REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED KHIDER DE BISKRA
FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIEUR

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE MAGISTER

Presenté par

ZIBAR SAïD

Spécialité : Mathématiques
Option : Probabilités et processus stochastiques

CONTROLE OPTIMALE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES RETROGRADES

Soutenue le

Devant le jury composé de :

MEZERDI Brahim	**Professeur**	**UMK de Biskra**	**Président**
NECIR Abdelhakim	**Professeur**	**UMK de Biskra**	**Examinateur**
BAHLALI Seid	**Maître de Conférence**	**UMK de Biskra**	**Rapporteur**
MELKEMI Khaled	**Maître de Conférence**	**UMK de Biskra**	**Examinateur**

Table des matières

0.1 Introduction

Dans ce mémoire de magister, on s'intéresse à un problème de contrôle stochastique, où le sytème est gouverné par une équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) de la forme

$$\begin{cases} dy_t^v = b\left(t, y_t^v, z_t^v, v_t\right) dt + z_t^v \, dW_t, \\ y_T^v = \xi, \end{cases}$$

où b est une fonction donnée, ξ est la condition terminal et $W = (W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien de dimension d, défini sur un espace probabilisé filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathcal{P}\right)$ satisfaisant les conditions habituelles. La variable contrôle $v = (v_t)$, appelée contrôle strict (classique), est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs dans un sous ensemble U de $\mathbb{R}^m$. On note par $\mathcal{U}$ la classe de tous les contrôles stricts.

L'objectif du problème de contrôle stochastique est de minimiser une fonction coût de la forme

$$J(v) = \mathbb{E}\left[g\left(y_0^v\right) + \int_0^T h\left(t, y_t^v, z_t^v, v_t\right) dt\right],$$

où g et h sont des fonctions données et (y_t^v, z_t^v) est la trajectoire du système controllée par v.

Un contrôle $u \in \mathcal{U}$ est dit optimal s'il vérifie

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v).$$

Le problème de contrôle stochastique des équations rétrogrades et progressive-rétrogrades a été étudié par plusieurs auteurs. La première contribution concerne le contrôle des systèmes progressive-rétrogrades a été dévellopée par Peng [30]. D'autres résultats ont été obtenus par Xu [34], Wu [33], Shi et Wu [32], Ji et Zhou [22], Bahhlali et Labed [3] et Bahlali [6].

D'une autre part, le contrôle des systèmes rétrogrades a été étudié par El-Karoui et al [14], Dokuchaev et Zhou [9] et Bahlali ·

Notre objectif dans ce mémoire est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalités, sous forme de principe du maximum de Pontryagin, pour deux modèles. Le premier concerne les contrôles stricts (classiques) qui sont des processus à valeurs dans un sous ensemble de $\mathbb{R}^m$. Le second est l'extension du premier au cas des contrôles relaxés et qui sont des processus à valeurs dans l'espace des mesures de probabilités.

Pour obtenir ces résultats, nous procederons comme suit :

Premièrement, on établit les conditions d'optimalité pour les contrôles stricts. Puisque l'ensemble des contrôles stricts n'est pas convexe, le chemin classique consiste à utiliser la méthode des perturbations fortes. Plus précisement, si u est un contrôle strict optimal et v un contrôle strict arbitraire, avec $\theta > 0$ assez petit, on définit la perturbation forte suivante

$$u_t^\theta = \begin{cases} v & \text{si } t \in [\tau, \tau + \theta], \\ u_t & \text{si non.} \end{cases}$$

On dérive l'équation variationnelle de l'équation d'état et l'inégalité variationnelle de l'inégalité

$$0 \leq J\left(u^\theta\right) - J(u).$$

La majeure difficulté est que l'équation d'état et le coût intégral dépendent de deux variables y_t et z_t. Alors, on ne peut pas obtenir directement l'inéquation variationnelle, parcequ'il est difficile de manipuler la variable z_t. Pour remédier à cette difficulté, on introduit une nouvelle méthode qui consisite à transformer le problème initial en un problème sans coût intégral en ajoutant une équation unidimentionnelle. On établit alors des conditions nécessaires d'optimalité pour le problème restreint et par une transformation sur le processus adjoint et l'équation associée, on obtient les conditions nécessaires pour le problème initial. Pour cloturer cette première partie de ce magister, on étudie quand ces conditions nécessaires seront suffisantes.

La seconde partie de ce mémoire concerne les conditions d'optimalité des contrôles relaxés. Dans le problème relaxé, le controleur choisit à l'instant t une mesure de probabilité $q_t(da)$ sur l'ensemble , plutôt qu'un élément v de U. Le système sera gouverné par l'EDSR

$$\begin{cases} dy_t^q = \int_U b\left(t, y_t^q, z_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dt + z_t^q dW_t, \\ y_T^q = \xi. \end{cases}$$

La fonction coût à minimiser, sur l'ensemble $\mathcal{R}$ des contrôles relaxés, est de la forme

$$\mathcal{J}\left(q\right) = \mathbb{E}\left[g\left(y_0^q\right) + \int_0^T \int_U h\left(t, y_t^q, z_t^q, a\right) q_t\left(da\right) dt\right].$$

Un contrôle relaxé $\mu \in \mathcal{R}$ est dit optimal s'il vérifie

$$\mathcal{J}\left(\mu\right) = \inf_{q \in \mathcal{R}} \mathcal{J}\left(q\right).$$

Le problème de contrôle relaxé généralise celui des contrôles stricts. En effet, si $q_t\left(da\right) = \delta_{v_t}\left(da\right)$ est la mesure de Dirac concentrée en un seul point v_t, alors on obtient un problème de contrôle strict comme cas particulier de celui des contrôles relaxés

En utilisant essentiellement le principe variationnel d'Ekeland, on établit un principe du maximum approché et par passage à la limite, on déduit un principe du maximum pour les contrôles relaxés.

Le plan de ce travail est comme suit :

Chapitre 1

Dans ce chapitre introductif et qui nous sera d'une grande utilité pour la suite, on donnera une démonstration des principaux résultats de la théorie des équations différentielles stochastiques progressives et rétrogrades. Nous insisterons sur les résultats d'existence et d'unicité des solutions de ces différents types d'équations ainsi que sur les techniques de calcul et d'estimations des solutions.

Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous établirons les résultats essentiels de ce magister et quel sont les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les contrôles stricts, sous forme de principe du maximum de Pontryagin, pour des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques rétrogrades. Nous établirons les résultats, dans le cas où le domaine des contrôles stricts n'est pas convexe, en utilisant une nouvelle méthode qui consiste à traiter le problème sans coût intégral. Nous donnerons les résultats pour ce problème restreint et par une trnasformation adéquate sur le processus adjoint et le Hamiltonien, nous dérivons les résultats pour le problème avec coût intégral.

Chapitre 3

Dans ce chapitre, on généralisera les résultats du deuxième chapitre au cas des contrôles relaxés qui sont des processus à valeurs mesures. Le principal outil sera le principe variationnel d'Ekeland. On établira un principe du maximum approché vérifié par des contrôles ε-optimaux et par passage à la limite, on établira les résultats.

Nous avons besoin par la suite des notations matricielles suivantes. On note par $\mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R})$ l'espace des matrices $n \times d$ à coefficients reels et par $\mathcal{M}_{n\times n}^{d}(\mathbb{R})$ l'espace linéaire des vecteurs de matrices $M = (M_1, ..., M_d)$, où $M_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Pour tout $M, N \in \mathcal{M}_{n\times n}^{d}(\mathbb{R})$, $L, S \in \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R})$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{R}^d$, on utilise les notations suivantes :

$xy = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$ est le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$,

$LS = \sum_{i=1}^{d} L_i S_i \in \mathbb{R}$, où $L_i$et S_i sont les i^{eme} collones des matrices L et S,

$$ML = \sum_{i=1}^{d} M_i L_i \in \mathbb{R}^n,$$

$$Mxz = \sum_{i=1}^{d} (M_i x)\, z_i \in \mathbb{R}^n,$$

$$MN = \sum_{i=1}^{d} M_i N_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),$$

$$MLN = \sum_{i=1}^{d} M_i L N_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),$$

$$MLz = \sum_{i=1}^{d} M_i L z_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

On note par L^* la transposée de la matrice L et $M^* = (M_1^*, ..., M_d^*)$.

Chapitre 1

Equations différentielles stochastiques

Les équations différentielles stochastiques constituent une généralisation des équations différentielles ordinaires. Celles-ci ont été introduites pour la première fois en 1946 par K.Ito pour étudier les trajectoires de processus de diffusion. Cette notion a été traitée de manière profonde en relation avec la théorie des semi-martingales. Des applications dans tous les domaines des sciences de l'ingénieur (filtrage des processus, contrôle optimal, mathématiques finançières, gestion des stocks etc...) ont été réalisés en utilisant ce genre d'équations. Les équations différentielles stochastiques constituent un modèle de diffusion en milieu non homogène. Soit x_t la position d'une particule assez petite en suspension dans un liquide à l'instant t. Si on néglige l'inertie de la particule, on peut admettre que le déplacement de cette derniere est la résultante de deux composantes, d'une part un déplacement centré dû à la vitesse macroscopique du liquide,d'autre part des fluctuations provoquées par l'agitation thermique des molécules du liquide.

Soit $b(t,x)$ la vitesse macroscopique du liquide au point x à l'instant t. On supposera que la composante fluctuative dépend du temps, de la position x et de la durée Ut pendant laquelle est envisagé le déplacement, alors :

$$x_{t+Ut} - x_t = b(t, x_t).Ut + \xi_{t,x_t,Ut}.Avec\ E\left[\xi_{t,x_t,Ut}\right] = 0.$$

Si on suppose que $\xi_{t,x_t,Ut} = \sigma(t, x_t).\xi_{t,Ut}$ où $\sigma(t, x_t)$ désigne les propriétés du milieu au point x_t et $\xi_{t,Ut}$ l'accroissement en milieu homogène, i.e : $\xi_{t,Ut} = W_{t+Ut} - W_t$ avec W_t un mouvement Brownien, alors :

$$x_{t+Ut} - x_t = b(t, x_t).Ut + \sigma(t, x_t).\left(W_{t+Ut} - W_t\right).$$

En passant aux différentielles on obtient :

$$dx_t = b(t, x_t).dt + \sigma(t, x_t).dW_t.$$

La formulation intégrale nous donne

$$x_t = a + \int_0^t b(s, x_s).ds + \int_0^t \sigma(s, x_s).dW_s.$$

Comme $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ est un processus dont les trajectoires sont $\mathcal{P}\ ps$ à variations infinies $\int_0^t \sigma(s, x_s).dW_s$ ne peut pas être considérée comme une intégrale de Lebesgue-Stieljes. Par conséquent cette équation ne peut être interprétée comme une équation différentielle ordinaire. Avant de donner la définition de solution à cette équation on doit justifier son écriture et donner un sens aux quantités de la forme $\int_0^t \sigma(s, x_s).dW_s$ appelées intégrales stochastiques d'Ito.

1.1 Equations différentielles stochastiques progressives.

Soient :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_t)$ un espace probabilisé muni d'une filtration.

$x = (x_t)_{t\in[0,T]}$ un processus stochastique continu à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

$W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien d-dimensionnel.

$b : \mathbb{R}^d \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \times [0,T] \longrightarrow M_d(\mathbb{R})$ deux fonctions Boreliennes.

ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ mesurable indépendante de W telle que :
$E\left[|\xi|^P\right] < \infty \ \ \forall\, p > 1$

Soit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dx_t &= b(t, x_t)\, dt + \sigma(t, x_t)\, dW_t \\ x_0 &= \xi \end{cases} \qquad ((1 \cdot 1))$$

Soient les conditions suivantes :

1.2) $\mathcal{P}\left[x_0 = \xi\right] = 1$
1.3) $\mathcal{P}\left[\int_0^t \left(|b(s, x_s)| + \sigma^2(s, x_s)\right) ds < \infty\right] = 1$
1.4) $x_t = \xi + \int_0^t b(s, x_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, x_s)\, dW_s \quad \mathcal{P}\ ps$

Définition 1.1

On dit que l'équation (1.1) admet une solution forte (ou trajectorielle) si pour chaque espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathcal{P})$*, pour tout mouvement brownien* $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ *il existe un processus* $x = (x_t)_{t\in[0,T]}$ *continu tel que les conditions (1.2), (1.3), (1.4) soient vérifiées.*

Quand on parle de solution au sens fort on sous-entend que l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_t)$ et le mouvement brownien $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ sont déjà donnés .

Si de plus $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$ alors le processus x est $(\mathcal{F}_t)_t$-adapté et on a $\mathcal{F}_t^x \subset \mathcal{F}_t^W$.

Définition 1.2

On dit que l'équation (1.1) admet une solution faible (ou en loi) si on peut trouver un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathcal{P})$*, un mouvement brownien* $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$*, un processus* $x = (x_t)_{t\in[0,T]}$ *continu tels que les conditions (1.2), (1.3), (1.4) soient réalisées.*

Quand on parle de solution faible, on doit trouver un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathcal{P})$, un mouvement brownien $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ et un processus continu $x = (x_t)_{t\in[0,T]}$.

Donc une solution faible est la collection des objets $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, (\mathcal{F}_t)_t, W, x)$.

Dans beaucoup de cas, ou la solution faible existe, on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^x$ et par conséquent W est un mouvement brownien relativement à $(\mathcal{F}_t)_t$. C'est pourquoi dans le cas des solutions faibles on a $\mathcal{F}_t^W \subset \mathcal{F}_t^x$.

Remarque 1.3

Les solutions faibles ne sont pas mesurables par rapport à $\mathcal{F}_t^W$. Et c'est ce qui différencie les solutions faibles des solutions fortes.

Définition 1.4

On dit que l'équation (1.1) admet une solution forte unique si pour deux solutions fortes $x = (x_t)_{t\in[0,T]}$ *et* $y = (y_t)_{t\in[0,T]}$ *on a :*

$$\mathcal{P}\left\{ \sup_{t\in[0,T]} |x_t - y_t| > 0 \right\} = 0$$

C'est à dire :

$$\mathcal{P}\left\{ x_t = y_t \ , \forall\ t \in [0,T] \right\} = 1$$

Le principal théorème qui nous assure l'existence et l'unicité forte d'une solution de l'équation (1.1) est le suivant :

Théorème 1.5 (K. Ito)

On suppose que les coefficient b *et* σ *sont mesurables et vérifient, il existe une constante* $k > 0$ *telle que* $\forall\ x, y\ \in \mathbb{R}^d$ *on a :*

$$|b\,(t,x) \text{ - } b(t,y)|^2 + |\sigma\,(t,x) \text{ - } \sigma(t,y)|^2 \leq k\,|x \text{ - } y|^2 \tag{(1 \cdot 5)}$$

$$|b\,(t,x)|^2 + |\sigma\,(t,x)|^2 \leq k\left(1 + |x|^2\right) \tag{(1 \cdot 6)}$$

Alors l'équation (1.1) admet une solution forte unique $x = (x_t)_{t\in[0,T]}$, $(\mathcal{F}_t)_t$*-adaptée et continue avec condition initiale* $x_0 = \xi$. *De plus cette solution est markovienne et vérifie :*

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |x_t|^p\right] < M \quad \forall p > 1,$$

où M *est une constante qui dépend de* k, p, T *et* ξ

Preuve

i - Unicité : Soient $x = (x_t)_{t\in[0,T]}$ et $y = (y_t)_{t\in[0,T]}$ deux solutions de l'équation (1.1) telles que $x_0 = y_0 = \xi$

en appliquant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ et en utilisant les formules de x_t et y_t on obtient :

$$|x_t - y_t|^2 \leq 2\left|\int_0^t [b(s,x_s) - b(s,y_s)]\, ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t [\sigma(s,x_s) - \sigma(s,y_s)]\, dW_s\right|^2$$

en passant à l'espérance mathématique on obtient :

$$\begin{aligned} E\left[|x_t - y_t|^2\right] \leq\ & 2E\left[\left|\int_0^t [b(s,x_s) - b(s,y_s)]\, ds\right|^2\right] \\ & +2E\left[\left|\int_0^t [\sigma(s,x_s) - \sigma(s,y_s)]\, dW_s\right|^2\right] \end{aligned}$$

par les inégalités de Cauchy-Schwarz et Buckholders-Davis-Gundy on a :

$$\begin{aligned} E\left[|x_t - y_t|^2\right] \leq\ & 2TE\left[\int_0^t |b(s,x_s) - b(s,y_s)|^2\, ds\right] \\ & +2E\left[\int_0^t |\sigma(s,x_s) - \sigma(s,y_s)|^2\, ds\right] \end{aligned}$$

En appliquant la condition de Lipschitz (1.5) on obtient :

$$E\left[|x_t - y_t|^2\right] \leq C \int_0^t E\,|x_s - y_s|^2\,ds$$

ou $C = \max(2Tk, 2k)$

En appliquant le lemme de Gronwall, il résulte que :

$$E\left[|x_t - y_t|^2\right] = 0$$

En appliquant l'inégalité de Tchebychev on obtient :

$$\mathcal{P}\left\{|x_t - y_t| > \varepsilon\right\} \leq \frac{E\left[|x_t - y_t|^2\right]}{\varepsilon} = 0\ ;\ \forall\, \varepsilon > 0$$

Donc pour tout ensemble D dénombrable partout dense dans $[0, T]$ on a :

$$\mathcal{P}\left\{\sup_{t\in D} |x_t - y_t| > 0\right\} = 0$$

Enfin et puisque les processus x et y sont continus on conclut que :

$$\mathcal{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} |x_t - y_t| > 0\right\} = 0$$

Ce qui prouve l'unicité forte de la solution.

ii - Existence : On montre l'existence d'une solution forte en utilisant la méthode des approximations succéssives et pour cela on pose :

$$x_t^n = \xi + \int_0^t b(s, x_s^{n\text{-}1})ds + \int_0^t \sigma(s, x_s^{n\text{-}1})dW_s$$

$$x_t^{n+1} - x_t^n = \int_0^t \left(b(s, x_s^n) - b(s, x_s^{n\text{-}1})\right) ds + \int_0^t \left(\sigma(s, x_s^n) - \sigma(s, x_s^{n\text{-}1})\right) dW_s$$

En utilisant la même technique que pour l'unicité on obtient :

$$E\left[\left|x_t^{n+1}-x_t^n\right|^2\right]\leq C\int\limits_0^t E\left[\left|x_s^n-x_s^{n\text{-}1}\right|^2\right]ds$$

ou $C=\max(2Tk,2k)$

Par récurrence sur n il résulte que :

$$E\left[\left|x_t^{n+1}-x_t^n\right|^2\right]\leq\frac{(MT)^{n+1}}{(n+1)\,!}$$

ou $M=\max\left(C,E\left[|x_0|^2\right]\right)$

si on prends $p>1$ on aura :

$$E\left[\left|x_t^{n+p}-x_t^n\right|^2\right]\leq\sum_{k=n}^{n+p}\frac{(MT)^k}{k!}\underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}0$$

Donc (x_t^n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_2(\Omega)$ et par conséquent elle est convergente, notons x_t sa limite.

En passant à la limite dans (1.7) on obtient :

$$x_t=\xi+\int\limits_0^t b(s,x_s)\,ds+\int\limits_0^t\sigma(s,x_s)\,dW_s$$

Donc x_t est une solution de l'équation (1.1)

iii - Montrons que $E\left[\sup\limits_{t\in[0,T]}|x_t|^p\right]<M\quad\forall\, p>1$

$$x_t=\xi+\int\limits_0^t b(s,x_s)\,ds+\int\limits_0^t\sigma(s,x_s)\,dW_s$$

Par l'inégalité $(a+b+c)^2\leq 3a^2+3b^2+3c^2$ et en passant aux éspérances on a :

$$E\left[|x_t|^2\right] \leq 3E\left[|\xi|^2\right] + 3E\left[\left|\int_0^t b(s,x_s)\,ds\right|^2\right] + 3E\left[\left|\int_0^t \sigma(s,x_s)\,dW_s\right|^2\right]$$

par les inégalités deCauchy-Schwarz et Buckholder-Davis-Gundy on a :

$$E\left[|x_t|^2\right] \leq 3E\left[|\xi|^2\right] + 3TE\left[\int_0^t \left|b(s,x_s)\right|^2 ds\right] + 3E\left[\int_0^t \left|\sigma(s,x_s)\right|^2 ds\right]$$

D'aprés la condition de croissance linéaire (1.6) on a :

$$E\left[|x_t|^2\right] \leq 3E\left[|\xi|^2\right] + 3Tk\int_0^t E\left[1+|x_s|^2\right] ds + 3k\int_0^t E\left[1+|x_s|^2\right] ds$$

En posant $m = \max(3, 3Tk, 3k)$ on a :

$$E\left[|x_t|^2\right] \leq mE\left[|\xi|^2\right] + 2m\int_0^t E\left[1+|x_s|^2\right] ds$$

En posant $c = \max(m, 2m)$ on obtient :

$$E\left[|x_t|^2\right] \leq c\left(1+E\left[|\xi|^2\right]\right) + c\int_0^t E\left[|x_s|^2\right] ds$$

En appliquant le lemme de Gronwal on obtient :

$$E\left[|x_t|^2\right] \leq c\left(1+E\left[|\xi|^2\right]\right)\exp(ct) \quad \forall\, t \in [0,T]$$

puisque $E\left[|\xi|^2\right] < \infty$ alors en posant $M = c\left(1+E\left[|\xi|^2\right]\right)\exp(cT)$ on obtient :

$$E\left[|x_t|^2\right] < M \quad \forall\, t \in [0,T]$$

Enfin par l'inégalité de Buckholder-Davis-Gundy on a $E\left[\sup_{t\in[0,T]} |x_t|^p\right] < M\,;\forall\, p > 1.$■

Remarques :

1) La condition de Lipschitz (1.5) nous assure l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1.1)

2) La condition de croissance linéaire (1.6) nous assure la non explosion de la solution et si on n'a pas cette condition, l'équation (1.1) admettra une solution unique mais seulement jusqu'au temps d'explosion.

1.2 Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades

Le but de ce chapitre est de présenter brièvement le résultat d'existence et d'unicité d'équations différentielles stochastiques rétrogrades dont les coefficients sont globalement lipshitziens .Ce résultat a été obtenu par Pardoux et Peng avec le générateur non linéaire et une donné terminale de carré intégrable.

1.2.1 Présentation du problème

On considère sur un espace probabilisé filtré$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{P})$,une variable aléatoire ξ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$, avec T le temps terminal.

On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} -dy_t = b(y_t)dt\ , \quad t \in [0,T] \\ y_T = \xi \end{cases}$$

En imposant que, pour tout instant t, le processus y_t soit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.c'est-a-dire que le processus y_t ne dépend pas du futur après t

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $b \equiv 0$.

le candidat naturel est $y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe. La meilleure aproximation-disons dans L^2- adaptée est la martingale $y_t = \mathbb{E}(\xi \diagup \mathcal{F}_t)$. Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement Brownien, le théorème de représentation des martingales d'Itô permet de construire un processus z de carré intégrable et adapté tel que

$$y_t = \mathbb{E}(\xi \diagup \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi) + \int\limits_0^t z_s dW_s$$

Un calcul élémentaire montre que

$$y_t = \xi - \int_t^T z_s dW_s \quad , \quad t \in [0,T]$$

C'est à dire

$$\begin{cases} -dy_t = -z_t dW_t \\ y_T = \xi \end{cases}$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus z dont le rôle est de rendre le processus y_t adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à b de dépendre du processus z ; l'équation devient donc

$$\begin{cases} -dy_t = b(t, y_t, z_t)dt - z_t dW_t \quad ; \quad t \in [0,T] \\ y_T = \xi \end{cases}$$

Notation : On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité complet et W un mouvement Brownien d-dimensionnel sur cet espace. On notera $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$la filtration naturelle du mouvement Brownien W . On travaillera avec deux espaces de processus

Soit $S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ l'espace vectoriel formé des processus y_t , progressivement mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tel que

$$||y||_{S^2}^2 = \mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0,T]} |y_t|^2\right] < \infty$$

et on a aussi $S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ le sous-espace formé par les processus continus.

On notera aussi $M^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ l'espace des processus z progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$ tel que

$$||z||_{M^2}^2=\mathbb{E}\left[\int_0^T ||z_t||^2\right]<\infty$$

où si $z\in\mathbb{R}^{k\times d}$, $||z_t||^2=trace\,(zz^*)$. $M_2\left(\mathbb{R}^{k*d}\right)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $M^2\left(\mathbb{R}^{k*d}\right)$

Les espaces S^2, S_c^2, M_2 sont des espaces de Banach pour les normes définies précidement ;nous désignerons B^2 l'espace de Banach $S_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)\times M_2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$.

Nous nous donnons maintenant une application aléatoire b définie sur $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ tel que pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$, le processus $\{b\,(t,y,z)\}_{t\in[0,T]}$ soit progressivement mesurable.

On voudrait résoudre l'équation différentielles stochastique rétrograde suivante

$$\begin{cases} -dy_t=b(t,y_t,z_t)dt-z_tdW_t \quad ; \quad t\in[0,T] \\ y_T=\xi \end{cases}$$

ou sous forme intégrale,

$$y_t=\xi+\int_t^T b(r,y_r,z_r)dr-\int_t^T z_rdW_r \qquad ((I\cdot 2))$$

La fonction b s'appelle le générateur de l'équation différentielle stochastique rétrograde et ξ la condition terminale.

Définition 1.6 : *Une solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde* $(I.2)$ *est un couple de processus* $\{(y_t,z_t)\}_{t\in[0,T]}$ *vérifiant*

i).y et z sont progréssivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$*et* $\mathbb{R}^{k\times d}$

ii). On a $\mathcal{P}-p.s$

$$\int_0^T \left\{|b(r,y_r,z_r)|+||z_r||^2\right\}dr<\infty$$

iii). On a $\mathcal{P}-p.s$

$$y_t = \xi + \int_t^T b(r, y_r, z_r)dr - \int_t^T z_r dW_r \qquad t \in [0, T].$$

Remarques 1.7 :

i). les intégrales de l'équation $(I.2)$ étant bien définies.

ii). le processus y_t est une semi-martingale continue adapté donc en particulier y_0 est une quantité déterministe.

Avant de donner le théorème fondamental du pardoux et Peng d'éxistence et d'unicite ,nous allons montré ,que sous une hypothèse sur le générateur b, le processus y appartient à S^2

Proposition 1.8 : *Supposons qu'il existe un processus$\{b_t\}_{t\geq 0}$ positif, appartenant à $M_2(\mathbb{R})$ et deux constantes positives C et K tels que*

$$\forall (t.y.z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \quad |b(t, y, z)| \leq b_t + C|y| + K||z||.$$

soit $z \in M_2$ et si $\{(y_t, z_t)\}$ est une solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde $(I.2)$ alors y appartenant à S_c^2.

Preuve : On a pour tout $t \in [0, T]$

$$y_t = y_0 - \int_0^t b(r, y_r, z_r)dr + \int_0^t z_r dW_r.$$

et par suite, utilsant l'hypothèse sur b

$$y_t \leq |y_0| + \int_0^T (b_t + K||z_r||)dr + \sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t z_r dW_r| + C\int_0^t |y_r|dr$$

Posons

$$\xi = |y_0| + \int_0^T (b_t + K||z_r||)dr + \sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t z_r dW_r|$$

Par hypothèse, z appartient à M_2, le troisième terme est de carré intégrable ;il en est de même pour $\{b_t\}_{t\in[0,T]}$ et y_0 est déterministe donc de carré intégrable.

Il s'en suit que ξ est une variable aléatoire de carré intégrable. Le lemme de Gronwall fournit l'inégalité

$$\sup_{t\in[0,T]} \mid y_t \mid \leq \xi e^{CT}$$

qui montre que y appartient à S^2.■

Lemme 1.9 : *Soit* $y \in S^2\left(\mathbb{R}^k\right)$ *et* $z \in M_2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ *.donc*

$$\left\{\int_0^t z_s.y_s dW_s, t \in [0,T]\right\}$$

est une martingale uniformément intégrable.

Preuve : Le résultat se déduit principalement de l'Inégalite de Bulkholder-Davis-Gundy"(BDG)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t y_r.z_r dW_r|\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |y_r|^2||z_r||^2 dW_r\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |y_t| \left(\int_0^T ||z_r||^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}$$

donc, comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t y_r.z_r dW_r|\right] \leq \frac{C}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |y_t|^2\right] + \frac{C}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T ||z_r||^2 dr\right]$$

d'ou le résultat.■

1.2.2 Le cas lipschitzien

Nous allons montrer dans ce paragraphe un premier résultat d'existence et d'unicité.Ce résultat est dû à Pardoux et Peng en 1990 ; C'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour L'équation différentielle stochastique rétrograde dans le cas où le générateur est non -linéaire.

Rappelons que b est définie sur $[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$,telle que ,pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{k*d}$,le processus $\{b(t,y,z)\}_{t\in[0,T]}$ soit progressivement mesurable. On considère également ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

On suppose que

(L) Il existe une constante K telle que $\mathcal{P}-p.s,$

i). condition de lipscitz en (y,z)pour tout t, y', y, z, z'

$$|b(t,y,z)-b(t,y',z')|\leq K(|y-y'|+||z-z'||)$$

ii). condition d'intégrabilité

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2+\int_0^T|b(r,0,0)|^2dr\right]<\infty$$

Nous commençons par un cas très simple, celui où b ne dépend ni de y ni de z **i.e.** on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ dans $M_2\left(\mathbb{R}^k\right)$ et on veut trouver une solution de L'équation différentielle stochastique rétrograde

$$y_t=\xi+\int_t^T F_r dr-\int_t^T z_r dW_r. \qquad t\in[0,T]$$

Lemme 1.10 : *Soient* $\xi\in L^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{F_t\}_{t\in[0,T]}\in M_2\left(\mathbb{R}^k\right)$ *.L'équation différentielle stochastique rétrograde* (2.1) *possède une unique solution* (y,z) *telle que* $z\in M_2$.

Preuve : Supposons dans un premier temps que (y,z) soit une solution vérifiant z

$\in M_2$. si on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$,on a nécéssairement

$$y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_r dr \setminus \mathcal{F}_t\right).$$

On définit donc y à l'aide de la formule précèdente et il reste à trouver z. Remarquont que ,d'aprés le théorème de Fubini, comme F est progréssivement mesurable , $\int_0^t F_r dr$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$;en fait dans S_c^2 puisque F est de carré intégrable .

On a alors, pour tout $t \in [0\ ,T] = \int_t^T F_r dr - \int_t^T z_r dW_r$.

$$y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_r dr \diagdown \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_r dr = M_t - \int_0^t F_r dr.$$

M est une martingale Brownienne, donc en peut construit un processus z appartient à M_2 tel que

$$y_t = M_t - \int_0^t F_r dr. = M_0 + \int_0^t z_r dW_r - \int_0^t F_r dr$$

On vérifie facilement que (y, z) ainsi construit est une solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde qui étudiée puisque comme $y_T = \xi$ on a

$$\begin{aligned} y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - (M_0 + \int_0^T z_r dW_r - \int_0^T F_r dr) \\ &= \int_t^T F_r dr - \int_t^T z_r dW_r. \end{aligned}$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $z \in M_2$.■

Nous montrons maintenant le théorème de Pardaux et Peng.

Théorème 1.11 (Pardoux-Peng) : *Sous l'hypothèse* (L) *, L'équation différentielle stochastique rétrograde* $(I.2)$ *possède une unique solution* (y, z) *telle que* $z \in M_2$.

Preuve : La preuve consiste a utiliser un argument de point fixe dans l'espace de Banach B^2 avec une application $p(t)$ de B^2 dans lui-même de sorte que $(y,z) \in B^2$ est une solution de L'équation différentielle stochastique rétrograde (1.2) si et seulement si c'est un point fixe de p.

On définit $(y,z) = p(U,V)$ pour tous (U,V) élément de B^2 comme étant la solution de L'équation différentielle stochastique rétrograde

$$y_t = \xi + \int_t^T b(r,U_r,V_r)dr - \int_0^T z_r dW_r$$

On remarque que cette équation différentielle stochastique rétrograde possède une unique solution qui est dans B^2.Par conséquent, posons $F_r = f(r,U_r,V_r)$, ce processus appartient a M_2 puisque,b étant lipscitz,

$$|b_r| \leq |b(r,0,0)| + K|U_r| + K||V_r||$$

Remarquons que ces trois derniéres processus sont de carré intégrable, alors (y,z) est une solution unique telle que $z \in M_2$

(y,z) appartient à B^2 l'intégralité de z est obtenue par construction et d'après la proposition (1.8) le processus y appartient a S_c^2.

Soient (U,V) et (U',V') deux eléments de B^2 et $(y,z) = p(U,V)$;$(y',z') = p(U',V')$

Notons $y = y - y'$ et $z = z - z'$. il est clair que $y_T = 0$ et

$$dy_t = -\{b(t,U_t,V_t) - b(t,U'_t,V'_t)\}\,dt + z_t dW_t$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t}|y_t|^2$ pour obtenir

$$d\left(e^{\alpha t}|y_t|^2\right) = \alpha e^{\alpha t}|y_t|^2 dt - 2e^{\alpha t} y_t.\{b(t,U_t,V_t) - b(t,U'_t,V'_t)\}\,dt$$

Intégrant entre t et T , on obtient

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr &= \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha|y_r|^2 + 2y_r.\{b(t,U_t,V_t) \\ &\quad -b(t,U\acute{}_t,V\acute{}_t)\}dr - \int_t^T 2e^{\alpha r}y_r z_r dW_r \end{aligned}$$

Et comme b est lipscitz , il vient donc d'aprés la notation u,v de $U-U\acute{}$ et $V-V\acute{}$ respectivement

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr &\leq \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha|y_r|^2 + 2K|y_r|.|u_r|. + 2K|y_r|.||v_r||.\right)dr \\ &\quad - \int_t^T 2e^{\alpha r}y_r z_r dW_r. \end{aligned}$$

Pour tout $\xi \succ 0$, on a $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$,donc

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr &\leq \int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha + \frac{2K^2}{\varepsilon})|y_t|^2 dr - \int_t^T 2e^{\alpha r}y_r z_r dW_r \\ &\quad + \varepsilon\int_t^T e^{\alpha r}\left(|u_r|^2 + ||v_r||^2\right)dr. \end{aligned}$$

et prenant $\alpha = \frac{2k^2}{\varepsilon}$,on a noté $R_\varepsilon = \varepsilon\int_t^T e^{\alpha r}\left(|u_r|^2 + ||v_r||^2\right)dr$.

$$\forall t \in [0,T] \qquad e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr \leq R_\varepsilon - \int_t^T 2e^{\alpha r}y_r.z_r dW_r.$$

La martingale locale $\left\{\int_0^t e^{\alpha r}y_r.z_r dW_r\right\}_{t\in[0,T]}$ est en réalité une martingale nulle en 0 puisque $y, y\acute{}$ appartiennent à S^2 et $z, z\acute{}$ appartiennent à M_2 on obtient facilement pour $t=0$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}||z_r||^2 dr\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right].$$

.L'inégalité BDG fournit-avec C universelle-

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha r}|y_r|^2||z_r||^2dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\frac{\alpha t}{2}}|y_t|\left(\int_0^T e^{\alpha r}||z_r||^2dr\right)^{\frac{1}{2}}\right]\end{aligned}$$

puis, comme $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] \\ &\quad + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}||z_r||^2dr\right]\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}||z_r||^2dr\right] \leq (3+C^2).\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right].$$

et par suite

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}||z_r||^2dr\right] \leq \varepsilon(3+C^2)(1\vee T).$$

Pour que l'application $p\left(t\right)$ est une contraction stricte de B^2 dans lui-même on prenons ε tel que $\varepsilon(3+C^2)(1\vee T) = \frac{1}{2}$.

Si on le munit de la norme

$$||(U,V)||_\alpha = \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\alpha t}|u_r|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}||v_r||^2dr\right]^{\frac{1}{2}}$$

Cette norme est équivalente a la norme usuelle pour $\alpha = 0$.Finalement en conclut que l'application $p\left(t\right)$ possède unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation différentielle stochastique rétrogtrade dans B^2.■

1.2.3 Le rôle de Z

Nous allons voir que le rôle de z, plus précisement celui du terme $\int_t^T z_r dW_r$ est de rendre le processus y adapté.

Proposition 1.12 : *Soit* (y, z) *la solution de L'équation différentielle stochastique rétrograde* $(I.2)$ *et soit* τ *un temps d'arrêt majoré par* T*.On suppose, outre l'hypothèse* (L) *que* ξ *est* $\mathcal{F}_\tau$*-mesurable et que* $b(t, y, z) = 0$ *dés que* $t \geq \tau$. *alors*

$$y_t = y_{t \wedge \tau} \quad et \quad z_t = 0 \quad si \quad t \geq \tau$$

Preuve : On a $\mathcal{P} - p.s$

$$y_t = \xi + \int_t^T b(r, y_r, z_r)dr - \int_t^T z_r dW_r \qquad t \in [0, T]$$

pour $t = \tau$,comme $b(r, y_r, z_r) = 0$ dés que $t \geq \tau$

$$\begin{aligned} y_\tau &= \xi + \int_\tau^T b(r, y_r, z_r)dr - \int_\tau^T z_r dW_r \\ &= \xi - \int_\tau^T z_r dW_r \end{aligned}$$

Il vient alors

$$y_\tau = \mathbb{E}(\xi \diagup \mathcal{F}_\tau) = \xi$$

et par suit $\int_\tau^T z_r dW_r = 0$ d'ou l'on tire que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_\tau^T z_r dW_r\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_\tau^T ||z_r||^2 dr\right] = 0$$

Il s'en suit immédiatement que,si $t \geq \tau$, $y_t = y_\tau$ puisque par hypothèse

$$y_\tau = y_t + \int_\tau^t b(r, y_r, z_r)dr - \int_\tau^t z_r dW_r = y_t + 0 - 0$$

Ce qui termine la preuve.■

Notons que dans le cas où ξ et b sont déterministe alors z est nul et y est la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} dy_t = b(t, y_t, 0)dt \\ y_T = \xi \end{cases}$$

1.2.4 Une estimation a priori

En donnant une première estimation sur L'équation différentielle stochastique rétrograde, il s'agit en fait d'étudier la dépendance de la solution de L'équation différentielle stochastique rétrograde par rapport aux données qui sont ξ et le processus$\{b(t, 0, 0)\}_{t\in[0,T]}$.

Proposition 1.13 : *On suppose que* (ξ, b) *vérifie* (L)*..soit* (y, z) *la solution de L'équation différentielle stochastique rétrograde* $(I.2)$ *telle que* $z \in M_2$*.alors,il existe une constante* C_u *universelle telle que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\beta t}||z_t||^2 dt\right] \leq C_u \mathbb{E}\left[e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta t}|b(t, 0, 0)|^2 dt\right]$$

avec $\beta = (1 + K)^2 + K^2$.

Preuve : On utilise la formule d'Itô à $e^{\beta t}|y_t|^2$

$$\begin{aligned} e^{\beta t}|y_t|^2 + \int_t^T e^{\beta r}||z_r||^2 dr &= e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\beta r}\left(-\beta|y_r|^2 + 2y_r.b(r, y_r, z_r)\right) dr \\ &\quad - \int_t^T 2e^{\beta r} y_r z_r dW_r \end{aligned}$$

Pour tout (t, y, z) avec b est $K-$lipschitz , on a

$$2y.b(t, y, z) \leq 2|y|.|b(t, 0, 0)| + 2K.|y|^2 + 2K.|y|.||z||,$$

et donc utilisans le fait que $2ab \leq \varepsilon.a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$ pour $\varepsilon = 1$ puis

$$2y.b(t,y,z) \leq (1+2K+2K^2).|y|^2 + (b(t,0,0))^2 + \frac{||z||^2}{2}$$

On prenant $\beta = 1+2K+2K^2$ on obtient, pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} e^{\beta t}|y_t|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T e^{\beta r}||z_r||^2 dr &= e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r}.|b(r,0,0)|^2 dr \\ &\quad - \int_t^T 2e^{\beta r} y_r z_r dW_r \end{aligned}$$

En obtient ,pour $t = 0$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta r}||z_r||^2 dr\right] \leq 2\mathbb{E}\left[e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r}.|b(r,0,0)|^2 dr\right]$$

L'inégalité de BDG nous donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t}|y_t|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta r}.|b(r,0,0)|^2 dr\right] \\ &\quad + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\beta r}|y_r|^2.||z_r||^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\beta r}|y_r|^2.||z_r||^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^T \sup_{t\in[0,T]} e^{\frac{\beta t}{2}}|y_t| \left(\int_0^T e^{\beta r}||z_r||^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ . &\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t}|y_t|^2 + C^2\mathbb{E}\int_0^T e^{\beta r}||z_r||^2 dr\right] \end{aligned}$$

il vient donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t}|y_t|^2\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[e^{\beta T}|\xi|^2+\int_0^T e^{\beta r}.|b(r,0,0)|^2dr\right]\\ &\quad +C^2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta r}||z_r||^2.dr\right]\end{aligned}$$

et finalement, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t}|y_t|^2+\int_0^T e^{\beta r}||z_r||^2dr\right]\leq 2.\left(2+C^2\right).$$

prenant $C_u = 2.\left(2+C^2\right)$ .Ce qui termine la preuve.■

1.2.5 Equation différentielle stochastique rétrograde linéaire

Dans la fin de ce chapitre nous allons étudier les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires et pour cela une équation différentielle stochastique rétrograde est dite linéaire si elle s'écrit sous la forme

$$y_t = \xi + \int_t^T (a_r y_r + b_r z_r + c_r)dr - \int_0^T z_r dW_r \qquad t\in[0,T]$$

où $\{(a_t,b_t)\}$ est un processus a valeurs dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ progressivement mesurable et borné ,$\{C_t\}_{t\in[0,T]}\in M_2(\mathbb{R})$ et ξ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurable et de carré intégrable a valeurs réelles.

La solution de cette équation peut dans ce cas être écrite sous la forme

$$\forall t\in[0,T] \quad , \quad y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left(\xi\Gamma_t + \int_t^T C_r\Gamma_r dr \diagup \mathcal{F}_t\right)$$

ou

$$\Gamma_t = \exp\left(\int_0^t b_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b_s|^2 ds + \int_0^t a_s ds\right)$$

avec Γ solution de l'EDS

$$\begin{cases} d\Gamma_t = \Gamma_t \left(a_t dt + b_t dW_t \right) & t \in]0, T] \\ \Gamma_0 = 1 \end{cases}$$

Prenant

$$b(t, y, z) = a_t y_t + z_t b_t + c_t$$

D'après les propriétes du générateur de L'équation différentielle stochastique rétrograde linéaire on peut appliquer le théorème de pardoux-peng, donc elle admet une solution unique (y, z) telle que $z \in M_2$,y appartient à S^2.

La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} d\Gamma_t y_t &= y_t d\Gamma_t + \Gamma_t dy_t + d < \Gamma, y >_t \\ &= -\Gamma_t c_t.dt + \Gamma_t z_t dW_t + \Gamma_t y_t b_t dW_t \end{aligned}$$

ce qui montre que le processus

$$\Gamma_t y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr.$$

est une martingale car $c \in M_2$ et Γ, y sont dans S^2

Par suite

$$\Gamma_t y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr. = \mathbb{E} \left[\Gamma_t y_t + \int_0^t c_r \Gamma_r dr \diagup \mathcal{F}_t \right]$$

c'est a dire

$$y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E} \left(\xi \Gamma_t + \int_t^T c_r \Gamma_r dr \diagup \mathcal{F}_t \right)$$

Chapitre 2

Conditions d'optimalité pour les contrôles stricts

2.1 Formulation du problème

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{P}\right)$ un espace probabilisé filtré sur lequel on définit un mouvement Brownien d-dimensionnel $W = (W_t)_{t\geq 0}$. On assume que $(\mathcal{F}_t)$ est la $\mathcal{P}$- augmentation de la filtration naturelle de $(W_t)_{t\geq 0}$.

Soit T un nombre réel strictement positif et U un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}^m$.

Definition 1 *Un contrôle admissible est un processus $\mathcal{F}_t$- adapté à valeurs dans U tel que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |v_t|^2\right] < \infty.$$

On note par $\mathcal{U}$ l'ensemble des tous les contrôles admissibles.

Pour tout $v \in \mathcal{U}$, on considère l'EDSR

$$\begin{cases} dy_t^v = b\left(t, y_t^v, z_t^v, v_t\right) dt + z_t^v \, dW_t, \\ y_T^v = \xi, \end{cases}$$

où

$$b:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R})\times U\longrightarrow\mathbb{R}^n,$$

et ξ est une variable aléatoire de dimension n, $\mathcal{F}_T$-mesurable telle que

$$\mathbb{E}\left|\xi\right|^2<\infty.$$

La fonction coût est définit de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$J(v)=\mathbb{E}\left[g\left(y_0^v\right)+\int_0^T h\left(t,y_t^v,z_t^v,v_t\right)dt\right],$$

où

$$\begin{aligned}&g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R},\\&h:[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R})\times U\longrightarrow\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Un contrôle $u\in\mathcal{U}$ est dit optimal s'il vérifie

$$J(u)=\inf_{v\in\mathcal{U}}J(v).$$

Notre but est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité, sous la forme de principe du maximum.

Nous supposons que

> Les fonctions b,g et h sont continues en (y,z,v), leurs dérivées b_y,b_z,g_y,h_y et h_z sont continues en (y,z,v) et uniformément bornées. b et h sont bornées par $C(1+|y|+|v|)$ et bornés en z.

Sous ces hypothèses, pour tout $v\in\mathcal{U}$, l'équation d'état admet une unique solution

$(\mathcal{F}_t)_t$-adaptée et la fonction coût J est bien définit de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$.

2.2 Problème avec coût restreint

Puisque le coût h dépend de la variable z_t, on ne peut pas traîter le problème directement. Pour remédier à cela, on introduit une nouvelle méthode qui consiste à restreindre le problème initial en un problème sans coût intégral. Pour cela, on considère l'EDSR unidimentionnelle

$$\begin{cases} dx_t^v = h\left(t, y_t^v, z_t^v, v_t\right) dt + k_t^v dW_t, \\ x_T^v = \eta, \end{cases}$$

où k^v est une matrice $(1 \times d)$, (y_t^v, z_t^v) est la solution de l'équation initiale et η est une variable aléatoire unidimentionnelle $\mathcal{F}_T$-mesurable telle que

$$\mathbb{E}\left|\eta\right|^2 < \infty.$$

L'équation unidimentionnelle admets une unique solution $(\mathcal{F}_t)_t$- adaptée.

On pose

$$\widetilde{y}_t = \begin{pmatrix} y_t^v \\ x_t^v \end{pmatrix},$$

et on considère l'équation de dimension $(n+1)$ suivante

$$\begin{cases} d\widetilde{y}_t = \widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, v_t\right) dt + \widetilde{z}_t dW_t, \\ \widetilde{y}_T = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \end{cases}$$

où la fonction $\widetilde{b}$ est définit de $[0, T] \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{M}_{(n+1)\times d}\left(\mathbb{R}\right) \times U$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$\widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, v_t\right) = \begin{pmatrix} b\left(t, y_t^v, z_t^v, v_t\right) \\ h\left(t, y_t^v, z_t^v, v_t\right) \end{pmatrix},$$

et $\widetilde{z}_t$ est une matrice de dimension $(n+1)\times d$, donnée par

$$\widetilde{z}_t = \begin{pmatrix} z_t^v \\ k_t^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11}^v & z_{12}^v \ldots z_{1d}^v \\ z_{21}^v & z_{22}^v \ldots z_{2d}^v \\ \vdots & \vdots \\ z_{n1}^v & z_{n2}^v \ldots z_{nd}^v \\ k_1^v & k_2^v \ldots k_d^v \end{pmatrix}.$$

Puisque $\widetilde{b}$ est uniforméments Lipschitzienne en $(\widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t)$, alors l'équation admet une unique solution $(\widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t)$ adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_t)_t$.

On définit la fonction $\widetilde{g}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\widetilde{g}\,(\widetilde{y}_t) = g\,(y_t^v) - x_t^v,$$

et la nouvelle fonction coût de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\widetilde{J}\,(v) = \mathbb{E}\,[\widetilde{g}\,(\widetilde{y}_0)] + \mathbb{E}\,[\eta]\,.$$

Il est facile de vérifier que

$$\widetilde{J}\,(v) = J\,(v)\,.$$

En conséquence, il est suffisant de minimiser le coût restreint $\widetilde{J}$ sur $\mathcal{U}$. Si $u \in \mathcal{U}$ est une solution optimale, alors

$$\widetilde{J}\,(u) = \inf_{v\in\mathcal{U}} \widetilde{J}\,(v)\,.$$

Avec cette transformation, nous avons réduit le problème initial en un nouveau problème avec coût restreint sans coût intégral.

2.2.1 Résultats préliminaires

On suppose que $u \in \mathcal{U}$ est un contrôle optimal et on note par $(\widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t)$ la solution associée. On introduit la perturbation forte suivante

$$u_t^\theta = \begin{cases} v & \text{si } t \in [\tau, \tau + \theta], \\ u_t & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $0 \leq \tau \leq T$ est fixé, $\theta > 0$ est suffisement petit et v est une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable à valeurs dans U telle que $\mathbb{E}\left[|v|^2\right] < \infty$.

Le contrôle perturbé u^θ est admissible et on note par $\left(\widetilde{y}_t^\theta, \widetilde{z}_t^\theta\right)$ la trajectoire associée.

Puisque u est optimal, l'inégalité variationnelle sera obtenue à partir de

$$0 \leq \widetilde{J}\left(u^\theta\right) - \widetilde{J}(u).$$

Pour cela, on a besoin des lemmes suivants.

lemme: Sous nos hypothèses, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\widetilde{y}_t^\theta - \widetilde{y}_t\right|^2\right] \leq C\theta^2,$$
$$\mathbb{E}\int_0^T \left|\widetilde{z}_t^\theta - \widetilde{z}_t\right|^2 dt \leq C\theta^2.$$

preuve: On a

$$\begin{cases} d\left(\widetilde{y}_t^\theta - \widetilde{y}_t\right) = & \left[\widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t^\theta, \widetilde{z}_t^\theta, u_t^\theta\right) - \widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t^\theta, u_t^\theta\right)\right] dt \\ & \left[\widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t^\theta, u_t^\theta\right) - \widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t^\theta\right)\right] dt \\ & \left[\widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t^\theta\right) - \widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right)\right] dt \\ & + \left(\widetilde{z}_t^\theta - \widetilde{z}_t\right) dW_t, \\ \left(\widetilde{y}_T^\theta - \widetilde{y}_T\right) = & 0. \end{cases}$$

On pose

$$Y_t^\theta = \widetilde{y}_t^\theta - \widetilde{y}_t,$$
$$Z_t^\theta = \widetilde{z}_t^\theta - \widetilde{z}_t,$$

et

$$\begin{aligned}\varphi^\theta\left(t, Y_t^\theta, Z_t^\theta\right) &= \int_0^1 \widetilde{b}_y\left(t, \widetilde{y}_t + \lambda\left(\widetilde{y}_t^\theta - \widetilde{y}_t\right), \widetilde{z}_t + \lambda\left(\widetilde{z}_t^\theta - \widetilde{z}_t\right), u_t^\theta\right) Y_t^\theta d\lambda \\ &+ \int_0^1 \widetilde{b}_z\left(t, \widetilde{y}_t + \lambda\left(\widetilde{y}_t^\theta - \widetilde{y}_t\right), \widetilde{z}_t + \lambda\left(\widetilde{z}_t^\theta - \widetilde{z}_t\right), u_t^\theta\right) Z_t^\theta d\lambda \\ &+ \widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t^\theta\right) - \widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right).\end{aligned}$$

alors

$$\begin{cases} dY_t^\theta = \varphi^\theta\left(t, Y_t^\theta, Z_t^\theta\right) dt + Z_t^\theta dW_t, \\ Y_T^\theta = 0. \end{cases}$$

Cette équation est une EDSR linéaire à coefficients bornés et avec une condition terminale $Y_T^\theta = 0$. Alors, en appliquant l'estimation à priori (voir Briand et al [8, Proposition 3.2, Page 7]), on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|Y_t^\theta\right|^2 + \int_0^T \left|Z_t^\theta\right|^2 dt\right] \leq C\mathbb{E}\left|\int_0^T \left|\varphi^\theta(t,0,0)\right| dt\right|^2.$$

Proof. En remplaçant $\varphi^\theta(t,0,0)$ par sa valeur, on aura

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|Y_t^\theta\right|^2 + \int_0^T \left|Z_t^\theta\right|^2 dt\right] \leq C\mathbb{E}\left|\int_0^T \left|\widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t^\theta\right) - \widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right)\right| dt\right|^2.$$

Par la définition de u^θ, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|Y_t^\theta\right|^2 + \int_0^T \left|Z_t^\theta\right|^2 dt\right] &\leq C\mathbb{E}\left|\int_\tau^{\tau+\theta} \left|\widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, v\right) - \widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right)\right| dt\right|^2 \\ &\leq C\mathbb{E}\left|\sup_{t\in[0,T]} \left|\widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, v\right) - \widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right)\right| \int_\tau^{\tau+\theta} dt\right|^2.\end{aligned}$$

Puisque b est à croissance linéaire en (y, v) et bornée en z, alors $\widetilde{b}$ vérifie les mêmes propriétés et on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|Y_t^\theta\right|^2+\int_0^T\left|Z_t^\theta\right|^2dt\right]\leq C\theta^2.$$

Le lemme est prouvé. ■

2.2.2 Conditions nécessaires d'optimalité pour le problème restreint

théorème: Soit $(u, \widetilde{y}, \widetilde{z})$ *une solution optimale pour le problème restreint. Alors, il existe un unique processus adapté*

$$\widetilde{p}\in\mathcal{L}^2\left([0,T];\mathbb{R}^{n+1}\right),$$

solution de l'équation différentielle stochastique progressive

$$\begin{cases} -d\widetilde{p}_t=\widetilde{H}_y\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,\widetilde{p}_t,u_t\right)dt+\widetilde{H}_z\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,\widetilde{p}_t,u_t\right)dW_t,\\ \widetilde{p}_0=\widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0\right), \end{cases}$$

tel que

$$\widetilde{H}\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,\widetilde{p}_t,u_t\right)=\max_{v\in U}\widetilde{H}\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,\widetilde{p}_t,v\right)\;;\;a.e\;,\;a.s,$$

où le Hamiltonien $\widetilde{H}$ est défini de $[0,T]\times\mathbb{R}^{n+1}\times\mathcal{M}_{(n+1)\times d}(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{n+1}\times U$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\widetilde{H}\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,\widetilde{p}_t,u_t\right)=\widetilde{b}\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,u_t\right)\widetilde{p}_t.$$

preuve: Pour la simplicité, on pose

$$\Lambda_t^\theta=\left(t,\widetilde{y}_t+\lambda\left(\widetilde{y}_t^\theta-\widetilde{y}_t\right),\widetilde{z}_t+\lambda\left(\widetilde{z}_t^\theta-\widetilde{z}_t\right),u_t^\theta\right).$$

puisque u minimise le coût $\widetilde{J}$ sur $\mathcal{U}$, Alors

$$\begin{aligned}
0 &\leq \widetilde{J}\left(u^{\theta}\right) - \widetilde{J}(u) \\
&\leq \mathbb{E}\left[\widetilde{g}\left(\widetilde{y}_0^{\theta}\right) - \widetilde{g}\left(\widetilde{y}_0\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\int_0^1 \widetilde{g}_y\left[\widetilde{y}_0 + \lambda\left(\widetilde{y}_0^{\theta} - \widetilde{y}_0\right)\right]\left(\widetilde{y}_0^{\theta} - \widetilde{y}_0\right) d\lambda \\
&\leq \mathbb{E}\left[\widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0\right)\left(\widetilde{y}_0^{\theta} - \widetilde{y}_0\right)\right] + \mathbb{E}\int_0^1 \left[\widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0 + \lambda\left(\widetilde{y}_0^{\theta} - \widetilde{y}_0\right)\right) - \widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0\right)\right]\left(\widetilde{y}_0^{\theta} - \widetilde{y}_0\right) d\lambda.
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\widetilde{p}_0 = \widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0\right).$$

Alors

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\widetilde{p}_0\left(\widetilde{y}_0^{\theta} - \widetilde{y}_0\right)\right] + \mathbb{E}\int_0^1 \left[\widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0 + \lambda\left(\widetilde{y}_0^{\theta} - \widetilde{y}_0\right)\right) - \widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0\right)\right]\left(\widetilde{y}_0^{\theta} - \widetilde{y}_0\right) d\lambda.$$

En appliquant la formule de Itô à $\widetilde{p}_t\left(\widetilde{y}_t^{\theta} - \widetilde{y}_t\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\widetilde{p}_0\left(\widetilde{y}_0^{\theta} - \widetilde{y}_0\right)\right] &= \mathbb{E}\int_0^T\int_0^1 \left[\widetilde{b}_y\left(\Lambda_t^{\theta}\right) - \widetilde{b}_y\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right)\right]\left(\widetilde{y}_t - \widetilde{y}_t^{\theta}\right)\widetilde{p}_t d\lambda dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T\int_0^1 \left[\widetilde{b}_z\left(\Lambda_t^{\theta}\right) - \widetilde{b}_z\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right)\right]\left(\widetilde{z}_t - \widetilde{z}_t^{\theta}\right)\widetilde{p}_t d\lambda dt \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T \left[\widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right) - \widetilde{b}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t^{\theta}\right)\right]\widetilde{p}_t dt.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbb{E} \int_0^T & \left[\widetilde{H}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, \widetilde{p}_t, u_t\right) - \widetilde{H}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, \widetilde{p}_t, u_t^\theta\right)\right] dt \\
- \mathbb{E} \int_0^1 & \left[\widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0 + \lambda\left(\widetilde{y}_0^\theta - \widetilde{y}_0\right)\right) - \widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0\right)\right]\left(\widetilde{y}_t - \widetilde{y}_t^\theta\right) d\lambda \\
+ \mathbb{E} \int_0^T \int_0^1 & \left[\widetilde{b}_y\left(\Lambda_t^\theta\right) - \widetilde{b}_y\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right)\right]\left(\widetilde{y}_t - \widetilde{y}_t^\theta\right) \widetilde{p}_t d\lambda dt \\
+ \mathbb{E} \int_0^T \int_0^1 & \left[\widetilde{b}_z\left(\Lambda_t^\theta\right) - \widetilde{b}_z\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right)\right]\left(\widetilde{z}_t - \widetilde{z}_t^\theta\right) \widetilde{p}_t d\lambda dt
\end{aligned}$$

Montrons que

$$\mathbb{E} \int_0^T \int_0^1 \left[\widetilde{b}_y\left(\Lambda_t^\theta\right) - \widetilde{b}_y\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right)\right]\left(\widetilde{y}_t - \widetilde{y}_t^\theta\right) \widetilde{p}_t d\lambda dt \leq C\theta^{3/2},$$

et

$$\mathbb{E} \int_0^T \int_0^1 \left[\widetilde{b}_z\left(\Lambda_t^\theta\right) - \widetilde{b}_z\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right)\right]\left(\widetilde{z}_t - \widetilde{z}_t^\theta\right) \widetilde{p}_t d\lambda dt \leq C\theta^{3/2}.$$

En effet, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on aura

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \int_0^T \int_0^1 \left[\widetilde{b}_z\left(\Lambda_t^\theta\right) - \widetilde{b}_z\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right)\right]\left(\widetilde{z}_t - \widetilde{z}_t^\theta\right) \widetilde{p}_t d\lambda dt \\
& \leq \left(\mathbb{E} \int_0^T \int_0^1 \left|\left[\widetilde{b}_z\left(\Lambda_t^\theta\right) - \widetilde{b}_z\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right)\right] \widetilde{p}_t\right|^2 d\lambda dt\right)^{1/2} \left(\mathbb{E} \int_0^T \left|\widetilde{z}_t - \widetilde{z}_t^\theta\right|^2 dt\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \int_0^T \int_0^1 \left[\widetilde{b}_z\left(\Lambda_t^\theta\right) - \widetilde{b}_z\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right)\right]\left(\widetilde{z}_t - \widetilde{z}_t^\theta\right) \widetilde{p}_t d\lambda dt \\
& \leq C\theta \left(\mathbb{E} \int_0^T \int_0^1 \left|\left[\widetilde{b}_z\left(\Lambda_t^\theta\right) - \widetilde{b}_z\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, u_t\right)\right] \widetilde{p}_t\right|^2 d\lambda dt\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Par la définition de u^θ, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1\left[\widetilde{b}_z\left(\Lambda_t^\theta\right)-\widetilde{b}_z\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,u_t\right)\right]\left(\widetilde{z}_t-\widetilde{z}_t^\theta\right)\widetilde{p}_t d\lambda dt\\
&\leq C\theta\left(\mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\theta}\int_0^1\left|\left[\widetilde{b}_z\left(\Lambda_t^v\right)-\widetilde{b}_z\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,u_t\right)\widetilde{p}_t\right]\right|^2 d\lambda dt\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Puisque $\widetilde{b}_y$ est bornée, on aura

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1\left[\widetilde{b}_z\left(\Lambda_t^\theta\right)-\widetilde{b}_z\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,u_t\right)\right]\left(\widetilde{z}_t^\theta-\widetilde{z}_t\right)\widetilde{p}_t d\lambda dt\\
&\leq C\theta\left(\int_\tau^{\tau+\theta}\mathbb{E}\left|\widetilde{p}\right|^2 dt\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Puisque $\widetilde{p}\in\mathcal{L}^2\left([0,T];\mathbb{R}^{n+1}\right)$, on déduit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1\left[\widetilde{b}_z\left(\Lambda_t^\theta\right)-\widetilde{b}_z\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,u_t\right)\right]\left(\widetilde{z}_t^\theta-\widetilde{z}_t\right)\widetilde{p}_t d\lambda dt\\
&\leq\left(C\int_\tau^{\tau+\theta}dt\right)^{1/2}C\theta=C\theta^{3/2}.
\end{aligned}$$

Maintenant, on a

$$\begin{aligned}
0\leq\ &\mathbb{E}\int_0^T\left[\widetilde{H}\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,\widetilde{p}_t,u_t\right)-\widetilde{H}\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,\widetilde{p}_t,u_t^\theta\right)\right]dt\\
&+\mathbb{E}\int_0^1\left[\widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0+\lambda\left(\widetilde{y}_0^\theta-\widetilde{y}_0\right)\right)-\widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0\right)\right]\left(\widetilde{y}_0^\theta-\widetilde{y}_0\right)d\lambda\\
&+C\theta^{3/2}.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\int_0^T \left[\widetilde{H}\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,\widetilde{p}_t,u_t\right)-\widetilde{H}\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,\widetilde{p}_t,u_t^{\theta}\right)\right]dt \\
&+\left(\int_0^1 \mathbb{E}\left|\widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0+\lambda\left(\widetilde{y}_0^{\theta}-\widetilde{y}_0\right)\right)-\widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0\right)\right|^2 d\lambda\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}\left|\widetilde{y}_0^{\theta}-\widetilde{y}_0\right|^2\right)^{1/2} \\
&+C\theta^{3/2}.
\end{aligned}
$$

On déduit que

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\int_0^T \left[\widetilde{H}\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,\widetilde{p}_t,u_t\right)-\widetilde{H}\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,\widetilde{p}_t,u_t^{\theta}\right)\right]dt \\
&+C\theta\left(\int_0^1 \mathbb{E}\left|\widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0+\lambda\left(\widetilde{y}_0^{\theta}-\widetilde{y}_0\right)\right)-\widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0\right)\right|^2 d\lambda\right)^{1/2} \\
&+C\theta^{3/2}.
\end{aligned}
$$

De la définition de u^{θ}, on aura

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \mathbb{E}\int_{\tau}^{\tau+\theta} \left[\widetilde{H}\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,\widetilde{p}_t,u_t\right)-\widetilde{H}\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,\widetilde{p}_t,v\right)\right]dt \\
&+C\theta\left(\int_0^1 \mathbb{E}\left|\widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0+\lambda\left(\widetilde{y}_0^{\theta}-\widetilde{y}_0\right)\right)-\widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0\right)\right|^2 d\lambda\right)^{1/2} \\
&+C\theta^{3/2}.
\end{aligned}
$$

En divisant par θ, on obtient

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\int_{\tau}^{\tau+\theta} \left[\widetilde{H}\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,\widetilde{p}_t,u_t\right)-\widetilde{H}\left(t,\widetilde{y}_t,\widetilde{z}_t,\widetilde{p}_t,v\right)\right]dt \\
&+C\left(\int_0^1 \mathbb{E}\left|\widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0+\lambda\left(\widetilde{y}_0^{\theta}-\widetilde{y}_0\right)\right)-\widetilde{g}_y\left(\widetilde{y}_0\right)\right|^2 d\lambda\right)^{1/2} \\
&+C\theta^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Puisque $\widetilde{g}_y$ est continue et bornée, alors en appliquant le théorème de la convergence dominée, on aura

$$\lim_{\theta \to 0} C \int_0^1 \left(\mathbb{E} \left| \widetilde{g}_y \left(\widetilde{y}_0 + \lambda \left(\widetilde{y}_0^\theta - \widetilde{y}_0 \right) \right) - \widetilde{g}_y \left(\widetilde{y}_0 \right) \right|^2 \right)^{1/2} d\lambda = 0.$$

En prenant la limite quand $\theta \to 0$, on obtient

$$0 \leq \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta} \mathbb{E} \int_\tau^{\tau+\theta} \left[\widetilde{H} \left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, \widetilde{p}_t, u_t \right) - \widetilde{H} \left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, \widetilde{p}_t, v \right) \right] dt.$$

Ceci implique que

$$0 \leq \mathbb{E} \left[\widetilde{H} \left(\tau, \widetilde{y}_\tau, \widetilde{z}_\tau, \widetilde{p}_\tau, u_\tau \right) - \widetilde{H} \left(\tau, \widetilde{y}_\tau, \widetilde{z}_\tau, \widetilde{p}_\tau, v \right) \right], \ d\tau - a.e.$$

Maintenant, soit $a \in U$ un élément deterministe et F un élément arbitraire de $\mathcal{F}_t$, et on pose

$$w_t = a \mathbf{1}_F + u_t \mathbf{1}_{\Omega - F}.$$

Il est clair que w est un contrôle admissible.

Puisque $0 \leq \tau \leq T$, alors pour tout variable aléatoire v $\mathcal{F}_t$-mesurable et à valeurs dans U telle que $\mathbb{E}|v|^2 < +\infty$, on obtient

$$0 \leq \mathbb{E} \left[\widetilde{H} \left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, \widetilde{p}_t, u_t \right) - \widetilde{H} \left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, \widetilde{p}_t, v \right) \right], \ dt - a.e,$$

En appliquant cette inégalité à w, on aura

$$0 \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_F (\widetilde{H} \left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, \widetilde{p}_t, u_t \right) - \widetilde{H} \left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, \widetilde{p}_t, a \right))], \ \forall F \in \mathcal{F}_t,$$

ce qui implique

$$0 \leq \mathbb{E}[\widetilde{H} \left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, \widetilde{p}_t, u_t \right) - \widetilde{H} \left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, \widetilde{p}_t, a \right) \ / \ \mathcal{F}_t].$$

La quantité à l'intérieur de l'esperance conditionnelle étant $\mathcal{F}_t$-mesurable, donc le résultat suit immédiatement. Ceci prouve le théorème.

2.3 Conditions d'optimalité pour les contrôles stricts

A partir des résultats de la section précédente, nous allons reformuler les conditions nécessaires données au théorème précédentet établir les conditions d'optimalité pour le problème initial.

2.3.1 Conditions nécessaires d'optimalité

théorème: Conditions nécessaires d'optimalité pour les contrôles stricts). Soit (u, y^u, z^u) *une solution optimale pour le problème initial. Alors, il existe un unique processus adapté*

$$p^u \in \mathcal{L}^2\left([0,T]\,;\mathbb{R}^n\right),$$

solution de l'équation différentielle stochastique progressive suivante

$$\begin{cases} -dp_t^u = H_y\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right)dt + H_z\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right)dW_t, \\ p_0^u = g_y\left(y_0^u\right), \end{cases}$$

tel que

$$H\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right) = \max_{v\in U} H\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, v\right) \ ; \ a.e \ , \ a.s,$$

où le Hamiltonien H est défini de $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times U$ dans $\mathbb{R}$ par

$$H\left(t, y, z, p, v\right) = pb\left(t, y, z, v\right) - h\left(t, y, z, v\right).$$

preuve: On pose

$$\widetilde{p}_t = \begin{pmatrix} p_t^u \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De le définition de $\widetilde{H}$, $\widetilde{p}$, $\widetilde{b}$ et $\widetilde{z}$, on obtient

$$\widetilde{H}\left(t, \widetilde{y}_t, \widetilde{z}_t, \widetilde{p}_t, u_t\right) = Ht, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t$$

et de l'équation adjointe associée au problème restreint, on déduit l'équation adjointe associée au problème initial. Finalement, l'inégalité variationnelle du problème initial est déduite directement de celle du problème restreint.

2.3.2 Conditions suffisantes d'optimalité

théorème: (Conditions suffisantes d'optimalité pour les contrôles stricts). On suppose que U est convexe et pour tout $v \in \mathcal{U}$ et pour tout $t \in [0, T]$, la fonction g est convexe et l'application $(y_t, z_t, v_t) \longrightarrow H\left(t, y_t, z_t, p_t, v_t\right)$ est concave. Alors, u est un optimal contrôle pour le problème initial s'il vérifie les conditions nécessaires d'optimalité.

preuve: Soit u un contrôle strict arbitraire (candidat à être optimal) et (y_t^u, z_t^u) la solution associée. Pour tout contrôle strict v, avec solution associée (y_t^v, z_t^v), on a

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \mathbb{E}\left[g\left(y_0^v\right) - g\left(y_0^u\right)\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left[h\left(t, y_t^v, z_t^v, v_t\right) - h\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right] dt. \end{aligned}$$

Puisque g est convexe, on aura

$$g\left(y_0^v\right) - g\left(y_0^u\right) \geq g_y\left(y_0^u\right)\left(y_0^v - y_0^u\right).$$

Alors

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &\geq \mathbb{E}\left[g_y\left(y_0^u\right)\left(y_0^v - y_0^u\right)\right] \\ &\quad + \mathbb{E}\int_0^T \left[h\left(t, y_t^v, z_t^v, v_t\right) - h\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right] dt. \end{aligned}$$

Proof. On remarque que

$$p_0^u = g_y\left(y_0^u\right).$$

On déduit

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) \geq \mathbb{E}\left[p_0^u\left(y_0^v - y_0^u\right)\right] \\ + \mathbb{E}\int_0^T \left[h\left(t, y_t^v, z_t^v, v_t\right) - h\left(t, y_t^u, z_t^u, u_t\right)\right] dt. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Itô à $p_t^u\left(y_t^v - y_t^u\right)$, on obtient

$$\begin{aligned} & J(v) - J(u) \\ & \geq \mathbb{E}\int_0^T \left[H_y\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right)\left(y_t^v - y_t^u\right) + H_z\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right)\left(z_t^v - z_t^u\right)\right] dt \\ & + \mathbb{E}\int_0^T \left[H\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right) - H\left(t, y_t^v, z_t^v, p_t^u, v_t\right)\right] dt. \end{aligned}$$

Puisque H est concave en (y, z, u), alors

$$\begin{aligned} & H\left(t, y_t^v, z_t^v, p_t^u, v_t\right) - H\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right) \\ & \leq H_y\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right)\left(y_t^v - y_t^u\right) \\ & + H_z\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right)\left(z_t^v - z_t^u\right) + H_v\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right)\left(v_t - u_t\right). \end{aligned}$$

Où d'un manière équivalente

$$\begin{aligned} & H_v\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right)\left(u_t - v_t\right) \\ & \leq H\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right) - H\left(t, y_t^v, z_t^v, p_t^u, v_t\right) \\ & + H_y\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right)\left(y_t^v - y_t^u\right) + H_z\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right)\left(z_t^v - z_t^u\right). \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$J(v) - J(u) \geq \mathbb{E}\int_0^T H_v\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right)(u_t - v_t)\, dt.$$

On sait que $H\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, .\right)$ est concave, alors $-H\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, .\right)$ est convexe de U dans $\mathbb{R}$. De plus, U est convexe et $-H\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, .\right)$ est continue, Gâteaux-différentiable, avec différentielle continue, alors en appliquant le principe de l'optimisation convexe (voir Ekeland-Temam [11, prop 2.1, page 35]), on obtient

$$-H\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right) = \inf_{v_t \in U} - H\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, v_t\right) \Longleftrightarrow -H_v\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right)(v_t - u_t) \geq 0.$$

Où d'une manière équivalente

$$H\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right) = \max_{v_t \in U} H\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, v_t\right) \Longleftrightarrow H_v\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right)(u_t - v_t) \geq 0.$$

Alors, par les conditions nécéssaires d'optimalité, on déduit que

$$H_v\left(t, y_t^u, z_t^u, p_t^u, u_t\right)(u_t - v_t) \geq 0.$$

Ce qui nous donne

$$J(v) - J(u) \geq 0.$$

Le théorème est prouvé. ■

Chapitre 3

Conditions d'optimalité en contrôle stochastique relaxé

Le but de ce chapitre est de généraliser le chapitre 2 c'est- à- dire établir une généralisation du principe du maximum en contrôle optimal stochastique. l'idée serait d'injecter l'espace des contrôles ordinaires $\mathcal{U}$ dans l'espace des mesures de probabilité sur U où U désigne l'ensemble des valeurs prise par le contrôle ordinaire. Ce nouvel espace appelé espace des contrôles relaxés .

Notre objectif dans ce chapitre est d'établir un principe du maximum vérifié par un contrôle optimal relaxé. La démonstration est basée sur l'approximation des trajectoires des contrôles relaxés par les trajectoires des contrôles ordinaires et le principe du maximum approché.

Avant d'établir le principe du maximum relaxé, nous allons donné des hypothèses et des définitions nécessaires

3.1 Formulation du problème et notations

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions usuelles sur lequel on définie, un mouvement Brownien $(W_t)_{t\geq 0}$,on suppose que $\mathcal{F}_t =$

$\sigma\left(W_s, 0 \leq s \leq t\right).$

On considère L'EDSR suivant

$$\begin{cases} dy_t = b\left(t, y_t, z_t, u_t\right) dt + z_t dW_t \\ y_T = \xi \end{cases}$$

où b est définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \times \mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est une fonction mesurable et ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable.

La fonction coût a minimiser est donnée par

$$J\left(u\right) = \mathbb{E}\left[g\left(y_0\right)\right] + \mathbb{E}\int_0^T h\left(t, y_t, z_t, u_t\right) dt$$

où $h\left(t, y_t, z_t, u_t\right)$ $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et

$g\left(y\right)$ $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable en y

On suppose que b , h , g sont dérivable en x, y, z et à dérivées continues et bornées.

b ,h, sont continues en u.

Remarque 3.1

i) L'équation d'état *admet une solution forte unique*

$$y_t = \xi + \int_t^T b(s, y_s, z_s) ds - \int_t^T z_s dW_s$$

ii) La fonction coût *est bien définie.*

Soit V l'ensemble des mesures de Radon sur $[0,T] \times U$ dont la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue munie de la topologie de la convergence stable des mesures .

V est un espace compact métrisable. la convergence stable est préconisée par les fonctions mesurables bornée $h\left(t,a\right)$ telle que pour chaque $t \in [0,T]$,

$h\left(t,.\right)$ soit continue.

L'espace V est munit de sa tribu Boreliènne ,qui est la plus petit tribu telle que l'application $q \to \int h(s,a)\, q(ds,da)$ soit mesurable pour toute fonction h mesurable ,bornée et continue en a .

Définition 3.2 : *Soit $P([0,T]\times U)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $[0,T]\times U$ telle que la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de lebesgue dt. Un contrôle relaxé q est un variable $q(\omega,dt,da)$ a valeurs dans V telle que pour chaque t $1_{]0,t[}q$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable*

On note par R l'ensemble des contrôles relaxés.

Remarque 3.3 : *Un contrôle relaxé peut être désintégré en*

$$q(\omega,dt,da) = dtq(\omega,t,da)$$

où $q(\omega,t,da)$ *est un processus progressivement mesurable a valeurs dans l'espace $P(U)$ des mesures de probabilités*

Remarque 3.4 : *L'ensemble $\mathcal{U}$ des contrôles ordinaires peut être injecté dans l'ensemble R des contrôles relaxés par L'application*

$$\Psi u \in \mathcal{U} \to \Psi(u)(dt,da) = dt.\delta_{u(t)}.(da) \in R$$

où $\delta_{u(t)}$ *est la mesure de Dirac de masse u.*

L'équation d'état dans le cas des contrôles relaxés est donné par

$$\begin{cases} dy_t = \int_U b(t,y_t,z_t,a,)\, q_t(da)\, dt + z_t dW_t \\ y_T = \xi \end{cases} \qquad ((3\cdot 1))$$

avec les même hypothèses sur b .

La fonction coût a minimiser est donnée par

$$J(q) = \mathbb{E}\left[g(y_0)\right] + \mathbb{E}\int_0^T \int_U h(t, y_t, z_t, a,)\, q_t(da)\, dt. \qquad ((3\cdot 2))$$

avec les mêmes hypothèses sur h et g .

Remarque 3.5 : *Les hypothèses sur les différents coèfficients définissant l'équation d'état et la fonction de coût sont les méme avec le chapitre précédent.*

On cherche a minimiser la fonction coût $J(\mu)$ sur l'ensemble $\mathcal{R}$. C'est a dire trouver un contrôle $q \in \mathcal{R}$ telle que

$$J(q) \leq J(\mu) \qquad \forall\ \mu \in R \qquad ((3\cdot 3))$$

on note

$$J(q) = \inf_{\mu \in R} J(\mu)$$

La solution de l'équation d'état dans l'espace de contrôle relaxé est donnée par

$$y_t = \xi + \int_t^T \int_U b(s, y_s, z_s, a) q_s(da)\, ds - \int_t^T z_s dW_s$$

Remarque 3.6 : *On pose*

$$\overline{b}(t, y_t, z_t, a) = \int_U b(t, y_t, z_t, a,)\, q_t(da)$$

L'équation précédente donné

$$\begin{cases} dy_t = \overline{b}(t, y_t, z_t, a)\, dt + z_t dW_t \\ y_T = \xi \end{cases}$$

et dans ce cas la fonction $\overline{b}$ qui satisfait les mêmes conditions que b et de plus linéaire en q .

Donc dans ce nouvel model, l'ensemble des valeurs du processus u est remplacé par

$P(U)$ l'ensemble des valeurs du processus q_t ,où $P(U)$ est l'espace des mesures de probabilités sur U et b par $\overline{b}$,et on a l'avantage que $P([0,T] \times U)$ soit convexe et compact et$\overline{b}$ linéaire en q.

Remarque 3.7 : *Si $q_t = \delta_{u(t)}$ est la mesure de Dirac au point $u(t)$ pour chaque $t \in [0,T]$ alors*

$$\int_U b(t, y_t, z_t, a,) \, q_t(da) = \int_U b(t, y_t, z_t, a,) \, \delta_{u_t}(da) = b(t, y_t, z_t, u_t)$$

Dans ce cas on aura un problème de contrôle ordinaire par conséquent le problème de contrôle relaxé généralisé bien le problème ordinaire dans le sens où l'ensemble des contrôles ordinaires peut être considéré comme un sous-ensemble de celui des contrôles relaxés .

3.2 Approximation des trajectoires

Pour établir le principe du maximum dans le cas des contrôles relaxés on a besoin d'un résultat d'approximation des trajectoires des contrôles relaxés par les trajectoires des contrôles ordinaires . Pour cela, l'outil essentiel est un lemme connu sous le nom de chaterring lemma et qui est donné par :

Lemme 3.8 (Chaterring lemma) **:** *Soit q un contrôle relaxé alors il existe une suite (u^n) de contrôle ordinaire telle que*

$$dtq_t^n(da) = dt \; \delta_{u^n}(da) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} dtq(da) \quad faiblement.$$

Pour toute fonction $h\,[0,T] \times \mathbb{R}^d \times P(U) \to \mathbb{R}^d$ continue sur $[0,T] \times P(U)$ telle que

$\int_t^T \int_U h\left(t, y_s, z_s, a,\right) q_s\left(da\right)$ *soit linéaire en* q *on a*

$$\lim_n \int_t^T \int_U h\left(s, y_s, z_s, a,\right) q_s^n\left(da\right) = \int_t^T \int_U h\left(s, y_s, z_s, a,\right) q_s\left(da\right) \quad unif$$

Démonstration : Voir [18].■

A partir du chaterring lemma, on a l'approximation des trajectoires, donnée par le théorème suivant

Lemme 3.9 : *Soit* (y,z) , (y^n, z^n) *les trajectoires associées respectivement aux contrôles* q *et* q^n on a alors

$$E\left[\sup_{0\le t\le T} |y_t^n - y_t|^2 + \int_0^T |z_t^n - z_t|^2\right] \to 0 \qquad si \;\; n\to\infty$$

Preuve : Soit (y,z)la solution de L'EDSR suivant

$$y = \xi + \int_t^T \int_U b\left(s, y_s, z_s, a\right) q_s\left(da\right) ds - \int_t^T z_s dW_s$$

et (y^n, z^n) la solution de L'EDSR suivant

$$y_t^n = \xi + \int_t^T \int_U b\left(s, y_s^n, z_s^n, a\right) q_s^n\left(da\right) ds - \int_t^T z_s^n dW_s$$

on pose

$$\int_U b\left(s; y_s^n, z_s^n, a\right) q_s^n\left(da\right) = \alpha_s^n$$

$$\int_U b\left(s, y_s, z_s, a\right) q_s\left(da\right) = \alpha_s$$

donc on applique la fomule d'Itô sur $\left(y_t - y_t^n\right)^2$ on obtient l'équation suivante

$$|y_t^n - y_t|^2 + \int_t^T |z_s^n - z_s|^2 ds = 2\int_t^T |y_s^n - y_s| d|y_s^n - y_s| ds$$

$$= 2\int_t^T |y_s^n - y_s||\alpha_s^n - \alpha_s| ds$$

puis, comme $2ab \leq a^2 + b^2$,

$$|y_t^n - y_t|^2 + \int_t^T |z_s^n - z_s|^2 ds \leq \int_t^T |y_s^n - y_s|^2 ds + \int_t^T |\alpha_s^n - \alpha_s|^2 ds$$

et donc utilisant l'espérance,on obtient

$$\mathbb{E}(|y_t^n - y_t|^2 + \int_t^T |z_s^n - z_s|^2 ds) \leq \mathbb{E}(\int_t^T |y_s^n - y_s|^2 ds + \int_t^T |\alpha_s^n - \alpha_s|^2 ds) \ldots\ldots\ldots\ldots *$$

tel que

$$|\alpha_s^n - \alpha_s|^2 = |\int_U b\left(s, y_s^n, z_s^n, a\right) q_s^n\left(da\right) - \int_U b\left(s, y_s, z_s, a\right) q_s\left(da\right)|^2$$

en calcul $|\alpha^n - \alpha|^2$ et puis revenant à l'inégalité $(*)$, donc

$$|\alpha_s^n - \alpha_s|^2 = |\int_U b\left(s, y_s^n, z_s^n, a\right) q_s^n\left(da\right) - \int_U b\left(s, y_s, z_s, a\right) q_s\left(da\right)|^2$$

$$= |\int_U b\left(s, y_s^n, z_s^n, a\right) q_s^n\left(da\right) - \int_U b\left(s, y_s, z_s, a\right) q_s^n\left(da\right) + \int_U b\left(s, y_s, z_s, a\right) q_s^n\left(da\right)$$

$$- \int_U b\left(s, y_s, z_s, a\right) q_s\left(da\right)|^2$$

Si on prend l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$,

$$|\alpha_s^n - \alpha_s|^2 \leq 2|\int_U b\left(s, y_s^n, z_s^n, a\right) q_s^n\left(da\right) - \int_U b\left(s, y_s, z_s, a\right) q_s^n\left(da\right)|^2$$

$$+2|\int_U b(s,y_s,z_s,a)\,q_s^n(da)-\int_U b(s,y_s,z_s,a)\,q_s(da)\,|^2$$

Donc ,en intégrant de t àT,

$$\int_t^T|\alpha_s^n-\alpha_s|^2ds\leq 2\int_t^T|\int_U b(s,y_s^n,z_s^n,a)\,q_s^n(da)-\int_U b(s,y_s,z_s,a)\,q_s^n(da)\,|^2ds$$

$$+2\int_t^T|\int_U b(s,y_s,z_s,a)\,q_s^n(da)-\int_U b(s,y_s,z_s,a)\,q_s(da)\,|^2ds$$

$$\leq 2\int_t^T|\int_U b(s,y_s^n,z_s^n,a)\,q_s^n(da)-\int_U b(s,y_s,z_s,a)\,q_s^n(da)\,|^2ds+\lambda_n$$

où

$$\lambda_n=\quad 2\int_t^T|\int_U b(s,y_s,z_s,a)\,q_s^n(da)-\int_U b(s,y_s,z_s,a)\,q_s(da)\,|^2ds$$

Par conséquent d'aprés les hypothése sur b on obtient

$$\int_t^T|\alpha_s^n-\alpha_s|^2ds\leq 2c\int_t^T|y_s^n-y_s|^2+|z_s^n-z_s|^2+2|y_s^n-y_s|.|z_s^n-z_s|+\lambda_n$$

$$\leq\quad 2c\int_t^T|y_s^n-y_s|^2+2c\int_t^T\ |z_s^n-z_s|^2$$

$$+2\ \int_t^T|y_s^n-y_s|^2+\quad 2\int_t^T\ |z_s^n-z_s|^2+\lambda_n$$

$$\leq 2(c+1)\ \int_t^T|y_s^n-y_s|^2+2(c+1)\int_t^T\ |z_s^n-z_s|^2+\lambda_n$$

Revenant a l'inégalité $(*)$

$$\mathbb{E}(|y_s^n-y_s|^2+\int_t^T|z_s^n-z_s|^2)\leq\mathbb{E}\int_t^T|y_s^n-y_s|^2ds$$

$$+2(c+1)\ \mathbb{E}[\int_t^T|y_s^n-y_s|^2+2(c+1)\int_t^T\ |z_s^n-z_s|^2+\lambda_n]$$

$$\leq (2c+3)\,\mathbb{E}\int_t^T |y_s^n - y_s|^2 ds + 2\,(c+1)\,\mathbb{E}\int_t^T \ |z_s^n - z_s|^2 + \lambda_n$$

Posons $\quad c+1 = \frac{1}{4}$

$$\mathbb{E}(|y_s^n - y_s|^2 + \int_t^T |z_s^n - z_s|^2) \leq K\mathbb{E}\int_t^T |y_s^n - y_s|^2 ds + \lambda_n$$

On déduit deux inégalités

$$\mathbb{E}|y_s^n - y_s|^2 \leq K\mathbb{E}\int_t^T |y_s^n - y_s|^2 ds + \lambda_n$$

$$\mathbb{E}\int_t^T |z_s^n - z_s|^2) \leq K\mathbb{E}\int_t^T |y_s^n - y_s|^2 ds + \lambda_n$$

pour

$$\mathbb{E}|y_s^n - y_s|^2 \leq K\mathbb{E}\int_t^T |y_s^n - y_s|^2 ds + \lambda_n$$

Puisque λ_n tends vers 0 quand n tends vers l'infini, alors par le lemme de Gronwall et l'inégalité de Buckholder Davis Gundy, on a

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\ |y_s^n - y_s|^2\right] = 0$$

De la deuxième inégalité, on en déduit

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\int_t^T |z_s^n - z_s|^2 ds = 0$$

Le théorème est démontré■.

Remarque 3.10 : *Si on note* (y^n, z^n) *la solution associée a* q^n *alors* (y^n, z^n) *doit satisfait l'équation suivante*

$$\begin{cases} dy_t^n = \int_U b\,(t, y_t^n, z_t^n, a)\, q_t^n\,(da)\,dt + z_t^n dW_t \\ y_T^n = \xi \end{cases} \qquad ((3\cdot 4))$$

C'est à dire

$$\begin{cases} dy_t^n = \overline{b}\left(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n\right) dt + z_t^n dW_t \\ y_T^n = \xi \end{cases}$$

3.3 Principe du Maximum Approché

On remarque dans le chapitre précédent que le contrôle optimal n'existe pas si on a l'absence d'hypothèse de Fillipov c'est-a-dire l'absence d'hypothèse de convexité ;par contre on s'ait qu'il existe toujour un contrôle presque optimal ,et pour cela le principe du maximum approché est un grand utilité pour démontré le principe du maximum relaxé.La démonstration sur le principe du maximum approché basé essentiellement sur le principe variationnel d'Ekland, l'idée pour applique le théorème d'Ekland a notre problème est de munir l'ensemble des contrôle admissible $\mathcal{U}$ d'une distance adéquate qui fera de lui un espace métrique complet.

La démonstration sur le principe du maximum approché est basé essentiellement sur le principe variationnel d'Ekland.

Théorème 3.10 (Principe variationnel d'Ekeland) **:** *On pose un espace metrique complet* (V, d) *et une fonction* F *semi continue inférieurement telle que la fonction* F *définie dans* V *a valeurs dans* $\bar{\mathbb{R}}$ *et admet aussi une borne inferieure fini.donc* $\forall\ u \in V$ *avec* $F(u) \leq Inf(F) + \varepsilon$ *et* $\forall \lambda \gneqq 0$ *il existe* $v \in V$ *tel que*

i) $F(v) \leq F(u)$

ii) $d(u, v) \leq \lambda$

iii) $F(v) \leq F(w) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(v, w)$

Corollaire 3.11 : *Soit* (V, d) *un espace metrique complet et* $F \colon V \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ *une fonction semi-continue inférieurment admettant une borne inférieure finie, alors* $\forall\ \varepsilon \gneqq 0$, *il existe* $u^{\varepsilon} \in V$ *tel que*

1) $F(u^{\varepsilon}) \leq Inf(F) + \varepsilon$

2) $F(u^{\varepsilon}) \leq F(u) + \varepsilon d(u^{\varepsilon}, u)$.

Pour appliquer le principe variationnel d'Ekeland, on munit l'espace des contrôles $\mathcal{U}$ d'une distance adéquate pour en Faire un espace métrique complet. Pour cela, on définit

$$d\,(u,v) = P \otimes dt \left\{ (\omega, t) \in \Omega \times [0,T]\,,\ u\,(t,\omega) \neq v\,(t,\omega) \right\},$$

où $P \otimes dt$ est la mesure produit de P avec la mesure de Lebesgue dt.

Lemme 3.12 :

1) $(\mathcal{U}, d)$ *est un espace métrique complet.*

2) La fonction J *est continue de* $\mathcal{U}$ *dans* R.

Preuve : Voir [23] .■

Soit maintenant $q \in \mathcal{R}$ un contrôle optimal relaxé et x^q sa trajectoire correspondante. On sait par le chatering lemma et l'approximation des trajectoires, qu'il existe une suite $(u^n)_n$ de contrôle ordinaires tels que

$$\begin{aligned} dtq_t^n(da) &= dt\delta_{u_t^n}(da) \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} dtq_t\,(da) \text{ faiblement}, \quad P-a.s, \\ & \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |x_t^n - x_t^q|^2\right] \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

où x_t^n est la trajectoire associée aux contrôles q^n.

De l'optimalité de q, il existe une suite $(\varepsilon_n)_n$ de nombre positifs, avec $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, tel que

$$J\,(u^n, \xi) = J\,(q^n, \xi) \leq J\,(q, \xi) + \varepsilon_n.$$

Ceci implique que u^n est un contrôle ε_n-optimal, donc on peut lui appliquer le principe variationnel d'Ekeland. On obtient

$$J(u^n) \leq J(v) + \varepsilon_n d(u^n, v) \ ; \ \forall v \in \mathcal{U}.$$

De cette inégalité, on peut établir facilement le principe du maximum approché.

Théorème 3.13 (Principe du maximum approché) **:** *Pour chaque $\varepsilon_n^{'} \gneqq 0$, il existe une suite de contrôle ordinaires $(u^n)_n \in \mathcal{U}$, tel que il existe un processus adapté $p^n(t)$ solution de*

$$\begin{aligned} &dp^n(t) = \left\{-(b_y)_n^*(t)\, p^n(t) + (h_y)_n^*\right\} dt \\ &+ \ \textstyle\sum_{i=1}^d \left\{-(b_z)_n^*(t)\, p^n(t) + (h_z)_n^*(t)\right\} dW_i \\ &p^n(0) = g_y(y_0^n) \end{aligned} \qquad ((3\cdot 6))$$

telle que

$$H(t, y^n, z^n, v, p^n) \leq H(t, y^n, z^n, u^n, p^n) + \varepsilon_n^{'}$$

où

$$H(t, y^n, z^n, u^n, p^n) = p^n(t)^* \, b(t, y^n, z^n, u^n) - h(t, y^n, z^n, u^n)$$

Preuve : On sait précedemment que par le principe variationnel d'Ekeland, on a

$$J(u^n) \leq J(v) + \varepsilon_n d(u^n, v) \ ; \ \forall v \in \mathcal{U},$$

où la distance d est définie par

$$d(u, v) = P \otimes dt \left\{(\omega, t) \in \Omega \times [0, T], \ u(t, \omega) \neq v(t, \omega)\right\},$$

où $P \otimes dt$ est la mesure produit de P avec la mesure de Lebesgue dt.

Soit la perturbation fort suivante

$$u_\varepsilon^n = \begin{cases} v & \text{si } t \in [t' \quad t' + \varepsilon[\\ u^n & si \ t \notin [t' \quad t' + \varepsilon[\end{cases}$$

Ce qui nous donne

$$J(u^n) \leq J(u_\varepsilon^n) + \varepsilon_n d(u^n, u_\varepsilon^n).$$

C'est à dire

$$J(u^n) \; - J(u_\varepsilon^n) \leq \varepsilon_n' d(u^n, u_\varepsilon^n)$$

De la définition de la distance d, on a

$$\begin{aligned} d(u^\varepsilon, u_h^\varepsilon) \; &= P \otimes dt \left\{ (t, \omega) \; / \; u^n(t, \omega) \neq u_\varepsilon^n(t, \omega) \right\} \\ &= P \otimes dt \left\{ B \times \left[t', t + \varepsilon \right] \right\} \\ &= P(B) \; dt \left[t', t + \left[t', t + \varepsilon \right] \right] \\ &= P(B) \, \varepsilon \end{aligned}$$

Don on aura

$$d(u^\varepsilon, u_h^\varepsilon) \leq \varepsilon$$

Ce qui donne

$$J(u^n) \; - J(u_\varepsilon^n) \leq \varepsilon_n' \varepsilon$$

A partir de cette inégalité, le reste de la démonstration est le même que le principe du maximum en contrôle optimal stochastique (chapitre 2 théorème 2) avec une remplacement de u par u^n , finalement on obtient

si $\quad \varepsilon \to 0 \quad$ on a

$$H(t, y_t^n, z_t^n, v, p_t^n) \leq H(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n, p_t^n) + \varepsilon_n' \tag{3.1}$$

Ce qui termine la démonstration.■

3.4 Principe du maximum relaxé

Soit q un contrôle optimal relaxé et considérons le processus adjoint p, solution de l'équation différentielle stochastique suivante

$$\begin{cases} dp\left(t\right) = \{\int_U b_y^*\left(t, y_t, z_t, a\right) q_s\left(da\right) p\left(t\right) + \int_U b_y^*\left(t, y_t, z_t, a\right) q_s\left(da\right)\}dt \\ +\ \sum_{i=1}^d \{-\int_U b_z^*\left(t, y_t, z_t, a\right) q_s\left(da\right) p\left(t\right) + \int_U b_z^*\left(t, y_t, z_t, a\right) q_s\left(da\right)\}dW_i \\ \quad p\left(0\right) = \ g_y\left(y^0\left(0\right)\right)^* \end{cases} \qquad ((3\cdot 7))$$

Pour établir le principe du maximum relaxé des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques rétrogrades, on a besoin d'un lemme d'approximations du processus adjoint lié au contrôle optimal relaxé par des processus adjoints liés aux contrôles presque optimaux et qui est dobbé par le lemme suivant

Lemme 3.14 : *Soit p^n et p les solutions respectives des équations* (3.6) *et* (3.7), *alors on a*

$$E\left(\sup_{t\in[0,T]} |p_t - p_t^n|^2\right) \rightarrow 0 \qquad si \;\; n \rightarrow \infty$$

Preuve : Pour la simplicité des calculs, on pose

$$-b_y^*\left(s, y_s, z_s, a\right) q_s\left(da\right) = \alpha_y$$

$$h_y^*\left(s, y_s, z_s, a\right) q_s\left(da\right) = \beta_y$$

$$-\sum_{i=1}^d b_z^*\left(s, y_s, z_s, a\right) q_s\left(da\right) \ = \alpha_{z_i}$$

$$-\sum_{i=1}^d \ h_z^*\left(s, y_s, z_s, a\right) q_s\left(da\right) = \beta_{z_i}$$

$$\int_U -b_y^*\left(s, y_s^n, z_s^n, a\right) q_s\left(da\right) = \alpha_y^n$$

$$\int_U h_y^*\left(s,y_s^n,z_s^n,a\right)q_s^n\left(da\right)=\beta_y^n$$

$$-\sum_{i=1}^d\int_U b_z^*\left(s,y_s^n,z_s^n,a\right)q_s^n\left(da\right)\ =\alpha_{z_i}^n$$

$$-\sum_{i=1}^d\int_U h_z^*\left(s,y_s^n,z_s^n,a\right)q_s^n\left(da\right)=\beta_{z_i}^n$$

Soit p^n et p les solutions respectives des équations différentielles stochastiques (3.6) et (3.7), alors p^n et p sont données par

$$p_t=g_y(y_0)^*+\int_0^t\{\alpha_y.p_s)+\beta_y\}ds+\int_0^t\{\alpha_{z_i}.p_s+\beta_{z_i}\}dW_i$$

$$p_t^n=g_y(y_0^n)^*+\int_0^t\{\alpha_y^n.p_s^n+\beta_y^n\}ds+\int_0^t\{\alpha_{z_i}^n.p_s^n+\beta_{z_i}^n\}dW_i$$

Par la formule d'Itô on a

$$\mathbb{E}|p_t-\ p_t^n|^2=\int_0^t\mathbb{E}|(\alpha_{z_i}^np_s^n+\beta_{z_i}^n)-(\alpha_{z_i}p_s-\beta_{z_i})|^2ds$$

$$+2\int_0^t\mathbb{E}|(p_s-\ p_s^n)d\left(p_s-\ p_s^n\right)ds$$

$$\leq\mathbb{E}|g_y\left(y_0^n\right)-g_y\left(y_0\right)|^2+\int_0^t\mathbb{E}|(\alpha_{z_i}^np_s^n-\alpha_{z_i}p_s)+(\beta_{z_i}^n-\beta_{z_i})|^2$$

$$+2\int_0^t\mathbb{E}|p_s-\ p_s^n||(\alpha_y^np_s^n+\alpha_yp_s)+2\int_0^t\mathbb{E}|p_s-\ p_s^n||\beta_y^n-\beta_y|$$

d'aprés les hypothése sur b et h, puisque elles sont borné on a

$$\mathbb{E}|p_s-\ p_s^n|^2\leq\mathbb{E}|g_y\left(y_0^n\right)-g_y\left(y_0\right)|^2+C`\int_0^t\mathbb{E}|\beta_{z_i}^n-\beta_{z_i}|^2ds$$

$$+2K\int_0^t\mathbb{E}|p_s-\ p_s^n|^2+\int_0^t\mathbb{E}|p_s-\ p_s^n|^2+\int_0^t\mathbb{E}|\beta_y^n-\beta_y|^2$$

$$\leq C_1\mathbb{E}\left(|y^n-y|+|z^n-z|\right)^2+C_2\int_0^t \mathbb{E}(|y^n-y|^2+|z^n-z|^2)ds$$

$$+(2K+1)\int_0^t \mathbb{E}|p_s-\ p_s^n|^2ds+\int_0^t \mathbb{E}(|y_s^n-y_s|^2+|z_s^n-z_s|^2)ds$$

donc

$$\mathbb{E}\left[|p_s-\ p_s^n|^2\right]\leq k\int_0^t \mathbb{E}|p_s-\ p_s^n|^2ds+\rho^n$$

telle que

$$\rho^n=\int_0^t \mathbb{E}(|y_s^n-y_s|^2+|z_s^n-z_s|^2)ds$$

et d'aprés cette lemme on a $\rho^n \longrightarrow 0 \quad si\ \ n\rightarrow\infty$ par consequent en utilisant le lemme de Gronwall on obtient

$$\mathbb{E}\left[|p_s-\ p_s^n|^2\right]\leq \rho^n e^{kt}$$

Ce qui nous donne

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\mathbb{E}\left[|p_s-\ p_s^n|^2\right]=0$$

Ce qui termine la démonstration.■

A partir de ce dernier théorème et l'approximation des trajectoires, on peut facilement établir et démontrer le principe du maximum relaxé et qui est donné par

Théorème 3.15 : *Soit* (q,y) *une solution optimal pour notre problème de contrôle relaxé alors il existe un processus* A_t-*adapté solution de l'équation différentielle stochastique* (3.7)

Tel que

$$H\left(t,y_t,z_t,\mu,p_t\right)\leq H\left(t,y_t,z_t,q_t,p_t\right) \quad ,\forall\ \mu\in P\left(U\right)$$

Où le Hamiltonien H *dans le cas relaxé est défini par*

$$H\left(t,y,z,q,p\right)=p^{*}\int_{U}b\left(t,y,z,a\right)q(da)-\int_{U}h\left(t,y,z,a\right)q(da)$$

Preuve : On pose

$$H^{n}=H\left(t,y_{t}^{n},z_{t}^{n},u_{t}^{n},p_{t}^{n}\right)=p_{t}^{n*^{n}}b\left(t,y_{t}^{n},z_{t}^{n},u_{t}^{n}\right)-h\left(t,y_{t}^{n},z_{t}^{n},u_{t}^{n}\right)$$

$$H_{q}=H\left(t,y_{t},z_{t},q_{t},p_{t}\right)=p_{t}^{*}\int_{U}b\left(t,y_{t},z_{t},a\right)q_{t}\left(da\right)-\int_{U}h\left(t,y_{t},z_{t},a\right)q_{t}\left(da\right)$$

$$H_{v}^{n}=H\left(t,y_{t}^{n},z_{t}^{n},v,p_{t}^{n}\right)=p_{t}^{n*^{n}}b\left(t,y_{t}^{n},z_{t}^{n},v\right)-h\left(t,y_{t}^{n},z_{t}^{n},v\right)$$

$$H_{\mu}=H\left(t,y_{t},z_{t},\mu,p_{t}\right)=p_{t}^{*}\int_{U}b\left(t,y_{t},z_{t},a\right)\mu\left(da\right)-\int_{U}h\left(t,y_{t},z_{t},a\right)\mu\left(da\right)$$

D'aprés le principe du maximum approché

$$H\left(t,y_{t}^{n},z_{t}^{n},v,p_{t}^{n}\right)\leq H\left(t,y_{t}^{n},z_{t}^{n},u_{t}^{n},p_{t}^{n}\right)+\acute{\varepsilon}_{n}$$

Pour prouvé le théorème il faut montré d'abort que

$$\lim_{n}\mathbb{E}|H^{n}-H_{q}|^{2}=0$$

$$\lim_{n}\mathbb{E}|H_{v}^{n}-H_{\mu}|^{2}=0$$

donc on utilisant la définition de $H^{n},H_{q},H_{v}^{n},H_{\mu}$ on trouve

$$\mathbb{E}|H^{n}-H_{q}|^{2}=\mathbb{E}|H\left(t,y_{t}^{n},z_{t}^{n},u_{t}^{n},p_{t}^{n}\right)-H\left(t,y_{t},z_{t},q_{t},p_{t}\right)|^{2}$$

$$=\mathbb{E}|p_{t}^{n*^{n}}b\left(t,y_{t}^{n},z_{t}^{n},u_{t}^{n}\right)-h\left(t,y_{t}^{n},z_{t}^{n},u_{t}^{n}\right)$$

$$-p_t^* \int_U b(t, y_t, z_t, a)\, q_t(da) + \int_U h(t, y_t, z_t, a)\, q_t(da)\,|^2$$

d'aprés l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$,

$$\mathbb{E}|H^n - H_q|^2 \leq 2\mathbb{E}|p^{*^n} b(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n) - p(t)^* \int_U b(t, y_t, z_t, a)\, q_t(da)\,|^2$$

$$+2\mathbb{E}|h(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n) - \int_U h(t, y_t, z_t, a)\, q_t(da)\,|^2$$

$$\leq 2(\lambda_1 + \lambda_2).$$

telle que

$$\lambda_1 = \mathbb{E}|p^{*^n} b(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n) - p(t)^* \int_U b(t, y_t, z_t, a)\, q_t(da)\,|^2$$

$$\lambda_2 = \mathbb{E}|h(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n) - \int_U h(t, y_t, z_t, a)\, q_t(da)\,|^2$$

Pour λ_1 on a

$$\lambda_1 = \mathbb{E}|p^{*^n} b(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n) - p(t)^* \int_U b(t, y_t, z_t, a)\, q_t(da)\,|^2$$

$$= \mathbb{E}|p^{*^n} b(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n) + p^{*^n} b(t, y_t, z_t, u_t^n, p_t) - p_t^{*^n} b(t, y_t, z_t, u_t^n, p_t)$$

$$-p_t^{n*} \int_U b(t, y_t, z_t, a)\, q_t(da) + p_t^{n*} \int_U b(t, y_t, z_t, a)\, q_t^n(da)$$

$$-p_t^* \int_U b(t, y_t, z_t, a)\, q_t^n(da)\,|^2$$

$$= \mathbb{E}|p_t^{*^n}\left(b(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n) - b(t, y_t, z_t, u_t^n, p_t)\right) + (p_t^n - p_t)\, b(t, y_t, z_t, u_t^n, p_t)$$

$$+p_t^* \left(\int_U b\left(t, y_t, z_t, a\right) q_t^n\left(da\right) - \int_U b\left(t, y_t, z_t, a\right) q_t\left(da\right) \right) |^2$$

$$\leq 3\mathbb{E}||p_t^{*^n}\left(b\left(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n\right) - b\left(t, y_t, z_t, u_t^n\right)\right)|^2$$

$$+3\mathbb{E}|p_t^* \left(\int_U b\left(t, y_t, z_t, a\right) q_t^n\left(da\right) - \int_U b\left(t, y_t, z_t, a\right) q_t\left(da\right) \right) |^2$$

d'aprés le chatering lemma, on obtient

$$\int_U b\left(t, y_t, z_t, a\right) q_t^n\left(da\right) \to \int_U b\left(t, y_t, z_t, a\right) q_t\left(da\right) \qquad si \qquad n \to \infty$$

par conséquent on conclut que

$$\lambda_1 \longrightarrow 0 \qquad si \qquad n \to \infty$$

Pour λ_2 on a

$$\lambda_2 = \mathbb{E}|h\left(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n\right) - \int_U h\left(t, y_t, z_t, a\right) q_t\left(da\right)|^2$$

$$= \mathbb{E}|h\left(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n\right) - h\left(t, y_t, z_t, u_t^n\right) + h\left(t, y_t, z_t, u_t^n\right) - \int_U h\left(t, y_t, z_t, a\right) q_t\left(da\right)|^2$$

$$\leq 2\mathbb{E}|h\left(t, y_t^n, z_t^n, u_t^n\right) - h\left(t, y_t, z_t, u_t^n\right)|^2 + 2\mathbb{E}|\int_U h\left(t, y_t, z_t, a\right) q_t^n\left(da\right)$$

$$- \int_U h\left(s, y_t, z_t, a\right) q_t\left(da\right)|^2$$

Par l'approximation des trajectoires et le lemme de Flemming on obtient

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_2 = 0$$

Ce qui nous donne

$$\lim_n \mathbb{E}|H^n - H_q|^2 = 0$$

Par la même méthode on obtient. $\lim_n \mathbb{E}|H_v^n - H_\mu|^2 = 0$

$$\mathbb{E}|H_v^n - H_\mu|^2 = \mathbb{E}|H\left(t, y_t^n, z_t^n, v, p_t^n\right) - H\left(t, y_t, z_t, \mu, p_t\right)|^2$$

$$= |p_t^{n*^n} b\left(t, y_t^n, z_t^n, v\right) - h\left(t, y_t^n, z_t^n, v\right)$$

$$-p_t^* \int_U b\left(t, y_t, z_t, a\right) \mu_t\left(da\right) - \int_U h\left(t, y_t, z_t, a\right) \mu_t\left(da\right)|^2$$

puisque b , h borné et le lemme (3.2) on a

$$\lim_n \mathbb{E}|H_v^n - H_\mu|^2 = 0$$

Finalement pour $n \to \infty$ on a

$$H_\mu \leq H_q \quad , \forall \mu \in P\left(U\right)$$

Le théorème est prouvé.■

Théorème . Si on suppose que la fonction g est convexe et $\left(y_t^q, z_t^q\right) \longrightarrow H^q\left(t, y_t^q, z_t^q, p_t^q, q_t\right)$ est concave, alors μ est optimal s'il satisfait les CNOR.

Preuve : Même démonstration que pour le cas strict.

Bibliographie

[1] F. Antonelli, *Backward-forward stochastic differential equations,* Annals of Applied Probability, 1993, 3, pp. 777–793.

[2] S. Bahlali, B. Mezerdi and B. Djehiche, *Approximation and optimality necessary conditions in relaxed stochastic control problems,* Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, Volume 2006, pp 1-23.

[3] S. Bahlali and B. Labed, *Necessary and sufficient conditions of optimality for optimal control problem with initial and terminal costs*, Random Operators and Stochastic Equations, 2006, Vol 14, No3, pp 291-301.

[4] S. Bahlali, B. Djehiche and B. Mezerdi, *The relaxed maximum principle in singular control of diffusions*, SIAM J. Control and Optim, 2007, Vol 46, Issue 2, pp 427-444.

[5] S. Bahlali, *Necessary and sufficient conditions of optimality for relaxed and strict control problems*, SIAM J. Control and Optim, 2008, Vol. 47, No. 4, pp. 2078–2095.

[6] S. Bahlali, *Necessary and sufficient condition of optimality for optimal control problem of forward and backward systems*, Probability Theory and It's Application. In revision.

[7] A. Bensoussan, *Lecture on stochastic control. in non linear filtering and stochastic control*, Lecture notes in mathematics, 972. Proc. Cortona, Springer Verlag, 1981.

[8] Ph. Briand, B. Delyon, Y. Hu, E. Pardoux and L. Stoica, *L^p Solutions of backward stochastic differential equations*, Sochastic Process and their Applications, No 108 (2003), pp 109-129.

[9] N. Dokuchaev and X.Y. Zhou, *Stochastic controls with terminal contingent conditions*, Journal Of Mathematical Analysis And Applications, 1999, 238, pp 143-165.

[10] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl, 1974, Vol. 47, pp 324-353.

[11] I. Ekeland and R. Temam, *Analyse convexe et problème variationnel*, Dunod. 1974.

[12] N. El Karoui, N. Huu Nguyen and N. Jeanblanc Piqué, *Compactification methods in the control of degenerate diffusions*, Stochastics, 1987, Vol. 20, pp 169-219.

[13] N. El Karoui and M. Mazliak, *Backward stochastic differential equations*, Addison Wesley, Longman, 1997.

[14] N. El-Karoui, S. Peng and M.C. Quenez, *Backward stochastic differential equations in finance*, Math. finance 7, 1997.

[15] N. El-Karoui, S. Peng and M.C. Quenez, *A dynamic maximum principle for the optimization of recursive utilities under constraints*, Annals of Applied Probability, 11(2001), pp 664-693.

[16] W.H. Fleming, *Generalized solutions in optimal stochastic control*, Differential games and control theory 2, (Kingston conference 1976), Lect. Notes in Pure and Appl. Math.30, 1978.

[17] N.F Framstad, B. Oksendal and A. Sulem, *A sufficient stochastic maximum principle for optimal control of jump diffusions ans applications to finance*, J. Optim. Theory and applications, 2004, 121, pp 77-98.

[18] M. Fuhrman and G. Tessitore, *Existence of optimal stochastic controls and global solutions of forward-backward stochastic differential equations*, SIAM Jour.Cont. Optim, 2004, Vol 43, N° 3, pp 813-830.

[19] U.G. Haussmann, *General necessary conditions for optimal control of stochastic systems*, Math. Programming Studies 6, 1976, pp 30-48.

[20] U.G. Haussmann, *A Stochastic maximum principle for optimal control of diffusions*, Pitman Research Notes in Math, 1986, Series 151.

[21] J. Jacod and J. Mémin, *Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité*, Sem. Proba.XV, Lect. Notes in Math, 851, 1980, Springer Verlag.

[22] S.Ji and X. Y. Zhou, *A maximum principle for stochastic optimal control with terminal state constraints, and its applications.* Commun. Inf. Syst, 2006, 6(4), pp 321-338.

[23] H.J. Kushner, *Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimization problems*, SIAM J. Control Optim, Vol. 10, 1973, pp 550-565.

[24] J. Ma and J. Zhang, *Representation theorems for backward stochastic differential equations*, Ann. Appl. Probab, 2002, 12(4) :1390-1418.

[25] B. Mezerdi, *Necessary conditions for optimality for a diffusion with a non smooth drift*, Stochastics And Stoch. Reports, 1988, Vol. 24, pp 305-326.

[26] B. Mezerdi and S. Bahlali, *Approximation in optimal control of diffusion processes*, Rand. Operat. and Stoch. Equ, 2000, Vol.8, No 4, pp 365-372.

[27] B. Mezerdi and S. Bahlali, *Necessary conditions for optimality in relaxed stochastic control problems*, Stochastics And Stoch. Reports, 2002, Vol 73 (3-4), pp 201-218.

[28] E. Pardoux and S. Peng, *Adapted solutions of backward stochastic differential equations*, Sys. Control Letters, 1990, Vol. 14, pp 55-61.

[29] S. Peng, *A general stochastic maximum principle for optimal control problems*, SIAM Jour.Cont. Optim, 1990, 28, N° 4, pp 966-979.

[30] S. Peng, *Backward stochastic differential equations and application to optimal control*, Appl. Math. Optim, 1993, 27, pp 125-144.

[31] S. Peng and Z.Wu, *Fully coupled forward-backward stochastic differential equations and applications to optimal control*, SIAM J. Control Optim, 1999, 37, no. 3, pp. 825–843.

[32] J. T. Shi and Z. Wu, *The maximum principle for fully coupled forward-backward stochastic control system*, Acta Automatica Sinica, Vol 32, No 2, 2006, pp 161-169.

[33] Z. Wu, *Maximum Principle for Optimal Control Problem of Fully Coupled Forward-Backward Stochastic Systems,* Systems Sci. Math. Sci, A998, 11, No.3, pp 249-259.

[34] W. Xu, *Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward and backward system,* J. Austral. Math. Soc. Ser. B 37, 1995, pp 172-185.

[35] J. Yong and X.Y. Zhou, *Stochastic controls : Hamilton systems and HJB equations*, vol 43, Springer, New York, 1999.

[36] X.Y. Zhou, *Sufficient conditions of optimality for stochastic systems with controllable diffusions.* IEEE Trans. on Automatic Control, 1996, 41, pp 1176-1179.

Remerciements

C'est pour moi un trés grand plaisir d'exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur Bahlali Seid, maître de conférence à l'université de Biskra. Il m'a initié aux techniques du contrôle optimal des équations différentielles stochastiques en dirigeant ce travail. Ses encouragements, sa culture mathématique, sa disponibilité et son soutien ont grandement contribué à l'élaboration de ce travail.

Monsieur Mezerdi Brahim, professeur à l'université de Biskra qui a toujours manifesté un intérêt particulier pour mon travail, je le remercie vivement de me faire l'honneur de présider mon jury.

Mes remerciements vont également à Messieurs Necir Abdelhakim professeur à l'université de Biskra et Melkemi Khaled maître de conférence à l'université de Biskra pour avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury.

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons aux conditions nécesssaires et suffisantes d'optimalité en contrôle stochastique des systèmes gouvernés par des équations différentielles stochastiques rétrogrades. Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité seront établis pour deux modèles. Le premier concerne les contrôles stricts (Classiques), qui sont des processus à valeurs dans un sous ensemble de $\mathbb{R}^m$. Le second est la généralisation du premier aux cas des contrôles relaxés, qui sont des processus à valeurs mesures. Les résultats du cas strict, seront établis en introduisant une nouvelle méthode qui consiste à traîter le problème sans coût intégral et transformer le problème en un problème réstreint. Le résultat avec coût intégral sera déduit du cas restreint pat une transformation adéquate du processus adjoint et du Hamiltonien. Le cas relaxé sera déduit par passage à la limite en utilisant essentiellement le principe variationnel d'Ekeland.

Le premier chapitre est consacré à l'introduction des résultats principaux des équations différentielles stochastiques rétrogrades et spécialment le théorème d'existence et d'unicité de Pardoux-Peng.

Dans le deuxième chapitre, on traîte le problème des contrôles stricts et on établit des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.

Le troisième chapitre est consacré à la généralisation des résultats du deuxième chapitre au cas des contrôles relaxés qui sont des processus à vcaleurs mesures. Le principal outil pour obtenir les résultats est le principe variationnel d'Ekeland..

Mots clés. Equation différentielle stochastique rétrogrades, Contrôle stricts, Contrôle relaxé, Principe du maximum, Principe variationnel, Processus adjoint.

AMS Subject Classification. 93 Exx.