plongée dans une matrice de Vandermonde par blocs. Ce plongement n'est rien d'autre qu'une matrice de permutation qui nous permet d'obtenir l'équation de déplacement vérifiée par les matrices de Vandermonde confluentes à partir de l'équation de déplacement vérifié par les matrices de Vandermonde par blocs [36].

La plupart des opérations qu'on a effectuées dans notre étude sont en fonction des matrices Toeplitz, parmi lesquelles, on peut citer les deux opérations suivantes : le calcul du produit matrice-vecteur Tx, où T est Toeplitz triangulaire, et le calcul du produit $x^T T$, où T est Toeplitz triangulaire aussi, d'où le calcul de Tx et $x^T T$ est fortement lié aux opérations sur les polynômes à une variable. Alors, ces opérations de base sont réalisées par des algorithmes rapides qu'effectuent $O(d \log d)$ opérations. Ces algorithmes sont numériquement stables et connus dans la littérature sous le nom de FFT (Fast Fourier Transform).

Contenu de la thèse

Cette thèse est constituée de six chapitres :

Dans le chapitre suivant, nous présentons les matrices structurées les plus remarquables dans la littérature. Nous commencons ce chapitre par une définition du déplacement puis nous donnons les structures de déplacement de Toeplitz, de Hankel, de Vandermonde et de Cauchy et nous démontrons la stabilité de quelques opérations de base par cette notion de structure.

Au troisième chapitre, nous nous intéressons à la pertinence visuelle des caractéristiques de la transformation discrète de Fourier dans les calculs, plus particulièrement dans le calcul des polynômes. Nous présentons quelques techniques et résultats fondamentaux satisfaits par la transformation discrète de Fourier [21] afin de réduire la complexité de nos algorithmes présentés dans cette thèse.

Nous avons consacré le quatrième chapitre à l'exposé des matrices Toeplitz spéciales (triangulaire, circulante). Nous réexaminons cette classe des matrices Toeplitz d'un point de vue algébrique et montrons leurs corrélations avec les polynômes en une variable, lesquels jouent un rôle très important dans la réalisation du produit d'une matrice Toeplitz par un vecteur. Dans ce cas FFT (Fast Fourier Transform) devient un outil fondamental pour les calculs des matrices dans cette classe.

Au cinquième chapitre, nous construisons des structures de déplacement utiles pour les matrices de Vandermonde confluentes. L'idée principale dans cette construction repose sur un résultat établi dans [36] affirmant que les matrices de Vandermonde confluentes font partie, tout comme les matrices de Vandermonde, de la classe des matrices structurées.

Au début, nous utilisons l'équation de déplacement vérifiée par les matrices de Vandermonde pour déduire la structure de déplacement qui caractérise les matrices de Vandermonde par blocs. Les résultats (5.2) et (5.3) affirment qu'une matrice de Vandermonde confluente est plongée dans une matrice de Vandermonde par blocs. L'application de ce plongement à l'équation de déplacement des matrices de Vandermonde par blocs donne directement l'équation de déplacement caractérisant les matrices de Vandermonde confluentes.

Dans le sixième chapitre, nous présentons les principaux résultats concernant la résolution rapide d'un système linéaire structuré de Vandermonde confluent par l'application de la décomposition LU par blocs rapide, qui n'est rien d'autre qu'une répétition finie de l'opération du complément de Schur. Afin de faciliter l'apprentissage, nous présentons un rappel de ce dernier. Nous démontrons la stabilité du complément de Schur par des structures de déplacement convenables de la forme (6.1). Nous voyons qu'il est obligatoire de transformer la structure de déplacement (5.5) qui, caractérisant les matrices de Vandermonde confluentes en une structure de déplacement, prend la forme (6.1) dans le but d'appliquer le complément de Schur sur ces matrices. Dans ce qui suit, nous utilisons la stabilité de ce dernier pour obtenir étape par étape le processus d'éliminations de Gauss par blocs, qu'on trouve après qu'il ait été effectué d'une façon itérative basée sur des opérations par blocs des matrices structurées de complément de Schur ayant des structures de déplacement convenables, c'est pour cela, qu'il est nécessaire de présenter les deux algorithmes (6.1) et (6.2) pour effectuer ces opérations de base, lesquelles sont rapides. Nous terminons ce chapitre par la présentation de notre résultat principal sous forme d'un algorithme et nous étudions sa complexité.

Chapitre 2

Matrices structurées remarquables

2.1 Introduction

Dans ce chapitre ; nous présentons une définition de la notion des matrices structurées. Grâce à son équation de déplacement, une telle matrice admet dans la pratique, une représentation en mémoire plus économique que celle connue dans le cas usuel. Nous allons démontrer que les opérations de base (multiplication, inverse par exemple) sont stables par ce type de structures. C'est-à-dire qu'elles peuvent être effectuées sans risque pour autant de détruire la représentation structurale. Nous présentons aussi les matrices structurées les plus considérées dans la littérature.

2.2 Structure de déplacement

La notion de structure de déplacement est d'une grande utilité pratique, elle permet d'unifier la notion des matrices et elle assure la stabilité de quelques opérations usuelles dans la classe des matrices structurées, le cas qui n'est pas trivial pour les matrices de la notion classique.

Définition 2.1 : On dit d'une matrice A du type $(m \times n)$ qu'elle est structurée s'il existe deux matrices L du type $(m \times m)$ et U du type $(n \times n)$ telles que :

$$\Phi(A) = LA - AU = GH \tag{2.1}$$

où G est du type $(m \times r)$ et H du type $(r \times n)$. Le couple de matrices (G, H) est le générateur de A relativement à L et U et l'entier r est le rang du déplacement.

La structure de déplacement (2.1) connue également sous le nom de structure de Sylvestre, est d'autant plus intéressante que L et U sont élémentaires et le rang r est minime par rapport à n et m.

Opérations de base : Notons quelques propriétés de base :

1. On voit qu'en transposant les deux membres de (2.1) , On obtient la structure suivante de A^T :

$$U^T A^T - A^T L^T = -H^T G^T \tag{2.2}$$

2. De même, on a pour l'inverse A^{-1} de A la structure suivante :

$$UA^{-1} - A^{-1}L = -\left(A^{-1}G\right)\left(HA^{-1}\right) \tag{2.3}$$

Obtenue juste en prémultipliant et en postmultipliant (2.1) par A^{-1}.

3. Supposons que B est une matrice du type $(n \times p)$ vérifiant l'équation de déplacement suivante :

$$UB - BV = G'H' \tag{2.4}$$

où G' est du type $(n \times r')$ et H' du type $(r' \times p)$; on peut alors montrer que AB satisfait la relation suivante :

$$L\,(AB) - (AB)\,V = \left[AG'G\right]\left[H'^T B^T H^T\right]^T \tag{2.5}$$

En effet,

$$\begin{aligned} LAB &= (AU + GH)\,B \\ &= AUB + GHB \\ &= A\,(BV + G'H') + GHB \\ &= ABV + AG'H' + GHB \end{aligned}$$

d'où (2.5) est directement déduite. On conclut donc que AB est également structurée quoi que dans ce cas le rang du déplacement devient $r + r'$. ♦

2.3 Matrice de type Toeplitz

Une matrice $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ du type $(m \times n)$ est de Toeplitz si ses éléments sont de la forme :

$$T_{i,j} = T_{i-j}$$

C'est-à-dire T est de la forme :

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \dots & t_{-n+1} \\ t_1 & t_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{-1} \\ t_{m-1} & \dots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

Il est clair qu'une matrice de Toeplitz est caractérisée par le fait que ses éléments, le long de chacune de ses diagonales, sont égaux.

Ces matrices sont très intéressantes du point de vue de la complexité du calcul. La structure de déplacement associée aux matrices Toeplitz est donnée par :

$$Z_t T - T Z_s = e_1 u^T + v e_m^T \tag{2.6}$$

où $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice Toeplitz du type $(m \times n)$ et $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$, $Z_t \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $Z_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices de déplacement élémentaires :

$$Z_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

On remarque bien que chaque matrice Toeplitz est caractérisée par sa structure de déplacement (2.6) au lieu de ses $(m \times n)$ éléments (T_{ij}); $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ dans la représentation usuelle. Alors la nouvelle représentation permet de réduire la complexité de quelques opérations effectuées sur ces matrices, ainsi que l'espace mémoire utilisé.

Pour se convaincre que les matrices Toeplitz vérifient (2.6) il importe de le prouver. Soit T une matrice Toeplitz du type $(m \times n)$:

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & \cdots & t_{-n+1} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & & \vdots \\ \vdots & t_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t_{-1} \\ t_{m-1} & \cdots & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}.$$

Grâce à la définition d'une matrice Toeplitz, il est clair que ses éléments sont caractérisés par la relation suivante :

$$T_{i,j} = T_{i+1,j+1} \quad pour \quad i = 0 : m-2 \ et \ j = 0 : n-2. \tag{2.8}$$

La prémultiplication de T par la matrice de permutation Z_t définie dans (2.7) donne la matrice suivante :

$$Z_t T = \begin{bmatrix} tt_{m-1} & tt_{m-2} & \cdots & \cdots & tt_0 \\ t_0 & t_{-1} & \cdots & \cdots & t_{-n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ t_{m-2} & \cdots & \cdots & t_0 & t_{-1} \end{bmatrix}.$$

Si on pose $A = Z_t T$, on remarque que ses éléments sont donnés par :

$$\left.\begin{aligned} A_{0,j} &= tT_{m-1,j} \\ A_{i,j} &= T_{i-1,j} \quad \text{pour} \quad i = 1 : m-1 \end{aligned}\right\} \text{pour} \quad j = 0 : n-1.$$

Ainsi que la postmultiplication de T par Z_s définie dans (2.7), en remplaçant t par s, donne :

$$TZs = \begin{bmatrix} t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-n+1} & st_0 \\ t_0 & t_{-1} & \cdots & \cdots & st_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & \vdots \\ t_{m-2} & \cdots & \cdots & t_0 & st_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Si on pose maintenant : $B = TZ_s$, les éléments de B sont :

$$\left.\begin{array}{lll} B_{i,j} & = T_{i,j+1} & \text{pour} \quad j = 0 : n-2 \\ B_{i,n-1} & = sT_{i,0} & \end{array}\right\} \text{pour} \quad i = 0 : m-1.$$

Alors, les éléments de la matrice $C = A - B$ sont caractérisés par :

$$\begin{array}{llll} \bullet \text{ Pour } i = 0 & C_{0,j} & = A_{0,j} - B_{0,j} & \\ & & = tT_{m-1,j} - tT_{0,j+1} & \text{pour} \quad j = 0 : n-2 \\ \bullet \text{ Pour } i = 0 \text{ et } j = n-1 & C_{0,n-1} & = A_{0,n-1} - B_{0,n-1} & \\ & & = tT_{m-1,n-1} - sT_{0,0} & \\ \bullet \text{ Pour } j = n-1 & C_{i,n-1} & = A_{i,n-1} - B_{i,n-1} & \\ & & = T_{i-1,n-1} - sT_{i,0} & \text{pour} \quad i = 1 : m-1 \end{array}.$$

Les éléments qui restent de C, $(i = 1 : m-1)$ et $(j = 0 : n-2)$ sont nuls, c'est -à-dire :

$$C_{ij} = T_{i-1,j} - T_{i,j+1} = 0 \quad (\text{d'après la formule } (2.8)\,).$$

Finalement la matrice C, telle que $C = Z_tT - TZ_s$ prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} tt_{m-1} - t_{-1} & tt_{m-2} - t_{-2} & \cdots & \cdots & tt_0 - st_0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_{-n+1} - st_1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_{-1} - st_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Ce qui peut s'écrire encore $e_1u^T + ve_n^T$ exactement comme dans (2.6), où $u = \left[e_m^T\,(tT)\right]^T$ et $v = (sT)\,e_1$. ⧫

L'opérateur de Toeplitz : $\Phi(T) = Z_tT - TZ_s$ est injectif pour peu que $t \neq s$, en conséquence, on peut définir la matrice Toeplitz directement à partir de l'équation de déplacement (2.6).

Pour des raisons que nous aborderons dans les chapitres suivants, il convient de définir une matrice Toeplitz comme étant toute matrice T qui vérifie :

$$\Phi(T) = Z_tT - TZ_s = GH, \tag{2.9}$$

où G et H sont du types $(m \times 2)$ et $(2 \times n)$ respectivement.

Ceci étant, les matrices Toeplitz sont stables par quelques opérations usuelles. Par exemple l'inverse d'une matrice Toeplitz, carrée et régulière (inversible) est une matrice Toeplitz.

En effet, soit T une matrice Toeplitz, carrée et régulière qui vérifie la structure de déplacement (2.6)

$$Z_t T - T Z_s = e_1 u^T + v e_n^T = \begin{pmatrix} e_1 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^T \\ e_n^T \end{pmatrix},$$

par la prémultiplication et la postmultiplication de cette dernière structure par T^{-1}, on obtient la nouvelle structure de déplacement :

$$Z_s T^{-1} - T^{-1} Z_t = -T^{-1} \begin{pmatrix} e_1 & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^T \\ e_n^T \end{pmatrix} T^{-1}.$$

On observe que la matrice T^{-1} vérifie l'opérateur de Toeplitz (2.9), où

$$G = \left[-T^{-1} \begin{pmatrix} e_1 & v \end{pmatrix} \right] \; et \; H = \left[\begin{pmatrix} u^T \\ e_n^T \end{pmatrix} T^{-1} \right].$$

Alors T^{-1} est une matrice Toeplitz. ♦

2.4 Matrice de type Hankel

La matrice de Hankel est similaire de celle de Toeplitz. On dit qu'une matrice H du type $(n \times n)$ est de Hankel si ses éléments, le long de chacune de ses anti-diagonales, sont égaux, ce qui nous permet de déduire la forme de H

$$H = \begin{bmatrix} h_0 & \dots & h_{n-2} & h_{n-1} \\ \vdots & & & h_n \\ h_{n-2} & h_{n-1} & & \vdots \\ h_{n-1} & h_n & \dots & h_{2n-2} \end{bmatrix}$$

Les éléments de la matrice de Hankel sont définis par :

$$H_{i,j} = H_{i+j}$$

Le théorème suivant, nous permet d'établir la relation entre les matrices de Hankel et les matrices de Toeplitz :

Théorème 2.1 : *Soit A une matrice du type $(m \times n)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *(a)* *A est une matrice de Hankel*
- *(b)* *$J_m A$ est Toeplitz*
- *(c)* *$J_m A J_n$ est de Hankel*
- *(d)* *$A J_n$ est Toeplitz ;* telle que

$$J_m = [e_m \; e_{m-1} \cdots \; e_2 \; e_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \lozenge$$

Démonstration : On montre sans difficulté que la prémultiplication de A par J_m effectue une permutation mirroir sur les lignes de A. De même la postmultiplication de A par J_n effectue une permutation mirroir sur les colonnes de A. Dans les deux cas de figure, les anti-diagonales sont transformées en diagonales et vice versa. Ceci nous permet de conclure que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ et, comme $J_m^2 = I_m$ et $J_n^2 = I_n$, $(c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$. ♦

Pour obtenir la structure de déplacement relative aux matrices de Hankel, On exploite le théorème (2.1) qui affirme que toute matrice de Hankel $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ peut être mise sous la forme $H = J_m T$, où T est Toeplitz, et on prémultiplie les deux membres de l'équation (2.6) par la matrice de permutation J_m de sorte qu'on obtienne la relation :

$$(J_m Z_t J_m)(J_m T) - (J_m T) Z_s = J_m e_1 u^T + J_m v e_m^T$$

d'où la structure de déplacement suivante pour la matrice de Hankel H est directement déduite :

$$Z_t^T H - HZ_s = e_m u^T + v' e_m^T, \text{ où } v' = J_m v \tag{2.10}$$

On s'est servi des propriétés suivantes vérifiées par J_m : $J_m Z_t J_m = Z_t^T$ et $J_m e_m = e_1$. ♦

2.5 Matrice de type Cauchy

Une matrice de Cauchy du type $(m \times n)$ associée aux deux vecteurs $a = (a_1 \ \ldots \ a_m)$ et $b = (b_1 \ \ldots \ b_n)$, avec $a_i \neq b_j$ quels que soient i et j, sera notée $C\,(a, b)$ ou tout simplement C. La matrice $C\,(a, b) = C$ vérifie l'équation de déplacement :

$$D_a C - CD_b = ee^T \tag{2.11}$$

où $e = (111\ldots1)^T$, $D_a = diag\,(a_1 \ \ldots \ a_m)$ et $D_b = diag\,(b_1 \ \ldots \ b_n)$. Inversement, on s'aperçoit aussi que la matrice

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1 - b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 - bn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_m - b_1} & \cdots & \frac{1}{a_m - b_n} \end{bmatrix}$$

s'en déduit directement de (2.11). Alors les éléments de C sont de la forme

$$C_{i,j} = \left(\frac{1}{a_i - b_j}\right) \ ; \ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

à condition que $a_i \neq b_j$ $(\forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ auquel cas l'opérateur de Cauchy

$$\Phi_c\,(C) = D_a C - CD_b$$

est injectif. Sans cette condition, l'équation (2.11) peut être quand même introduite mais sans pour autant prétendre caractériser entièrement C. Ceci étant, et en concordance avec l'esprit de notre étude, on entend par matrice de Cauchy toute matrice C vérifiant :

$$D_a C - CD_b = XY^H \tag{2.12}$$

où X est du type $(m \times r)$, Y est du type $(r \times n)$ et le rang de déplacement r est raisonnablement réduit. Comme précédemment, l'inverse d'une matrice de Cauchy est également une matrice de Cauchy.

Le fait de définir les matrices de Cauchy à partir d'équations (2.12) basées sur des opérateurs Φ_c non forcément injectifs est de quelque utilité en pratique.

2.6 Matrice de type Vandermonde

On commence cette section par une définition générale d'une matrice de Vandermonde. Considérons des bases $P = (P_0(x)\ ...\ P_{m-1}(x))$ de l'espace $\mathbb{C}_m[X]$ des polynômes de degré $\leq m-1$, telle que : deg $P_i(x) = i$.

On appelle une matrice P-Vandermonde V_p toute matrice du type $(m \times n)$ de la forme :

$$V_p = [f(x_1)\ ....\ f(x_{n)}], \tag{2.13}$$

où $f(x) = (P_0(x)\ ....\ P_{m-1}(x))^T$ et $x_1, ..., x_n$ sont n nombres deux à deux distincts.

Dans notre étude on s'intéresse au type des matrices P-Vandermonde lorsqu'on prend à la place de P, la base canonique :

$$h = (1\ x\ x^2\ ...\ x^{m-1}). \tag{2.14}$$

La matrice V_h est appelée la matrice de Vandermonde et s'écrit sous la forme :

$$V_h = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \cdots & \cdots & x_n^{m-1} \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

On observe que les éléments de V_h sont donnés par :

$$(V_h)_{k,j} = x_j^k \quad \forall\ 0 \leq k \leq m-1 \text{ et } 1 \leq j \leq n,$$

qu'on peut caractériser aussi par la relation :

$$(V_h)_{k+1,j} - x_j(V_h)_{k,j} = 0 \quad \forall k < m-1. \tag{2.16}$$

Alors, on déduit que la matrice de Vandermonde V_h a la structure de déplacement :

$$Z_s^T V_h - V_h D_x = e_m.u^T, \tag{2.17}$$

telle que : $D_x = diag(x_1 \; ... \; x_n)$ et $u^T = (s - x_1^m \; ... \; s - x_n^m)$.

Il est clair que la structure (2.17) est déduite directement à partir de la propriété vérifiée par la matrice de permutation Z_s^T et la formule qui caractérise les éléments d'une matrice de Vandermonde, de la manière suivante :

On a :

$$Z_s^T V_h = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \cdots & x_n^{m-1} \\ s & s & \cdots & s \end{bmatrix}$$

et

$$V_h D_x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & \cdots & x_n^{m-1} \\ x_1^m & x_2^m & \cdots & x_n^m \end{bmatrix},$$

par conséquent

$$Z_s^T V_h - V_h D_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ s - x_1^m & s - x_2^m & \cdots & \cdots & s - x_n^m \end{bmatrix},$$

ce qui peut s'écrire encore $e_m.u^T$, où $u^T = (s - x_1^m \; ... \; s - x_n^m)$ comme exactement dans (2.17) . ♦

Dans le cas où les x_j sont tous non nuls, la structure de déplacement de V_h , peut s'écrire d'une autre manière pour éviter les calculs des puissances x_k^m des nombres représentés en virgule flottante, on voit que si $k \geq 1$:

$$(V_h)_{k-1,j} - x_j^{-1}(V_h)_{k,j} = 0 \tag{2.18}$$

de sorte que la structure (2.17) sera écrite de la forme suivante :

$$Z_s V_h - V_h D_x^{-1} = e_1.v^T \tag{2.19}$$

telle que : $D_x^{-1} = diag(x_1^{-1} \;.....\; x_n^{-1})$ et $v^T = (sx_1^{m-1} - x_1^{-1} \;...\; sx_1^{m-1} - x_n^{-1})$.

Dans la nouvelle structure, il est clair que les puissances x_j^{m-1} seront éliminées si $s = 0$.

C'est exactement de la même manière que dans la structure (2.17) qu'on peut trouver la nouvelle structure de déplacement (2.19) d'une matrice de Vandermonde.

Il est clair que :

$$Z_s V_h = \begin{bmatrix} sx_1^{m-1} & sx_2^{m-1} & \cdots & \cdots & sx_n^{m-1} \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & & & x_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_1^{m-2} & x_2^{m-2} & \cdots & \cdots & x_n^{m-2} \end{bmatrix}$$

et

$$V_h D_x^{-1} = \begin{bmatrix} x_1^{-1} & x_2^{-1} & \cdots & \cdots & x_n^{-1} \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & & & x_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_1^{m-2} & x_2^{m-2} & \cdots & \cdots & x_n^{m-2} \end{bmatrix},$$

alors, on conclut que :

$$Z_s V_h - V_h D_x^{-1} = \begin{bmatrix} sx_1^{m-1} - x_1^{-1} & sx_2^{m-1} - x_2^{-1} & \cdots & \cdots & sx_n^{m-1} - x_n^{-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ce qui peut se représenter aussi sous la formule $e_1.v^T$, ce qui est à démontrer. ♦

Ici, on peut dire aussi que la matrice de Vandermonde V_h est définie à partir de ses structures de déplacement (2.17) et (2.19), qui sont restées valables même si : $Z_s = Z_0 = Z$, en remplaçant s par 0.

Finalement, il est important de signaler qu'il est possible de passer d'un type à un autre grâce à ses structures de déplacement et quelques multiplications matricielles par la transformation discrète de Fourier ; que nous verrons dans le prochain chapitre ; la matrice de Vandermonde et des matrices diagonales, à titre d'exemple :

1/ en prémultipliant une matrice de type Toeplitz par la transformation discrète de Fourier et une matrice diagonale pour obtenir une matrice de type Vandermonde.

2/ par une prémultiplication d'une matrice de type Vandermonde, par la transformation discrète de Fourier et une matrice diagonale on obtient une matrice de type Cauchy.

3/ pour obtenir une matrice de type Cauchy à partir d'une matrice de type Toeplitz, il suffit de multiplier cette dernière par la transformation discrète de Fourier et une matrice diagonale et la postmultiplier par l'inverse d'une matrice diagonale et l'inverse de la transformation discrète de Fourier.

Chapitre 3

Transformation discrète de Fourier et ses applications

3.1 Introduction

Il s'agit d'une opération numérique de base importante et bien documentée de par sa grande utilité pratique et théorique. La popularité de la transformation discrète de Fourier découle notamment de l'existence d'algorithmes réalisant l'opération de multiplication de la matrice de Fourier qu'on définінera ultérieurement par un vecteur en utilisant $O(n \log n)$ opérations élémentaires seulement. Ces algorithmes rapides sont plus connus sous le nom de FFT (Fast Fourier Transform). Ce qui nous a motivés à considérer la transformation discrète de Fourier dans ce chapitre réside d'un côté dans le fait que les algorithmes que nous proposons dans cette thèse font appel à la FFT afin d'améliorer leur complexité, et d'un autre côté dans l'intention de bien préciser que la FFT, en plus de sa rapidité, est une opération numériquement stable. Ce point étant, jusque là, rarement discuté dans la littérature.

Avant de détailler cet aspect, nous avons jugé utile de rappeler, ne serait ce que brièvement, quelques résultats fondamentaux satisfaits par la TDF

3.2 Transformation discrète de Fourier

Dans cette section, on rappellera quelques outils qui seront utilisés dans la suite de cette thèse.

Définition 3.1 : La matrice de Fourier d'ordre n est la matrice F suivante :

$$F(w,n) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & & w^{(n-1)^2} \end{bmatrix} = (w^{(i-1)(j-1)})_{1\leq i,j\leq n}, \tag{3.1}$$

où w est une racine $n^{\text{ème}}$ principale de l'unité. C'est-à-dire que : $1, w, ..., w^{n-1}$ sont les racines de $Z^n - 1 = 0$. A titre d'exemple :

$$w_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}, \quad w_n^{-1} = \overline{w_n} = e^{-i\frac{2\pi}{n}} \qquad i^2 = -1 \tag{3.2}$$

sont des racines $n^{\text{ème}}$ principales de l'unité.

Définition 3.2 : La transformation discrète de Fourier (en abrégé TDF) d'un vecteur $x = (x_0\ x_1\ \cdots\ x_{n-1})^T$ est le vecteur Fx.

Soit w toujours une racine $n^{\text{ème}}$ principale de l'unité. Alors il est bien connu que l'inverse $F(w,n)^{-1}$ de $F(w,n)$ peut être directement déterminé grâce à la formule suivante :

$$F(w,n)^{-1} = \frac{1}{n}F(w^{-1},n), \tag{3.3}$$

cette formule nous permet, du reste, de conclure que l'inverse de TDF est, à une constante multiplicative près, lui même une TDF.

Posons par ailleurs

$$Q = \frac{1}{\sqrt{n}}F(w,n),$$

on peut alors vérifier que

$$\begin{aligned} Q^H Q &= \tfrac{1}{\sqrt{n}}F(w^{-1},n).\tfrac{1}{\sqrt{n}}F(w,n) \\ &= I_n \end{aligned}$$

de sorte qu'on puisse déduire que Q est unitaire.

Notons par $\|.\|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{C}^n$, et rappelons que si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| .$$

On peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 3.1 : Supposons que $y = F(w,n)x$. Alors

(i) $\|F(w,n)\| = \sqrt{n}$

(ii) $\|y\| = \sqrt{n}\,\|x\|$. $\Diamond$

3.2.1 TDF et polynômes

Considérons le problème consistant à calculer le produit $C(x) = A(x) \cdot B(x)$ de deux polynômes $A(x)$ et $B(x)$ de degré $< n$. En posant $A(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ et $B(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$, il est immédiat que

$$C(x) = \sum_{i=0}^{2n-2} c_i x^i$$

avec

$$c_i = \sum_{k+j=i} a_k b_j. \tag{3.4}$$

Aussi, il est clair que l'approche directe pour calculer $C(x)$ requiert, au pire des cas, $O(n^2)$ opérations élémentaires. Pour améliorer cette complexité, il convient d'abord d'interpréter le produit polynômial ainsi considéré en termes de vecteurs. Dans ce sens, on pose $a = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T$, $b = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T$ et $c = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{2n-2} & 0 \end{bmatrix}^T$ de sorte que a, b, $c \in \mathbb{C}^{2n}$.

Ensuite, on fait intervenir la TDF en se basant sur le résultat suivant :

Théorème 3.2 : Soit w une racine $(2n)^{\text{ème}}$ principale de l'unité et posons $F = F(w, 2n)$. Alors

$$Fc = (Fa) \odot (Fb) \tag{3.5}$$

où $\odot$ désigne le produit ponctuel :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ \vdots \\ x_m y_m \end{pmatrix}. \quad \Diamond$$

En faisant appel à la FFT, on en déduit qu'il est possible de calculer $c^* = Fc$ en utilisant $O(n \log n)$ opérations élémentaires. puisque on a $F(w, 2n)^{-1} = \frac{1}{2n} F(w^{-1}, 2n)$. Par conséquent

$$c = \frac{1}{2n} F(w^{-1}, 2n) c^*$$

et peut ainsi être déterminé en utilisant $O(n \log n)$ opérations élémentaires. Ci après un algorithme réalisant le produit polynômial.

Algorithme 3.1. *ppoly* $(A(x), B(x))$.

Données : $a_{0,}\ a_1, \ldots, a_{n-1}$ et $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$.
Résultats : $c_0, c_1, \ldots, c_{2n-2}$.
1. $a^* = F(w, 2n)a \quad \left(a = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T\right)$
2. $b^* = F(w, 2n)b \quad \left(b = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}^T\right)$
3. $c^* = a^* \odot b^*$ $\quad$ ($\odot$ *est le produit ponctuel*)
4. $c = \frac{1}{2n} F(w^{-1}, 2n) c^*$.

Complexité : $O(n \log n)$ *opérations.*

3.2.2 FFT itérative

Dans cette section, on suppose que $n = 2^q$ est une puissance de 2. Si $a = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \end{bmatrix}^T$ on pose

$$a^{[0]} = \begin{bmatrix} a_0 & a_2 & \ldots & a_{n-2} \end{bmatrix}^T$$

et

$$a^{[1]} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & \ldots & a_{n-1} \end{bmatrix}^T.$$

D'autre part, si w est une racine $n^{ième}$ principale de l'unité, on note par Δ_w la matrice diagonale suivante :

$$\Delta_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & w & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & w^{\frac{n}{2}-1} \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Par exemple $\Delta_{-1} = [1]$, $\quad \Delta_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ (où $i^2 = -1$).

On peut dire que l'algorithme FFT récursif de Cooley et Tukey peut être résumé dans la formule suivante :

$$F(w,n)a = \begin{bmatrix} I_{\frac{n}{2}} & \Delta_w \\ I_{\frac{n}{2}} & -\Delta_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(w^2, \frac{n}{2}).a^{[0]} \\ F(w^2, \frac{n}{2}).a^{[1]} \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

En développant davantage, on obtient :

$$F(w,n)a =$$

$$\begin{bmatrix} I_{\frac{n}{2}} & \Delta_w \\ I_{\frac{n}{2}} & -\Delta_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\frac{n}{4}} & \Delta_{w^2} \\ I_{\frac{n}{4}} & -\Delta_{w^2} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} I_{\frac{n}{4}} & \Delta_{w^2} \\ I_{\frac{n}{4}} & -\Delta_{w^2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(w^4, \frac{n}{4}).a^{[0][0]} \\ F(w^4, \frac{n}{4}).a^{[0][1]} \\ F(w^4, \frac{n}{4}).a^{[1][0]} \\ F(w^4, \frac{n}{4}).a^{[1][1]} \end{bmatrix}.$$

Pour simplifier, posons :

$$A_1 = \begin{bmatrix} I_{\frac{n}{2}} & \Delta_w \\ I_{\frac{n}{2}} & -\Delta_w \end{bmatrix}$$

et

$$A_2 = I_2 \otimes \begin{bmatrix} I_{\frac{n}{4}} & \Delta_{w^2} \\ I_{\frac{n}{4}} & -\Delta_{w^2} \end{bmatrix}$$

où $\otimes$ est le produit de Kronecker. On a :

$$A_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\frac{n}{4}} & \Delta_{w^2} \\ I_{\frac{n}{4}} & -\Delta_{w^2} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} I_{\frac{n}{4}} & \Delta_{w^2} \\ I_{\frac{n}{4}} & -\Delta_{w^2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

D'une manière générale, pour $j = 1, 2, \ldots, q$, on pose

$$A_j = I_{2^{j-1}} \otimes \begin{bmatrix} I_{\frac{n}{2^j}} & \Delta_{w^{2^{j-1}}} \\ I_{\frac{n}{2^j}} & -\Delta_{w^{2^{j-1}}} \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

On peut alors énoncer le résultat suivant :

Théorème 3.3 : Il existe une matrice de permutation P qu'on peut déterminer telle que

$$F(w,n) = A_1.A_2.A_3 \cdots A_q P. \quad \Diamond \tag{3.9}$$

Procédons maintenant à la construction de la matrice de permutation P évoquée dans le théorème précédent. Pour cela, nous aurons besoin d'introduire la notion de renversement binaire d'un entier compris entre 0 et $n-1$. Dans cette perspective, rappelons qu'un entier $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$ admet la représentation binaire unique

$$k = \sum_{i=0}^{q-1} k_i 2^i \quad (k_i \in \{0,1\}),$$

de sorte qu'un tel entier puisse être identifié à un vecteur de $\{0,1\}^q$. Ainsi, on peut écrire :

$$k = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{q-1} \end{pmatrix}$$

Exemple : $(n=8,\ q=3)$, $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$
$4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

D'autre part, notons par J la matrice $(q \times q)$ suivante :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Définition 3.3 : Soit k un entier compris entre 0 et $n-1$. Le renversement binaire $rev(k)$ de l'entier k est l'entier suivant :

$$rev(k) = J \cdot k.$$

Exemple : $(N = 8, q = 3)$, rev(0) = 0, rev(1) = 4, rev(2) = 2, rev(3) = 6, rev(4) = 1, rev(5) = 5, rev(6) = 3, rev(7) = 7.

Le résultat suivant détermine la matrice de permutation en question.

Théorème 3.4 : On a $\forall j = 1 : n$

$$Pe_j = e_{rev(j-1)+1},$$

(e_j) désignant la base canonique $\Diamond$.

Réalisation de l'opération $y = A_j x$: Rappelons que :

$$A_j = I_{2^{j-1}} \otimes \begin{bmatrix} I_{\frac{n}{2^j}} & \Delta_{w^{2^{j-1}}} \\ I_{\frac{n}{2^j}} & -\Delta_{w^{2^{j-1}}} \end{bmatrix}$$

et supposons que $x = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \end{pmatrix}^T$ et $y = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{n-1} \end{pmatrix}^T$. Posons $m = \frac{n}{2^{j-1}}$. Alors si $k = 0 : 2^{j-1} - 1$, on a :

$$\begin{pmatrix} y_{km} \\ y_{km+1} \\ \vdots \\ y_{(k+1)m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\frac{m}{2}} & \Delta_{w^{2^{j-1}}} \\ I_{\frac{m}{2}} & -\Delta_{w^{2^{j-1}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{km} \\ x_{km+1} \\ \vdots \\ x_{(k+1)m-1} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, pour $t = 0 : \frac{m}{2} - 1$ et $k = 0 : 2^{j-1} - 1$, on a :

$$\begin{aligned} y_{t+km} &= x_{t+km} + w^{t \cdot 2^{j-1}} x_{t+km+\frac{m}{2}} \\ y_{t+km+\frac{m}{2}} &= x_{t+km} - w^{t \cdot 2^{j-1}} x_{t+km+\frac{m}{2}}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Enfin, nous pouvons présenter l'algorithme suivant que nous nommerons méthode FFT itérative basée sur la formule (3.9).

Algorithme 3.2 : FFT itérative. Dans cet algorithme, on suppose qu'on dispose des n racines de l'unité : $1,\ w,\ w^2,\ \ldots,\ w^{n-1}$ *stockées dans un tableau nommé R. Par conséquent* $R[k] = w^{k-1}$. *L'objet de cet algorithme consiste à réaliser l'opération* $b = Fa = A_1 A_2 \cdots A_q Pa$, *où* $a = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}^T$ *et* $b = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix}^T$.

Commentaire : calcul de $Pa = c$.

1. pour $s = 0 : n-1$
2. $\quad c_s = a_{rev(s)+1}$;
3. pour $j = q : 1$
4. $\quad$ pour $k = 0 : 2^{j-1} - 1$
5. $\quad\quad m = \frac{n}{2^{j-1}}$;
6. $\quad\quad$ pour $t = 0 : \frac{m}{2} - 1$
7. $\quad\quad\quad d[t + km] = c[t + km] + R\left[t \cdot 2^{j-1}\right] c\left[t + km + \frac{m}{2}\right]$;
8. $\quad\quad\quad d\left[t + km + \frac{m}{2}\right] = c[t + km] - R\left[t \cdot 2^{j-1}\right] c\left[t + km + \frac{m}{2}\right]$;
9. $\quad\quad$ fin pour
10. $\quad$ fin pour
11. pour $s = 0 : n-1$
12. $\quad c[s] = d[s]$.

Pour analyser la complexité de cet algorithme, on va compter le nombre de multiplications et négliger celui de l'addition. Notons par $*_{\mathbb{C}}$ une multiplication complexe. On observe qu'au niveau des lignes 7 et 8, on a $2 \cdot *_{\mathbb{C}}$. Avec la boucle 6-9, on compte $2 \cdot \frac{m}{2} \cdot *_{\mathbb{C}} = \frac{n}{2^{j-1}} \cdot *_{\mathbb{C}}$. On utilise donc $n \cdot *_{\mathbb{C}}$ dans le segment 4-10. En conséquence, on totalise $qn \cdot *_{\mathbb{C}} = n(\log_2 n) *_{\mathbb{C}}$.

3.3 Matrices circulantes

Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice complexe du type $(n \times n)$. On dit que A est circulante si :

$$A_{ij} = f\ [(j-i)\,[\mathrm{mod}\, n]] \quad \forall i,\ j;\ 1 \leq i,\ j \leq n \tag{3.11}$$

où $k\,[\mathrm{mod}\, n]$ désigne le reste de la division de k sur n et est compris entre 0 et $n-1$. La relation (3.11) signifie que A_{ij} est fonction de $(j-i)\,[\mathrm{mod}\, n]$.

Exemple de matrices circulantes :

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Il est clair qu'une fois la première colonne d'une matrice circulante est connue, les autres colonnes peuvent être directement déduites. Cette observation justifie bien l'écriture $C(a)$ pour désigner la matrice circulante dont la première colonne est le vecteur a. Par exemple si $a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$, alors on a :

$$C(a) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

D'une façon générale, on dit qu'une matrice $C(a)$ est circulante si elle a la forme suivante :

$$C(a) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & & a_0 \end{pmatrix}.$$

On sait que le produit de deux matrices circulantes est une matrice circulante. De même, l'inverse d'une matrice circulante est une matrice circulante. En fait nous pouvons, grâce à la TDF, caractériser d'une façon complète les matrices circulantes.

Avant d'établir ce fait on adopte la notation suivante :

Notation : Soit $v = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^n$, notons alors

$$D_v = diag\,(v) = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & v_n \end{bmatrix}.$$

Ceci étant, on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 3.5 : Soit $a \in C^n$ *un vecteur d'ordre* n *et soit* $a^* = F(w,n)a$ *sa transformée discrète de Fourier. Posons* $F = F(w,n)$*. Alors :*

(i) $F.C(a).F^{-1} = D_{a^*}$

(ii) $F^{-1}.D_{a^*}.F = C(a)$. $\diamondsuit$

Ce résultat affirme que toute matrice circulante est semblable à une matrice diagonale assurant ainsi la caractérisation entière des matrices circulantes. En effet, on peut dire que l'ensemble des matrices circulantes est formé de $F^{-1}.D_v.F$ où v parcourt $\mathbb{C}^n$.

3.4 Matrices φ-circulantes

Plus généralement, on peut définir une classe des matrices qui a les mêmes propriétés de la classe des matrices circulantes.

Définition 3.4 : On dit qu'une matrice carrée du type $(n \times n)$ *;* $C_\varphi(a)$ *est* φ-circulante *si elle a la forme suivante :*

$$C_\varphi(a) = \begin{pmatrix} a_0 & \varphi a_{n-1} & \cdots & \varphi a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & \varphi a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & & a_0 \end{pmatrix}$$

où *le vecteur* $a = (a_0 \; a_1 \; \cdots \; a_{n-1})^T$ est sa première colonne.

Proposition 3.6 [32] : Soit $C_\varphi(a)$ *une matrice* φ*-circulante de taille* $(n \times n)$*. Elle est aussi diagonalisable par* F*, et plus précisément on a :*

$$C_\varphi(a) = D_\varphi^{-1} F^{-1} D F D_\varphi$$

avec $D = diag(FD_\varphi a)$*,* $D_\varphi = diag(1 \; \delta \; \delta^2 \; \ldots \; \delta^{n-1})$*, pour n'importe quel* $\delta \in \mathbb{k}$ *qui vérifie* $\delta^n = \varphi$. $\diamondsuit$

Il est important de signaler que l'inverse d'une matrice φ*-circulante carrée du type* $(n \times n)$ *;* $C_\varphi(a)$ *est* φ*-circulante de première colonne*

$$F^{-1}(\frac{1}{a_0^*}, \frac{1}{a_1^*}, \cdots, \frac{1}{a_{n-1}^*})^T$$

de sorte qu'on peut effectuer cette opération par l'utilisation de $O(n \log n)$ *opérations, ainsi que la multiplication d'une matrice φ-circulante par un vecteur coûte aussi* $O(n \log n)$ *opérations.*

3.5 Analyse de l'erreur

On suppose qu'on travaille dans un système de nombres en virgule flottante d'unité d'erreur d'arrondi u et basé sur le modèle standard suivant :

$$fl\ (x\ op\ y) = (x\ op\ y)\ (1+\varepsilon)^{\pm 1} \quad |\varepsilon| \leq u,$$

où $op = +, -, *, /, \ldots$. Dans un tel système les opérations (3.10) deviennent :

$$\begin{aligned} \widehat{y}_{t+km} &= x_{t+km}(1+\varepsilon_1) + w^{t.2^{j-1}} x_{t+km+\frac{m}{2}}(1+\alpha) \\ \widehat{y}_{t+km+\frac{m}{2}} &= x_{t+km}(1+\varepsilon_2) - w^{t.2^{j-1}} x_{t+km+\frac{m}{2}}(1+\beta). \end{aligned}$$

On peut supposer que $|\alpha|, |\beta|, |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \leq 4u$. En conséquence le calcul de $y = A_j x$ dans ce système donne $\widehat{y}$ tel que :

$$\widehat{y} = (A_j + \Delta A_j)x$$

avec

$$|\Delta A_j| \leq 4u M_j$$

$$M_j = |A_j| = I_{2^{j-1}} \otimes \begin{bmatrix} I_{\frac{n}{2^j}} & I_{\frac{n}{2^j}} \\ I_{\frac{n}{2^j}} & I_{\frac{n}{2^j}} \end{bmatrix}.$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 3.7 : La réalisation de $b = Fa$ par la FFT présentée par l'algorithme précédent en utilisant le système adopté donne le vecteur approché $\widehat{b}$ tel que :

$$\widehat{b} = (A_1 + E_1)(A_2 + E_2)\ldots(A_q + E_q)Pa, \quad |E_j| \leq 4uM_j,$$

ou bien

$$\widehat{b} = (A_1 \cdot A_2 \ \ldots \ A_q + E)\, Pa, \qquad |E| \leq 4quM_1M_2 \ldots M_q. \quad \diamondsuit$$

Il vient

$$\widehat{b} = b + EPa,$$

donc

$$\left|\widehat{b} - b\right| \leq 4(\log_2 n)uM_1M_2 \ldots M_qPa.$$

Par ailleurs, il n'est pas difficile de montrer que :

$$\|M_j\| = 2 \quad (\forall j = 1 : q)\,.$$

En conséquence

$$\left\|\widehat{b} - b\right\| \leq 4uq\ 2^q \|a\| = (4un\log_2 n) \|a\|\,.$$

Or

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{n}} Fa\right\| = \|a\|\,,$$

où

$$\|a\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \|b\|\,,$$

on en déduit que :

$$\left\|\widehat{b} - b\right\| \leq 4u\sqrt{n}\,(\log_2 n) \|b\|\,. \quad \diamondsuit \tag{3.12}$$

Ce résultat permet de conclure que la FFT itérative est en norme numériquement stable. Il est bien quand même de signaler à ce propos que nous nous sommes accordé deux facilités. D'un côté, on a supposé que les w^j sont calculés au départ et d'une manière exacte. C'est une hypothèse tout à fait valable puisque la plupart des ordinateurs sont dotés de logiciels évaluant les fonctions élémentaires d'une manière très précise. D'un autre côté, on a supposé que si $\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_i) = 1 + \delta$ avec $|\delta_i| \leq u$ $(\forall i = 1 : n)$, on a $|\delta| \leq nu$, ce qui est mathématiquement faux. Rigoureusement, on a l'implication suivante :

$$|\delta_i| \leq u \ (\forall i = 1 : n) \Longrightarrow |\delta| \leq \frac{nu}{1 - nu} \tag{3.13}$$

à condition que $nu < 1$. Heureusement, il a été démontré que les résultats établis sur la base de notre hypothèse à priori erronée sont modulo $O(u^2)$ identiques à ceux obtenus sur la base de l'implication (3.13). Désormais, on suppose que :

$$\left\| \widehat{b} - b \right\| \leq \varepsilon u \left\| b \right\|$$

et

$$\widehat{b} = (F + \Delta F)\, a, \quad |\Delta F| \leq \varepsilon. \tag{3.14}$$

Chapitre 4

Multiplication rapide d'une matrice Toeplitz par un vecteur

4.1 Introduction

On verra que notre idée est basée sur la factorisation des éléments blocs en termes de matrices Toeplitz spéciales (triangulaire, circulante). La possibilité de multiplier rapidement ces matrices par un vecteur, conduit à des algorithmes rapides qui nous permettent d'effectuer la multiplication de ce type des matrices par un vecteur en $O(n \log n)$ opération. Alors, dans ce chapitre, nous nous somme fixé comme but la présentation des matrices Toeplitz et leurs propriétés avec quelques techniques de base dans les calculs matriciels. On remarquera qu'elles sont fortement liées aux opérations sur des polynômes à une variable et qu'on peut réaliser d'une façon rapide par l'utilisation de FFT.

on va présenter deux méthodes qui nous permettent d'effectuer le produit matrice Toeplitz par vecteur. La première méthode, que nous allons présenter, est la méthode de prolongement d'une matrice Toeplitz en une matrice circulante et la deuxième est la méthode de décomposition d'une matrice Toeplitz en deux matrices Toeplitz triangulaires.

4.2 Matrices Toeplitz spéciales

On sait que l'inverse d'une matrice Toeplitz et le produit de deux matrices Toeplitz ne sont pas en général Toeplitz. Heureusement, lorsqu'on se restreint à des matrices Toeplitz spéciales, il s'avère que ces deux opérations deviennent stables. Dans cette section nous allons présenter deux types de matrices spéciales.

4.2.1 Matrices Toeplitz circulantes

Une classe très importante de matrices Toeplitz est la classe des matrices circulantes, laquelle a déjà été citée dans le troisième chapitre. On peut définir les matrices circulantes à l'aide de la matrice de permutation Z_1 de la manière suivante :

$$C(v) = \left[v \ Z_1 v \ Z_1^2 v \ \ldots \ Z_1^{n-1} v \right], \tag{4.1}$$

où Z_1 est la matrice Z_t en remplaçant t par 1 et $v = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & \ldots & v_{n-1} \end{bmatrix}^T$. La formule (4.1) justifie le fait que la connaissance de la première colonne d'une matrice circulante implique la connaissance des autres colonnes de cette matrice.

A partir de la relation (ii) du théorème (3.5), on conclut immédiatement que le produit d'une matrice circulante par un vecteur b ; $C(a)b$ peut être réalisée par l'application de TDF trois fois et la multiplication des vecteurs. Alors, pour calculer le produit de la forme $C(a)b$, on suit les étapes suivantes :

1. $b^* = F(w, 2n)b$.
2. $a^* = F(w, 2n)a$.
3. $y^* = b^* \odot a^*$.
4. $y = \frac{1}{2n} F(w^{-1}, 2n) y^*$.

Il est nécessaire de rappeler que pour réaliser l'opération $C(a)b$, on utilise $O(n \log n)$ opérations élémentaires.

4.2.2 Matrices Toeplitz triangulaires

La deuxième classe importante des matrices Toeplitz est la classe des matrices triangulaires.

Exemples :

1. $\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$ est une matrice Toeplitz triangulaire inférieure.

2. $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}$ est une matrice Toeplitz triangulaire supérieure.

Il est clair que les matrices Toeplitz triangulaires inférieures sont définies à partir de ses premières colonnes, de sorte que les matrices Toeplitz triangulaires supérieures sont les transposées de ces dernières. Cette observation justifie l'écriture $L(a)$ pour désigner la matrice triangulaire inférieure dont la première colonne est le vecteur a et $R(a) = L(a)^T$ pour désigner la matrice triangulaire supérieure. Par exemple si $a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, on a :

$$L(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R(a) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On sait que l'inverse d'une matrice Toeplitz triangulaire inférieure (resp supérieure) et le produit de deux matrices Toeplitz triangulaires inférieures (resp supérieures) sont des matrices Toeplitz triangulaires inférieures (resp supérieures), de plus le produit matriciel dans cette classe est commutatif.

Dans la prochaine section, on verra voir que le produit d'une matrice Toeplitz triangulaire par un vecteur ligne ou un vecteur colonne peut-être effectué grâce au produit de deux polynômes à une variable.

Soit $L(a)$ une matrice Toeplitz triangulaire inférieure caractérisée par sa première colonne $a = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix}^T$ et on se donne le vecteur $b = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix}^T$, alors le produit matrice-vecteur cherché $L(a)b = c$ équivalent au produit matriciel $L(a)L(b)$ qui donne une matrice Toeplitz triangulaire inférieure $L(c)$, où $c \in \mathbb{C}^n$ représente les n premiers coefficients du polynôme produit $z(x) = p(x).q(x)$, où $p(x)$ et $q(x)$ sont les représentations polynômiales des vecteurs a et b :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \text{ et } q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

c'est-à-dire le vecteur c est défini comme suit :

$$c = z\,[1:n]\,,$$

tel que :

$$z(x) = \sum_{i=0}^{2n-2} c_i x^i$$

avec

$$c_i = \sum_{k+j=i} a_k b_j.$$

Le même vecteur $z \in \mathbb{C}^{2n}$, on peut le définir grâce à la relation (3.5) de la manière suivante :

$$z = F\left(w^{-1}, 2n\right)\left(\left(F\left(w, 2n\right) a^*\right) \odot \left(F(w, 2n) b^*\right),\right.$$

où w est une racine $(2n)^{ème}$ principale de l'unité et les vecteurs a^*, $b^* \in \mathbb{C}^{2n}$ sont donnés par :

$$a^* = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

et

$$b^* = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T,$$

En notant $\tilde{a}$ le retournement vertical d'un vecteur a suivant :

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{bmatrix}^T.$$

On cherche maintenant à trouver le résultat du produit d'un vecteur ligne par une matrice Toeplitz triangulaire inférieure, $b^T L(a) = c^T$ ce qui est équivalent au produit matriciel

$$L(\tilde{b})L(a) = L(\tilde{c}),$$

cette formule nous permet de dire que notre vecteur c est les n premiers éléments du retournement vertical du vecteur associé au produit des deux représentations polynômiales $r(x)$ et $p(x)$ du vecteur $\tilde{b}$ et a respectivement, telle que $r(x)$ est donné par :

$$r(x) = b_{n-1} + b_{n-2}x + b_{n-3}x^2 + \cdots + b_0 x^{n-1},$$

c'est-à-dire que c dans ce cas peut s'écrire de la manière suivante :

$$\tilde{c} = z\,[1:n]\,,$$

telle que

$$z = F^{-1}\,(w,2n)\left(\left(F\,(w,2n)\left(\tilde{b}\right)^{*}\right) \odot (F(w,2n)a^{*})\,,\right.$$

où

$$\left(\tilde{b}\right)^{*} = \left[\begin{array}{cccccccc} b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right]^{T}.$$

Avec le même principe, on répète les mêmes opérations sur les matrices Toeplitz triangulaires supérieures.

Soit $R(a)$ une matrice Toeplitz triangulaire supérieure, le vecteur c qui représente le résultat du produit de la matrice $R(a)$ par b, on peut le trouver grâce au produit matriciel suivant :

$$R(a)R(\tilde{b}) = R(\tilde{c}),$$

c'est-à-dire que le vecteur cherché $\tilde{c}$ forme les n premiers coefficients du polynôme produit $p(x).r(x)$. D'une autre manière, le vecteur c est le suivant :

$$\tilde{c} = z\,[1:n]\,,$$

où

$$z = F^{-1}\,(w,2n)\left((F(w,2n)a^{*}) \odot \left(F\,(w,2n)\left(\tilde{b}\right)^{*}\right)\right).$$

La dernière opération est la prémultiplication de $R(a)$ par un vecteur ligne b^T, $b^T R(a)$ qui donne un vecteur ligne c^T, tel que c est composé par les n premiers coefficients du polynôme produit $q(x).p(x)$:

$$c = z\,[1:n]$$

$$z = F^{-1}\,(w,2n)\left((F\,(w,2n)\,b^{*}) \odot (F\,(w,2n)\,a^{*})\right).$$

Il est clair que le produit de deux polynômes joue un rôle extrêmement important dans la prémultiplication ou la postmultiplication d'une matrice triangulaire inférieure ou triangulaire supérieure par un vecteur ligne ou un vecteur colonne. C'est pour cette raison on propose l'algorithme mult pour effectuer le produit d'une matrice triangulaire par un vecteur.

Algorithme 4.1. mult(a,b).

données : $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ et $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$.
Résultats : $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$.
1. $a^* = F(w, 2n)a$.
2. $b^* = F(w, 2n)b$.
3. $c^* = a^* \odot b^*$.
4. $c = \frac{1}{2n} F(w^{-1}, 2n).c^*$.
5. $d = c\,[1:n]$.

Enfin, on se propose aussi un algorithme qui calcule l'inverse d'une matrice Toeplitz triangulaire inférieure qui est basé sur une idée très simple.

Soit $L(a)$ une matrice Toeplitz triangulaire inférieure carrée de dimension $(n \times n)$ générée par sa première colonne $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}^T$, telle que n ici est une puissance de 2, c'est-à-dire : $n = 2^q$. On commence maintenant notre problème par inverser la matrice $L(a)$ par la représentation de cette dernière par blocs de la façon suivante :

$$L(a) = \begin{bmatrix} L(b) & 0 \\ & \\ T & L(b) \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

telle que $b = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}^T$, où $\frac{n}{2} = 2^{q-1}$ aussi est une puissance de 2 et $T = L(c, d)$ est une matrice Toeplitz carrée de dimension $\left(\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}\right)$ définie par sa première colonne et sa première ligne c et d, qui sont les suivantes :

$$c = \begin{bmatrix} a_{2^{q-1}+1} & a_{2^{q-1}+2} & \ldots & a_{2^q} \end{bmatrix}$$

et

$$d = \begin{bmatrix} a_{2^{q-1}+1} & a_{2^{q-1}} & \ldots & a_2 \end{bmatrix}.$$

Il est clair que l'inverse de la matrice $L(a)$ représentée sous la forme (4.2) est donné immédiatement par :

$$L(a)^{-1} = \begin{bmatrix} L(b)^{-1} & 0 \\ -L(b)^{-1}TL(b)^{-1} & L(b)^{-1} \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Alors, on remarque bien que l'inverse $L(a)^{-1}$ peut être obtenu immédiatement par une répétition finie de la formule (4.3) comme l'indique l'algorithme suivant :

Algorithme 4.2 l'algorithme PVMIT calcule l'inverse d'une matrice Toeplitz triangulaire inférieure.

Données : l'entier q et la matrice A.

Résultat : le vecteur v qui caractérise la matrice inverse, $A^{-1} = L(v)$.

1. $f = A(:,1)$
2. $W = 1/A_{11}$.

pour $i = 0 : q-1$

3. $b = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{2^i} \end{bmatrix}$.
4. $c = \begin{bmatrix} f_{2^i+1} & f_{2^i+2} & \dots & f_{2^{i+1}} \end{bmatrix}$.
5. $d = \begin{bmatrix} f_{2^i+1} & f_{2^i} & \dots & f_2 \end{bmatrix}$.
6. $T = L(c,d)$.
7. $D = -W.T.W$.
8. $t = \begin{bmatrix} W_{1,1} & \dots & W_{2^i,1} & D_{1,1} & \dots & D_{2^i,1} \end{bmatrix}$.
9. $W = L(t)$.
10. $v = W(:,1)$.

4.3 Produit d'une matrice Toeplitz par un vecteur

On sait qu'il existe une relation très importante entre les matrices circulantes, les matrices Toeplitz et le TDF et on consiste d'évaluer le produit matrice par vecteur de la forme Tb, où T est une matrice Toeplitz.

Premièrement, il est facile de résoudre notre problème si on se base sur l'idée clé suivante : toute matrice Toeplitz peut être prolongée en une matrice circulante. Par exemple, soit la matrice de Toeplitz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

une sous matrice du type 3×3 d'une matrice circulante C

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

En général si $T = (t_{ij})$ est une matrice Toeplitz du type $(n \times n)$, alors $T = C(1 : n, 1 : n)$, où $C \in \mathbb{R}^{(2n-1)\times(2n-1)}$ est circulante avec :

$$C(:, 1) = \begin{bmatrix} T(1 : n, 1) \\ \\ T(1, n : -1 : 2) \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

On l'ajoute, une fois que le problème produit matrice circulante par vecteur de la forme $Cb = y$, tel que : $b(n+1 : 2n-1) = 0$ est résolu comme on l'a vu précédemment, notre problème de la forme $y(1 : n) = Tb(1 : n)$ l'est aussi.

On peut représenter toute matrice Toeplitz comme somme de deux matrices Toeplitz triangulaires, inférieure et supérieure respectivement. Par exemple ; Soit la matrice Toeplitz T :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

qui peut se représenter encore sous la forme :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'une façon générale, si $T = (t_{ij})_{i,j}$ est une matrice Toeplitz du type $(n \times n)$, alors :

$$T = L(t_1) + R(t_2), \tag{4.5}$$

telle que : les vecteur t_1 et t_2 sont donnés par les relations :

$$t_1 = T(:, 1) \tag{4.6}$$

$$t_2 = (0, T(1, 2 : n)). \tag{4.7}$$

Si on se base sur cette idée, le produit d'une matrice Toeplitz par un vecteur b ; Tb devient un problème de multiplication d'une matrice Toeplitz triangulaire inférieure et triangulaire supérieure par le vecteur b, $L(t_1)b$ et $R(t_2)b$ respectivement lequel a déjà été énoncé.

On peut dire exactement la même chose dans le cas de la prémultiplication d'un vecteur ligne b^T par une matrice Toeplitz. C'est-à-dire : le calcul de la quantité $b^T T$ équivalent au calcul des deux quantités $b^T \cdot L(t_1)$; la prémultiplication d'un vecteur ligne par une matrice Toeplitz triangulaire inférieure et $b^T R(t_2)$; la prémultiplication d'un vecteur ligne par une matrice Toeplitz triangulaire supérieure $R(t_2)$, qui sont faciles à calculer.

4.4 Transformation en une matrice Toeplitz

Dans cette section on cherche à transformer toute matrice structurée en une matrice Toeplitz.

Théorème 4.1 : Soit A une matrice structurée caractérisée par la structure de déplacement suivante :

$$Z_1 A - AZ = u \cdot v^T + w \cdot g^T \tag{4.8}$$

où Z_1 et Z sont les matrices de déplacement de la même forme que Z_t en remplaçant t par 1 et 0 respectivement. Alors la matrice :

$$C(u)^{-1} A L(\tilde{g})^{-1}$$

est une matrice Toeplitz, où $C(u)$ est une matrice circulante définie par sa première colonne u et $L(\tilde{g})$ est une matrice Toeplitz triangulaire inférieure caractérisée par le vecteur $\tilde{g} = [g_n \; g_{n-1} \; \ldots \; g_1)]^T$. $\Diamond$

Démonstration : Soit A une matrice structurée ayant la structure de déplacement (4.8). Grâce à la définition des matrices circulantes et les matrices Toeplitz triangulaires inférieures, on peut écrire :

$$u = C(u) \cdot e_1 \quad \text{et} \quad g^T = e_n^T L(\tilde{g}).$$

Par substitution de u et g^T dans l'équation (4.8) on trouve :

$$Z_1 A - AZ = C(u) \cdot e_1 \cdot v^T + w \cdot e_n^T L(\tilde{g}).$$

En prémultipliant cette équation par $C(u)^{-1}$ et postmultipliant par $L(\tilde{g})^{-1}$, on obtient :

$$C(u)^{-1} Z_1 A L(\widetilde{g})^{-1} - C(u)^{-1} AZL(\widetilde{g})^{-1} = e_1 \cdot v^T + w \cdot e_n^T.$$

On rappelle que l'inverse d'une matrice circulante (resp Toeplitz triangulaire inférieure) est une matrice circulante (resp Toeplitz triangulaire inférieure) et le produit matriciel dans la classe des matrices circulantes (resp Toeplitz triangulaires inférieures) est commutatif. A partir de ces propriétés, on peut écrire aussi :

$$Z_1 C(u)^{-1} A L(\widetilde{g})^{-1} - C(u)^{-1} A L(\widetilde{g})^{-1} Z = e_1 \cdot v^T + w \cdot e_n^T.$$

On remarque que la matrice $C(u)^{-1} A L(\tilde{g})^{-1}$ vérifie l'opérateur de Toeplitz, c'est donc une matrice Toeplitz. $\blacklozenge$

Chapitre 5

Structures de déplacement d'une matrice de Vandermonde confluente

5.1 Introduction

L'une des structures les plus utiles dans la résolution des systèmes polynômiaux est la structure de Vandermonde. Alors, on étudie dans ce chapitre la structure de déplacement caractérisant les matrices de Vandermonde par blocs dans le but d'aboutir à la structure de déplacement caractérisant les matrices de Vandermonde confluentes grâce au plongement de cette dernière dans les matrices de Vandermonde par blocs [36].

5.2 Matrices de Vandermonde par blocs

Une matrice de Vandermonde par blocs est exactement la même chose qu'une matrice de Vandermonde ; mais la différence c'est au lieu des nombres x_k, on considère n matrices régulières $B_1, B_2, ..., B_n$ du type $(d \times d)$ deux à deux distinctes. Alors la matrice de Vandermonde par blocs est une matrice du type $(md \times nd)$, telle que :

$$V_{b,h} = \begin{bmatrix} I_d & I_d & \cdots & \cdots & I_d \\ B_1 & B_2 & \cdots & \cdots & B_n \\ B_1^2 & B_2^2 & \cdots & \cdots & B_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ B_1^{m-1} & B_2^{m-1} & \cdots & \cdots & B_n^{m-1} \end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

où le symbole b dans $V_{b,h}$ désigne l'écriture par blocs et h désigne la base canonique.

Les matrices de Vandermonde par blocs sont caractérisées par les structures de déplacement suivantes :

$$(Z^d)^T V_{b,h} - V_{b,h} D_B = -E_m.U^T \tag{5.2}$$

$$Z^d V_{b,h} - V_{b,h} D_B^{-1} = -E_1.U'^T \tag{5.3}$$

avec

$$\begin{aligned}
E_m &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & I_d \end{bmatrix}^T, E_1 = \begin{bmatrix} I_d & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \\
U^T &= \begin{bmatrix} B_1^m & B_2^m & \cdots & B_n^m \end{bmatrix}^T, \acute{U}^T = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & B_2^{-1} & \cdots & B_n^{-1} \end{bmatrix}, \\
D_B &= diag\,(B_1, \ldots, B_n) \text{ et } D_B^{-1} = diag(B_1^{-1}, \ldots, B_n^{-1}).
\end{aligned}$$

Les matrices de déplacement Z^d et $(Z^d)^T$ effectuent une permutation sur d lignes semblable à la permutation effectuée par Z et $(Z)^T$ sur une seule ligne. Alors, on construit les structures (5.2) et (5.3) directement à partir des structures d'une matrice de Vandermonde (2.17) et (2.19) respectivement, en remplaçant les éléments x_k dans ces deux dernières équations par les matrices B_k et le nombre s par 0.

5.3 Matrices de Vandermonde confluentes

Dans cette section aussi on considère des bases $P = (P_0(x), ..., P_{m-1}(x))$ de l'espace $\mathbb{C}_m[x]$ (des polynômes de degré $\leq m-1$, telle que $\deg P_i(x) = i$). Parmi lesquelles en particulier la base canonique pour définir la matrice de Vandermonde confluente. D'une façon générale on dit qu'une matrice du type $(m \times dn)$ est de Vandermonde P-confluente et on la note W_p, si elle est de la forme :

$$W_p = [f(x_1) f^{(1)}(x_1) \cdots f^{(d-1)}(x_1) \cdots f(x_n) f^{(1)}(x_n) \cdots f^{(d-1)}(x_n)] \tag{5.4}$$

avec $f(x) = (p_0(x), \ldots, p_{m-1}(x))^T$ et $f^{(1)}(x_n) \ldots f^{(d-1)}(x_n)$ sont les dérivées successives de $f(x)$.

Remarque : En principe, le nombre des dérivées d devrait dépendre de x_k, c'est-à-dire $d = d_k$; mais en guise de simplicité, on suppose que c'est la même pour tout $k = 1, \ldots, n$.

Dans cette thèse, on considère seulement la matrice de Vandermonde confluente W_h, obtenue en remplaçant p par h.

Exemple : La matrice suivante :

$$W_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & 0 & x_2 & 1 & 0 \\ x_1^2 & 2x_1 & 2 & x_2^2 & 2x_2 & 2 \\ x_1^3 & 3x_1^2 & 6x_1 & x_2^3 & 3x_2^2 & 6x_2 \\ x_1^4 & 4x_1^3 & 12x_1^2 & x_2^4 & 4x_2^3 & 12x_2^2 \\ x_1^5 & 5x_1^4 & 20x_1^3 & x_2^5 & 5x_2^4 & 20x_2^3 \end{bmatrix}$$

c'est une matrice de Vandermonde confluente du type $6 \times 6 = 6 \times 3\,(2)$, c'est-à-dire $m = 6$ et $n = 2$.

Dans la prochaine section, on donnera la structure de déplacement des matrices de Vandermonde confluentes.

5.4 Structure de déplacement pour les matrices de Vandermonde confluentes

Maintenant, on donne la structure de déplacement pour les matrices de Vandermonde confluentes qui a démontré par Melkemi dans [36].

Théorème 5.1 : La matrice W_h satisfait la structure de déplacement suivante :

$$Z^T W_h - W_h D_B = -e_m y^T \tag{5.5}$$

telle que :

$$D_B = diag(B_1 \; .... \; B_n)$$

et

$$y^T = (x_1^m (m)_1 x_1^{m-1} ..(m)_d x_1^{m-d} .....x_n^m (m)_1 x_n^{m-1} ..(m)_d x_n^{m-d}). \quad \Diamond$$

La démonstration de ce résultat n'est pas triviale ; alors on aura besoin d'annoncer quelques résultats préliminaires et nécessaires, qui joueraient un rôle intermédiaire dans cette démonstration.

Premièrement, on introduit le cas particulier suivant :

$$B(x) = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & d-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{bmatrix}, \tag{5.6}$$

avec $B_k = B(x_k)$ sont les éléments de base de la matrice de Vandermonde par blocs. Ensuite, il est nécessaire de définir le comportement des puissances $B(x)^k$.

On note par $\alpha_{i,j}^k$, où $0 \leq i \leq j \leq d-1$ l'élément en position (i,j) de $B(x)^k$.

Pour $k \leq d-2$, $B(x)^k$ est bande, de largeur-bande $k+1$, c'est-à-dire : les éléments $\alpha_{i,j}^k$ sont définis par :

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j}^k &= 0 \qquad \text{si } j-i \geq k+1 \\ \alpha_{i,j}^k &= \tfrac{j!}{i!}\tbinom{k}{j-i}x^{k-j+i} \\ &= \tfrac{j!k!}{i!(j-i)!(k-j+i)!}x^{k-j+i} \qquad 0 \leq i \leq j \leq i+k \end{aligned} \tag{5.7}$$

où, $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$, $(k)_j = k(k-1)\ldots(k-j+1) \qquad k \geq j$ et par convention $0! = 1$.

Démonstration : On essayera de démontrer la relation (5.7) par récurrence. On commence par le cas initial :

• Pour $k = 1$, on a remarqué que les éléments de $B(x)$ sont tous nuls sauf les éléments $\alpha_{i,j}$ telle que : $(i = j)$ et $(j = i+1)$, alors :

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= \tfrac{j!k!}{i!(j-i)!(k-j+i)!}x^{k-j+i} \qquad \text{pour } i = j \\ &= \tfrac{j!}{i!(j-i)!(k-j+i)!}x^{k-j+1} \\ &= x. \end{aligned}$$

Les éléments dans le cas, où $j = i+1$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &= \tfrac{(i+1)!1!}{i!1!0!}x^0 \\ &= i+1 \qquad \text{pour } j = i+1, \end{aligned}$$

alors la relation (5.7) est vraie pour $k = 1$.

• Maintenant, on suppose que cette formule est vraie jusqu'à $k-1$ et on démontre qu'elle est vraie pour k.

$$
\begin{aligned}
(\alpha_{i,j}^{k})_{0\le i\le j\le i+k} &= B(x)^k \\
&= B(x)B(x)^{k-1} \\
&= \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & x & 2 & . & . & 0 \\ . & 0 & x & 3 & . & . \\ . & . & 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & d-1 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & x \end{bmatrix} \cdot (\alpha_{i,j}^{k-1})_{0\le i\le j\le i+k-1},
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire qu'on a :

$$
\begin{aligned}
\alpha_{i,j}^{k} &= x\cdot \alpha_{i,j}^{k-1} + (i+1)\alpha_{i+1,j}^{k} \\
&= x\tfrac{j!}{i!}\tbinom{k-1}{j-i}x^{k-1-j+i} + (i+1)\tfrac{j!}{(i+1)!}\tbinom{k-1}{j-i-1}x^{k-1-j+i+1} \\
&= \tfrac{j!}{i!}\left(\tbinom{k-1}{j-i} + \tbinom{k-1}{j-i-1}\right)x^{k-j+i} \\
&= \tfrac{j!}{i!}\tbinom{k}{j-i}x^{k-j+i} \qquad \forall\ 0\le i\le j\le i+k. \quad \blacklozenge
\end{aligned}
$$

Le résultat suivant joue un rôle important dans la démonstration du théorème (5.1) parce qu'il forme l'idée clé dans cette démonstration.

Lemme 5.2 : *La première ligne de $B(x)^k$ est formée des éléments suivants :*

$$x^k, kx^{k-1}, k(k-1)x^{k-2}\dots$$

c'est-à-dire x_k et ses dérivées successives. $\diamondsuit$

Démonstration : La première ligne est obtenue à partir de la relation (5.7), on remplace i par 0 de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
\alpha_{0,j}^{k} &= \tfrac{j!}{0!}\tbinom{k}{j-0}x^{k-j+0} \\
&= \tfrac{j!k!}{0!(j-0)!(k-j)!}x^{k-j} \\
&= \tfrac{j!k!}{0!(j-0)!(k-j)!}x^{k-j} \\
&= (k)_j x^{k-j} \\
&= k(k-1)(k-2)\ \ldots\ (k-j+1)x^{k-j}. \quad \blacklozenge
\end{aligned}
$$

Comme on l'a vu dans la formule (5.1) la matrice de Vandermonde par blocs est constituée par les puissances $B(x)^k$, c'est pour cela le lemme (5.2) nous permet de déduire que la $(kd+1)^{éme}$ ligne de $V_{b,h}$ est identique à la $(k+1)^{éme}$ ligne de la matrice de Vandermonde confluente W_h. Cette remarque, on peut l'interpréter mathématiquement sous forme du résultat suivant.

Théorème 5.3 : *Soit $P \in \mathbb{R}^{md\times md}$ une matrice de permutation telle que sa colonne $kd+1$ soit égale à e_{k+1} ; c'est -à-dire que :*

$$P \cdot e_{kd+1} = e_{k+1}.$$

Alors

$$P \cdot V_{b,h} = \begin{bmatrix} W_h \\ X \end{bmatrix}, \tag{5.8}$$

où X est une matrice dont la détermination n'est pas en question dans ce cadre. $\diamondsuit$

Démonstration : Puisque on a : la $(kd+1)^{éme}$ ligne de $V_{b,h}$ est identique à la $(k+1)^{éme}$ ligne de W_h et d'après la relation vérifiée par la matrice de permutation P, on remarque que la $(k+1)^{éme}$ ligne de $P \cdot V_{b,h}$ est identique à la $(kd+1)^{éme}$ ligne de $V_{b,h}$, ce qui nous permet de déduire immédiatement le résultat. $\blacklozenge$

Il est possible maintenant de démontrer le théorème principal dans ce chapitre.

Démonstration : L'idée de notre démonstration est la déduction de la structure de déplacement de W_h à partir de la structure de déplacement de $V_{b,h}$ et en s'aidant des résultats annoncés précédemment. Tout d'abord, on considère la structure de déplacement d'une matrice de Vandermonde par blocs (5.2), puis on la multiplie par la matrice de permutation P, on obtient :

$$P(Z^d)^T \cdot V_{b,h} - P \cdot V_{b,h} D_B = -P E_m U^T.$$

Si en tenant compte les calculs suivants :

$$P(Z^d)^T \cdot V_{b,h} = P \cdot \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ B_1^2 & B_2^2 & \cdots & B_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_1^{m-1} & B_2^{m-1} & \cdots & B_n^{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z^T \cdot W_h \\ * \end{bmatrix},$$

$$P \cdot V_{b,h} = \begin{bmatrix} W_h \\ x \end{bmatrix}$$

et

$$PE_m = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & . & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ 1 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \\ \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_m \cdot e_1^T \\ * \end{bmatrix}$$

on trouve la structure de déplacement suivante :

$$Z^T W_h - W_h D_B = -e_m \cdot e_1^T \cdot U^T,$$

où $U^T = [B_1^m \ ... \ B_n^m]$, alors $e_1^T \cdot U^T$ est la $1^{ére}$ ligne de U^T, c'est -à-dire les $1^{ére}$ lignes des matrices $B(x_1)^m, \ldots, B(x_n)^m$, qui sont formées d'après le lemme (5.2) par les éléments $\left(x_j^m\right)_{j=\overline{1,n}}$ et ses dérivées successives jusqu'à la dérivée d'ordre $(d-1)$, cela permet de conclure que :

$$\begin{aligned} e_1^T \cdot U^T &= y^T \\ &= (x_1^m (m)_1 x_1^{m-1} .. (m)_d x_1^{m-d} .... x_n^m (m)_1 x_n^{m-1} .. (m)_d x_n^{m-d}), \end{aligned}$$

où, $(m)_j = \frac{m!}{j!}$. Enfin on peut dire que l'équation suivante :

$$Z^T W_h - W_h D_B = -e_m \cdot y^T,$$

caractérisant les matrices de Vandermonde confluentes. ♦

Chapitre 6

Factorisation LU d'une matrice de Vandermonde confluente

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous montrons qu'un algorithme asymptotiquement rapide peut être conçu en vue de réaliser une factorisation LU par blocs des matrices de Vandermonde confluentes. Ce résultat est basé sur la structure de déplacement satisfaite par ce type des matrices et sur la factorisation des éléments blocs en termes de matrices Toeplitz triangulaires.

Afin d'attaquer notre but principal celui d'appliquer l'éliminations de Gauss basée sur le complément de Schur sur une matrice de Vandermonde confluente, on cherche à trouver une nouvelle structure de déplacement caractérisant la classe des matrices de Vandermonde confluentes plus efficace que celle définie dans (5.5), dans ce qui suit, on note par W la matrice de Vandermonde confluente.

6.2 Structure de déplacement pour les matrices de Vandermonde confluentes

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n nombres deux à deux distincts et W la matrice définie dans (5.4), en remplaçant m par nd et la base P par la base canonique. C'est-à-dire W est du type $(nd \times nd)$ définie comme suit :

$$W = [W_1 \; W_2 \; \ldots \; W_n] \tag{6.1}$$

telle que

$$W_i = \left[f(x_i)\ f^{(1)}(x_i)\ \cdots\ f^{(d-1)}(x_i) \right]$$

et

$$f(x_i) = \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^{nd-1} \end{bmatrix}^T, \quad \text{pour } i = 1 : n$$

Ici n et d sont des entiers tels que $n \geq 1$ et $d \geq 2$, et $f(x_i)$, $f^{(1)}(x_i)$, $\cdots$ $f^{(d-1)}(x_i)$ désigne les dérivées successives de f. Dans notre étude, on s'intéresse à l'application de l'élimination de Gauss par blocs pour résoudre un système de Vandermonde confluent :

$$Wa = f; \quad a, f \in \mathbb{C}^{dn} \tag{6.2}$$

Ainsi que son dual ce qui correspond à l'interpolation de Hermite :

$$W^T y = b; \quad y, b \in \mathbb{C}^{dn} \tag{6.3}$$

Notre approche est basée sur l'équation de déplacement satisfaite par W définie dans [34] et démontrée par Melkemi dans [34] et [36] (voir aussi [38]), et sur le fait que le complément de Schur d'une matrice structurée est invariant par l'équation de déplacement satisfaite par la matrice étudiée (voir [31] et [17]). En ce qui concerne la théorie de la structure de déplacement, on renvoie le lecteur au document [17] et ses références.

Pour résoudre un système structuré (6.2) ou (6.3), on applique un algorithme qu'effectue $O\left((dn)^2\right)$ opérations. Dans ce travail, on améliore cette complexité et on démontre qu'on peut résoudre (6.2) ou (6.3) par l'application d'un algorithme de $O\left((d \log d)\, n^2\right)$ opérations.

Dans [34] et [36], la matrice W est caractérisée par la structure de déplacement suivante :

$$Z^T W - W D_B = e_{nd} y^T, \tag{6.4}$$

où

$$D_B = diag(B(x_1), B(x_2), \ldots, B(x_n))$$

est une matrice diagonale par blocs, telle que les matrices $B\left(x_k\right); k=1:n$ sont les matrices définies dans (5.6), qu'on peut représenter encore sous la forme :

$$B(x)=xI_d+A;\ A=\left[\begin{array}{cccccc} 0 & e_1 & 2e_2 & 3e_3 & \cdots & (d-1)\,e_{d-1} \end{array}\right], \tag{6.5}$$

et

$$y^T=\left(x_1^{nd}\,(nd)_1\,x_1^{nd-1}..\,(nd)_d\,x_1^{nd-d}....x_n^{nd}\,(nd)_1\,x_n^{nd-1}..\,(nd)_d\,x_n^{nd-d}\right).$$

Si on prémultiplie et postmultiplie la structure (6.4) par Z et D_B^{-1} respectivement et en tenant compte que :

$$ZZ^T=I_{nd}-e_1e_1^T$$

et

$$Ze_{nd}=0,$$

on constate immédiatement que cette structure devient :

$$ZW-WD_B^{-1}=e_1v^T, \tag{6.6}$$

où

$$v^T=-\left(\begin{array}{ccc} r(x_1) & \cdots & r(x_n) \end{array}\right); \tag{6.7}$$

$$r(x)=\left(x^{-1}\ \ -x^{-2}\ 2x^{-3}\ \ldots\ (-1)^{d-1}\,(d-1)!x^{-d}\right),$$

c'est-à-dire $r(x)$ composé par x^{-1} et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre $(d-1)$.

6.3 Complément de Schur

Définition 6.1 : Soit $A\in C^{(n+s)\times(n+s)}$ une matrice du type $(n+s)\times(n+s)$ qu'on peut représenter par blocs de la façon suivante :

$$A=\left[\begin{array}{cc} M & F \\ E & D \end{array}\right], \tag{6.8}$$

telle que : M est une matrice régulière $\in C^{s\times s}$, E^T, $F\in C^{s\times n}$ et $D\in C^{n\times n}$, on peut définir le complément de Schur de A comme opérateur vérifiant la formule suivante :

$$S(A) = D - EM^{-1}F. \tag{6.9}$$

Si on se base sur le complément de Schur, il est facile de vérifier que la première étape de l'élimination de Gauss par blocs sur A est la suivante :

$$J_1 A = \begin{bmatrix} M & F \\ 0 & S(A) \end{bmatrix}, \tag{6.10}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ -EM^{-1} & I_n \end{bmatrix}$$

désigne la première matrice de l'élimination de Gauss par blocs et par convention, on peut écrire :

$$S^0(A) = A \qquad S^{k+1}(A) = S\left(S^k(A)\right) \quad k = 0 : n-2. \tag{6.11}$$

Dans la prochaine section, on présente une propriété du complément de Schur qui est connue dans la littérature et très importante dans l'application de l'élimination de Gauss sur les matrices structurées.

6.4 Stabilité de la structure de déplacement par le complément de Schur

Soit la matrice structurée A définie dans (6.8) ayant la structure de déplacement suivante :

$$FA - AB = \begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & z \end{bmatrix}^H, \tag{6.12}$$

où $F \in \mathbb{C}^{(n+s)\times(n+s)}$ est bidiagonale inférieure, $B \in \mathbb{C}^{(n+s)\times(n+s)}$ est bidiagonale supérieure et u, v, w, $z \in \mathbb{C}^{(n+s)}$, en concordance avec (6.8), il est nécessaire de représenter les matrices F, B et $\begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & z \end{bmatrix}^H$ dans (6.12) par blocs comme suit :

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ X & F_2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} B_1 & Y \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & z \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & z_1 \\ v_2 & z_2 \end{bmatrix}.$$

Le complément de Schur d'une matrice A qui constitue l'opération de base dans le processus d'éliminations de Gauss est stable par la structure de déplacement de cette dernière comme l'indique le théorème suivant :

Théorème 6.1 : *Supposons que A vérifie l'équation* (6.12). *Alors :*

$$F_2 S(A) - S(A) B_2 = \begin{bmatrix} u' & w' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v' & z' \end{bmatrix}^H \tag{6.13}$$

avec

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u' & w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_s \\ EM^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

et

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & z \end{bmatrix}^H - \begin{bmatrix} v_1 & z_1 \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} I_s & M^{-1}F \end{bmatrix}. \quad \diamondsuit \tag{6.15}$$

Démonstration (voir [17]*) :* Soit A la matrice structurée caractérisée par sa structure de déplacement (6.12). Si on prémultiplie et postmultiplie cette structure par J_1 et K_1 respectivement, où J_1 est la première matrice de l'éliminations de Gauss et K_1 est la suivante :

$$K_1 = \begin{bmatrix} I_s & -M^{-1}F \\ 0 & I_n \end{bmatrix},$$

on obtient l'équation :

$$\left(J_1 F J_1^{-1}\right)(J_1 A K_1) - (J_1 A K_1)\left(K_1^{-1} B K_1\right) = J_1 \begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & z \end{bmatrix}^H K_1.$$

En tenant compte que :

($\star$) Pour le premier terme on a :

$$J_1 F J_1^{-1} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ * & F_2 \end{bmatrix}, \; J_1 A K_1 = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & S(A) \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad K_1^{-1} B K_1 = \begin{bmatrix} B_1 & * \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}.$$

$(\star\star)$ Pour le deuxième terme on a :

$$J_1 \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ \acute{u} & \acute{w} \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} v_1 & z_1 \\ v_2 & z_2 \end{bmatrix}^H K_1 = \begin{bmatrix} v_1 & z_1 \\ \acute{v} & \acute{z} \end{bmatrix}^H,$$

où

$$\begin{aligned} u' &= u_2 - EM^{-1}u_1 \\ w' &= w_2 - EM^{-1}w_1 \\ v' &= v_2 - (M^{-1}F)^H v_1 \\ z' &= z_2 - (M^{-1}F)^H z_1. \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u' & w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_s \\ EM^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v & z \end{bmatrix}^H - \begin{bmatrix} v_1 & z_1 \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} I_s & M^{-1}F \end{bmatrix}.$$

Par des calculs simples, on trouve :

$$\begin{bmatrix} F_1M - MB_1 & \star \\ \star & F_2S(A) - S(A)B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \star & \star \\ \star & \begin{bmatrix} u' & w' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v' & z' \end{bmatrix}^H \end{bmatrix},$$

alors, on peut obtenir immédiatement le résultat, c'est-à-dire :

$$F_2S(A) - S(A)B_2 = \begin{bmatrix} u' & w' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v' & z' \end{bmatrix}^H. \quad \blacklozenge$$

Dans l'équation de déplacement (6.6), on observe que Z est triangulaire inférieure et D_B^{-1} est diagonale par blocs, alors le théorème (6.1) indique que le complément de

Schur de W prend le même type de structure. C'est pour cette raison qu'on préfère la structure (6.6).

Définition 6.2 : Soit A une matrice du type $(rd \times rd)$; $r = 1 : n$. On dit que A est matrice r structurée Vandermonde confluente, s'il existe deux vecteurs g et h de dimension rd telle que :

$$ZA - AD_{r,B}^{-1} = gh^T, \tag{6.16}$$

où :

$$D_{r,B} = diag\left(B(x_k)\,;\; k = n - r + 1 : n\right.$$

est une matrice diagonale par blocs et $x_1, \ldots, x_n$ sont toujours n points deux à deux distincts.

On a bien observé que la matrice r Vandermonde confluente A définie par l'équation de déplacement (6.16) est caractérisée par r et les vecteurs g et h, alors leur identification nécessite $O(nd)$ stockages et par convention, on peut l'écrire :

$$A \longleftrightarrow [g, h]^r, \tag{6.17}$$

laquelle peut être représentée par blocs de la manière suivante :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}, \tag{6.18}$$

où ses éléments $(A_{ij})\,; i, j = 1 : r$ sont des matrices du type $(d \times d)$. Tout vecteur V de dimension rd est représenté par blocs comme suit :

$$V = [V_1\ V_2\ \ldots\ V_r]^T, \tag{6.19}$$

où $(V_k)_{k=1:r}$ sont des vecteurs de dimension d.

En concordance avec la représentation (6.8), A peut être écrit comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & G \\ H & K \end{bmatrix}, \tag{6.20}$$

où

$$G = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \end{bmatrix}$$

et

$$H = \begin{bmatrix} A_{21} & \cdots & Ar1 \end{bmatrix}^T,$$

A_{11} doit être non singulière. Dans ce cas, le complément de Schur de A ; $S(A)$ est défini comme suit :

$$S(A) = K - HA_{11}^{-1}G. \tag{6.21}$$

Par une application directe du théorème (6.1) sur la matrice A, on présente le résultat suivant :

Théorème 6.2 [17] *: Soit A la matrice de Vandermonde confluente donnée dans* (6.20) *et notée par* (6.17) *; $A \longleftrightarrow [g,h]^r$ ($r \geq 2$). Le complément de Schur $S(A)$ définie par* (6.21) *est lui même une matrice de Vandermonde confluente ; $S(A) \longleftrightarrow [g',h']^{r-1}$ avec :*

$$\begin{aligned} g'_k &= g_{k+1} - A_{k+1,1}A_{11}^{-1}g_1 \quad k = 1 : r-1 \\ h'^T_k &= h^T_{k+1} - h^T_1 A_{11}^{-1}A_{1,k+1} \quad k = 1 : r-1. \quad \Diamond \end{aligned} \tag{6.22}$$

Dans notre étude, on s'intéresse au matrice n Vandermonde confluente qu'on note par :

$$W \leftrightarrow [e_1, v]^n$$

où v est le vecteur définie dans (6.7) et on la représente par blocs de la façon suivante :

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1} & W_{n2} & \cdots & W_{nn} \end{bmatrix}. \tag{6.23}$$

Comme On a énoncé précédemment, le processus d'élimination de Gauss est une répétition finie du complément de Schur, alors on peut l'obtenir par l'application de (6.11) sur W, c'est-à-dire :

$$S^0(W) = W, \; S^{k+1}(W) = S(S^k(w)) \quad k = 0 : n-2$$

A l'aide de cette notation, on peut énoncer le résultat suivant qui nous affirme que le $k^{ème}$ complément de Schur $S^k(W)$ est une matrice $(n-k)$ structurée de Vandermonde confluente pour $k = 0 : n-1$.

Théorème 6.3 : Soit W une matrice de Vandermonde confluente du type $(nd \times nd)$ définie dans (6.1), alors les compléments de Schur de W, $S^k(W)$, $k = 0 : n-1$ existe ; $S^0(W) = W \longleftrightarrow [e_1, v]^n$ et $S^k(W) \longleftrightarrow [g\,[k]\,, h\,[k]]^{n-k}$, $k = 0 : n-2$, avec

$$\begin{aligned} & g\,[0] = e_1, \quad h\,[0]^T = v^T \\ & g\,[k+1]_i \quad = g\,[k]_{i+1} - \left(S^k(W)\right)_{i+1,1} \left(S^k(W)\right)_{11}^{-1} g\,[k]_1 \\ & h\,[k+1]_i^T \quad = h\,[k]_{i+1}^T - h\,[k]_1 \left(S^k(W)\right)_{11}^{-1} \left(S^k(W)\right)_{1,i+1} \end{aligned} \tag{6.24}$$

pour $i = 1 : n-k+1$. $\Diamond$

La décomposition de W en deux matrices carrées par blocs L et U du type $(nd \times nd)$; L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure, telle que :

$$W = LU,$$

lesquelles sont définies par :

$$\begin{aligned} L_{i+k,k+1} \quad &= \left(S^k(W)\right)_{i,1} \left(S^k(W)\right)_{11}^{-1} \quad i = 1 : n-k \\ U_{k+1,j+k} \quad &= \left(S^k(W)\right)_{1,j} \quad j = 1 : n-k \end{aligned} \tag{6.25}$$

pour $k = 0 : n-1$.

A partir des relations de récurrences (6.24), il est facile de voir que l'algorithme de réaliser l'élimination de Gauss par blocs d'une matrice de Vandermonde confluente est de complexité $O((dn)^2)$. Dans la section suivante, nous étudierons les structures des éléments blocs des matrices $r-$structurées de Vandemondes confluentes de telle sorte que la complexité de cet algorithme peut s'améliorer.

Avant de factoriser les éléments blocs, on donne quelques propriétés sur les matrices Toeplitz Triangulaires.

Soient $u,\ v\ \in\ \mathbb{C}^d$ deux vecteurs de dimension d génèrent les matrices Toeplitz triangulaires inférieures $L(u)$ et $L(v)$, telle que :

1. $u, v \in \mathbb{C}^d \Longrightarrow \exists z_1 \in \mathbb{C}^d$ telle que $L(u)\cdot L(v) = L(v)\cdot L(u) = L(z_1)$ (resp $\exists z_2 \in \mathbb{C}^d$ telle que $R(u) \cdot R(v) = R(v) \cdot R(u) = R(z_2)$).
2. $u \in \mathbb{C}^d$ et $u_1 \neq 0 \Longrightarrow \exists v_1 \in \mathbb{C}^d$ telle que $L(u)^{-1} = L(v_1)$ (resp $\exists v_2 \in \mathbb{C}^d$ telle que $R(u)^{-1} = R(v_2)$).

On ajoute que le produit de deux matrices Toeplitz du type $(d \times d)$ peut être réalisé par l'utilisation de $O(d \log d)$ opérations et $O(d)$ stockages. Ici, on suppose que le produit de deux matrices Toeplitz triangulaires inférieures du type $(d \times d)$ peut être réalisé par l'utilisation de $C(m)d \log d$ opérations.

Pour inverser une matrice Toeplitz triangulaire inférieure non singulière du type $(d \times d)$,on a besoin d'effectuer $O(d \log d)$ opérations. dans ce cas, on suppose que l'inverse d'une matrice Toepliz triangulaire non singulière du type $(d \times d)$ peut être réalisé par l'utilisation de $2C(m)d \log d$ opérations.

6.5 Factorisation des éléments blocs

Soit $V(x)$ la matrice du type $(d \times d)$ suivante :

$$\begin{cases} V(x) & = \left[\rho(x)\ \rho'(x)\ \rho^{(2)}(x)\ \ldots\ \rho^{(d-1)}(x)\right] \\ \rho(x) & = \left[1\ x\ x^2\ \ldots\ x^{d-1}\right]^T \end{cases}$$

On observe que la première ligne de W par blocs est composée des matrices :

$$W_{1j} = V(x_j) \quad \text{pour } j = 1 : n$$

Il est important de signaler que $B(x)$ et $V(x)$ peut transformer en matrices Toeplitz comme l'indique les lemmes suivants :

Lemme 6.4 : *Soit D la matrice diagonale du type $(d \times d)$ suivante :*

$$D = diag(1\ 1!\ 2!\ 3!\ \ldots\ (d-1)!)$$

donc :

$$D^{-1}V(x) = L\left(\eta(x)\right),$$

où

$$\eta(x) = \left(1\ x\ \frac{x^2}{2!}\ \frac{x^3}{3!}\ \ldots\ \frac{x^{d-1}}{(d-1)!}\right)^T. \quad \Diamond$$

Ce lemme nous permet de dire que les éléments blocs W_{1j} de W peut être transformés en matrices Toeplitz triangulaire inférieure par une multiplication par une matrice diagonale. Alors $W_{11}^{-1} = L\left(\eta(x_1)\right)^{-1} D^{-1}$; qu'on utilisera dans le processus d'éliminations de Gauss ; on peut l'inverser par l'utilisation de $O(d \log d)$ opérations.

Le résultat suivant, nous donne deux propriétés importantes satisfaites par $B(x)$.

Lemme 6.5 : *(a) soit $D = diag(1\ 1!\ 2!\ 3!\ \ldots\ (d-1)!)$. Alors*

$$DB(x)D^{-1} = T(x) = R(xe_1 + e_2). \tag{6.26}$$

(b) Soit $\omega(x) \in C^{d-1}$ une fonction et $\sigma(x) = x\omega(x)$. Donc

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccccc} \omega(x) & \omega^{(1)}(x) & \omega^{(2)}(x) & \cdots & \omega^{(d-1)}(x) \end{array}\right] B(x) \\ = & \left[\begin{array}{ccccc} \sigma(x) & \sigma^{(1)}(x) & \sigma^{(2)}(x) & \cdots & \sigma^{(d-1)}(x) \end{array}\right]. \quad \Diamond \end{aligned}$$

Démonstration : Le premier résultat est un résultat immédiat du calcul matriciel $DB(x)D^{-1}$.

pour démontrer le deuxième résultat, on utilise la formule $(x\omega(x))^{(i)} = i\omega^{(i-1)}(x) + x\omega^{(i)}(x)$ (on utilise la formule de Leibniz). d'autre part, le deuxième membre de l'équation est un vecteur de dimension d ; $a = (a_0\ a_1\ \ldots\ a_{d-1})$. Il est facile de voir que :

$$a_i = i\omega^{(i-1)}(x) + x\omega^{(i)}(x) = \sigma^{(i)}(x). \quad \blacklozenge$$

L'idée clé dans notre étude est de factoriser les éléments de la première ligne et la première colonne de $S^k(W)$ par blocs à partir de ses structures de déplacement dont on donne dans le théorème suivant :

Théorème 6.6 : *Les éléments de la première ligne et la première colonne de $S^k(W)$ par blocs vérifient les structures de déplacement suivantes :*

$$\begin{aligned} &(i)\ ZS^k(W)_{1j} - S^k(W)_{1j}B(x_{k+j})^{-1} &&= g_1\,[k]\,h_j\,[k]^T \\ &(ii)\ ZS^k(W)_{i1} - S^k(W)_{i1}B(x_{k+1})^{-1} &&= g_i\,[k]\,h_1\,[k]^T - e_1 e_d^T S^k(W)_{i-1,1} \end{aligned} \tag{6.27}$$

Dans la cas, où $k = 0$, $g_i\,[k]\,h_1\,[k]^T = 0$. $\Diamond$

Démonstration : On a dit précédement que

$$S^k(W) \leftrightarrow [g\,[k]\,, h\,[k]]^{n-k}\,.$$

est une matrice $(n{-}k)$ structurée de Vandermonde confluentes. Alors la matrice $S^k(W)$ est caractérisée par l'équation de déplacement :

$$ZS^k(W) - S^k(W)D_B^{-1} = g\,[k]\,h\,[k]^T$$

On peut les obtenir les formules (6.27) à partir de la représentation par blocs de la structure de déplacement associée à $S^k(W)$ et par quelques multiplications adéquates.$\blacklozenge$

Pour aboutir à notre but à savoir factoriser les éléments blocs $S^k(W)_{1j}$ et $S^k(W)_{i1}$ en termes des matrices Toeplitz triangulaires, on considère les deux matrices $F(x)$ et $G(x)$ du type $(d \times d)$ définies par :

$$ZF(x) - F(x)B(x)^{-1} = zw^T, \quad ZG(x) - G(x)B(x)^{-1} = e_1 w^T \tag{6.28}$$

tel que $z \neq 0$. Par une prémultiplication de la deuxième équation par $L(z)$ et en tenant compte que $ZL(z) = L(z)Z$ et $L(z)e_1 = z$, on implique que $F(x) = L(z)G(x)$.

D'autre part, il est important d'étudier le cas particulier où $G(x) = V(x)$ dans lequel :

$$\begin{aligned} w^T &= \Phi^T = \begin{bmatrix} \phi\,(x) & \phi^{(1)}\,(x) & \phi^{(2)}\,(x) & \cdots & \phi^{(d-1)}\,(x) \end{bmatrix} \\ \phi\,(x) &= -x^{-1}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Il est clair que

$$\phi^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} k! x^{-(k+1)}$$

de laquelle, on peut déduire la relation suivante :

$$\Psi^T = \Phi^T D^{-1} = \left[(-1)^{k+1} x^{-(k+1)}\right]_{0 \leq k \leq (d-1)} \tag{6.30}$$

Par une postmultiplication de l'équation qui caractérise $G(x)$ par D^{-1} et en nous basant sur la relation (6.30), on obtient l'équation de déplacement de $G(x)D^{-1}$ et $V(x)D^{-1}$ respectivement :

$$\begin{aligned} ZG(x)D^{-1} - G(x)D^{-1}T(x)^{-1} &= e_1 w^T D^{-1} \\ ZV(x)D^{-1} - V(x)D^{-1}T(x)^{-1} &= e_1 \Psi^T \end{aligned}$$

où $T(x) = R(xe_1 + e_2)$ est une matrice Toeplitz triangulaire supérieure.

Le théorème suivant donne une relation entre $G(x)$ et $V(x)$.

Théorème 6.7 : Soit u un vecteur de dimension d, tel que :

$$w^T D^{-1} = \Psi^T R(u) \tag{6.31}$$

Alors

$$G(x) = V(x)D^{-1}R(u)D. \quad \diamondsuit$$

Démonstration : En postmultipliant la structure de déplacement de $V(x)D^{-1}$ par $R(u)$ et en tenant compte que

$$T(x)R(u) = R(u)T(x),$$

en trouvant directement le résultat. ♦

D'après le théorème précédent, on obtient les factorisations suivantes :

$$\begin{aligned} G(x) &= DL(\eta(x))\, D^{-1}R(u)D, \\ F(x) &= L(z)DL(\eta(x))\, D^{-1}R(u)D \end{aligned}$$

où $F(x)$ et $G(x)$ définies dans (6.28).

Pour calculer u, il est facile de remarquer que :

$$\widetilde{u} = R(\Psi)^{-1} J D^{-1} w. \tag{6.32}$$

Telle que

$$J = \begin{bmatrix} e_n & e_{n-1} & e_{n-2} & \cdots & e_1 \end{bmatrix}$$

Remarque : $S^k(W)_{i1} = F_1 + F_2$, *telle que :*

$$ZF_1 - F_1 B(x)^{-1} = g_i\,[k]\,h_1\,[k]^T$$

et

$$ZF_2 - F_2 B(x)^{-1} = -e_1 e_d^T S^k(W)_{i-1,1}.$$

En appliquant ces résultats, on obtient les factorisations cherchées des éléments de la première ligne et la première colonne de $S^k(W)$ respectivement.

Théorème 6.8 : *On a*

$$\begin{aligned} S^k(W)_{1,j} &= L\left(g_1\,[k]\right) DL\left(\eta(x_{k+j})\right) D^{-1} R(u) D \\ \widetilde{u} &= R(\Psi)^{-1} J D^{-1} h_j\,[k] \end{aligned} \tag{6.33}$$

et

$$\begin{aligned} S^k(W)_{i,1} &= L\left(g_i\,[k]\right) DL\left(\eta(x_{k+1})\right) D^{-1} R(z) D - DL\left(\eta(x_{k+1})\right) D^{-1} R(w) D \\ \widetilde{z} &= R(\Psi)^{-1} J D^{-1} h_1\,[k]\,, \quad \widetilde{w} = R(\Psi)^{-1} J D^{-1} S^k(W)_{i-1,1}^T e_d. \quad \diamondsuit \end{aligned} \tag{6.34}$$

Démonstration : est une conséquence directe des factorisations précédentes de $F(x)$ et $G(x)$. ♦

6.6 Multiplications rapides des éléments blocs par vecteur

Dans cette section, on présente des opérations de base qui jouent des rôles extrêmement importants dans le processus de l'élimination de Gauss par blocs de la matrice W, ces opérations sont en fonction de $F(x)$; comme la prémultiplication matrice par vecteur de la forme $F(x)b$ et la postmultiplication d'un vecteur ligne par matrice de la forme $b^T F(x)$, qu'on peut réaliser par l'utilisation de $O\left(d \log d\right)$ opérations élémentaires et interpréter sous forme de deux algorithmes suivants.

Algorithme 6.1. MRFb($z,\ w, x\ , b \longmapsto \acute{b}$*) cet algorithme réalise la multiplication* $F(x)b = \acute{b}$*, où* $F(x)$ *caractérisée par les paramètres* z, w *et* x *dans sa représentation.*

Données : z, w, x, b.
Résultats : le vecteur $\acute{b}$.

1. *calcul* $\acute{b}_1 = D^{-1}w$.
2. *calcul* $\acute{b}_2 = J\acute{b}_1$.
3. *calcul de* u *;* $\tilde{u} = R(\Psi)^{-1}\acute{b}_2$, où $\Psi^T = \left[(-1)^{k+1}x^{-(k+1)}\right]_{0\leq k\leq (d-1)}$.
4. *calcul* $\acute{b}_3 := Db$.
5. *calcul* $\acute{b}_4 := R(u)\acute{b}_3$.
6. *calcul* $\acute{b}_5 := D^{-1}\acute{b}_4$.
7. calcul $\acute{b}_6 := L(\eta(x))\acute{b}_5$, où $\eta(x) = (1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \ldots, \frac{x^{d-1}}{(d-1)!})$.
8. *calcul* $\acute{b}_7 := D\acute{b}_6$.
9. *retour de* $\acute{b} := L(z)\acute{b}_7$.

Algorithme 6.2. MRbTF $(z, w, x, p \longmapsto c)$ *cet algorithme est similaire au précédent, il réalise la multiplication d'un vecteur ligne* b^T *par* $F(x)$ *caractérisée toujours par les paramètres* z, w *et* x.

Données : z, w, x, b.
Résultats : le vecteur c.

1. *calcul calcul* $b_1 = D^{-1}w$.
2. *calcul* $b_2 = Jb_1$
3. *calcul de* u *;* $\tilde{u} = R(\Psi)^{-1}\acute{b}_2$, où $\Psi^T = \left[(-1)^{k+1}x^{-(k+1)}\right]_{0\leq k\leq (d-1)}$.
4. *calcul* $b_3^T := b^T L(z)$.
5. *calcul* $b_4^T := b_3^T D$.

6. *calcul* $b_5^T := b_3^T L(\eta(x))$, où $\eta(x) = (1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \ldots, \frac{x^{d-1}}{(d-1)!})$.
7. *calcul* $b_6^T := b_5^T D^{-1}$.
8. *calcul* $b_7^T := b_6^T R(s)$.
9. *retour de* $c^T := b_7^T D$.

Dans la prochaine section, on présente l'algorithme d'éliminations de Gauss par blocs dépendant itérativement des opérations clés suivantes :

$$\begin{array}{ll} (a) & h^T S^k(W)_{1j} \\ (b) & S^k(W)_{i1} g \\ (c) & e_d^T S^k(W)_{i1} \end{array}$$

c'est pour cette raison qu'on présente le résultat suivant pour montrer la complexité de ces opérations.

Théorème 6.9 : Le produit matrice-vecteur $c = L(a)b$ *est réalisé par* $C(m)d\log d$ *opérations et l'inversion d'une matrice* $L(b) = L(a)^{-1}$ *est réalisée par l'utilisation de* $2C(m)d\log d$ *opérations. Alors les opérations par blocs (a), (b) et (c) précédentes peuvent être effectués par l'utilisation de* $26C(m)d\log d + O(d)$ *opérations. Plus précisément, pour effectuer l'opération (a), on a besoin de* $6C(m)d\log d + O(d)$ *opérations, pour (b), on a besoin de* $11C(m)d\log d + O(d)$ *opérations et pour (c),* $9C(m)d\log d + O(d)$ *opérations.* $\diamondsuit$

Démonstration : Pour effectuer les opérations (a), (b) et (c), on fait l'appel aux algorithmes (6.1) et (6.2) comme on le verra par la suite.

($\star$) *Pour l'opération (a) :* on peut constater facilement que l'opération (a) est effectuée par l'utilisation de $O(d\log d) + O(d)$ opérations dûes à l'appel de l'algorithme *MRbTF* et au nombre d'opérations $3C(m)d\log d$ effectués à la troisième ligne.

($\star\star$) *Pour l'opération (b) :* on a vu précédemment que $S^k(W)_{i1}g$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$S^k(W)_{i1}g = F_1 g + F_2 g,$$

alors, le calcul de la quantité (b) ; $S^k(W)_{i1}g$ nécessite le calcul des deux quantités F_1g et F_2g. Donc il est obligatoire de faire l'appel à l'algorithme *MRFb*, dont on peut dire que la troisième ligne peut être exécutée par l'utilisation de $3C(m)d\log d$ opérations, c'est-à-dire que l'opération $F_1 g$ est effectuée par $6C(m)d\log d+O(d)$ opérations et en ce qui concerne le calcul de $F_2 g$, il est clair que l'instruction $\acute{b}:=L(z)\acute{b}_7$ au niveau de la neuvième ligne de l'algorithme (6.1) est négligeable si $z=e_1$, comme une conséquence, la quantité $F_2 g$ est exécutée par l'utilisation de $5C(m)d\log d+O(d)$ opérations, ce qui nous permet de dire que pour effectuer l'opération (b), on a besoin de $11C(m)d\log d+O(d)$ opérations.

$(\star\star\star)$ *Pour l'opération (c) :* c'est exactement de la même manière que pour (b), on peut compter le nombre d'opérations nécessaires dans l'affectation de (c). Premièrement, l'opération par blocs $e_d^T S^k(W)_{i1}$ est représentée comme suit :

$$e_d^T S^k(W)_{i1}=e_d^T F_1+e_d^T F_2,$$

c'est-à-dire que le calcul de (c) est équivalent aux calculs de $e_d^T F_1$ et $e_d^T F_2$.

En outre, il est clair que l'instruction $b_3^T:=b^T L(z)$ dans la quatrième ligne de l'algorithme (6.2) est négligeable si $b=e_d$. Donc le calcul de $e_d^T F_1$ peut être effectué par l'utilisation de $5C(m)d\log d+O(d)$ opérations. De plus, on a remarqué que $4C(m)d\log d+O(d)$ est le nombre d'opérations nécessaires dans la réalisation de $e_d^T F_2$ tout simplement parce que les lignes 4 et 6 de l'algorithme (6.2) sont négligeables lorsque $b=e_d$ et $z=e_1$.

Enfin, on conclut que le nombre d'opérations nécessaires dans ce cas est effectivement $9C(m)d\log d+O(d)$ opérations. ♦

6.7 Factorisation LU par blocs et complexité

Dans cette section, nous sommes prés de présenter l'algorithme de la factorisation LU par blocs ayant pour but, la résolution du système linéaire structuré $Wa=f$ et il est basé sur les structures des matrices blocs, qui sont invariantes par le complément de Schur. Lorsqu'on a la matrice structurée par blocs W du type $(nd\times nd)$ de sorte que ces éléments sont des matrices du type $(d\times d)$, on constate que la factorisation LU par blocs peut être réalisée par l'utilisation de $O(n^2\tau(d))$ opérations, où $\tau(d)$ est le nombre d'opérations nécessaires à effectuer une opération par blocs dans cette matrice. On sait que les méthodes standards pour résoudre un système linéaire du type $(d\times d)$ utilisent $O(d^2)$ opérations, c'est-à-dire $\tau(d)=d^2$, dans le cas où, on utilise l'algorithme FFT rapide, $\tau(d)$ est réduit à $O(d\log d)$ opérations seulement. L'algorithme calculera d'une façon implicite la factorisation LU de W ; $W=LU$ par la transformation du système $Wa=f$ au système équivalent triangulaire supérieur suivant :

$$Ua = \overline{f},$$

où

$$\overline{f} = L^{-1}f,$$

comme on le verra dans l'algorithme suivant.

Algorithme 6.3. SVC $(f \to a)$; La factorisation LU par blocs de $Wa = f$.

Le processus d'éliminations de Gauss par blocs, peut être diviser en trois étapes ; la première est l'étape initiale qui reçoit les données initiales, la deuxième étape est la principale dans ce processus, elle est effectuée d'une façon itérative pour transformer le système $Wa = f$ au système $Ua = \overline{f} = L^{-1}f$, dont il reçoit le $k^{ème}$ complément de Schur $S^k(W) \longleftrightarrow [g\,[k]\,, h\,[k]]^{n-k}$ de W et résulte la $(k+1)^{ème}$ complément de Schur $S^{k+1}(W) \longleftrightarrow [g\,[k+1]\,, h\,[k+1]]^{n-k-1}$ de W et transforme $(f_i\,[k])_{i=1:n}$ au $(f_i\,[k+1])_{i=1:n}$. Dans la troisième étape, on applique les substitutions successives sur le système triangulaire obtenu pour trouver a ; le solution du système de Vandermonde confluent $Wa = f$.

Données : les n nombres non nuls $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et le vecteur f.
Résultats : le vecteur a, telle que $Wa = f$.

Etape 1 : étape initiale.

1. $g_1\,[0] = (1\ 0\ \ldots\ 0)^T$.
2. $lr_0\,[0]^T = 0$.
3. pour $i = 1 : n$
4. $\qquad h_i\,[0] = -(x_i^{-1}\ -x_i^{-2}\ (-1)^2\,(2!)x_i^{-3}\ \ldots\ (-1)^{d-1}\,(d-1)!x_i^{-d})^T$.
5. $\qquad f_i\,[0] = f_i$.
6. si $(i \neq 1)$ $g_i\,[0] = 0$.
7. $lr_i\,[0]^T = e_d^T W_{i1}$, où W_{i1} est déterminée par la structure de déplacement

$$ZW_{i1} - W_{i1}B(x_1)^{-1} = g_i\,[0]\,h_1\,[0]^T - e_1 lr_{i-1}\,[0]^T$$

Etape 2 : étape principale.

1. pour $k = 0 : (n-1)$

Dans cette boucle, on détermine la $(k+1)^{ème}$ ligne de U et on calcule

$$S^{k+1}(W) \longleftrightarrow [g\,[k+1]\,, h\,[k+1]]^{n-k-1}$$

et $(f_i\,[k+1])_{i=1:n}$ à partir de $S^k(W) \longleftrightarrow [g\,[k]\,,h\,[k]]^{n-k}$ et $(f_i\,[k])_{i=1:n}$.

2. pour $j = 1 : n-k$

$U_{k+1,j+k} = \left(S^k(W)\right)_{1j}$

où $\left(S^k(W)\right)_{1j}$ est déterminée par la structure

$$ZS^k(W)_{1j} - S^k(W)_{1j}B(x_{k+j})^{-1} = g_1\,[k]\,h_j\,[k]^T$$

3. $lr_0\,[k+1]^T = 0$.
4. si $k < n-1$
5. pour $i = 1 : (n-k-1)$.
6. $g_i\,[k+1] = DL\,(\eta(x_{k+1}))\,D^{-1}R(w)R(z)^{-1}DL\,(\eta(x_{k+1}))^{-1}\,D^{-1}e_1$.

tels que z et w sont déterminés par

$$\widetilde{z} = R(\Psi)^{-1}JD^{-1}h_1\,[k]\,, \quad \widetilde{w} = R(\Psi)^{-1}JD^{-1}S^k(W)^T_{i,1}e_d$$

et

$$J = [e_n\ e_{n-1}\ e_{n-2}\cdots e_1]\,, \quad \Psi^T = \left[(-1)^{k+1}x^{-(k+1)}\right]_{0\le k\le(d-1)}$$

7. $h_i\,[k+1]^T = h_{i+1}\,[k]^T - h_1\,[k]^T\,D^{-1}R(z)^{-1}DL\,(\eta(x_{k+1}))^{-1}\,L\,(\eta(x_{k+i+1}))\,D^{-1}R(u)D$.

où u est déterminé par

$$\widetilde{u} = R(\Psi)^{-1}JD^{-1}h_{i+1}\,[k]$$

8. $f_i\,[k+1] = f_{i+1}\,[k] - L\,(g_{i+1}\,[k])\,L\,(g_1\,[k])^{-1}]f_1\,[k] +$
$DL\,(\eta(x_{k+1}))\,D^{-1}R(w)R(z)^{-1}DL\,(\eta(x_{k+1}))^{-1}\,D^{-1}L\,(g_1\,[k])^{-1}\,f_1\,[k]$.
9. $lr_i\,[k+1]^T = e_d^T S^{k+1}(W)_{i1}$.

où $S^{k+1}(W)_{i1}$ est déterminée par la structure

$$ZS^{k+1}(W)_{i1} - S^{k+1}(W)_{i1}B(x_{k+2})^{-1} = g_i\,[k+1]\,h_1\,[k+1]^T - e_1lr_{i-1}\,[k+1]^T$$

Etape 3 : étape de substitution.

1. $a_n = U_{nn}^{-1}f_1\,[n-1]$.
2. pour $k = n-1 : 1$
3. $sum = f_1\,[k-1]$.
4. pour $j = (k+1) : n$
5. $sum = sum - U_{kj}a_j$
6. $a_k = U_{kk}^{-1}.sum$.

Dans le tableau suivant, on présente les solutions a_{EGPC4} et a_{SVC} d'un système $Wa = f$ livrés par les codes $EGPC4$ et SVC respectivement, où $n = 3$, $d = 8$, $x_1 = -0.8$ et $x_2 = 0.1$, $x_3 = 0.8$ et $f = e_1 + e_{21} + e_{23}$ ((e_k) est la base canonique).

a_{EGPC4} [1 : 12]	a_{SVC} [1 : 12]	a_{EGPC4} [13 : 24]	a_{SVC} [13 : 24]
$1.7785e+4$	$1.7788e+4$	$4.7599e+4$	$4.7642e+4$
$6.4664e+3$	$6.4673e+3$	$1.7375e+5$	$1.7384e+5$
$4.2413e+3$	$4.2418e+3$	$9.4747e+4$	$9.4834e+4$
$3.6667e+3$	$3.6671e+3$	$5.7863e+5$	$5.7886e+5$
$3.5726e+3$	$3.5729e+3$	$-1.2087e+5$	$-1.2097e+5$
$3.4550e+3$	$3.4553e+3$	$3.2434e+4$	$3.2463e+4$
$2.8325e+3$	$2.8354e+3$	$-1.5416e+4$	$-1.5431e+4$
$1.4415e+3$	$1.4416e+3$	$9.4053e+3$	$9.4156e+3$
$1.0308e+5$	$1.0318e+5$	$-6.2100e+3$	$-6.2180e+3$
$6.1712e+4$	$6.1754e+4$	$3.8035e+3$	$3.8096e+3$
$3.3274e+4$	$3.3304e+4$	$-1.7331e+3$	$-1.7372e+3$
$6.4588e+4$	$6.4626e+4$	$3.4198e+2$	$3.4361e+2$

Avant d'achever ce chapitre, il est nécessaire d'analyser la complexité en temps de cet algorithme. On se base sur les résultats énoncés dans la section précédente.

Théorème 6.10 : *Le produit matrice par vecteur $c = L(u)v$ peut être réalisé avec $C(m)d\log d$ opérations et l'inversion de la matrice $L(v) = L(u)^{-1}$ peut être réalisée par l'utilisation de $2C(m)d\log d$ opérations. Alors la complexité en temps de l'algorithme (6.3) est :*

$$21.5C(m)n^2d\log d + O(n^2d) + O(nd\log d). \quad \diamondsuit$$

Démonstration : Les opérations utilisées dans l'étape principale sont de la forme (a), (b) et (c) ce qui nous permet de déduire que le nombre d'opérations nécéssaires d'effectuer cette étape :

$$T_{\textit{étape }2}(n,d) = 18.5C(m)(n-k-1)d\log d + O(n^2d) + O(nd\log d).$$

Pour effectuer la troisième étape, on a besoin d'utiliser le nombre d'opérations suivant :

$$T_{\acute{e}tape\ 3}(n,d) = 3C(m)n^2 d \log d + O(n^2 d) + O(nd \log d).$$

Finalement, on conclut que la complexité en temps de l'algorithme (6.3) est

$$\begin{aligned} T &= T_{\acute{e}tape\ 1} + T_{\acute{e}tape\ 2} + T_{\acute{e}tape\ 3} \\ &= 21.5C(m)n^2 d \log d + O(n^2 d) + O(nd \log d) \end{aligned}$$

c'est exactement le résultat recherché. ♦

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons présenté un algorithme de $O((d \log d)n^2)$ opérations et de $O(dn)$ stockage pour résoudre un système linéaire de Vandermonde confluent $Wa = f$ basé sur l'éliminations de Gauss par blocs. Il est clair que la méthode que nous avons proposé peut être utilisée pour déterminer les coefficients d'un polynôme d'interpolation d'Hermite $W^T a = f$. Dans ce cas, la solution est un vecteur de (nd) éléments qui représentent les coefficients d'un polynôme d'interpolation

$$P(x) = \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{j=1}^{n} a_j [k] x^{kj}$$

La méthode exposée atteint $O((d \log d)n^2)$ opérations. Pour aboutir à une telle complexité, nous avons mené une étude numérique sur les matrices structurées. De fait, nous avons considéré en particulier les matrices Toeplitz, les matrices de Vandermonde et les matrices de Vandermonde confluentes. La structure de déplacement conçue (et investie) Pour les matrices Toeplitz a été découverte par Kailath, Kung et Morf [29] en 1978. Depuis, il est avéré que la construction d'une équation de déplacement caractérisant une classe de matrices conduit directement à des implémentations numériques performantes sur de telles matrices. En 1984, Heining et Rost [27] ont fait remarquer que les matrices de Vandermonde satisfont une équation de déplacement analogue à celle proposée dans [29]. Dans ce contexte de motivation, Melkemi [36] a, plus récement, démontré que les matrices de Vandermonde confluentes font également partie de la classe des matrices structurées.

Puis nous avons donné une matrice de Vandermonde confluente du type $(nd \times nd)$ vue comme matrice du type $(n \times n)$ dont les éléments sont des matrices du type $(d \times d)$. Nous avons montré ici que ces éléments sont des matrices structurées et admettent, en conséquence, une décomposition canonique en termes de matrices Toeplitz triangulaires. Ce qui permet une manipulation numérique rapide de ces éléments grâce aux FFT. C'est donc pour nous une aubaine heureuse de parler de la transformation discrète de Fourier puisqu'il est question de s'assurer que l'algorithme que nous proposons est, entre autres, numériquement stable.

La stabilité numérique de la FFT que nous avons proposée au troisième chapitre a été empruntée à l'analyse effectuée par Higham [28]. Concernant le produit de Kronecker auquel on a fait appel au cours de cette analyse, on est invité a voir le livre de Golub et Van Loan [21].

Pour la programmation des algorithmes, nous avons utilisé MATLAB [40], [41] qui est à notre avis un code en adéquation avec notre souci d'introduire des opérations matricielles auxiliaires.

Bibliographie

[1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft et J. D. Ullman. *The design and analysis of computer algorithms. Addition Wesly, Reading, MA. (1973).*

[2] G. S. Ammar et W. B. Gragg. *Superfast solution of real positive definite Toeplitz systems. SIAM J. Matrix Anal. 9(1988) 61-76.*

[3] D. Bini. *Parallel solution of certain Toeplitz linear systems. SIAM J. Comput. 13 (1984) 268 276.*

[4] A. Bjork et T. Elfving. *Algorithms for confluent Vandermonde systems. Numer. Math. 21(1973) 130-137.*

[5] A. W. Bojanckzyk, R. P. Brent, F. R. de Hoog et D.R. Sweet. *On the stability of the Bareiss and related Toeplitz factorisation algorithms. SIAM J. Matrix anal. appl. 16(1995) 40-57.*

[6] E. Boros et C. Di Fiore. *On the use of certain matrix algebras associated with discret trigonomitric transforms in matrix displacement decomposition. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 16(1995) 312-326.*

[7] S. Chandrasekaran et A. H. Sayed. *Stabilizing the fast ganeralized Schur algorithme. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 17(1996) 950-983.*

[8] J. Chun et T. Kailath. *Divide and conquer solutions of least squares problems for matrices with displacement structures. SIAM J. Matrix Anal. Appl.12(1991) 128-145.*

[9] J. Chun et T Kailath. *Generalized displacement structure for block Toeplitz, Toeplitz-block and Toeplitz-derived matrices. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 15(1994) 114-128.*

[10] B. Codenotti. *Error analysis of some approximating algorithms. Port. Math. 43 (1985) 113 119.*

[11] C. De Boor et pinkus. *Backward error analysis for totally positive linear systems. Linear Algebra and Appl. 27(1977) 485-490.*

[12] C. J. Demeur. *QR factorisation of confluent Vandermonde matrices. IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processig 38(1990) 1799-1802.*

[13] M. Fielder. Hankel and Loewer matrices. Lin. Alg. Appm. 58(1984) 75-95.

[14] I. Gohberg, T. Kailath et V. Olshevsky. *Fast Gaussian elimination with partial pivoting for matrices with displacement structure. Math. Comput. 64(1995) 1557-1576.*

[15] I. Gohberg et I. Koltracht. *On the inversion of Cauchy matrices, signal processing, Scattering and Operator theory, and numerical methods. Proc. of the MTNS-89 (M. A. Kaashoek, J. H. Van Schuppen et A. C. M. Ran) Birkhauser. Boston. MA. (1990) 381-392.*

[16] I. Gohberg et V. Olshevsky. *Fast algorithms with preprocessing for matrix-vector multiplication problems. J. Complexity 10(1994) 1557-1576.*

[17] G. H. Golub et V. Olshevsky. *Pivoting for structured matrices. Preprint 1997.*

[18] G. H. Golub et C. F. VanLoan. *Matrix computations, John Hopkins. Univ. Press, Baltimore, Third edition, (1996).*

[19] M. Gu. *Stable and efficient algorithms for structured systems of linear equations. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 19(1998) 279-306.*

[20] G. Heining. *Inversion of generalized Cauchy matrices and other classes of structured matrices linear Algebra in Signal Processing. IMA VOL. MATH. APPL. 69(1994) 95-114.*

[21] G. Heining. *Generalized Cauchy-Vandermonde matrices. Lin. Alg. Appl. 270(1998) 45-77.*

[22] G. Heining, P. Jankowski et K. Rost. *Fast inversion of Toeplitz-plus-Hankel matrices Numer. Math. 52(1988)665-682.*

[23] G. Heining, W. Hoppe et K. Rost. *Structured matrices interpolation and approximation problems Wissenchaftl. Zeitsschrift der TU Karl-marx-Stadt 31(1989) 196-202.*

[24] G. Heining et K. Rost. *Algebraic methods for Toeplitz-like matrices and operators Oper. Theory, 13(1984) 109-127.*

[25] N.J. Higham. *Accuracy and stability of Numerical algorithms. SIAM. Philadelphia. (1996).*

[26] T. Kailath, S. Y. Kung et M. Morf. *Displacement ranks of matrices and linear equation. J. Math. Anal. 68(1979) 395-407.*

[27] T. Kailath et V. Olshevsky. *Displacement structure approach to Chebychev-Vandermonde and related matrices. Integ. Rq. and Oper. Th. 22(1995) 65-92.*

[28] T. Kailath et A. H. Sayed. *Displacement structure : Theory and applications. SIAM review 37(1995) 297-386.*

[29] H. Khalil. *Matrices structurées et matrices de Toeplitz par blocs de Toeplitz en calcul numérique et formel. Thèse de doctorat en Mathématique (2008).*

[30] L. Melkemi. *Confluent Vandermonde matrices using Sylvester's structure. RR 98-16, ENS-Lyon Laboratoire LIP (1998).*

[31] L. Melkemi. *Fast QR factorization for confluent Vandermonde-like matrices and Chebycheb-Vandermonde-like matrices. RR 98-20, ENS-Lyon Laboratoire LIP (1998).*

[32] L. Melkemi. *Structures de déplacement pour les matrices de Vandermonde p-confluentes. C. R. Acad. Sci. Paris Série I(1999) 621-926.*

[33] L. Melkemi. *Contribution à l'étude des matrices structurées. Thèse de doctorat en Mathématique (2000).*

[34] L. Melkemi, A. Benaissa et R. Benacer. *Factorisation QR des matrices de Tchebychev-Vandermonde confluentes. C. R. Acad. Sci. Paris Série I(2000) 147-152.*

[35] L. Melkemi et F. Rajah. Block LU factorization of confluent Vandermonde matrices. Applied Mathematics Letters 23 (2010) 747-750.

[36] Mokhtari et A. Mesbah. *Apprendre et maîtrise MATLAB versions 4 & 5 et SIMULINK.*

[37] M. Mokhtari et A. Mesbah. *MATLAB versions 5.2 & 5.3 et SIMULINK.*

[38] V. Plan. *On computing with structured matrices. Math. comp.55(1990) 179-190.*