MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA
FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE
présenté par

Saliha BOUGHERARA

pour l'Obtention du Grade de **Magister en Mathématiques**
Option: Analyse et Modèles aléatoires

PRINCIPE DU MAXIMUM POUR LES PROBLEMES DE CONTROLE STOCHASTIQUE: APPROCHE PAR LES PROBABILITES EQUIVALENTES

Soutenu le :17/05/2005

devant le jury composé de :

Abdelhakim **NECIR**	MC	Univ. Batna	Président
Brahim **MEZERDI**	Pr	Univ. Biskra	Rapporteur
Khaled **MELKEMI**	MC	Univ. Biskra	Examinateur
Seïd **BAHLALI**	Dr CC	Univ. Biskra	Examinateur

Résumé

Dans ce mémoire, notre intérêt s'est focalisé sur les problèmes de contrôle stochastiques où la dynamique vérifie une équation différentielle stochastique de type Itô. Au premier chapitre, nous avons introduit les différents problèmes de contrôle stochastique et donné quelques exemples. Au deuxième chapitre, nous avons étudié en détails le principe de Bellmann qui donne lieu à l'équation de Hamiton Bellmann Jacobi. Cette équation ne possède pas en général des solutions régulières. Nous nous sommes donc intéressés à la notion de solutions de viscosité introduite par Grandall et Lions. On montre en particulier que la fonction de valeur est l'unique solution de viscosité de l'équation d' HJB. Au troisième chapitre, nous nous sommes intéressés aux conditions nécessaires d'optimalité de type Pontriagin par des approches de Haussmann et Kushner.

Mots clés. Equation différentiel stochastique, contrôle stochastique, principe du maximum, programmation dynamique.

Processus stochastiques et de Contrôle optimal

AMS Subject Classification. Primary 93E20, 60H30. Secondary, 60G44, 49N10.

ملخص

في هذا العمل نهتم بمسائل الاختبار العشوائية أين الديناميكية تحقق المعادلة التفاضلية العشوائية من شكل ايتو.

الفصل الأول: عرفنا أنواع مسائل الاختبار و أعطينا بعض الأمثلة عليها.

في **الفصل الثاني**: درسنا أساس بلمان الذي يسمح بإعطاء معادلة هاميلتن –بلمان –جاكوبي و هذه معادلة لا تقبل حل منتظم عموما. و نبرهن ان الدالة القيمة هي الحل الوحيد أللزوجي لمعادلة السابقة.

الفصل الأخير: نهتم بالشروط اللازمة للمثالية من الشكل بونترينج بواسطة تقريبات هوسمان و كوشنر.

Abstract

In this work, our interest was focalized on stochastic control problems where the dynamic satisfies a stochastic differential equation of the Ito type. In the first chapter, we have introduced various control problèms and gave some exemples. In the second one, we studied in some detail the Bellmann principe which gives the well known Hamiton Bellmann Jacobi equation. This equation does not have in general regular solutions. We have been interested in viscosity solutions introduced by Grandall and Lions. We show in particular that the value funtion is the unique viscosity solution of the HJB equation. In the last chapter, we studied the necessary conditions for optimality of the pontriagin type both by Haussmann and Kushnner approachs.

Key words. Stochastic differential equation, stochastic control, maximum princple, dynamic programming.

Stochastic Processuss and control problèms

AMS Subject Classification. Primary 93E20, 60H30. Secondary 60G44, 49N10.

Table des matières

0.1 Introduction

On considère des systèmes dynamiques évoluant sur un intervalle fini $[0, T]$, dirigés par un mouvement Brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$.

On appelle contrôle admissible tout processus $\alpha = (\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ mesurable et $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$-adapté à valeurs dans $\mathbb{A}$. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble de tous contrôles admissibles :

$$\mathbb{U} = \left\{ \alpha : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{A},\ \alpha = (\alpha_t)_{t \in \mathbb{R}_+} \text{ mesurable et } (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+} - \text{adapté} \right\}.$$

L'état du système est gouverné par une equation différentielle stochastique d'Itô, de la forme :

$$\begin{cases} dX_s = b(s, X_s, \alpha_s)\, ds + \sigma(s, X_s, \alpha_s)\, dW_s, & s \in]0, T] \\ X_0 = x, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

où b et σ sont deux fonctions boréliennes.

Le problème de contrôle stochastique consiste à optimiser un critère de performance.

Pour tout contrôle admissible α, on introduit une fonction de coût $J(\alpha)$.
(a) Horizon fini :

$$J(t, x, \alpha) = E_x \left[\int_t^T f(s, X_s, \alpha_s)\, ds + g(X_T) \right],$$

pour $t \leq T < \infty$ et X est la solution de equation différentielle stochastique (1).

(b) Horizon infini :

$$J(x, \alpha) = E_x \left[\int_0^\infty e^{-\gamma s} f(s, X_s, \alpha_s)\, ds \right].$$

E_x : l'espérance par rapport à la loi de probabilité P_x du processus (X_s) solution de (1).

L'objet du contrôle optimal est de minimiser la fonction de coût J (ou de le maximiser s'il s'agit d'un gain) sur l'ensemble de tous les contrôle admissibles.

La fonction de valeur associèe à ce problème de contrôle est définie par :

$$v(s,x) = \inf_{\alpha \in \mathbb{A}} J(s,x,\alpha).$$

La solution $X = (X_t,\ s \leq t \leq T)$ de l'équation **(1)** est appelée réponse au contrôle α.

Le couple (X^*, α^*) est dit optimal si :

$$v(s,x) = J(s,x,\alpha^*).$$

Dans ce mémoire nous nous intéressons à deux approches pour aborder la résolution des problèmes de contrôle, la première approche est le principe de la programmation dynamique qui est basée sur le fameux principe de Bellman. L'idée de cette approche est la suivante : si on considère le contrôle :

$$\widetilde{\alpha}_s = \begin{cases} \alpha_s, & t \leq s \leq t+h \\ \alpha_s^*, & t+h \leq s \leq T, \end{cases}$$

le principe d'optimalité de Bellman dit que si l'on choit α_s sur $[t, t+h]$ de façon à minimiser l'expression $J(t,x,\widetilde{\alpha})$, on obtient ainsi le contrôle α_s^* optimal. En appliquant formellement ce principe, on trouve deux équations praboliques et elliptiques non linéaire, de la forme :

L'équation de Bellman parabolique dans le cas où l'horizon est fini :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \sup_{a \in \mathbb{A}} \left[-\zeta^a v(t,x) - f(a,x)\right] = 0, \quad (t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}^n.$$

L'équation de Bellman elliptique dans le cas où l'horizon est infini :

$$\beta v(x) + \sup_{\alpha \in \mathbb{A}} \left[-\zeta^a v(x) - f(x,a)\right] = 0, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

où ζ^a désigne l'opérateur différentiel du second odre associée à la diffusion X :

$$\zeta^a w = b(x,a)\nabla_x w + \tfrac{1}{2} tr\left(\sigma(x,a) \cdot \sigma'(x,a) D_x^2 w\right).$$

La deuxième approche majeure pour aborder les problèmes de contrôle est le principe du maximum de Pontriagin, connu aussi sous le nom de conditions nécessaires d'optimalité. L'idée de cette approche consiste à dire que si un contrôle α^* est optimal parmi tous les contrôles admissibles, alors en utilisant l'approche de Lagrange en calcul des variations la dérivée de la fonctionnelle $J(\alpha)$ par rapport à un certain paramètre de perturbation doit être négative.

En gros, ce principe consiste à introduire un processus adjoint solution d'une certaine équation différentielle rétrograde et d'une inégalité variationnelle. La première contribution importante dans cette direction a été effectuée par Kushner, Bismut, Bensoussan, pour des problèmes où l'ensemble des contrôles admissibles est constitué de processus adaptés à une filtration fixée à l'avance et l'utilisation des solutions trajectorielles de l'équation d'état. La deuxième avance notable dans cette théorie est celle développée par Haussmann, où il considère la classe des contrôles feed-back (processus mesurables par rapport à la filtration naturelle de l'état du système) et emploie les techniques probabilistes telles que la transformation de Guirsanov et les techniques de la théorie des martingales.

Ce mémoire est constitué de troix chapitres :

Le premier chapitre consiste en une introduction aux problème de contrôle. On définit la notion de fonction valeur et ses propriétés. Aussi, nous décrivons de manière formelle comment le principe de la programmation dynamique permet d'obtenir les relations que doit satisfaire la fonction valeur. En utilisant le principe de la programmation dynamique, on trouve la forme de l'équation de Hamilton- Jacobi- Belman. On montre que la fonction valeur satisfait l'équation de HJB. En particulier, nous étudions les solutions de viscosité.

Dans le deuxième chapitre qui constitue l'essentiel de notre travail, nous nous sommes intéressés au principe du maximum pour établir des conditions nécessaires d'optimalité. L'accent sera mis sur l'approche des probabilités équivalentes et le théorème de Guirsanov.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du principe du maximum dans le cas où les coefficients sont assez réguliers et les contrôles admissibles sont adaptés à une filtration fixée à l'avance. En particulier, on trouve une forme explicite du processus adjoint.

Chapitre 1

Introduction aux problèmes de contrôle stochastique

1.1 Propriété de la fonction valeur

1.1.1 Introduction

Le problème de contrôle stochastique consiste à optimiser un critère de performance d'un système dynamique vérifiant une équation différentielle stochastique d'Itô (E.D.S) :

$$dX_t = b(X_t, \alpha_t)dt + \sigma\left(X_t, \alpha_t\right) dW_t. \tag{1.1}$$

L'objectif d'un problème de contrôle est de minimiser un critère et de trouver un contrôle optimal sur l'ensemble de touts les contrôles admissibles. Le coût est donné sous la forme :

$$J\left(s, x, \alpha\right) = E\left[\int_s^T f\left(t, X_t, \alpha_t\right) dt + g(X_T)\right],$$

où g est une fonction du coût final, X est une solution de (1.1).

On appelle contrôle admissible tout processus $\alpha = \left(\alpha_t\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ mesurable et $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$-adapté à valeurs dans $\mathbb{A}$. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble de tous contrôles admissibles :

$$\mathbb{U} = \left\{\alpha : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{A},\ \alpha = \left(\alpha_t\right)_{t\in\mathbb{R}_+} \text{ mesurable et } \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{R}_+} - \text{adapté} \right\}.$$

Aussi α est une application mesurable :

$$\alpha : \Omega \rightarrow \mathcal{F}\left([0, T],\ \mathbb{A}\right),$$

où $\mathcal{F}([0,T],\mathbb{A})$ désigne l'ensemble des fonctions de $[0,T]$ vers $\mathbb{A}$.

Pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, s'il existe un contrôle qui vérifie :

$$v(x) = \inf_{\alpha \in \mathbb{A}} J(x,\alpha) = J(x,\alpha^*),$$

il est appelé contrôle optimal et v est appelée le coût optimal, la fonction valeur ou performance optimale.

Ces systèmes modélisent les problèmes de la vie courante, particulièrement dans des problèmes d'économie et de finance.

Les problèmes de contrôles stochastiques optimaux ont été étudiée par plusieurs auteurs, entre autres, Haussmann $[9,10,11,12,13]$, Bensoussan $[3,4]$, Kushner $[14,15,16]$ et Bismut.$[5,6]$.

1.1.2 Position du problème

Soient $\left(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\ P\right)$ espace de probabilité filtré et $\mathbb{A}$ un Borélien de $\mathbb{R}^k$.On considère :

L'état du système est décrit par l'équation differentielle stochastique contrôlée c'est à dire l'état du système est influencè par un contrôle :

$$\begin{cases} dX_s = b(X_s,\alpha_s)\,ds + \sigma(X_s,\alpha_s)\,dWs, & s \in \left]0,T\right]. \\ X_0 = x, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.2}$$

où W un mouvement brownien d-dimentionnel, où :

Le coùt à minimiser est défini par :

$$E\left[\int_0^T f(X_s)\,ds + g(X_T)\right],$$

dans le cas d'un horizon fini et

$$E\left[\int_0^\infty e^{-\beta s} f(X_s)ds\right],$$

dans le cas où l'horizon est infini.

où $\beta > 0$ est un facteur d'actualisation, f et g sont des fonctions dans $\mathbb{R}$.

On définit la fonction de valeur comme suit :

Horizon fini :

$$v(t,x) = \inf_{\alpha \in \mathbb{A}} E\left[\int_0^T f(X_s, \alpha_s) ds + g(X_T)\right].$$

Horizon infini :

$$v(x) = \inf_{\alpha \in \mathbb{A}} E\left[\int_0^\infty e^{-Bs} f(X_s, \alpha_s) ds\right].$$

1.1.3 Principe d'optimalité de la programmation dynamique

En appliquant formellement le principe de Bellmann on obtient les équations de la programmation dynamique.

Théorème 1-1 :
1) Horizon fini **:**

Soit $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$. Pour tout θ temps d'arrêt à valeur dans $[t,T]$, on a :

$$v(t,x) = \inf_{\alpha \in \mathbb{A}} E \int_0^\theta f(X_s^{t,x}, \alpha_s) ds + v\left(\theta, X_\theta^{t,x}\right).$$

2) Horizon infini :

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Pour tout θ temps d'arrêt à valeur dans $[0, +\infty[$, on a :

$$v(x) = \inf_{\alpha \in \mathbb{A}} E\left[\int_0^\theta e^{-\beta s} f\left(X_s^x, \alpha_s\right) ds + e^{-\beta\theta} v\left(X_\theta^x\right)\right].$$

1.1.4 Continuité et propriété de Lipschitz de la fonction valeur

Lemme 1-1 : (Gronwall)
Soit g une fonction continue telle que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$g(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t g(s) ds, \text{ avec } \alpha \geq 0 \text{ ,} \beta \geq 0$$

Alors :

$$g(t) \leq \alpha \ \exp(\beta t).$$

Supposons que les fonctions b et σ sont Lipschitz en x, uniformément en $a \in \mathbb{A}$. Définissons alors la constante finie positive β_0 :

$$\beta_0 = \sup_{x \neq y, a \in \mathbb{A}} \left\{ \frac{\left[(b(x,a)-b(y,a))'(x-y)\right] + \frac{1}{2} tr\left[(\sigma(x,a)-\sigma(y,a))(\sigma(x,a)-\sigma(x,a)'\right]}{|x-y|^2} \right\}.$$

Lemme 1-2 :

1) Il existe $C \geq 0$ (dépendant de T) telle que pour tout $t \in [0,T]$, $s \in [t,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{A}$:

$$E\left|X_s^{t,x} - x\right|^2 \leq C(s-t).$$

2) Pour tout $t \geq 0$, $s \geq t$, x, $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{A}$:

$$E\left|X_s^{t,x} - X_s^{t,y}\right| \leq e^{\beta_0(s-t)}\left|x-y\right|.$$

Preuve : 1) On a :

$$dX_s = b(X_s, \alpha_s)ds + \sigma(X_s, \alpha_s)dW_s,$$

où sous forme intégrale :

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(X_u^{t,x}, \alpha_u)du + \int_t^s \sigma(X_u^{t,x}, \alpha_u)dW_u,$$

d'où :

$$X_s^{t,x} - x = \int_t^s b(X_u^{t,x}, \alpha_u)du + \int_t^s \sigma(X_u^{t,x}, \alpha_u)dW_u.$$

Appliquant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on a :

$$\left|X_s^{t,x} - x\right|^2 \leq 2\left|\int_t^s b(X_u^{t,\,x}, \alpha_u)^2 du\right|^2 + 2\left|\int_t^s \sigma(X_u^{t,\,x}, \alpha_u)dW_u\right|^2.$$

Par passage à l'espérance et puisque b et σ sont bornées, on obtient :

$$\begin{aligned} E\left|X_s^{t,x} - x\right|^2 &\leq 2E\left[\int_t^s \left|b(X_u^{t,x}, \alpha_u\right|^2 du + E\left|\int_t^s \sigma(X_u^{t,x}, \alpha_u)dW_u\right|^2\right] \\ &\leq 2C(s-t), \end{aligned}$$

où $E\left[(W_s - W_t)^2\right] = 2(s-t)$ (voir B.Øksendal [18])

Donc
$$E\left|X_s^{t,x}-x\right|^2 \leq 2C(s-t).$$

2) Posons $Z_s = X_s^{t,x} - X_s^{t,y},\ s \geq t.$

On a :
$$dX_s = b(X_s^{t,x},\alpha_s)ds + \sigma(X_s^{t,x},\alpha_s)dW_s.$$
$$dX_s = b(X_s^{t,y},\alpha_s)ds + \sigma(X_s^{t,y},\alpha_s)dW_s.$$

On utilise les formules $dX_s^{t,x}$ et $dX_s^{t,y}$, on obtient :

$$\begin{cases} dZ_s = \left(b(X_s^{t,x},\alpha_s) - b(X_s^{t,y},\alpha_s)\right)ds + \left(\sigma(X_s^{t,x},\alpha_s) - \sigma(X_s^{t,y},\alpha_s)\right)dW_s \\ Z_t = x - y. \end{cases}$$

Par la formule d'Itô, on obtient :

$$Z_s = Z_t + \int_t^s [\sigma(X_u^{t,x},\alpha_u) - \sigma(X_u^{t,y},\alpha_u)(X_u^{t,x} - X_u^{t,y})\ ]\,dW_u$$
$$+ \int_t^s [(b(X_u^{t,x},\alpha_u) - b(X_u^{t,y},\alpha_u)(X_u^{t,x} - X_u^{t,y})\ ]\,du$$
$$+ \frac{1}{2}tr\left[(\sigma(X_u^{t,s},\alpha_u) - \sigma(X_u^{t,y},\alpha_u))\,(\sigma(X_u^{t,x},\alpha_u) - \sigma(X_u^{t,y},\alpha_u))'du\ \right].$$

En passant aux éspérances et en appliquant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on obtient :

$$E\left|Z_s\right|^2 \leq 2\left|x-y\right|^2 + E(\ 2\left[\int_t^s \left(b(X_u^{t,x},\alpha_u) - b(X_u^{t,y},\alpha_u)\right)Z_u du + \right.$$
$$\left. tr\left(\sigma\left(X_u^{t,x},\alpha_u\right) - \sigma\left(X_u^{t,y},\alpha_u\right)\right)\left(\sigma\left(X_u^{t,x},\alpha_u\right) - \sigma\left(X_u^{t,y},\alpha_u\right)\right)^{'})du\right]\ ).$$

On a :
$$E\left[\int_t^s (\sigma(X_u^{t,x},\alpha_u) - \sigma(X_u^{t,y},\alpha_u)(X_u^{t,x} - X_u^{t,y}))dW_u\right] = 0,$$

car c'est une intègrale d'Itô donc une martingale.

Par définition de β_0, on trouve :

$$(b(x,a)-b(y,a))'(x-y)+\frac{1}{2}tr\left((\sigma(x,a)-\sigma(y,a))\cdot(\sigma(x,a)-\sigma(y,a))'\right)$$

$$\leq \beta_0 \left|x-y\ \right|^2,$$

d'où :

$$2\left[b(x,a-b(y,a))'(x-y)+tr(\sigma(x,a)-\sigma(y,a)\cdot(\sigma(x,a)-\sigma(y,a)'))\right]$$

$$\leq 2\beta_0 \left|x-y\right|^2.$$

Donc :

$$E\left|Z_s\right|^2 \leq 2\left|x-y\right|^2+E\int_t^s 2\beta_0\left|Z_u\right|^2 du.$$

On pose $\triangle(s)=E\left|Z_s\right|^2$, on a :

$$\triangle(s)\leq\left|x-y\right|^2+2\beta_0\int_t^s\triangle(\alpha)\,d\alpha.$$

D'après le lemme de Gronwall avec $\alpha\geq 0$ et $\beta\geq 0$, où α et β sont des constantes. Ceci implique que :

$$\triangle(s)\leq e^{2\beta_0(s-t)}\left|x-y\right|^2,$$

c'est à dire :

$$E\left|Z_s\right|^2\leq e^{2\beta_0(s-t)}\left|x-y\right|^2,$$

donc par Cauchy-Schwarz :

$$E\left|X_s^{t,x}-X_s^{t,y}\right|\leq e^{\beta_0(s-t)}\left|x-y\right|.$$

□

On a le résultat de continuité de la fonction valeur par rapport aux variables de temps et d'espace.

Proposition 1-1

1) Horizon fini :

Il existe une constante $C\geq 0$ (dépendant de T), telle que pour tout $s,\, t\in[0,T]$ et $x,\, y\in\mathbb{R}^n$:

$$|\upsilon(t,x)-\upsilon(s,y)|\leq C\left[|t-s|^{\frac{1}{2}}+|x-y|\ \right].$$

2) Horizon infini :

Il existe une constante $C\geq 0$ telle que pour tout $x,\, y\in\mathbb{R}^n$:

$$|\upsilon(x)-\upsilon(y)|\leq\begin{cases} C\,|x-y|^{\frac{\beta}{\beta_0}} & \text{si}\quad 0<\beta<\beta_{0.}. \\ C\,|x-y| & \text{si}\quad \beta\geq\beta_0. \end{cases}$$

Preuve :

1) a) Lipschitz en x : En notant que $|\inf_i a_i-\inf_i b_i|\leq\sup_i|a_i-b_i|$, on a :

$$|\upsilon(t,x)-\upsilon(t,y)|=\inf\nolimits_{\alpha\in\mathbb{A}}E\left[\int_t^T f(X_s^{t,x},\alpha_s)ds+g(X_T^{t,x})\right]$$

$$-\quad\inf\nolimits_{\alpha\in\mathbb{A}}E\left[\int_t^T f(X_s^{t,y},\alpha_s)ds+g(X_T^{t,y})\right],$$

obtient :

$$|\upsilon(t,x)-\upsilon(t,y)|$$

$$\leq\sup\nolimits_{\alpha\in\mathbb{A}}E\int_t^T|f(X_s^{t,x},\alpha_s)-f(X_s^{t,y},\alpha_s)\ |\,ds+E\left|g(X_T^{t,x})-g(X_T^{t,y})\ \right|.$$

Puisque f et g sont Lipschitzs, on a :

$$|\upsilon(t,x)-\upsilon(t,y)|\leq\sup_{\alpha\in\mathbb{A}}\left\{E\int_t^T\left|X_s^{t,x}-X_s^{t,y}\right|ds+E\left|X_T^{t,x}-X_T^{t,y}\right|\right\},$$

et d'après le lemme 1-2, on trouve :

$$|\upsilon(t,x)-\upsilon(t,y)|\leq C\,|x-y|\left[\int_t^T e^{\beta_0(s-t)}ds+e^{\beta_0(T-t)}\right],$$

donc :

$$|\upsilon(t,x)-\upsilon(t,y)|\leq C\,|x-y|\,.$$

b) Hölder $1\diagdown 2$ en t : Soit $0\leq t<s\leq T$. D'après le principe de la program-

mation dynamique avec $\theta = s$, on a :

$$v(t,x) = \inf_{\alpha\in\mathbb{A}} E\left[\int\limits_t^s f\left(X_u^{t,x},\alpha_u\right)du + v(s,X_s^{t,x})\right]$$

En ajoutant et en retranchant le terme $v(s,x)$, on trouve :

$$|v(t,x)-v(s,x)| = \left|\inf_{\alpha\in\mathbb{A}} E\int_t^s f(X_u^{t,x},\alpha_u)du + v(s,X_s^{t,x}) - v(s,x)\right|.$$

Par suite, on a :

$$|v(t,x)-v(s,x)|$$

$$\leq \sup\nolimits_{\alpha\in\mathbb{A}} E\int_t^s |f(X_u^{t,x},\alpha_u)\ |\,du + \sup\nolimits_{\alpha\in\mathbb{A}} E\,|(v(s,X_s^{t,x}) - v(s,x)\ |\,.$$

Comme f est borné et d'après l'inégalité du 1) a), on obtient :

$$|v(t,x)-v(s,x)| \leq C\,(s-t) + \sup_{\alpha\in\mathbb{A}} E\left|X_s^{t,x}-x\right|,$$

et d'après le lemme 1-2, on a :

$$|v(t,x)-v(s,x)| \leq C\,(s-t) + C\,(s-t)^{\frac{1}{2}}\,,$$

donc pour tout $s,\ t\in[0,T]\,,\ x,\ y\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$|v(t,x)-v(s,x)| \leq C\,(s-t)^{\frac{1}{2}}\,.$$

2) Puisque :

$$v(x) = \inf_{\alpha\in\mathbb{A}} E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta s} f(X_s^x,\alpha_s)ds\right],$$

et

$$v(y) = \inf_{\alpha\in\mathbb{A}} E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta s} f(X_s^y,\alpha_s)ds\right].$$

On a pour tout $T>0$:

$$|v(x)-v(y)| \leq \sup_{\alpha\in\mathbb{A}} E\int_0^{+\infty} e^{-\beta s}\,|f(X_s^x,\alpha_s)-f(X_s^y,\alpha_s)|\,ds,$$

donc :

$$|v(x)-v(y)| \leq \sup_{\alpha\in\mathbb{A}} E\int_0^T e^{-\beta s}\left|f(X_s^x,\alpha_s)-f(X_s^y,\alpha_s)\ \right| ds$$

$$+\sup_{\alpha\in\mathbb{A}} E\int_T^{+\infty} e^{-\beta s}\left[f(X_s^x,\alpha_s)-f(X_s^y,\alpha_s)\ \right] ds.$$

Comme f est Lipschitz et bornée, on en déduit d'après le lemme 1-2. :

$$|v(x)-v(y)| \leq C\,|x-y|\int_0^T e^{(\beta_0-\beta)s}ds+Ce^{-\beta T}.$$

* **1**$^{\text{ère}}$ cas **:** $\beta>\beta_0\,(\beta>0)$. Alors :

$$|v(x)-v(y)| \leq C\left[\frac{1-e^{-(\beta-\beta_0)T}}{\beta-\beta_0}\ \right]|x-y\ |+Ce^{-\beta T},$$

et faisant tendre T vers l'infini, on obtient :

$$|v\,(x)-v\,(y)| \leq C\,|x-y|\,.$$

* **2**$^{\textbf{ème}}$ cas : $0<\beta\leq\beta_0$. Alors :

$$|v(x)-v(y)| \leq C\,|x-y|\left[\frac{e^{(\beta-\beta_0)T}-1}{\beta_0-\beta}\right]+Ce^{-\beta T},\quad \forall T>0.$$

avec la convention que le terme entre crochet est égale à 1 lorsque $\beta=\beta_0$. On minimise par rapport à T à :

$$C\,|x-y|\left[\frac{e^{(\beta-\beta_0)T}-1}{\beta_0-\beta}\right]+Ce^{-\beta T},$$

le minimun étant atteint pour:

$$e^{\beta_0 T}=\frac{\beta}{|x-y|},$$

en prenant le signe logaritme, on aura :

$$\ln e^{\beta_0 T}=\ln\frac{\beta}{|x-y|},$$

puis on a :

$$\beta_0 T=\ln\frac{\beta}{|x-y|},$$

donc :
$$T = \left(\frac{1}{\beta_0}\right) \ln \frac{\beta}{|x-y|}.$$
On a aussi :
$$\frac{e^{(\beta_0-\beta)T}-1}{(\beta_0-\beta)} = \frac{e^{\beta_0 T}e^{-\beta T}-1}{(\beta_0-\beta)},$$
substituant T par $\left(\frac{1}{\beta_0}\right) \ln \frac{\beta}{|x-y|}$, on a :
$$\frac{e^{(\beta_0-\beta)T}-1}{(\beta_0-\beta)} = \frac{\left(\frac{\beta}{|x-y|}\right) \times e^{-\frac{\beta}{\beta_0}\ln\frac{\beta}{|x-y|}}-1}{(\beta_0-\beta)},$$
puis on a :
$$\frac{e^{(\beta_0-\beta)T}-1}{(\beta_0-\beta)} = \frac{\left(\frac{\beta}{|x-y|}\right)\left(\frac{\beta}{|x-y|}\right)^{\frac{-\beta}{\beta_0}}-1}{(\beta_0-\beta)},$$
donc :
$$\frac{e^{(\beta_0-\beta)T}-1}{(\beta_0-\beta)} = \frac{\left(\frac{\beta}{|x-y|}\right)^{\frac{\beta_0-\beta}{\beta_0}}-1}{(\beta_0-\beta)}.$$
Alors pour :
$$(1)\ T = \left(\frac{1}{\beta_0}\right) \ln\left(\frac{\beta}{|x-y|}\right)$$
$$(2)\ \frac{e^{(\beta-\beta_0)T}-1}{\beta_0-\beta} = \frac{\left(\frac{\beta}{|x-y|}\right)^{\frac{\beta_0-\beta}{\beta_0}}-1}{\beta_0-\beta},$$
on a :
$$|v(x)-v(y)| \leq C\left\{|x-y|\left[\frac{\left(\frac{\beta}{|x-y|}\right)^{\frac{\beta_0-\beta}{\beta_0}}-1}{\beta_0-\beta}\right] + \left(\frac{|x-y|}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta_0}}\right\},$$
donc :
$$|v(x)-v(y)| \leq C\,|x-y|^{\frac{\beta}{\beta_0}}.$$
Si $|x-y| > \beta$, alors comme v est bornée, il existe $C > 0$ tel que :
$$|v(x)-v(y)| \leq C\beta^{\frac{\beta}{\beta_0}},$$
donc :
$$|v(x)-v(y)| \leq C\,|x-y|^{\frac{\beta}{\beta_0}},$$
□

1.1.5 Exemples

Exemple 1-1 : quand vendre un actif ?

Soit une personne possédant un actif ou une ressourse (maison, action,etc...) qu'elle déside vendre. Le prix de cet actif évolue selon :

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dW_t.$$

Supposons qu'à la vente de l'actif, il y a un coût fixe de transaction $a > 0$. Ainsi, si la personne décide de vendre l'actif à la date t, le bénéfice net de cette vente sera :

$$e^{-\rho t}(X_t - a),$$

où $\rho > 0$ est le facteur d'inflation.

Le problème est alors de trouver un temps d'arrêt qui maximise le bénéfice net espéré :

$$\sup \left[e^{-\rho r}(X_r - a) \right],$$

et de calculer le profit espéré.

Exemple 1-2 : Problème du choix de portefeuille de Merton (Horizon fini).

On considère un marché financier à deux actifs, l'un sans risque représentant le compte d'épargne et l'un risqué, typiquement représenté par une action. Le processus de prix de l'actif sans risque évolue selon :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt,$$

et celui de l'actif risqué :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Ici τ, μ et σ sont des constantes avec $\sigma > 0$. Soit un investisseur ou agent qui investit dans ces deux actifs, avec une proportion de sa richesse π_t dans l'actif risqué et donc $1 - \pi_t$ dans l'actif sans risque à la date t. Son processus de richesse évolue selon :

$$dX_t = (1 - \pi_t) \frac{X_t}{S_t^0} dS_t^0 + \pi_t \frac{X_t}{S_t} dS_t.$$

En substituant dS_t^0 par $rS_t^0 dt$, on trouve :

$$dX_t = (\pi_t X_t \mu + (1 - \pi_t) X_t r) dt + \pi_t X_t \sigma dW_t.$$

Le contrôle est le processsus π à valeur dans $\mathbb{R}$. Le critère économique consiste à maximiser l'espérance de l'utilité de la richesse terminale à un horizon fini $T < +\infty$:

$$\sup_{\pi} E\left[U\left(X_T\right)\right],$$

où $U(x)$ est une fonction d'utilité, par exemple $U(x) = x^p \diagup p$, $0 < p < 1$.

1.2 Programmation dynamique et solutions de viscosité

Dans ce paragraphe, en appliquant formellement le principe de la programation dynamique aussi appelè le principe de Bellman, on peut montrer que la fonction de valeur associée à un problème de contrôle stochastique à temps continu satisfait à une EDP non linéaire appelé équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

L'état du système dynamique est une solution d'une équation différentielle stochastique du type Itô, de la forme :

$$\begin{cases} dX_s = b(s, X_s, \alpha_s)ds + \sigma(s, X_s, \alpha_s)dW_s, & s \in]0, T] \\ X_0 = x, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

où W_s désigne un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. L'ensemble de tous les contrôle admissibles est noté $\mathbb{U}$.

On définit la fonction de coût :

(a) Horizon fini :

$$J\left(t, x, \alpha\right) = E_x\left[\int_t^T f\left(s, X_s, \alpha_s\right) ds + g\left(X_T\right)\right],$$

où x la condition initail et $t \leq T < \infty$.

(b) Horizon infini :

$$J\left(x, \alpha\right) = E_x\left[\int_0^\infty e^{-\gamma s} f\left(s, X_s, \alpha_s\right) ds\right].$$

1.2.1 Equation d'Hamilton-Jacobi -Bellman

1) Horizon fini :

Soit $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ et un contrôle $\alpha = (\alpha_t)_t$ à valeur dans $\mathbb{A}$, on considère l'évolution de l'état du système :

$$dX_s = b(X_s, \alpha_s)ds + \sigma(X_s, \alpha_s)\, dW_s, \quad t \leq s \leq T. \tag{1.3}$$

Soit la fonction de coût :

$$J(t,x,\alpha) = E\left[\int_t^T f(X_s^{t,x}, \alpha_s)ds + g(X_T^{t,x})\right].$$

On pose :

$$v(t,x) = \inf_\alpha J(t,x,,\alpha).$$

2) Horizon infini :

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, et un contrôle $\alpha = (\alpha_t)_{t \geq 0}$ à valeur dans $\mathbb{A}$, on a la fonction de coût :

$$J(t,x,\alpha) = E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta s} f(X_s^x, \alpha_s)ds\right].$$

On pose :

$$v(x) = \inf_\alpha J(t,x,,\alpha),$$

le principe de la programmatrion dynamique appelé aussi principe de Bellmann est basé sur l'observation fondamentale suivante : Si une trajectoire est optimal alors elle est optimal à chaque instant, c'est à dire si on commence par un autre point on ne peut faire mieux que de suivre la trajectoire optimale.

Considérons le contrôle

$$\widetilde{\alpha}_s = \begin{cases} \alpha_s, & t \leq s \leq t+h \\ \alpha_s^*, & t+h \leq s \leq T, \end{cases} \tag{1.4}$$

le principe d'optimalité de Bellman dit que si l'on choit α_s sur $[t, t+h]$ de façon à minimiser l'expression $J(t,x,\widetilde{\alpha})$, on obtient ainsi le contrôle α_s^* optimal.

Proposition 1-2 :

1) Horizon fini **:**

La fonction de valeur définie par **:**

$$v(t,x) = \inf_\alpha E\left[\int_t^T f(X_s^{t,x},\alpha_s)ds + g(X_T^{t,x})\right] \quad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n,$$

vérifie :

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \sup_{a\in\mathbb{A}}\left[-\zeta^a v\,(t,x) - f(x,a)\right] = 0, && \forall\,(t,x)\in[0,T[\,\times\mathbb{R}^n.\\
&v(T,x) = g(x), && x\in\mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Cette équation est appelée équation de la programmation dynamique ou l'équation de Hamillton-Jacobi-Bellman **(**H.J.B).

2) Horizon infini

La fonction de valeur définie par

$$v(x) = \inf_\alpha E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta s} f(X_s^x,\alpha_s)ds\right],$$

vérifie :

$$\beta v\,(x) + \sup_{a\in\mathbb{A}} E\left[-\zeta^a v\,(x) - f(x,a)\right] = 0, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Cette équation est appelée équation de la programmation dynamique ou l'équation de Hamillton-Jacobi-Bellman (H.J.B).

Preuve : **1)** Horizon fini :

*) En premier, on montre que :

$$v(t,x) \le E\left[\int_t^{t+h} f(X_s^{t,x},a)ds + v(t+h, X_{t+h}^{t,x})\right].$$

Soit la fonction de coût :

$$J(t,x,\alpha) = E\left[\int_t^T f(X_s^{t,x},\alpha_s)ds + g(X_T^{t,x})\right].$$

On pose :

$$v(t,x) = \inf_\alpha J(t,x,,\alpha).$$

Pour connu le contrôl α_s^*, pour $s\in[t+h,T]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
v(t+h,x\,(h)) &= J(t+h,x\,(h)\,,\alpha^*) \qquad (1.5)\\
&= E\left[\int_{t+h}^T f(X_s^{t+h,x(h)},\alpha_s^*)ds + g(X_T^{t+h,x(h)}) \setminus X_{t+h}^{t,x} = x\,(h)\right],
\end{aligned}$$

où a l'instant $t+h$, l'état du système devient $x\left(h\right)=X_{t+h}^{t,x}$.

Par unicité du flot de l'EDS, $X_s^{t,x}=X_s^{t+h,X_{t+h}^{t,x}}$ pour $s>t+h$ et d'après (1.4), on trouve :

$$J\left(t,x,\widetilde{\alpha}\right)=$$

$$E\left[\int_t^{t+h}f(X_s^{t.x},\alpha_s)ds+\int_{t+h}^{T}f(X_s^{t+h,X_{t+h}^{t+x}},\alpha_s^*)ds)+g(X_T^{t+h,X_{t+h}^{t,x}})\right].$$

D'après (1.3), on a :

$$J\left(t,x,\widetilde{\alpha}\right)=E\left[\int_t^{t+h}f(X_s^{t.x},\alpha_s)ds+\upsilon(t+h,X_{t+h}^{t,x})\right],$$

on obtient **:**

$$\upsilon(t,x)=\inf_{\alpha}E\left[\int_t^{t+h}f(X_s^{t,x},\alpha_s)ds+\upsilon(t+h,X_{t+h}^{t,x})\right],$$

donc :

$$\upsilon(t,x)\leq E\left[\int_t^{t+h}f(X_s^{t,x},\alpha_s)ds+\upsilon(t+h,X_{t+h}^{t,x})\right].$$

Considèrons le contrôle constant $\alpha_s=a\in\mathbb{A}$ sur $[t,t+h]$, on a :

$$\upsilon(t,x)\leq E\left[\int_t^{t+h}f(X_s^{t,x},a)ds+\upsilon(t+h,X_{s+h}^{t,h})\right]. \tag{1.6}$$

**) On suppose que $\upsilon\in\mathbb{C}^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}^n)$, en appliquant la formule d'Itô à :

$$\upsilon(t,x)=J(t,x,\alpha),$$

et en intégrant entre t et $t+h$, on obtient :

$$\upsilon(t+h,X_{t+h}^{t,x})=\upsilon(t,x)+\int_t^{t+h}\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\zeta^a\upsilon\right)(s,X_s^{t,x})\,ds$$

$$+\int_t^{t+h}\nabla_x\upsilon\left(s,X_s^{t,x}\right)'\sigma\left(X_s^{t,x},a\right)dW_s,$$

où ζ^a est l'opérateur défini par :

$$\zeta^a w = b(x,a)\nabla_x w + \frac{1}{2}tr\left(\sigma\left(x,a\right)\cdot\sigma^{'}\left(x,a\right)D_x^2 w\right).$$

Par passage à l'espérance, on a :

$$E\left[\left(\upsilon\left(t+h, X_{t+h}^{t,x}\right)\ \right] = \upsilon\left(t,x\right) + E\left[\int_t^{t+h}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \zeta^a \upsilon\right)\left(s, X_s^{t,x}\right)ds\right],$$

d'où :

$$\upsilon(t,x) = E\left[\upsilon\left(t+h, X_{t+h}^{t,x}\right)\ \right] - E\left[\int_t^{t+h}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \zeta^a \upsilon\right)\left(s, X_s^{t,x}\right)ds\right].$$

D'après (1.6), on a :

$$\upsilon(t,x) \leq E\left[\int_t^{t+h} f(X_s^{t,x}, a)ds + \upsilon\left(t+h, X_{t+h}^{t,x}\right)\right],$$

donc :

$$E\left[\upsilon\left(t+h, X_{t+h}^{t,x}\right)\right] - E\left[\int_t^{t+h}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \zeta^a \upsilon\right)(s, X_s^{t,x})\,ds\right]$$

$$\leq E\left[\int_t^{t+h} f(X_s^{t,x}, a)ds + \upsilon\left(t+h, X_{t+h}^{t,x}\right)\right],$$

par suite :

$$0 \leq E\left[\int_t^{t+h} f(X_s^{t,x}, a)ds + \int_t^{t+h}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \zeta^a \upsilon\right)\left(s, X_s^{t,x}\right)ds\right].$$

Divisant par h :

$$0 \leq E\left[\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \zeta^a \upsilon\right)\left(s, X_s^{t,x}\right)ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(X_s^{t,x}, a)ds\right].$$

En faisant tendre h vers 0, on obtient :

$$0 :\leq \frac{\partial \upsilon}{\partial t}\left(t,x\right) + \zeta^a \upsilon\left(t,x\right) + f(x,a).$$

Ceci étant valable pour $a \in \mathbb{A}$, on a alors :

$$-\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\left(t,x\right) + \sup_{a\in\mathbb{A}}\left[-\zeta^a \upsilon\left(t,x\right) - f(x,a)\right] \leq 0. \tag{1.7}$$

D'autre part, on suppose que α^* un contrôle optimal. Alors on a :

$$\upsilon\left(t,x\right)=E\left[\int_t^{t+h} f(X_s^*,\alpha_s^*)ds+\upsilon(t+h,X_{t+h}^*)\right],$$

où X^*est l'état du système solution (1.3). Par même téchnique, on trouve :

$$-\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\left(t,x\right)-\zeta^{\alpha_t^*}\upsilon\left(t,x\right)-f(x,\alpha_t^*)=0,$$

ce qui combiné avec (1.7) prouve que υ satisfait à :

$$-\frac{\partial\upsilon}{\partial t}(t,x)+\sup_{a\in\mathbb{A}}\left[-\zeta^a\upsilon\left(t,x\right)-f(x,a)\right]=0,\ \forall\left(t,x\right)\in\left[0,T\right[\times\mathbb{R}^n.$$

A cette équation aux dérivées partielles, il faut ajouter la condition terminale :

$$\upsilon(T,x)=g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

2) Horizon infini **:**

*) Nous avons :

$$\upsilon\left(x\right)=\inf_{\alpha\in\mathbb{A}}E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta s}f(X_s^x,\alpha_s)ds\right].$$

D'après le principe de la programmation dynamique, on a :

$$\upsilon(x)=\inf_{\alpha\in\mathbb{A}}E\left[\int_0^{h} e^{-\beta s}f(X_s^x,\alpha_s)ds+e^{-\beta h}\upsilon\left(X_h^x\right)\right],$$

donc :

$$\upsilon(x)\leq E\left[\int_0^{h} e^{-\beta s}f(X_s^x,\alpha_s)ds+e^{-\beta h}\upsilon\left(X_h^x\right)\right].$$

Considèrons le contrôle constant $\alpha_s=a\in\mathbb{A}$, on a :

$$\upsilon\left(x\right)\leq E\left[\int_0^{h} e^{-\beta s}f(X_s^x,a)ds+e^{-\beta h}\upsilon\left(X_h^x\right)\right].\tag{1.8}$$

**) On suppose que $\upsilon\in\mathbb{C}^2(\mathbb{R}^n)$, en appliquant la formule d'Itô à :

$$e^{-\beta t}\upsilon\left(X_t^x\right),$$

et en intégrant entre 0 et h, on obtient :

$$e^{-\beta h}\upsilon\left(X_h^x\right)=\upsilon\left(x\right)+\int_0^h e^{-\beta s}\left[\zeta^a\upsilon\left(x\right)-\beta\upsilon\left(X_s^x\right)\ \right]ds$$

$$+\int_0^h\left[e^{-\beta s}\nabla\upsilon\left(X_s^x\right)^{'}\sigma\left(X_s^x,\alpha_s\right)\ \right]dW_s.$$

Prenant l'espérance, on trouve :

$$E\left[e^{-\beta h}\upsilon\left(X_h^x\right)\right]=\upsilon\left(x\right)+E\left[\int_0^h e^{-\beta s}\left[\zeta^a\upsilon\left(x\right)-\beta\upsilon\left(X_s^x\right)\right]ds\right].$$

d'où :

$$\upsilon\left(x\right)=E\left[e^{-\beta h}\upsilon\left(X_h^x\right)\ \right]-E\left[\int_0^h e^{-\beta s}\left[\zeta^a\upsilon\left(x\right)-\beta\upsilon\left(X_s^x\right)\right]ds\right],$$

d'après (1.8), on a :

$$\upsilon\left(x\right)\leq E\left[\int_0^h e^{-\beta s}f(X_s^x,a)ds+e^{-\beta h}\upsilon\left(X_h^x\right)\right],$$

par suit :

$$E\left[e^{-\beta h}\upsilon\left(X_h^x\right)\ \right]-E\left[\int_0^h e^{-\beta s}\left[\zeta^a\upsilon\left(x\right)-\beta\upsilon\left(X_s^x\right)\right]ds\right]$$

$$\leq E\left[\int_0^h e^{-\beta s}f(X_s^x,a)ds+e^{-\beta h}\upsilon\left(X_h^x\right)\right],$$

donc :

$$0\leq E\left[\int_0^h e^{-\beta s}f(X_s^x,a)ds+\int_0^h e^{-\beta s}\left[\zeta^a\upsilon\left(x\right)-\beta\upsilon\left(X_s^x,a\right)\right]ds\right].$$

En divisant par h et en faisant tendre h vers 0, on obtient :

$$0\leq f(x,a)+\zeta^a\upsilon\left(x\right)-\beta\upsilon\left(x\right).$$

Ceci étant valable pour tout $a\in\mathbb{A}$, alors :

$$\beta\upsilon\left(x\right)+\sup_{a\in\mathbb{A}}\left[-\zeta^a\upsilon\left(x\right)-f(x,a)\right]\leq 0.$$

D'autre part, on suppose que α^*est un contrôle optimal. Alors :

$$v\left(x\right)=E\left[\int_0^h e^{-\beta s}f(X_s^x,\alpha_s^*)ds+e^{-\beta h}v\left(X_h^x\right)\right].$$

Par un argument similaire, on trouve :

$$\beta v\left(x\right)+\sup_{a\in\mathbb{A}}\left[-\zeta^a v\left(x\right)-f(x,a)\ \right]=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

Finalement, on obtient le résultat demandé.□

1) Horizon fini : L'argument d'optimalité de la programmation dynamique suggère que si l'on peut trouve un contrôle $\alpha^*(t,x)$, tel que :

$$\sup_{a\in\mathbb{A}}\left[-\zeta^a v\left(t,x\right)-f(x,a)\ \right]=-\zeta^{\alpha^*(t,x)}v\left(t,x\right)-f(x,\alpha^*\left(t,x\right),$$

c'est à dire :

$$\alpha^*(t,x)\in\arg\min_{a\in\mathbb{A}}\left[-\zeta^a v\left(t,x\right)+f(x,a)\right],$$

alors :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}-\zeta^{\alpha^*(t,x)}v\left(t,x\right)-f(x,\alpha^*(t,x))=0,$$

et donc :

$$v(t,x)=E\left[\int_t^T f(X_s^*,\alpha^*(s,X_s))ds+g(X_T^*)\right],$$

où X^* est une solution de l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_s^*=b(X_s^*,\alpha^*(s,X_s^*))ds+\sigma\left(X_s^*,\sigma\left(s,X_s^*\right)\right)dW_s, & t\leq s\leq T \\ X_t^*=x, & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

et α^* est un contrôle optimale feedback.

2) Horizon infini **:** Si pour tout x, $\alpha^*(x)$ est un point de maximum sur $\mathbb{A}$ de

$\sup_{a\in A}\left[-\zeta^a v\left(x\right)-f(x,a)\right]$, alors $\{\alpha_t^*(X_t^*),0\leq t\leq T\}$ est un contrôle optimal feedback, où :

$$\begin{cases} dX_t^*=b(X_t^*,\alpha^*(X_t^*))+\sigma\left(X_t^*,\alpha^*(X_t^*)\right)dW_t, & 0\leq t\leq T. \\ X_0^*=x, & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Théorème 1.2 :
1) Horizon fini **:**

Supposons que la fonction valeur $\upsilon \in \mathbb{C}^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}^n)$. Alors υ satisfait l'équation de Hamilton -Jacobi-Bellman :

$$-\frac{\partial \upsilon}{\partial t}(t,x)+\sup_{a\in\mathbb{A}}\left[-\zeta^a\upsilon(t,x)-f(x,a)\right]=0,\quad (t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}^n,$$

où :

$$\zeta^a\upsilon=b(x,a)\nabla_x\upsilon+\frac{1}{2}tr\left(\sigma(x,a)\,\sigma'(x,a)\,D_x^2\upsilon\right).$$

2) Horizon infini :

Supposons que la fonction valeur $\upsilon\in\mathbb{C}^2(\mathbb{R}^n)$. Alors υ satisfait l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$\beta\upsilon(x)+\sup_{a\in\mathbb{A}}\left[-\zeta^a\upsilon(t,x)-f(x,a)\right]=0,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Preuve :

On montre le résultat dans le cas d'un horizon infini :

Puisque $\upsilon\in\mathbb{C}^2(\mathbb{R}^n)$, on a par la formule de Taylor-Young appliqué à la fonction :

$$(t,y)\mapsto e^{-\beta t}\upsilon(y),$$

au voisinage de $(t=0,\ y=x)$, $\forall h>0$.

On trouve :

$$e^{-\beta h}\upsilon(X_h^x)=\upsilon(x)-\beta h\upsilon(x)+(X_h^x-x)\nabla_x\upsilon(x)$$

$$+\frac{1}{2}D_x^2\upsilon(x)(X_h^x-x)(X_h^x-x)+o(h)+o(|X_h^x-x|^2).$$

Posons :

$$\upsilon_0(y)=\upsilon(x)+(y-x)\nabla_x\upsilon(x)+\frac{1}{2}D_x^2\upsilon(x)(y-x)(y-x),\quad y\in\mathbb{R}^n.$$

$\forall h>0$, on obtient :

$$e^{-\beta h}\upsilon(X_h^x)=-\beta h\upsilon(x)+\upsilon_0(X_h^x)+o(h)+o(|X_h^x-x|^2).$$

D'après le lemme 1-2, on a :

$$E\left|e^{-\beta h}\upsilon(X_h^x)-(-\beta h\upsilon(x)+\upsilon_0(X_h^x)\ \right|\leq o(h),\tag{1.8}$$

uniformément en $\alpha \in \mathbb{A}$.

De plus, en ajoutant et en retranchant le terme $f(X_s^x, \alpha_s)$, on trouve :

$$E\left|\int_0^h e^{-\beta s} f\left(X_s^x, \alpha_s\right) - f(x, \alpha_s) ds\right| =$$

$$E\left|\int_0^h (e^{-\beta s} f(X_s^x, \alpha_s) + f(X_s^x, \alpha_s) - f(X_s^x, \alpha_s) - f(x, \alpha_s)) ds\right|,$$

on a :

$$E\left|\int_0^h e^{-\beta s} f\left(X_s^x, \alpha_s\right) - f(x, \alpha_s) ds\right|$$

$$\leq E\left|\int_0^h e^{-\beta s} f\left(X_s^x, \alpha_s\right) - f\left(X_s^x, \alpha_s\right) ds\right| + E\int_0^h \left|f\left(X_s^x, \alpha_s\right) - f\left(x, \alpha_s\right)\ \right| ds,$$

puisque f est bornée et Lipschitzienne en x, uniformément en $a \in \mathbb{A}$, on obtient :

$$E\left|\int_0^h e^{-\beta s} f\left(X_s^x, \alpha_s\right) - f(x, \alpha_s) ds\right|$$

$$\leq CE\left[\int_0^h \left(e^{-\beta s} - 1\right) ds\right] + CE\left[\int_0^h \left|X_s^x - x\ \right|\right] ds,$$

donc :

$$E\left|\int_0^h e^{-\beta s} f\left(X_s^x, \alpha_s\right) - f(x, \alpha_s) ds\right| \leq Ch^2 + Ch^{\frac{3}{2}}. \tag{1.9}$$

$C =$ Constante indépendante de $\alpha \in \mathbb{A}$.

Or d'après le principe de la programmation dynamique et $\theta = h$, on a:

$$\upsilon\left(x\right) = \inf_{\alpha \in \mathbb{A}} E\left[\int_0^h e^{-\beta s} f(X_s^x, \alpha_s) ds + e^{-\beta h} \upsilon\left(X_h^s\right)\right].$$

D'où, en utilisant (1.8) et (1.9), on trouve :

$$\upsilon\left(x\right) = \inf_{\alpha \in \mathbb{A}} E\left[\int_0^h f(x, \alpha_s) ds - \beta h \upsilon\left(x\right) + \upsilon_0(X_h^x)\right] + o(h).$$

Notant que $\upsilon\left(x\right) = \upsilon_0\left(x\right)$, on a :

$$\beta h \upsilon\,(x) = \inf_{\alpha\in\mathbb{A}} E\left[\int_0^h f(x,\alpha_s)ds + \upsilon_0(X_h^x) - \upsilon_0\,(x)\right] + o(h).$$

Puisque $\nabla_x \upsilon_0\,(y) = \nabla_x \upsilon\,(x) + D_x^2 \upsilon\,(x)\,(y-x)$ et $D_x^2\upsilon_0\,(y) = D_x^2 \upsilon(x)$, on appliquant la formule d'Itô à :

$$\upsilon_0(X_h^x),$$

en intégrant entre 0 et h, on trouve :

$$E\left[\upsilon_0(X_h^x) - \upsilon_0(x)\ \right] = E\left[\int_0^h b(X_s^x,\alpha_s)(\nabla_x\upsilon\,(x) + D_x^2\upsilon\,(x)\,(X_s^x - x))\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} tr\left(D_x^2 \upsilon\,(x)\,\sigma\,(X_s^x,\alpha_s)\,\sigma'\,(X_s^x,\alpha_s)\right) ds\right],$$

d'où :

$$\beta h\upsilon\,(x) = \inf_{\alpha\in\mathbb{A}} E\left[\int_0^h f(x,\alpha_s)ds + b(X_s^x,\alpha_s)(\nabla_x\upsilon\,(x) + D_x^2\upsilon\,(x)\,(X_s^x - x))\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} tr\left(D_x^2\upsilon\,(x)\,\sigma\,(X_s^x,\alpha_s)\,\sigma'\,(X_s^x,\alpha_s)\right) ds)\right] + o(h).$$

Comme b et $\sigma\sigma'$sont bornés et Lipschitz en x, uniformément en a, on a :

$$\left|E\left[\int_0^h b(x,\alpha_s).\nabla_x\upsilon(x) + \frac{1}{2}tr\left(D_x^2\upsilon(x)\sigma(x,\alpha_s)\sigma'(x,\alpha_s)\right) ds\right.\right.$$

$$- \int_0^h b(X_s^x,\alpha_s)\left[\nabla_x\upsilon(x) + D_x^2\upsilon(x)(X_s^x - x)\ \right]$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}tr(\sigma(X_s^x,\alpha_s)\sigma'(X_s^x,\alpha_s)D_x^2\upsilon(x))ds\right]\right| \leq CE\left[\textstyle\int_0^h |X_s^x - x|\,ds\right]$$

$$= Ch^{\frac{3}{2}},$$

uniformèment en $\alpha \in \mathbb{A}$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\beta h\upsilon(x) \;&=\; \inf_{\alpha\in\mathbb{A}} E\left[\int_0^h f(x,\alpha_s)ds + b(x,\alpha_s)\nabla_x\upsilon(x)\ .\right.\\ &\left. +\frac{1}{2}tr(D_x^2\upsilon(x)\sigma(x,\alpha_s)\sigma'\,(x,\alpha_s))ds\ \right] + o(h).\end{aligned}$$

Divisant par h :

$$\begin{aligned}\beta \upsilon(x) = \inf_{\alpha \in \mathbb{A}} E \Bigg[\frac{1}{h} \int_0^h f(x, \alpha_s) ds + b(x, \alpha_s) \nabla_x \upsilon(x) \\ + \frac{1}{2} tr \left(D_x^2 \upsilon(x) \sigma(x, \alpha_s) \sigma'(x, \alpha_s) \right) ds \Bigg] + o(1).\end{aligned} \tag{1.10}$$

Finalement, nous vérifions que pour toute fonction φ, on a :

$$S_1 := \inf_{\alpha \in \mathbb{A}} E \left[\frac{1}{h} \int_0^h \varphi(\alpha_s) ds \right] = \inf_{a \in \mathbb{A}} \varphi(a) := S_2.$$

En effet, soit $a \in \mathbb{A}$ et $\alpha_s = a$ un contrôle constant. On a :

$$E \left[\frac{1}{h} \int_0^h \varphi(\alpha_s) ds \right] = \varphi(a).$$

et donc $S_1 \leq \varphi(a), \forall a \in \mathbb{A}$, d'où $S_1 \leq S_2$. (*)

Soit $\alpha \in \mathbb{A}$ un contrôle quelconque. Alors :

$$\varphi(\alpha_s) \geq \inf_{a \in \mathbb{A}} [\varphi(a)] = S_2,$$

d'où :

$$\frac{1}{h} \int_0^h \varphi(\alpha_s) ds \geq S_2,$$

et donc :

$$E \left[\frac{1}{h} \int_0^h \varphi(\alpha_s) ds \right] \geq S_2,$$

$\forall \alpha \in \mathbb{A}$. on trouve : $S_1 \geq S_2$. (**).

Finalement, d'après (*) et (**), on obtient $S_1 = S_2$.

En faisant tendre h vers zéro dans (1.10), on obtient :

$$\beta \upsilon(x) = \inf_{a \in \mathbb{A}} \left[f(x, a) + b(x, a) \nabla_x \upsilon(x) + \frac{1}{2} tr \left(D_x^2 \upsilon(x) \sigma(x, a) \sigma'(x, a) \right) \right],$$

ou de manière équivalente :

$$\beta \upsilon(x) + \sup_{a \in \mathbb{A}} [-\zeta^a \upsilon(x) - f(x, a)] = 0.$$

$\square$

1.2.2 Application : Problème de Merton en horizon fini

Un agent investit une proportion π_t de sa richesse dans un actif risqué et $1-\pi_t$ dans un actif sans risque. Son processus de richesse évolue selon l'EDS :

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{X_t \pi_t}{S_t} dS_t + \frac{X_t (1-\pi_t)}{S_t^0} dS_t^0 \\ &= X_t (\pi_t \mu + (1-\pi_t)\tau) dt + X_t \pi_t \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Partant d'une richesse initial $X_t = x > 0$ au temps t l'agent veut maximiser l'espérance de l'utilité de sa richesse terminale à un horizon $T > t$. Notons par $X^{t,x}$ le processus de richesse partant de x en t. La fonction valeur du problème de maximisation est donc :

$$v(t,x) = \sup_{\pi \in \mathbb{A}} E\left[U\left(X_T^{t,x}\right)\right] \ , (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+,$$

où $\mathbb{A}$ est l'ensemble des processus π est $\mathcal{F}$- adaptés et bornés. La fonction l'utilité U est croissante et concave. Vérifions que $v(t,.)$ est croissante et concave en x. Soit $0 < x < y$ et π un processus de contrôle. Notons $Z_s = X_s^{t,x} - X_s^{t,y}$. Alors :

$$\begin{cases} dZ_s = Z_s [(\pi_s \mu + (1-\pi_s)\tau) ds + \pi_s \sigma dW_s], & t \in [0,T] \\ Z_t = y, & x \geq 0 \end{cases}$$

donc $Z_s \geq 0$ ou encore $X_s^{t,y} \geq X_s^{t,x}$ pour tout $s \geq t$. Puisque U est croissante, on a :

$$U\left(X_T^{t,x}\right) \leq U\left(X_T^{t,y}\right),$$

d'où :

$$E\left[U\left(X_T^{t,x}\right)\right] \leq E\left[U\left(X_T^{t,y}\right)\right],$$

et donc $v(t,x) \leq v(t,y)$.Donc v est croissante.

Soit $0 < x_1, x_2, \pi^1, \pi^2$ deux processus de contrôle et $\lambda \in [0,1]$. Posons $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, X^{t,x_1}$ le processus de richesse partant de $x_1$et contrôlé par π^1, X^{t,x_2} le processus de richesse partant de x_2 et contrôlé par π^2. Posons :

$$\pi_s^\lambda = \frac{\lambda X_s^{t,x_1} \pi_s^1 + (1-\lambda) X_s^{t,x_2} \pi_s^2}{\lambda X_s^{t,x_1} + (1-\lambda) X_s^{t,x_2}},$$

alors d'après la structure linéaire de l'évolution de l'équation de la richesse, le processus :

$$X^{\lambda} := \lambda X^{t,x_1} + (1-\lambda)\ X^{t,x_2},$$

est gouverné par :

$$\begin{cases} dX_s^{\lambda} = X_s^{\lambda}\left(\pi_s^{\lambda}\mu + \left(1-\pi_s^{\lambda}\right)\tau\right)ds + X_s^{\lambda}\pi_s^{\lambda}\sigma dW_s \\ \\ X_t^{\lambda} = x_{\lambda}. \end{cases}$$

Ceci prouve que $\lambda X^{t,x_1} + (1-\lambda)X^{t,x_2}$est un processus de richesse partant de x_{λ} en t et contrôlé par π^{λ}.

D'après la concavité de la fonction U, on a :

$$U\left(\lambda X_T^{t,x_1} + (1-\lambda)X_T^{t,x_2}\right) \geq \lambda U\left(X_T^{t,x_1}\right) + (1-\lambda)U\left(X_T^{t,x_2}\right),$$

d'où :

$$\upsilon\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \geq \lambda E\left[U\left(X_T^{t,x_1}\right)\right] + (1-\lambda)E\left[U\left(X_T^{t,x_2}\right)\right],$$

et ceci pour tout π^1, π^2. On en déduit que :

$$\upsilon\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \geq \lambda\upsilon\left(x_1\right) + (1-\lambda)\upsilon\left(x_2\right),$$

donc υ est concave.

L'équation de Bellman associée à ce probléme de contrôle stochastique est :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \sup_{\pi\in\mathbb{R}}\left[\zeta^{\pi}w\left(t,x\right)\right] = 0, \tag{1.11}$$

où :

$$\zeta^{\pi}w\left(t,x\right) = x(\pi\mu + (1-\pi)\tau)\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\pi^2\sigma^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Puisque ω est croissante et concave, on cherche une solution de (1.11) tel que :

$$\frac{\partial w}{\partial x} > 0$$

et

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} < 0.$$

Un candidat pour le maximum de :

$$\sup_{\pi \in \mathbb{R}} \left[\zeta^{\pi} w\left(t, x\right) \right],$$

obtenu par les conditions du premier ordre est

$$\pi^{*}(t,x) = \frac{\left(\mu - \tau\right) \dfrac{\partial w}{\partial x}\left(t, x\right)}{\sigma^2 x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(t, x\right)}. \tag{1.12}$$

Substituant (1.12) dans (1.11), on obtient l'EDP non linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} + \tau x \dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\left(\mu - \tau\right)^2 \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2}{2\sigma^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}} = 0, & (t,x) \in [0, T[\times \mathbb{R}_+ \\ w\left(T, x\right) = U\left(x\right), & x \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{1.13}$$

Le problème (1.13) n'a en général pas de solution explicite pour une fonction d'utilité U quelconque. Cependant, dans le cas particulier d'une fonction puissance :

$$U\left(x\right) = x^p, 0 < p < 1,$$

on peut résoudre explicitement ce problème. Cherchons une solution de la forme :

$$\omega\left(t, x\right) = \phi\left(t\right) \ x^p.$$

Substituant dans (1.13), on obtient que ϕ satisfait :

$$\begin{cases} \phi^{'}(t) + \left(\tau p + \dfrac{\left(\mu - \tau\right)^2 p}{2\sigma^2\left(1-p\right)}\right)\phi(t) = 0 \\ \phi\left(T\right) = 1. \end{cases}$$

On obtient alors $\phi\left(t\right) = \exp\left(\lambda\left(T - t\right)\right)$ avec :

$$\lambda = \tau p + \frac{\left(\mu - \tau\right)^2}{2\sigma^2} \frac{p}{1-p}.$$

Ainsi, une solution de (1.13) est :

$$w\left(t, x\right) = \exp\left[\lambda\left(T - t\right)\right] \ x^p, \quad (t,x) \in [0.T[\times \mathbb{R}_+.$$

1.3 Solution de viscosité

1.3.1 Notion de solutions de viscosité

Suivant le type de problème à horizon fini ou infini, on a :

(a) L'équation de Bellman parabolique :

$$-\frac{\partial w}{\partial t}(t,x)+\sup_{a\in\mathbb{A}}\left[-\zeta^{a}w(t,x)-f(a,x)\right]=0,\quad (t,x)\in[0,T[\times\mathbb{R}^{n}. \qquad (*)$$

(b) L'équation de Bellman elliptique :

$$\beta w(x)+\sup_{\alpha\in\mathbb{A}}\left[-\zeta^{a}w(x)-f(x,a)\right]=0,x\in\mathbb{R}^{n}, \qquad (**)$$

où l'opérateur différentiel du second odre ζ^{α} étant défini par :

$$\zeta^{\alpha}\upsilon=b(x,a)\nabla_{x}\upsilon+\frac{1}{2}tr\left(\sigma(x,a)\sigma^{'}(x,a)D_{x}^{2}\upsilon\right).$$

Définition 1-1 :

(1) Horizon fini. Soit $w\in\mathbb{C}^{0}([0,T],\mathbb{R}^{n})$.

(i) On dit que w est une sursolution de viscosité de (*) si pour toute fonction $\varphi\in\mathbb{C}^{1.2}([0,T]\times\mathbb{R}^{n})$, on a :

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\bar{t},\overline{x})+\sup_{a\in\mathbb{A}}\left[-\zeta^{a}\varphi(\bar{t},\overline{x})-f(\overline{x},a)\right]\geq 0,$$

en tout point $(\bar{t},\overline{x})\in[0,T[\times\mathbb{R}^{n}$ minimum global de $w-\varphi$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}^{n}$.

(ii) On dit que ω est une sous-solution de viscosité de (*) si pour toute fonction $\varphi\in\mathbb{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^{n})$, on a :

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\bar{t},\overline{x})+\sup_{a\in\mathbb{A}}\left[-\zeta^{a}\varphi(\bar{t},\overline{x})-f(\overline{x},a)\right]\leq 0,$$

en tout point $(\bar{t},\overline{x})\in[0,T[\times\mathbb{R}^{n}$, maximum global de $\omega-\varphi$ sur $[0,T[\times\mathbb{R}^{n}$.

(iii) On dit que w est une solution de viscosite de (*) si w est à la fois sursolution et soussolution de viscosité de (*).

(2) Horizon infini**.** Soit $w\subset\mathbb{C}^{0}(\mathbb{R}^{n})$. On dit w est une sursolution (resp.soussolution) de viscosité de (**) si pour toute fouction $\varphi\in\mathbb{C}^{2}(\mathbb{R}^{n})$, on a :

$$\beta w(\overline{x})+\sup_{\alpha\in\mathbb{A}}\left[-\zeta^{\alpha}\varphi(\overline{x})-f(\overline{x},a)\right]\geq 0,\qquad(\text{resp}\leq 0)$$

en tout $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ minimum (resp.maximum) global de $w - \varphi$ sur $\mathbb{R}^n$.

On dit que w est une solution de viscosité de (**) si w est à la fois sursolution et soussolution de viscosité de (**).

On montre que la notion de solution de viscosité est cohérente avec la notion de solution classique.

Proposition 1-3 : Soit $w \in \mathbb{C}^{1,2}\left([0,T] \times \mathbb{R}^n\right) \cap \mathbb{C}^0\left([0,T] \times \mathbb{R}^n\right)$ (resp $\mathbb{C}^2\left(\mathbb{R}^n\right) \cap \mathbb{C}^0\left(\mathbb{R}^n\right)$). Alors ω est solution de viscosité de (*) (resp.(**)) si et seulement si w est solution classique de (*) (resp.(**)).

Preuve : On montre le résultat dans le cas l'EDP (*).

Soit $w \in \mathbb{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap \mathbb{C}^0\left([0,T] \times \mathbb{R}^n\right)$. Supposons d'abord que w est solution de viscosité de (*). Puisque $w \in \mathbb{C}^{1,2}\left([0,T] \times \mathbb{R}^{nn}\right)$, $\varphi \equiv w$ peut être choisie comme fonction test. De plus, tout point $\left(\overline{t}, \overline{x}\right) \in [0,T[\times \mathbb{R}^n$ est un maximum et minimum global de $w - \varphi \equiv 0$.

Donc on a par définition des solutions de viscosité :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \sup_{a \in \mathbb{A}}\left[-\zeta^a w(t,x) - f(x,a)\right] &\geq 0 \\ -\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) + \sup_{a \in \mathbb{A}}\left[-\zeta^a w(t,x) - f(x,a)\right] &\leq 0, \end{aligned}$$

pour tout $(t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}^n$ et donc w est solution classique de (*).

Supposons que w est solution classique de (*). Soit $\varphi \in C^{1,2}([0,T], \mathbb{R}^n)$ et $\left(\overline{t}, \overline{x}\right) \in [0,T[\times \mathbb{R}^n$ un minimum global de $w - \varphi$.

Alors on a :

$$\frac{\partial (w - \varphi)}{\partial t}\left(\overline{t}, \overline{x}\right) \geq 0 \qquad (= 0 \text{ si } t > 0)$$

$$\nabla_x w\left(\overline{t}, \overline{x}\right) = \nabla_x \varphi\left(\overline{t}, \overline{x}\right) \quad \text{et} \quad D_x^2 w\left(\overline{t}, \overline{x}\right) \geq D_x \varphi\left(\overline{t}, \overline{x}\right).$$

On en déduit que pour tout $a \in \mathbb{A}$:

$$\begin{aligned} & b(\overline{x}, a)\, \nabla_x \varphi\left(\overline{t}, \overline{x}\right) + \frac{1}{2} tr\left[D_x^2 \varphi\left(\overline{t}, \overline{x}\right) \sigma(\overline{x}, a)\, \sigma'(\overline{x}, a)\right] \\ \leq\ & b(\overline{x}, a) \nabla_x \omega\left(\overline{t}, \overline{x}\right) + \frac{1}{2} tr\left[D_x^2 \omega\left(\overline{t}, \overline{x}\right) \sigma(\overline{x}; a)\, \sigma'(\overline{x}, a)\right]. \end{aligned}$$

Rappelons que si $M \leq N$ et B une matrice définie positive alors $tr(MB) \leq tr(NB)$.

On en dèduit que :

$$\sup_{a \in \mathbb{A}} \left[-\zeta\varphi\left(\bar{t}, \overline{x}\right) - f(\overline{x}, a\right] \geq \sup_{a \in \mathbb{A}} \left[-\zeta^a \omega\left(\bar{t}, \overline{x}\right) - f(\overline{x}, a)\right],$$

et donc :

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t}\left(\bar{t}, \overline{x}\right) + \sup_{a \in \mathbb{A}} \left[-\zeta^a \varphi\left(\overline{x}, \bar{t}\right) - f(\overline{x}, a)\right] \geq$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t}\left(\bar{t}, \overline{x}\right) + \sup_{a \in \mathbb{A}} \left[-\zeta^a w\left(\bar{t}, \overline{x}\right) - f(\overline{x}, a)\right] = 0,$$

c'est à dire que w est sursolution de viscosité de (*). La propriété de soussolution est prouvée de manière similaire.□

Nous montrons que la propriété de viscosité de la fonction du problème de contrôle stochastique découle du principe de la programmation dynamique.

Théorème 1-3 :
1) Horizon fini **:** la fonction de valeur

$$\upsilon\left(t, x\right) = \inf_{\alpha \in \mathbb{A}} E\left[\int_t^T f\left(X_s^{t,x}, \alpha_s\right) ds + g\left(X_T^{t,x}\right)\right],$$

est solution de viscosité de (*).

2) Horizon infini : la fonction valeur

$$\upsilon\left(x\right) = \inf_{\alpha \in \mathbb{A}} E\left[\int_0^{+\infty} e^{-\beta s} f\left(X_s^x, \alpha_s\right) ds\right],$$

est solution de vicosité de (**).

Preuve : On montre le résultat dans le cas d'un problème à Horizon infini.

On a vu dans la proposition 1.2, que la fonction valeur υ est Hölder en x et est donc continue.

Soit $\varphi \in \mathbb{C}^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ une fonction test et $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, tel que :

$$0 = \left(\upsilon - \varphi\right)\left(\overline{x}\right) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\upsilon - \varphi\right)\left(x\right). \tag{1.13}$$

D'après le principe de la programmation dynamique, on a pour tout $h > 0$:

$$\upsilon\left(\overline{x}\right) = \inf_{\alpha\in\mathbb{A}} E\left[\int_0^h e^{-\beta s} f\left(X_s^{\overline{x}}, \alpha_s\right) ds + e^{-\beta h}\upsilon\left(X_h^{\overline{x}}\right)\right],$$

d'après (1.13), on a pour tout $\alpha \in \mathbb{A}$:

$$\upsilon\left(X_h^{\overline{x}}\right) - \varphi\left(X_h^{\overline{x}}\right) \geq \upsilon\left(\overline{x}\right) - \varphi\left(\overline{x}\right) = 0,$$

d'où :

$$\varphi\left(\overline{x}\right) \geq \inf_{\alpha\in\mathbb{A}} E\left[\int_0^h e^{-\beta s} f\left(X_s^{\overline{x}}, \alpha_s\right) ds + e^{-\beta h}\varphi\left(X_h^{\overline{x}}\right)\right].$$

Puisque $\varphi \in \mathbb{C}^2\left(\mathbb{R}^n\right)$, on applique le même raisonnement que pour le thérorème 1.2, en utilisant la formule d'Itô et des estimations appropiées sur X et on obtient :

$$\beta\varphi\left(\overline{x}\right) \geq \inf_{\alpha\in\mathbb{A}} \left[\zeta^a\varphi\left(\overline{x}\right) + f\left(\overline{x}, a\right)\right],$$

on encore :

$$\beta\varphi\left(\overline{x}\right) + \sup_{\alpha\in\mathbb{A}} \left[-\zeta\varphi\left(\overline{x}\right) - f\left(\overline{x}, a\right)\right] \geq 0,$$

ce qui prouve que υ est sursolution de viscosité de (**).

De même si $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$0 = \left(\upsilon - \varphi\right)\left(\overline{x}\right) = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\upsilon - \varphi\right)(x),$$

alors par le principe de la programmation dynamique, on a pour tout $h > 0$:

$$\varphi\left(\overline{x}\right) \leq \inf_{a\in\mathbb{A}} E\left[\int_0^h e^{-\beta s} f\left(X_{s;}^x a_s\right) ds + e^{-\beta h}\varphi\left(X_h^x\right)\right],$$

et donc

$$\beta\varphi\left(\overline{x}\right) + \sup_{a\in\mathbb{A}} \left[\zeta^a\varphi\left(\overline{x}\right) - f\left(\overline{x}, a\right)\right] \leq 0,$$

c'est à dire que υ est soussolution de viscositè de (**).

Finalement : υ est solution de viscositè de (**).$\square$

Chapitre 2

Principe du maximum : approche par les probabilités équivalentes

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les conditions nécessaires d'optimalité, dans le cas où l'espace des contrôles admissibles est constitué de contrôles feedback. Ces contrôles sont des fonctions de la trajectoire du processus contrôlé. Il est clair que dans ce cas, l'équation différentielle stochastique qui gouverne le système en question n'admet pas de solution forte. Une manière de contourner ce problème est d'utiliser les solutions faibles moyennant le thorème de Guirsnov. Grâce à ce théorème, on définit une famille de probabilités équivalentes qui vont nous servir à faire des comparaisons entre différents contrôles admissibles.

2.2 Théorème de Guirsanov et notion de solution faible

Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathcal{P}\right)$ un espace probabilisé filtré et $W = (W_t)_{0\leq t\leq T}$ un mouvement brownien.

Considérons un processus adapté $\{\theta_t : 0 \leq t \leq T\}$ tel que :

$$\int_0^T |\theta_t|^2 \, dt < \infty, \; P - p.s. \tag{2.1}$$

On définit :

$$\zeta_t^s(\theta) = \exp\left\{\int_s^t \theta_r dW_r - \frac{1}{2}\int_s^t |\theta_r|^2 dr\right\}, s \le t \le T. \tag{2.2}$$

On note $\zeta_t(\theta)$ si $s = 0$. En appliquant la formule d'Itô, il est facile de vérifier que $\zeta_t^s(\theta)$ est une solution unique $\mathcal{F}_t-$adapté de l'EDS :

$$\begin{cases} d\zeta_r = \zeta_r \theta_r dW_r. \\ \zeta_s = 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Remarque 2-1 :

$$\{\zeta_t^s(\theta) : s \le t \le T\} \text{ est une martingale}$$

si $\int_0^T E|\zeta_t\theta_t|^2 dt < \infty$.

Lemme 2-1 : Si $\sup\limits_{t,w}|\theta_t(w)| = c < \infty$, alors ζ_r est $\mathcal{F}_t-$martingale dans $[s,T]$ et $E\left[|\zeta_t\theta_t|^2\right] = 1$.

Preuve :

Soit $r_m = \inf\left\{t \ge s : \int_0^T \theta_t dt \ge m\right\}$ alors d'après (2.2) :

$$E\int_s^T \left|\zeta_{r\wedge r_m}\theta_r\right|^2 dr \le \int_s^T e^{2m} c dr < \infty.$$

et (2.3) implique $\zeta_{t\wedge r_m}^s(\theta) = \zeta_{r\wedge r_m}^s(\theta)$ est une martingale. On a :

$$E\zeta_{t\wedge r_m}^s(\theta) = E\zeta_{r\wedge r_m}^s(\theta) = 1,$$

d'aprèse le lemme de Fatou, on trouve :

$$E\zeta_t^s(\theta) = E\lim \zeta_{t\wedge r_m}^s \le \underline{\lim} E\zeta_{r\wedge r_m}^s = 1. \tag{2.4}$$

Mais :

$$\begin{aligned} \zeta_t^s(\theta)^2 &= \exp\left\{\int_s^t 2\theta_r dW_r - \frac{1}{2}\int_s^t |2\theta_r|^2 dr\right\}\exp\int_s^t |\theta_r| dr. && (2.5) \\ & && (2.1) \\ &\le \zeta_t^s(2\theta)\exp\left[c(t-c)\right]. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (2.4) à $\zeta_t^s(2\theta)$, on trouve :

$$E\int_s^T |\zeta_t^s\theta_t|^2 dr \le \int_s^T e^{2c} c dt < \infty.$$

Corollaire 2-1 : On suppose que (2.1) a lieu, alors

$$\zeta_t^s(\theta) \text{ est une surmartingale dans } [s,T].$$

Corollaire : On suppose que (2.1) a lieu. Si $E\zeta_T^s(\theta) = 1$, alors **:**

$$\zeta_t^s(\theta) \text{ est une martingale dans } [s,T].$$

Théorème 2-1 (de Guirsanov) : On suppose que (2.1) a lieu et $E\zeta_T(\theta) = 1$. Alors la probablité $\overline{P}$ dont la densité par rapporty à P est donnée par $\frac{d\overline{P}}{dP} = \zeta_T(\theta)$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$. De plus :

$$\overline{W} = W - \int_0^T |\theta_t|\, dt, \tag{2.6}$$

est un mouvement Brownien.

Preuve : voir (Haussmann 1986).

Soit X_t un processus adapté continu satisfaisant à :

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + a(t, X_t)\, dW_t.$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurables (Borélienne), telle que :

$$b \ : \ [0,T] \times C^n \to \mathbb{R}^n$$

$$a \ : \ [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^d,$$

où b est G_t^n-adapté. De plus :

–

$$\int_0^T |a(t,X)|^2\, dt \leq k_0, \tag{2.7}$$

$$|b(t,X)|^2 \leq k_1 (1 + \|X\|_t). \tag{2.8}$$

– Si $M_t = \int_0^t a(s, X_s)\, dW_s$, il existe K tel que :

$$\|X\|_t^p < K \left(1 + |X_0|^P + \|M_t\|^P\right). \tag{2.9}$$

Thèorème 2-2 : On suppose que (2.7) , (2.8) ont lieu. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0, \zeta, K_0$ finis tel que :

$$E\left[\exp \varepsilon |X_0|^2\right] < \infty, \tag{2.10}$$

et :

$$\int_0^T |\theta_t|^2 \, dt < \zeta \left(1 + \|X\|_s^2\right), \quad |\theta_t|^2 \leq K_0 \left(1 + \|X\|_s^2\right) \ p.s. \tag{2.11}$$

Alors il existe $\zeta_0 > 0$ dependant de ε, K_0, K_1 et n tel que si $(p^2 - p) \zeta \leq \zeta_0$:

$$E\zeta_T (\theta)^p \leq K,$$

où K depend de ε, n et p.

Preuve : voir (Haussman 1986).

Corollaire 2.2 : On suppose que (2.7) , (2.8), (2.10) ont lieu et

$$|\theta_t|^2 \quad \leq \quad K_0 \left(1 + \|X\|_s^2\right) \ P - p.s.$$

Alors :

a) Il existe $p > 0$ et $K < \infty$ dépend de ε et p tel que :

$$E\zeta_T (\theta)^p \leq K,$$

b) $E\zeta (\theta) = 0$.

Remarque 2-2 : D'après le corollaire 2-2) b), en appliquant le théorème de Guirsanov, on trouve :

$$dX_t = [b(t, X_t) + a(t, X) \theta_t] \, dt + a(t, X_t) \, d\overline{W}. \tag{2.12}$$

$\overline{W}$ un mouvement brownien, on a X_t est une solution faible de (2.12) sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \overline{p}, \overline{W}\right)$ où $d\overline{P} = \zeta_T (\theta) \, dP$.

2.3 Position du problème et hypothèses

Dans ce chapitre, nous allons étudier les conditions nécessaires d'optimalité vérifiée par un contrôle optimal.

On considère que l'état du système est gouverné par l'équation différentielle stochastique contrôlée, de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \alpha_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, & t \in]0, T] \\ X_0 = x, & x \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

où X_t est un processus adapté continue qui satisfait :

(1) $P_0 X^{-1} = \mu$

(2) $dX_t = b\,(t, X_t, \alpha_t)\,dt + \sigma\,(t, X_t)\,dW_t$

(3) $E\int_0^T |X_t|^q\,dt < \infty, E\int_0^T |\alpha_t|^q\,dt < \infty.$

Définition 2-1 : On définit les ensembles de contrôle comme il suit :

$\mathbb{U}$: l'ensemble de contrôle admissible.

$\mathbb{U}_0 = \{\alpha : [0,T] \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{U},\ \alpha$ est $G_t^n -$ adapté mesurable $\}$ tel que :

1) $\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{C}\,(0,T,\mathbb{R}^n)$ [espace des fonctions continues $[0,T] \to \mathbb{R}^n$].

2) $G^n = B\,[\mathbb{C}\,(0,T,\mathbb{R}^n)]$ et G_t^n est une sous tribu engendré par une famille :

$$\{\{X \in C\,(0,T,\mathbb{R}^n) : X_s \in B\ \} : 0 \leq s \leq t, B \in B\,(\mathbb{R}^n)\ \},$$

alors $\{G_t^n\}$ est une filtration canonique de Borel et $G_T^n = G^n$.

$\widetilde{\mathbb{U}} = \{\alpha$ un processus adapté mesurable $\}$ séparable de $\mathbb{U}$.

$\mathbb{V}$: l'ensemble denombrable mesurable.

On peut définir la fonction de coût, pour $\alpha \in \mathbb{U}_0$:

$$J_i\,(\alpha) = E\left[\int_0^T f_i\,(t, X_t, \alpha_t)\,dt + g_i\,(X_T)\ \right]$$

$$i = -m_1, ..., 0, ..., m_2.$$

Pour $\mathbb{U} \subset \mathbb{U}_0$, on définit le problème suivant :

$$\inf\{J_0\,(\alpha) : \alpha \in \mathbb{U},\ J_i(\ \alpha) \leq 0\ si\ i > 0, J_i(\alpha) = 0 \text{ si } i < 0\},$$

α appelé contrôle admissible si $\alpha \in \mathbb{U}$, $J_i\,(\alpha) \leq 0$ si $i > 0$, $J_i\,(\alpha) = 0$ si $i < 0$.

On considère le problème :

$$\inf\left\{J_0\,(\alpha) : \widehat{\alpha} \in \widetilde{\mathbb{U}}\right\}.$$

En supposant que :

$$F(t,X) = span\,\{b\,(t, X_t, \alpha) - b\,(t, X_t, v) : \alpha, v \in U\},$$

et :

$$b(t,X,\alpha)=\left[\begin{array}{c} k(t,x) \\ h(t,X,\alpha) \end{array}\right],\quad \sigma(t,X)=\left[\begin{array}{c} 0 \\ \sigma_2(t,X) \end{array}\right].$$

$$\pi(t,X)\zeta=\left[\begin{array}{c} 0 \\ \zeta_2 \end{array}\right], \sigma(t,X)^{+}\zeta=\sigma_2(t,X)^{-1}\zeta_2.$$

où $\sigma_2(t,X)$ inversible.

De plus :

$\int_0^T \left|\sigma(t,X)^2\right| dt \leq K_0$, $|b(t,X,\alpha)|^2 \leq K_1\left(1+|X|^2+|\alpha|^2\right)$

$\sigma(t,X):\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^n$ dans $F(t,X)$. $\left|\sigma(t,X)^{+}\right| \leq k_0$ pour tout (t,X). (2.13)

Et

$$|\widehat{\alpha}(t,X)| \leq \widehat{K}\left(1+\|X\|_t\right)\ p.s, \tag{2.14}$$

où $\widehat{K}$ constant.

Supposons qu' il existe $\varepsilon>0$ tel que :

$$E\exp\left(\varepsilon|X_0|^2\right)<\infty. \tag{2.15}$$

Soit $\alpha\in U_G$, on a :

$$|\alpha(t,X)| \leq K_\alpha\left(1+\|X\|_t\right)\ p.s, \tag{2.16}$$

où U_G l'ensemble des fonctions mesureble G_t-adapté.

Pour $\alpha\in U_G$, on peut définir la solution par le théorème de Guirsanov. Pour tout α, on a :

$$\theta_t^\alpha=\sigma(t,X_t)^{+}\left[b(t,X_t,\alpha_t)-b(t,X_t,\widehat{\alpha}_t)\right], \tag{2.17}$$

et d'après (2.13), (2.14) et (2.16), on trouve :

$$|\theta_t^\alpha| \leq \overline{K}_\alpha\left(1+\|X\|_t^2\right)\ p.s.$$

D'après corollaire 2.2 et le théorème de Guirsanov, on trouve :

$$dX_t = b\left(t, X_t, \alpha_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dW_t^{\alpha},$$

et

$$E\zeta_T\left(\theta^{\alpha}\right)^p \leq K_{\alpha}, \tag{2.18}$$

pour $p > 1$ depend de $\overline{K}_{\alpha}$.

On a aussi :

$$W^{\alpha} = W - \int_0^T \theta_t^{\alpha} dt,$$

est un mouvement brownien sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t \in \mathbb{R}_+}, p^{\alpha}\right)$ et

$$dp^{\alpha} = \zeta_T\left(\theta^{\alpha}\right) dp.$$

En supposant (2.13) , (2.15) ont lieu, alors $U_G \subset U$ et $\widehat{\alpha} \in U_G$.

Soit le problème :

$$J\left(\alpha\right) = E^{\alpha} \int_0^T \phi_t^{\alpha} dt + E^{\alpha} L,$$

où :

$$\phi_t^{\alpha} = f\left(t, X_t, \alpha_t\right) - f\left(t, X_t, \widehat{\alpha}_t\right).$$
$$\text{et}$$
$$L = \int_0^T f\left(t, X_t, \widehat{\alpha}_t\right) dt + g\left(X_T\right).$$

Théorème 2-2 : (KUNITA-WATANABE)

Soit $\{W_t\}$ un mouvement brownien sur $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t \in \mathbb{R}_+}, p, W\right)$ si $\{X_t\}$ une $\bar{\mathcal{F}}_t$ -martingale de carré intégrable a valeur dans $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un processus $\chi_t$est $\bar{\mathcal{F}}_t$- mesurable et M_t une martingale de carré intégrable orthogonale à $\{W_t\}$ tel que :

$$\int_0^T E\left|\chi_t\right|^2 dt < \infty \text{ et } X_t = \int_0^t \chi_s ds + M_t.$$

Lemme 2-2 :
a) $E^{\alpha} L = EL + E^{\alpha} \int_0^T \chi_t \theta_t^{\alpha} dt$ si $\alpha \in U_G$.

b) $E^{\alpha} \int_0^T \left|\chi\right|^2 dt < \infty$.

c) $E^{\alpha} M_T = 0$.

Preuve : voir (Haussman 1986)

2.4 Principe du maximum

Définition 2-1 : Soit $\alpha \in U, n > 0$ et $Z_n : c \to U$, tel que $Z_0 = \alpha$ alors $M_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_1+1+m_2}$ est differentieblle canonique de J au voisinage de Z au point α si

$$J(Z(s)) = J(\alpha) + M_s + \circ(|s|),$$

où :

$$C = \left\{ (\rho_1, \rho_2, ..., \rho_p) : \rho_1 \geq 0; \sum_1^p \rho_i < 1 \right\}$$
$$|\circ(|\rho|)| / |\rho| \underset{|\rho| \to 0}{\to} 0.$$

Définition 2-2 : Un cône convexe $D \subset \mathbb{R}^{m_1+1+m_2}$ de sommet 0 est un cône de variation de J au point α, si pour $(d^1, d^2, ..., d^e) \subset D$, il existe $\eta > 0$ et $Z_n : \eta c \to U$, $Z_0 = \alpha$ tel que JoZ est continue et $M = (d^1, d^2, ..., d^e)$ est le différentielle de J au voisinage de Z au point α.

Lemme 2-3 : Si $\widehat{\alpha}$ une solution de :

$$\inf \{J_0(\alpha) : \ \alpha \in U, \ J_i(\alpha) \leq 0, J_j(\alpha) = 0, \ i > 0 \ , \ j > 0\}, \tag{2.19}$$

et

$$D \text{ est cône de variation de } J \text{ au point } \widehat{\alpha}.$$

Alors il existe $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}^{m_1+1+m_2}$, $\widetilde{\lambda} \neq 0$, tell que $\widetilde{\lambda} d \leq 0$ pour tout $d \in D \cap (\mathbb{R}^m \times L)$.

Preuve : voir (Haussman 1986).

Théorème 2-3 : Si $\widehat{\alpha}$ une solution de (2.19) et D cône de variation de J au point $\widehat{\alpha}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{m_1+1+m_2}$ $\lambda \neq 0$, $\lambda_i = 0$ si $i \geq 0$ tel que :

$$\lambda J(\widehat{\alpha}) = \lambda_0 J(\widehat{\alpha}) \text{ et } \lambda d \leq 0 \text{ pour } d \in D.$$

Preuve : voir (Haussman 1986).

Théorème 2-4 : D est cône de variation de J au point $\widehat{\alpha}$ pour problème :

$$\inf \{J_0(\alpha) : \ \alpha \in \mathbb{U} \cap \mathbb{U}_G, \ J_i(\alpha) \leq 0 \text{ si } i \geq 0, \ J_i(\alpha) = 0 \text{ si } i < 0\}.$$

Preuve : voir (Haussman 1986).

Soit $\widehat{\alpha}$ une solution de :

$$\inf \{J_0(\alpha) : \ \alpha \in \mathbb{U}, \ J_i(\alpha) \leq 0 \text{ si } i \geq 0, \ J_i(\alpha) = 0 \text{ si } i < 0\}.$$

On définit :

$$H(t, X, \alpha, p, \lambda) = pb(t, X, \alpha) + \lambda f(t, X, \alpha),$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}^{m_1+1+m_2}$.
On a :

$$\lambda(\phi_t^\alpha + \chi_t \theta_t^\alpha) =$$

$$H\left(t, X, \alpha, \left[\chi_t \sigma(t, X)^+\right]' \lambda, \lambda\right) - H\left(t, X, \widehat{\alpha}(t, X_t), \left[\chi_t \sigma(t, X)^+\right]' \lambda, \lambda\right),$$

où ($'$) le transposé.

Théorème 2-5 :

On suppose que **:**

$$|f(t, X, \alpha)| + |g(X)| \leq k(1 + |X|^q + |\alpha|^q),$$

a lieu , et b, f sont continue pour tout (t, X), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{m_1+1+m_2} \lambda \neq 0$, $\lambda_i \leq 0$ si $i \geq 0$, $\lambda_i J_i(\widehat{\alpha}) = 0$ si $i > 0$, et T_0 l'ensemble de Lebesgue null, tel que pour tout $t \in [0, T] \diagup T_0$, on a :

$$E\left[H\left(t, \widehat{X}_t, v, \widetilde{p}_t, \lambda\right)\right] \leq E\left[H\left(t, \widehat{X}_t, \widehat{\alpha}_t(t, X_t), \widetilde{p}_t, \lambda\right)\right] \quad p.s, \tag{2.20}$$

où $\widetilde{p}_t$ est un processus adjoint définit par :

$$p_t = \lambda' \chi_t \sigma(t, X_t)^+.$$

Preuve

D'aprés le théorème (2.3) et (2.4), on trouve existance λ : tel que (2.20) vérifie pour tout $v \in V$.

Soit $v \in U^t$, il existe sous suit$\overline{v}_m \in V$ tel que :

$$\overline{v}_m \circ i_t \to v \text{ dans } L^q\left(C^n, H_t, p \circ X^{-1}, U\right).$$

Par définition de $\overline{q}$, on a $\overline{p} > 1$ tel que

$$\sup_n E\left[H\left(t, X_t, \overline{v}_m \circ i_t, \widetilde{p}_t, \lambda\right)\right] < \infty.$$

On utilise (2.13), (2.14) et le condition :

$$E\left[\overline{v}_m \circ i_t\right]^{\overline{q}} \to Ev\left(X\right)^{\overline{q}}.$$

Appliquant le théorème de convergence dominé de Lebesgue, on trouve :

$$E\left[H\left(t, \widehat{X}_t, v, \widetilde{p}_t, \lambda\right)\right] \leq E\left[H\left(t, \widehat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\left(t, X_t\right), \widetilde{p}_t, \lambda\right)\right]. \quad p.s,$$

pour $v \in U^t$.

De plus : pour $t \in [0, T] \diagup T_0$, $\alpha \in U$, on a :

$$E\left[H\left(t, \widehat{X}_t, \alpha, \widetilde{p}_t, \lambda \diagup \widetilde{\mathcal{F}}_t\right)\right] \leq E\left[H\left(t, \widehat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\left(t, X_t\right), \widetilde{p}_t, \lambda \diagup \widetilde{\mathcal{F}}_t\right)\right],$$

où $\widetilde{\mathcal{F}}_t = X^{-1}\left(H_t\right).$

2.5 Processus adjoint

Soit $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathcal{P}\right)$ un espace probabilité de filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$et $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$un mouvement bro :nien standart. Considèrons$\left(\widehat{\alpha}, \widehat{X}\right)$ la solution optimale du problème :

$$\inf\left\{J_0(\alpha) : \alpha \in \mathbb{U}, J_i(\alpha) = 0 \text{ si } i < 0, J(\alpha) \leq 0 \text{ si } i > 0\right\} \quad (2.21)$$

$$dX_t = b(t, X_t, \alpha_t)dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t \quad , \qquad X_0 = x,$$

où :

(1) b, σ, f, g sont des fonctions Borèliennes, telles que :

$$b(t, X, \alpha) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$$

$$\sigma(t, X) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^d$$

$$g(X) \quad : \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_1+1+m_2}$$

$$f(t, X, \alpha) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^{m_1+1+m_2},$$

(2)

$$|b_x(t, X, \alpha)| + |\sigma_x(t; X)| \leq k.$$

$$|b(t, X, \alpha)| + |\sigma(t, x)| + |f_x(t, X, \alpha)| + |g_x(X)| \leq K(1 + |X| + |\alpha|).$$

$$|f(t, X, \alpha)| + |g(X)| \leq K\left(1 + |X|^2 + |\alpha|^2\right).$$

De plus :

1) $\mathbb{U}$ fermé.
2) σ est bornée, inversible avec σ^{-1}bornée.
3) $\mathbb{U}_0^n$ l'ensemble des fonctions mesurables et G_t^n-adapté.
4) $\alpha \in \mathbb{U}_0^n : |\alpha(t, X_t)| \leq K_\alpha \left(1 + \sup_{s\leq t} |X_s|\right).$

Si $\alpha \in \mathbb{U}_0^n$, alors X^α est une solution de l'equation differentielle stochastique :

$$dX_t = b(t, X_t, \alpha_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t, \; X_0 = x,$$

comme solution faible du problème :

$$dX_t = b(t, X_t, \alpha(t, X_t))\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t^\alpha.$$

Soient $\widehat{\alpha}$ un contrôle optimal correspondant à $\widehat{X}$, $\left(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{p}\right)$un espace de probabilisé d'une $\{\mathcal{F}_t\}$ filtration naturel où $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$ ($\sigma-$algebre engendré par $\widehat{X}$), un mouvement brownien $W = W_t^{\widehat{\alpha}}$ et $\phi(t,s)$ une matrice de l'equation suivante :

$$dy_t = b_x\left(t, \widehat{X}, \widehat{\alpha}_t\right) y_t dt + \sum_{i=1}^{d} \sigma_x^{(i)}\left(t, \widehat{X}_t, \alpha_t\right) y_t dW_t^{(i)},$$

et

$$H(t, X, \alpha, p, \lambda) = pb(t, X, \alpha) + \lambda f(t, X, \alpha).$$

Théorème 2-6 : On suppose que (1) , (2) ont lieu $\left(\widehat{\alpha}, \widehat{X}\right)$ la solution optimal de (2.21), avec $\mathbb{U}$=$\mathbb{U}_0^n$ et X_0 fixé $\in \mathbb{R}^n$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{m_1+1+m_2}\lambda \neq 0$, $\lambda_i \leq 0$ si $i \geq 0$, $\lambda_i J_i(\widehat{\alpha}) = 0$ si $i \neq 0$, tel que pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$\max_{\alpha \in \mathbb{U}} H\left(t, \widehat{X}_t, \alpha_t, p_t, \lambda\right) = H\left(t, \widehat{X}_t, \widehat{\alpha}_t, p_t, \lambda\right) \qquad p.s,$$

où p_t est un processus adjoint définit par :

$$p_t = E\left\{\overline{P}_t \diagup \mathcal{F}_t\right\},$$

où :

$$\overline{p}_t' = \lambda E g_x\left(\widehat{X}_T\right) \phi(T, t) + \int_0^T f_x\left(s, \widehat{X}, \widehat{\alpha}\right) \phi(s, t) ds.$$

Soit p_t un processus adjoint comme solution de l'equation differentielle stochastique, on a :

$$\int_0^t G_s dW_s + \int_s^t \phi(t, \alpha)' dm_1 = E\left[\overline{P}_t\right] - E\left[\overline{P}_s \diagup \mathcal{F}_t\right],$$

tel que m_1 est une martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), p)$ avec $m_0 = 0$ orthgonale à W_t et $p_T = g_x\left(\widehat{X}_T\right)' \lambda$.

Chapitre 3

Principe du maximum stochastique : Approche par les solutions fortes

3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de déterminer les conditions nécessaires que doit satisfaire un contrôle optimal dans le cas où la famille des contrôles admissibles est constituée de processus adaptés à une filtration fixée à l'avance. De plus on met des conditions sur les coefficients pour obtenir des solutions fortes pour les équations différentielles stochastiques contrôllées.

Dans le cas où on a existence d'une solution optimale, il est naturel de chercher des conditions nécessaires satisfaites par ce contrôle. Ces conditions peuvent être vues comme une application du principe de Fermat qui dit que si une fonction différentiable f atteint son minimum alors sa dérivée à droite de ce point doit être positive.

On suppose donc que le critère $J(\alpha)$ atteint son minimum pour un contrôle admissible $\widehat{\alpha}$, alors $\widehat{\alpha}$ satisfera certaines conditions (conditions nécessaires d'optimalité). Ces conditions sont connues sous le noms de principe du maximum stochastique.

L'approche utilisée dans ce chapitre est dûe essentiellement à Kushner, et repose sur le fait que les coefficients de l'équation sont différentiables par rapport à la deuxième variable pour tout couple $(t, a) \in [0, T] \times \mathbb{A}$. Cette approche se formule de la manière suivante :

Si $\widehat{\alpha}$ représente un contrôle optimal, alors il existe un processus $(p_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, tel que pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $\alpha \in \mathcal{U}$, on a la condition nécessaire suivante :

$$H\left(p_t, X_t^{\widehat{\alpha}}, \widehat{\alpha}\right) \leq H\left(p_t, X_t^{\widehat{\alpha}}, \alpha\right), \tag{3.1}$$

où $X^{\widehat{\alpha}}$ est la solution de l'équation associée au contrôle optimal $\widehat{\alpha}$, H est appelé le Hamiltonien du système, et $(p_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est appelé le processus adjoint, ce dernier est une solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde que nous allons voir ultérieurement.

Pour établir la condition nécessaire (3.1), on procède par une perturbation de $\widehat{\alpha}$ sur un petit intervalle $[\tau, \tau+\varepsilon[$, où ε est assez petit.

Le résultat se déduit à partir de la dérivée de la fonction coût associée au contrôle perturbé au point $\varepsilon = 0$.

3.2 Position du problème et Hypothèses

Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P\right)$ un espace probabilisé filtré où la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ vérifie les conditions habituelles et $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien d-dimensionnel.

Soit le critère de performance (ou la fonction coût), suivant :

$$J(\alpha) = E\left[\int_0^T f(t, X_t^\alpha, \alpha_t)\, dt + g(X_T^\alpha)\right],$$

g et f sont deux fonction boreliennes, telles que :

$$\begin{array}{l} g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \\ \text{et} \\ f : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{A} \to \mathbb{R}\ . \end{array}$$

De plus, X_T^α est la solution de l'EDS contrôlée :

$$\begin{cases} dX_t^\alpha = b(t, X_t^\alpha, \alpha_t)\, dt + \sigma(t, X_t^\alpha)\, dW_t \\ \\ X_0^\alpha = x, \qquad\qquad\qquad x \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{3.2}$$

On suppose que b et σ sont deux fonctions mesurables (boréliennes), telles que :

$$b : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{A} \to \mathbb{R}^m$$

$$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times d} \to \mathcal{M}_{m\times d}(\mathbb{R})\,.$$

où $\mathcal{M}_{m\times d}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices d'ordre $m \times d$ à coéfficients réels.

Les hypothèses suivantes seront valables tout le long de ce chapitre.

1. **1-**Les fonctions b, σ, f et g vérifient les conditions de croissante linéaire en x, comme suit :

   Il existe une constante positive C , telle que pour chaque $(t,a) \in [0,T] \times \mathbb{A}$, on a :

$$|b(t,x,a)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1+|x|) \quad x \in \mathbb{R}^m$$

$$|f(t,x,a)| + |g(x)| \leq C(1+|x|) \qquad x \in \mathbb{R}^m.$$

   2- Les fonctions b, σ, f et g sont dérivables en x et à dérivées continues et bornées.

Il existe une constante positive K, telle que pour chaque $(t,a) \in [0,T] \times \mathbb{A}$, on a :

$$|b_x(t,x,a)| + \sigma_x(t,x) \leq K, \quad x \in \mathbb{R}^m$$

$$|f_x(t,x,a)| + |g_x(x)| \leq K, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

   3- Pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^m$, la fonction :

$$b(t,x,.) : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^m,$$

   est continue.

Remarque 3-1 :

Les fonctions b et σsont dérivables en x et à dérivées continues et bornées donc lipschitziennes, alors l'équation (3.2) admet une solution forte unique données par **:**

$$X = x + \int_0^T b(s,X_s,\alpha_s)\,dt + \sigma(s,X_s)\,dW_s.$$

De plus cette solution est continue et vérifie **:**

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^m\right] \leq M, \;\; \forall m > 1, \tag{3.3}$$

où M est une constqnte qui dépend de K, m et T.

Remarque 3-2 : D'après les hypothése **:**

(a)- Les fonctions b et σ vérifient la condition de croissante linéaire en (X,α).

(b)- Les fonctions b et σ sont lipschytziennes en x.

nous assurent l'existence et l'unicité d'une solution forte de l'équation (3.2) pour tout contrôle admissible $\alpha \in \mathcal{U}$.

Remarque 3-3 : Le coût $J(\alpha)$ est bien défini car :

On a

$$J(\alpha) = E\left[\int_0^T f(t, X_t, \alpha_t)\, dt + g(X_T)\right],$$

puis on a :

$$\begin{aligned} |J(\alpha)| &\leq E\left[\left|\int_0^T f(t, X_t, \alpha_t)\, dt + g(X_T)\right|\right] \\ &\leq E\left[\int_0^T |f(t, X_t, \alpha_t)|\, dt\right] + E\left[|g(X_T)|\right], \end{aligned}$$

puisque f et g vérifient la condition de croissance de linéaire en X (1), on obtient :

$$\begin{aligned} |J(\alpha)| &\leq E\left[\int_0^T C(1 + |X_t|)\, dt\right] + E\left[C(1 + |X_t|)\right] \\ &\leq (T+1)\, C\left[1 + E\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|\right)\right], \end{aligned}$$

d'aprés (3.3) et en prenant $m = 1$, on trouve :

$$|J(\alpha)| < M,$$

donc $J(\alpha)$ est bient défini.

3.3 Perturbation et estimation des solutions

Pour établir des conditions nécessaires d'optimalité, on compare $\widehat{\alpha}$ avec des contrôles qui lui sont suffisamment voisins.

Théorème 3-1 :(Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy)
Pour $m > 0$ il existe une constante positive C_m telle que pour tout temps d'arrêt τ on a :

$$E\left[\sup_{t\leq\tau}\left|\int_0^t f(s)\,dW_s\right|^m\right]\leq C_m E\left[\left(\int_0^t |f(s)|^2\,ds\right)^{\frac{m}{2}}\right].$$

L 'application J est dérivable au point $\varepsilon \equiv 0$ car b et σ sont dérivables, on a :

$$J(\widehat{\alpha}^\varepsilon) = J(\widehat{\alpha}) + \varepsilon \frac{dJ}{d\varepsilon}(\widehat{\alpha}^\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} + o(\varepsilon), \tag{3.4}$$

avec :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} o(\varepsilon) = 0.$$

La fonction coût $J(\alpha)$ admet un minimum qu'on note $\widehat{\alpha}$, tel que :

$$J(\widehat{\alpha}) \leq J(\alpha) \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \mathcal{U}\ .$$

Pour $\widehat{\alpha} \in U$:

$$J(\widehat{\alpha}) \leq J(\widehat{\alpha}^\varepsilon) \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon,$$

d'aprés (3.4), on obtient :

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(\widehat{\alpha}^\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} \geq 0.$$

On défini le contrôle modifié suivant :

$$\widehat{\alpha}_t^\varepsilon = \begin{cases} \widehat{\alpha}_t & \text{si} \quad t \in [0,\tau[\\ v & \text{si} \quad t \in [\tau, \tau+\varepsilon[\\ \widehat{\alpha}_t & \text{si} \quad t \in [\tau+\varepsilon, T]\,. \end{cases}$$

Où $v \in \mathbb{A}$, $\tau \in\,]0,T[$ et ε est assez petit.

Lemme 3-1 : Soient $\hat{X}$ et $\hat{X}^\varepsilon$ les solutions fortes de (3.2), associée respectivement à $\widehat{\alpha}_t$et à $\widehat{\alpha}_t^\varepsilon$. Alors, on a l'estimation suivante :

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\hat{X}_t^\varepsilon - \hat{X}_t\right|^2\right] \leq M\varepsilon^2.$$

Et on obtient :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\hat{X}_t^\varepsilon - \hat{X}_t\right|^2\right] = 0.$$

Preuve : $\hat{X}$ et $\hat{X}^{\varepsilon}$ est la solution de l'équation (3.2) associée respectivement à $\widehat{\alpha}_t$et à $\widehat{\alpha}_t^{\varepsilon}$, donc elle vérifie respectivement l'équation :

$$\hat{X}_t = x + \int_0^t b\left(s, \hat{X}_s, \widehat{\alpha}_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, \hat{X}_s\right) dW_s$$

$$\hat{X}_t^{\varepsilon} = x + \int_0^t b\left(s, \hat{X}_s^{\varepsilon}, \widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, \hat{X}_s^{\varepsilon}\right) dW_s,$$

où $\hat{X}$ la solution de l'equqtion (3.2) correspondante au contrôle $\widehat{\alpha}$.

En calculant la variation de deux termes, en ajoutant et en retranchant le terme $\int_0^t b\left(s, \hat{X}_s, \widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right) ds$,on obtient :

$$\hat{X}_t^{\varepsilon} - \hat{X}_t = \int_0^t \left[b\left(s, \hat{X}_s^{\varepsilon}, \widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right) - b\left(s, \hat{X}_s, \widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right)\right] ds +$$

$$\int_0^t b\left(s, \hat{X}_s, \widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right) - b\left(s, \hat{X}_s, \widehat{\alpha}_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, \hat{X}_s^{\varepsilon}\right) - \sigma\left(s, \hat{X}_s\right) dW_s,$$

et par suite en appliquant l'inégalité :

$$(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

et l'inégalité de Cauchy- Schwarz, on trouve :

$$\left|\hat{X}_t^{\varepsilon} - \hat{X}_t\right|^2 \leq$$

$$3k\int_0^t \left|\hat{X}_s^{\varepsilon} - \hat{X}_s\right|^2 ds + 3\left|\int_0^t \left[b\left(s, \hat{X}_s, \widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right) - b\left(s, \hat{X}_s, \widehat{\alpha}_s\right)\right]\right|^2 ds$$

$$+ 3\left|\int_0^t \left[\sigma\left(s, \hat{X}_s^{\varepsilon}\right) - \sigma\left(s, \hat{X}_s\right)\ \right] dW_s\right|^2.$$

Par passage au sup sur $[0, T]$ et à l'espérance, on trouve :

$$E\sup_{t\in[0,T]}\left|\hat{X}_t^{\varepsilon} - \hat{X}_t\right|^2 \leq$$

$$3kE\left[\int_0^t \left|\hat{X}_s^{\varepsilon} - \hat{X}_s\right|^2 ds + 3\left|\int_0^t \sup_{t\in[0,T]}\left[b\left(s, \hat{X}_s^{\varepsilon}, \widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right) - b\left(s, \hat{X}_s, \widehat{\alpha}_s\right)\right] ds\right|\right]$$

$$+ 3\sup_{t\in[0,T]} E\left|\int_0^t \left[\sigma\left(s, \hat{X}_s^{\varepsilon}\right) - \sigma\left(s, \hat{X}_s\right)\right] dW_s\right|^2,$$

d'aprés la définition de $\widehat{\alpha}^{\varepsilon}$, on trouve :

$$E \sup_{t\in[0,T]} \left|\hat{X}_t^{\varepsilon} - \hat{X}_t\right|^2 \leq$$

$$3k\ E\int_0^t \left|\hat{X}_s^{\varepsilon} - \hat{X}_s\right|^2 ds + E\left|\sup_{t\in[0,T]}\left[b\left(s,\hat{X}_s,v\right) - b\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s\right)\right]\varepsilon\right|^2$$

$$+ 3\sup_{t\in[0,T]} E\left[\left|\int_0^t \left[\sigma\left(s,\hat{X}_s^{\varepsilon}\right) - \sigma\left(s,\hat{X}_s\right)\right] dW_s\right|^2\right].$$

En appliquant l'inégalité de Bukholder-Davis-Gundy, il existe une constante positive C, telle que :

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\hat{X}_t^{\varepsilon} - \hat{X}_t\right|^2\right] \leq$$

$$3k^2\ E\left[\int_0^t \left|X_s^{\varepsilon} - \hat{X}_s\right|^2 ds\right] + 3\varepsilon^2 E\left|\sup_{t\in[0,T]}\left[b\left(t,\hat{X}_t,v\right) - b\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)\right]\right|^2$$

$$+ 3CE\left[\int_0^t \left|\sigma\left(s,\hat{X}_s^{\alpha}\right) - \sigma\left(s,\hat{X}_s\right)\right|^2 ds\right].$$

On a :

$$|b_x(t,x,a)| \leq k_1 \quad \text{et} \quad \sigma_x(t,x) \leq k_2,$$

on obtient :

$$E\sup_{t\in[0,T]}\left|\hat{X}_t^{\varepsilon} - \hat{X}_t\right|^2 \leq$$

$$3k^2 E\left[\int_0^t \left|\hat{X}_s^{\varepsilon} - \hat{X}_s\right|^2 ds\right] + 3\varepsilon^2\left(C + E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\hat{X}_t^{\varepsilon} - \hat{X}_t\right|\right]\right)$$

$$+ 3k^2 CE\left[\int_0^t \left|\hat{X}_s^{\varepsilon} - \hat{X}_s\right|^2 ds\right].$$

D'aprés l'inégalité (3.3), on a :

$$E\left[\sup\nolimits_{t\in[0,T]}\left|\hat{X}_t^{\varepsilon} - \hat{X}_t\right|^2\right] \leq 3k^2(1+C)\,E\left[\int_0^t\left|\hat{X}_s^{\varepsilon} - \hat{X}_s\right|^2 ds\right]$$

$$+ 3\varepsilon^2(C+M).$$

Par le lemme de Gronwall, on aurra :

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\hat{X}_t^{\varepsilon}-\hat{X}_t\right|^2\right]\leq\varepsilon^2 3\left(C+M\right)\exp\left(3k^2\left(1+C\right)T\right).$$

Alors :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}E\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\hat{X}_t^{\varepsilon}-\hat{X}_t\right|^2\right]\leq\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2 3\left(C+M\right)\exp\left(3K^2\left(1+C\right)T\right)=0.$$

Finalement, on obtient le résultat demandé.□

Lemme 3.2 : Sous les hypothèses précédentes, on trouve :

$$\begin{aligned}D\varepsilon^2\leq E\int_0^T\left(\left[f\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^{\varepsilon}\right)-f\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)\ \right]\right)dt\\+E\int_0^T f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)X_t^1dt+E\left[g_x\left(X_T\right)X_T^1\right].\end{aligned}\tag{3.5}$$

Où $\hat{X}^1$ est la solution de l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\hat{X}_t^1 &= \int_0^t b_x\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right)\hat{X}_s^1ds+\int_0^t\sigma_x\left(s,\hat{X}_s\right)\hat{X}_s^1dW_s\\&+\int_0^t\left[b\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right)-b\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s\right)\right]ds.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned}\hat{X}_t^{\varepsilon}-\hat{X}_t &= \int_0^t\left[b\left(s,\hat{X}_s^{\varepsilon},\widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right)-b\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s\right)\right]ds\\&+\int_0^t\left[\sigma\left(s,\hat{X}_s^{\varepsilon}\right)-\sigma\left(s,\hat{X}_s\right)\right]dW_s.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Pour $b\in\mathcal{C}^1$ en x, En dévelopant $b\left(s,\hat{X}_s^{\varepsilon},\widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right)$ au point $\hat{X}_s$ et à l'ordre 1 , on obtient :

$$b\left(s,\hat{X}_s^{\varepsilon},\widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right)=b\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right)+b_x\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right)\left(\hat{X}_s^{\varepsilon}-\hat{X}_s\right),$$

et pour $\sigma\in\mathcal{C}^1$ en x, En dévelopant $\sigma\left(s,\hat{X}_s^{\varepsilon}\right)$ au point $\hat{X}_s$ et à l'ordre 1, on obtient :

$$\sigma\left(s,\hat{X}_s^{\varepsilon}\right)=\sigma\left(s,\hat{X}_s\right)+\sigma_x\left(s,\hat{X}_s\right)\left(\hat{X}_s^{\varepsilon}-\hat{X}_s\right).$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&b\left(s,\hat{X}_s^{\varepsilon},\widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right)-b\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s\right)\\
&=b\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right)-b\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s\right)+b_x\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right)\left(\hat{X}_s^{\varepsilon}-\hat{X}_s\right),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

et :

$$\sigma\left(s,\hat{X}_s^{\varepsilon}\right)-\sigma\left(s,\hat{X}_s\right)=\sigma_x\left(s,\hat{X}_s\right)\left(\hat{X}_s^{\varepsilon}-\hat{X}_s\right). \tag{3.9}$$

En substituant (3.8) et (3.9) dans (3.7), on trouve :

$$\begin{aligned}
\hat{X}_t^{\varepsilon}-\hat{X}_t &= \int_0^t b\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right)-b\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s\right)ds\\
&+\int_0^t\left[b_x\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s^{\varepsilon}\right)\left(\hat{X}_s^{\varepsilon}-\hat{X}_s\right)\right]ds\\
&+\int_0^t\left[\sigma_x\left(s,\hat{X}_s\right)\left(\hat{X}_s^{\varepsilon}-\hat{X}_s\right)\right]dW_s.
\end{aligned}$$

Et en posant :

$$\hat{X}^1=\hat{X}^{\varepsilon}-\hat{X},$$

on obtient l'équation (3.6).

En développant $f\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^{\varepsilon}\right)$ et $g\left(\hat{X}_t^t\right)$ au point $\hat{X}_t$, on obtient :

$$f\left(t,\hat{X}_t^{\varepsilon},\widehat{\alpha}_t^{\varepsilon}\right)=f\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^{\varepsilon}\right)+f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^{\varepsilon}\right)\hat{X}_t^1,$$

et :

$$g\left(\hat{X}_T^{\varepsilon}\right)=g\left(\hat{X}_T\right)+g_x\left(\hat{X}_T\right)\hat{X}_T^1.$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
&f\left(t,\hat{X}_t^{\varepsilon},\widehat{\alpha}_t^{\varepsilon}\right)-f\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^{\varepsilon}\right)=\\
&f\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^{\varepsilon}\right)-f\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)+f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^{\varepsilon}\right)\hat{X}_t^1,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

et :

$$g\left(\hat{X}_T^{\varepsilon}\right)-g\left(\hat{X}_T\right)=g_x\left(\hat{X}_T\right)\hat{X}_T^1. \tag{3.11}$$

Puisque $\widehat{\alpha}$ est optimal et $J\left(\widehat{\alpha}\right)\leq J\left(\widehat{\alpha}^{\varepsilon}\right)$ on a :

$$E\left[\int_0^T\left[f\left(t,\hat{X}_t^{\varepsilon},\widehat{\alpha}_t^{\varepsilon}\right)-f\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^{\varepsilon}\right)\right]dt\right]+E\left[g\left(\hat{X}_T^{\varepsilon}\right)-g\left(\hat{X}_T\right)\right]\geq 0. \tag{3.12}$$

En substituant (3.10) et (3.11) dans (3.12), on trouve :

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ & E\int_0^T f\left(t,\hat{X}_t^\varepsilon,\widehat{\alpha}_t^\varepsilon\right)-f\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^\varepsilon\right)dt \\ & +E\int_0^T f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^\varepsilon\right)\hat{X}_t^1 dt+Eg_x\left(\hat{X}_T\right)\hat{X}_T^1. \end{aligned} \tag{3.13}$$

De plus en ajoutant et en retranchant le terme :

$$f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^\varepsilon\right),$$

on trouve :

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ & E\left[\int_0^T f\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^\varepsilon\right)-f\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^\varepsilon\right)dt\right] \\ & +E\left[\int_0^T \left(f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^\varepsilon\right)-f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)\right)\hat{X}_t^1 dt\right] \\ & +E\left[\int_0^T f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)\hat{X}_t^1 dt\right]+E\left[g_x\left(\hat{X}_T\right)\hat{X}_T^1\right]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

De la définition de $\widehat{\alpha}_t^\varepsilon$, on a :

$$\begin{aligned} & E\left[\int_0^T f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^\varepsilon\right)-f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)dt\right] \\ & =E\left[\int_\tau^{\tau+\varepsilon} f_x\left(t,\hat{X}_t,v\right)-f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)\hat{X}_t^1 dt\right], \end{aligned}$$

puis on a :

$$\begin{aligned} & E\left[\int_0^T f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^\varepsilon\right)-f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)dt\right] \\ & \leq E\left[\int_\tau^{\tau+\varepsilon}\left|f_x\left(t,\hat{X}_t,v\right)-f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)dt\right|\hat{X}_t^1 dt\right] \\ & \leq kE\left[\int_\tau^{\tau+\varepsilon}\hat{X}_t^1 dt\right], \end{aligned}$$

donc :

$$E\left[\int_0^T f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^\varepsilon\right)-f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)dt\right]\leq k\int_\tau^{\tau+\varepsilon}E\left[\sup_{t\in[0,T]}\int_\tau^{\tau+\varepsilon}\hat{X}_t^1\right]dt.$$

$\hat{X}^1$ étant de l'ordre de ε, alors par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et d'aprés (3.3), on obtient :

$$E\left[\int_0^T f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^\varepsilon\right)-f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)dt\right]dt\leq kM'\theta^2,$$

où $M'=\sqrt{M}$.

Alors :

$$\begin{aligned}D\varepsilon^2 &\leq E\left[\int_0^T f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t^\varepsilon\right)-f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)dt\right]\\ &\quad+E\left[\int_0^T f_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)dt\right]+E\left[g_x\left(\hat{X}_T\right)\hat{X}_T^1\right],\end{aligned}$$

en pose :

$$D=-kM^{'}.$$

Finalement, on obtient le résultat demandé.□

3.4 Principe du maximum

Les conditions nécessaires d'optimalité seront établies essentiellement à partir de la relation (3.5) du lemme précédent.

Théorème 3-2 : Soit $\left(\hat{X},\widehat{\alpha}\right)$ une solution optimale pour notre problème de contrôle, alors il existe un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté défini par :

$$p_t=E\left[\psi_t^*\phi_T^*g_x\left(\hat{X}_T\right)/\mathcal{F}_t\right]+\psi_t^*\int_t^T\phi_s^*f_x\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s\right)ds,\tag{3.15}$$

tel que :

$$H\left(\hat{X}_t,v,p_t\right)\leq H\left(\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t,p_t\right)\ \ \forall v\in\mathbb{A}\,;\ P-p.s,\tag{3.16}$$

où le hamiltonien H est défini par :

$$H\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t,p_t\right)=f\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)+p_tb\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right).\tag{3.17}$$

Preuve : On considère l'équation différentielle stochastique linéaire suivante :

$$\begin{cases}d\phi_t=b_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)\phi_tdt+\sigma_x\left(t,\hat{X}_t\right)\phi_tddW_t\\ \quad\phi_0=Id_{m\times d}.\end{cases}\tag{3.18}$$

Cette équation étant linéaire à coéfficients bornés, alors elle admet une solution forte unique (voir partie Annexe). De plus la solution ϕ est inversible et son inverse ψ vérifie l'équation différentielle stochastique linéaire suivante :

$$\begin{cases} d\psi_t = \left[\psi_t\sigma_x\left(t,\hat{X}_t\right)\sigma_x\left(t,\hat{X}_t\right) - \psi_t b_x\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)\right]dt \\ \qquad\qquad -\psi_t\sigma_x\left(t,\hat{X}_t\right)dW_t \\ \psi_0 = Id. \end{cases} \tag{3.19}$$

Pour vérifier que ψ est bien l'inverse de ϕ, on vérifie que :

$$\phi\psi = \psi\phi = Id,$$

et ceci en appliquant la formule d'Itô.

En suivant la méthode de la résolvante des équations différentielles ordinaires linéaires, on pose

$$\eta_t = \psi_t X_t^1.$$

Par la formule d'Itô, on obtient :

$$d\eta_t = \psi_t\left[b\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right) - b\left(t,\hat{X}_t,\widehat{\alpha}_t\right)\right]dt.$$

On pose :

$$Y = \phi_T^* g_x\left(\hat{X}_T\right) + \int_0^T \phi_s^* f_x\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s\right)ds$$

$$\xi_t = E\left[Y/\mathcal{F}_t\right] - \int_0^t \phi_s^* f_x\left(s,\hat{X}_s,\widehat{\alpha}_s\right)ds.$$

On remarque que :

$$E\left[g_x\left(\hat{X}_T\right)\hat{X}_T^1\right] = E\left[\phi_T^* g_x\left(\hat{X}_T\right)\eta_T\right] = E\left[\eta_T\xi_T\right].$$

Donc pour calculer le premier terme $E\left[g_x\left(\hat{X}_T\right)\hat{X}_T^1\right]$, il suffit de calculer $E\left[\eta_T\xi_T\right]$.

Puisque $\mathcal{F}_t = \sigma\left(W_s; 0 \leq s \leq t\right)$, $Y \in L^2\left(\Omega,\mathcal{F},P\right)$ et $E\left[Y/\mathcal{F}_t\right]$ est une martingale de carré intégrable, alors la décomposition d'Itô nous donne :

$$E\left[Y/\mathcal{F}_t\right] = E\left[Y\right] + \int_0^t G_s dW_s. \tag{3.20}$$

Où G est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté, tel que :

$$E\int_0^T |G_s|^2\, ds < \infty.$$

Donc on peut utiliser une forme de ξ mieux adapté à notre problème, qui est la suivante :

$$\xi_t = E\left[Y\right] - \int_0^t \phi_x^*\left(s, \hat{X}_s, \widehat{\alpha}_s\right) ds + \int_0^t G_s dW_s,$$

ce qui nous donne :

$$d\xi_t = -\phi_t^* f_x\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right) dt + G_t dW_t. \tag{3.21}$$

En appliquant la formule d'Itô à $\eta_t\xi_t$ et en passant à l'espérance mathématique, on obtient :

$$E\left[g_x\left(\hat{X}_T\right)\hat{X}_T^1\right] = E\int_0^T p_t\left[b\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t^\varepsilon\right) - b\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right)\right] dt$$

$$- E\int_0^T \eta_t\phi_t^* f_x\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right) dt,$$

puis on a :

$$E\left[g_x\left(\hat{X}_T\right)\hat{X}_T^1\right] =$$

$$E\textstyle\int_0^T p_t\left[b\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t^\varepsilon\right) - b\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right)\right] dt - E\displaystyle\int_0^T f_x\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right) X_t^1 dt,$$

où :

$$p_t = \psi_t^*\xi_t. \tag{3.22}$$

En remplaçant $E\left[g_x\left(\hat{X}_T\right)\hat{X}_T^1\right]$ par sa valeur $D\varepsilon^2$, on obtient :

$$D\varepsilon^2 \leq E\int_0^T \left[H\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t, p_t\right) - H\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t^\varepsilon, p_t\right)\right] dt.$$

De la définition de $\widehat{\alpha}_t^\varepsilon$, on obtient :

$$D\varepsilon^2 \leq E\int_\tau^{\tau+\varepsilon} \left[H\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t, p_t\right) - H\left(t, \hat{X}_t, v, p_t\right)\right] dt,$$

ce qui nous donne :

$$D\varepsilon \leq E\int_\tau^{\tau+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\left[H\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t, p_t\right) - H\left(t, \hat{X}_t, v, p_t\right)\right] dt.$$

En faisant tendre ε vers 0 on obtient :

$$H\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t, p_t\right) \leq H\left(t, \hat{X}_t, v, p_t\right)\ \ P - p.s.$$

3.5 Equation adjointe

En appliquant la formule d'Itô à $p_t = \psi_t^* \xi_t$, on obtient l'équation adjointe suivante :

$$\begin{cases} -dp_t = \left[b_x\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right) p_t + \sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) Q_t + f_x\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right)\right] dt \\ \qquad\qquad -Q_t dW_t \\ p_T = g_x\left(\hat{X}_T\right). \end{cases} \tag{3.23}$$

où Q est un processus donné par :

$$Q_t = \psi_t^* G_t - \sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) p_t, \tag{3.24}$$

et G vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^t G_s dW_s &= E\left[\phi_T^* g_x\left(\hat{X}_T\right) + \int_0^T \phi_s^* f_x\left(s, \hat{X}_s, \widehat{\alpha}_s\right) ds / \mathcal{F}_t\right] \\ &\quad - E\left[\phi_T^* g_x\left(\hat{X}_T\right) + \int_0^T \phi_s^* f_x\left(s, \hat{X}_s, \widehat{\alpha}_s\right) ds\right]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Application de la formule d'Itô pour trouver l'équation adjointe vérifiée par p_t :

On a :

$$p_t = \psi_t^* \xi_t,$$

où le processus ψ vérifie l'équation :

$$\begin{cases} d\phi_t = b_x\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right) \phi_t dt + \sigma_x\left(t, \hat{X}_t\right) \phi_t d dW_t \\ \phi_0 = Id_{m\times d}, \end{cases}$$

et le processus ξ vérifie l'équation :

$$d\xi_t = -\phi_t^* f_x\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right) dt + G_t dW_t.$$

D'aprés (3.19) ψ^* vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} d\psi_t^* = \left[\sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) \sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) \psi_t^* - b_x^*\left(t, \hat{X}_t, \hat{u}_t\right) \psi_t^*\right] dt \\ \qquad\qquad -\sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) \psi_t^* dW_t \\ \psi_0^* = Id_{d\times m.} \end{cases}$$

En applicant la formule d'Itô au processus p donné par , on trouve :

$$dp_t = \xi_t d\psi_t^* + \psi_t^* d\xi_t + d\left\langle \xi, \psi \right\rangle_t .$$

On aura donc :

$$dp_t = \xi_t \left[\sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) \sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) \psi_t^* - b_x^*\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right)\right] dt$$

$$- \xi_t \sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) \psi_t^* dW_t - \psi_t^* \phi_t^* f_x\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right) dt,$$

$$+ \psi_t^* G_t dW_t - \sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) \psi_t^* G_t dt.$$

En remarquant que :

$$\psi_t^* \phi_t^* = Id_{d\times m},$$

et en remplaçant $\xi_t \psi_t^*$ par p_t, on obtient :

$$dp_t = \left[\sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) \sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) p_t - b_x^*\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right) p_t\right] dt$$

$$-\sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) p_t dW_t - f_x\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right) dt + \psi_t^* G_t dW_t - \sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) \psi_t^* G_t dt,$$

donc :

$$dp_t =$$

$$\sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) \sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) p_t - b_x^*\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right) p_t - f_x\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right)$$

$$-\sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) \psi_t^* G_t dt + \left[\psi_t^* G_t - \sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) p_t\right] dW_t.$$

En posant :

$$Q_t = \psi_t^* G_t - \sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) p_t,$$

on trouve :

$$dp_t = \left[-\sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) Q_t - b_x^*\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right) p_t - f_x\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right)\right] dt\, W_t.$$

$$+Q_t dW_t.$$

On aura alors :

$$-dp_t = \left[\sigma_x^*\left(t, \hat{X}_t\right) Q_t + b_x^*\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right) p_t + f_x\left(t, \hat{X}_t, \widehat{\alpha}_t\right)\right] dt$$

$$-Q_t dW_t.$$

Conclusion :

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressé aux problèmes de contrôle dans lesquels des systèmes sont gouvernés par des équations différentielles stochastique du type Itô.

La première partie est basée sur le principe de Bellman qui donne lieu à une EDP parabolique fortement non linéaire appelée équation de Hamilton Bellmann Jacobi. On montre en particulier que la fonction valeur est une solution de viscosité.

Dans la deuxième partie, nous nous sommes intéressés au principe du maximum. nous nous sommes intéressés particulièrement aux conditions nécessaires d'optimalité dans le cas de solutions faible.

Bibliographie

[1] Arkin , V.I. and Saksonov, M.T (1979), Necessary optimality conditions for stochastique differential equation, soviet Math. DOKL, 20, 1-5.

[2] Bahlali Seid (2002), Approximqtion et conditions necéssaires d'optimqlité pour les problème de contrôle stochastique relqxes. Thèse de Doctorat, Université de Batna.

[3] Bensoussan, A. (1982), Stochastic Control by Functional Analysis Methods, North-Holland, Amsterdam.

[4] Bensoussan, A. (1982a), Lecture on stochastic control, Lecture Note in Mathematics, 972, 1-62.

[5] Bismut, J.M. (1973), Conjugate convex functions in optimal stochastic control, J. Math. Anal. Applic. 44, 384-404.

[6] Bismut, J.M. (1976), Théorie probabiliste du contrôle des diffusions, Mem. Amer. Math. Soc. No. 176.

[7] Djehiche Boualem KTH (Stockhom), Stochastic Calculus An Introduction with Applications.

[8] Gronwall,M.G, ISHII, and Lion P.I : User's guide to viscosity solutions of second order partial equations, Bull. Ame.Math.Soc.Volume 27, Numbered, July 1992, page 1-67.

[9] Haussmann U.G (1985) : A Stochastic Maximum Principle for Optimal Control of Diffusions, Preprint.

[10] Haussmann U.G, The maximum principle for the optimal control of diffutions with partial informations, Preprint.

[11] Haussmann (1976),General necessary conditions for optimal control of stochastique système, Math. Programming Studies, 6, 30-48.

[12] Haussmann U.G., (1981a), some exemples of optimal stochastic controls, SIAM Review 23, 292-307.

[13] Haussmann U.G.(1981), On the adjoint process for optimal control of diffusion processes, SIAM J. Control Optim.19, 221-243.

[14] Kusher, H.J. (1965), On the stochastic maximum principle : Fixed time of control, J.Math. Anal. Applic. 11, 78-92.

[15] Kusher, H.J. (1965a), On the stochastic maximum principle with average constraints, J. Math. Anal. Applic. 12, 13-26.

[16] Kusher, H.J. (1972), Necessary conditions for continuons parameter stochastic optimisation problèmes, SIAMJ, CONTROL 10.550-565.

[17] Mezerdi Brahim, Bahlali Khaled et Ouknine Youssef, The Maximum for optimal control of diffusions with non-smooth coefficients.

[18] Øksendal B.(1998), Stochastic differential equations : an introduction with applications, 5th Edition, Springer verlag.

[19] Saksonov, M. T. (1972), The methode of stochastic maximum principle in solving some optimal control problems, Doklady Academia Nauk, Tashkent S.S.R. (in Russian

[20] Springer.Verlag, Solution de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi-Belman, Mathématique Application 17 Gy Barles.

[21] Wendell H.Fleming Reynond W, Deterministic and Stochastique Optimal Control, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg Now York.