

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE BISKRA
FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

MEMOIRE DE MAGISTER
Spécialité : GENIE MECANIQUE
Option : *Construction Mécanique*

Présentée et Soutenue publiquement par :
DJOUDI Tarek
(Ingénieur d'Etat en Construction Mécanique)

A l'Université de Biskra

THEME

Etude De L'écoulement Du Polymère Fondu Dans Les Moules
Résolution Par :
La Méthode Des Volumes Finis
(MVF)

Devant le jury composé de :

Président		
MOUMMI Nouredinne	Maître de Conférence	Université de Biskra
Rapporteur		
HECINI Mabrouk	Maître de Conférence	Université de Biskra
Examineurs		
BENMOUSSA Hocine	Maître de Conférence	Université de Batna
MOUMMI Abdelhafid	M.A.Chargé de Cours(docteur)	Université de Biskra

Année 2004-2005

Introduction

Depuis bien longtemps au niveau de l'industrie, on utilisait les matériaux organiques basés essentiellement sur la chimie du carbone, pour la construction des pièces dans plusieurs domaines. Depuis les années vingt, on a découvert un nouveau matériaux macromolécules (polymère), qu'on utilise dans tout les domaines (mécanique, électronique, optique.....).

Mais la mise en forme des polymères n'est pas comme les autres anciens matériaux (fer, cuivre, acier,.....), cette mise en forme du polymère a plusieurs méthodes et techniques.

Parmis ces méthodes on cite:[9]

- Extrusion des thermoplastiques : est une technique de transformation des matières thermoplastiques qui permet d'obtenir des objets finis ou semi-ouvrés par un processus technologique continu (tubes).
- Extrusion soufflage : permet de fabriquer un corps creux dans un moule sans utiliser de noyaux pour faire une forme intérieure non démontable (bouteilles, réservoirs.....).
- Calandrage : est une technique de fabrication de feuilles, de plaques ou de films par laminage d'une matière thermoplastique entre plusieurs cylindres parallèles constituant la machine appelée Calandre.
- Thermoformage : la technique de thermoformage utilise les matériaux semi-ouvrés tels que les plaques ou feuilles rigides en matière thermoplastique pour les transformer en objets tridimensionnels avec une épaisseur de paroi proche de l'épaisseur du matériau de départ.
- Compression-Transfert : le moulage par compression représente la plus ancienne technique de transformation appliquée à partir des années 1920 aux poudres thermodurcissables phénoliques et aminoplastes. La méthode consiste à presser directement la matière dans l'empreinte d'un moule à chaud.

- Injection des thermoplastiques :
- Injection multiphasé des thermoplastiques : on peut vouloir obtenir des pièces composées de différentes matières ou couleurs, ce que l'on définira comme plusieurs phases.
- Injection des thermoplastiques allégés : on introduit ou on génère, dans un thermoplastique fondu, des gaz, on les laisse s'expanser et on solidifie le thermoplastique. Le résultat donne un produit allégé.
- Injection-soufflage : permet de réaliser des corps creux qui présentent de bonnes propriétés mécaniques. Cette technique est essentiellement réservée aux thermoplastiques.
- Injection des thermodurcissables : se caractérisent par leur réseau macromoléculaire tridimensionnel thermostable. Cela nécessite que la mise en forme (dans l'empreinte du moule) soit faite avec la réticulation, c'est à dire la création du réseau tridimensionnel définitif. La mise en œuvre relève donc à la fois de la chimie (réticulation, dosage stoechiométrique des composants) et la physique (écoulement des fluides, thermique).
- Moulage par rotation (rotomoulage) : est conçu pour réaliser des corps creux de toutes dimensions. La méthode de fabrication est très simple. La matière thermoplastique est introduite dans un moule sous forme de poudre très fine, le moule est fermé puis chauffé ; pendant que la matière devient fluide, l'ensemble est mis en double rotation (ou rotation plus une oscillation) pour que la matière tapisse toutes les parois. lorsque la matière est fondue et correctement répartie dans l'empreinte, le moule est introduit dans un système de refroidissement. [9]

Chaque méthode citée ci-dessus a sa technique propres, notre étude concerne l'injection du thermoplastique, et plus précisément sur la phase de remplissage.

Le moulage par injection connaît un grand succès auprès de presque toutes les branches d'industrie, parce qu'il permet de réaliser des formes complexes en quelques dizaines de secondes et en grande série. Au début de l'ère de l'industrie de la transformation, les formes fabriquées étaient simples et les cotes avaient des tolérances larges. Mais du fait que le procédé se prêtait à une fabrication rapide et sans main-d'œuvre importante et à une fabrication de masse, des formes même très complexes et des tolérances plus serrées ont vite pris la place des formes simples.[12]

Le cycle de moulage est souvent décomposé en trois phases :

- Phase de remplissage.
- Phase de compactage.
- Phase de refroidissement.

La modélisation du cycle de moulage de ce procédé permet de gagner du temps pendant l'étude des pièces et diminuer ainsi le coup de fabrication du produit fini.

Parmi les méthodes de modélisation, on distingue la méthode de mise à plat qui consiste à mettre à plat la pièce tridimensionnelle et à découper la géométrie bidimensionnelle ainsi obtenue en géométrie élémentaires (canal, secteur et plaque). La description d'un moule (pièce) complexe conduit donc à définition d'un réseau de pièces élémentaires.

La phase de remplissage conditionne en grande partie les propriétés fines de la pièce, elle représente la phase dynamique de transfert de matière dans le moule en un temps court. L'écoulement du polymère est supposé incompressible visqueux à travers une géométrie tridimensionnelle quelconque. Pendant cette phase de remplissage de l'empreinte, la matière chaude va rapidement se trouver au contact d'un moule froid [12].

La modélisation de remplissage permet de donner quelques réponses aux questions suivantes :

- a ce que le moule sera t'il rempli ou non ?
- qu'elle est la variation locale des paramètres mécaniques et thermiques au cours de l'écoulement ?
- qu'elle est l'influence de la nature de matière sur l'écoulement de celle ci ?

L'OBJECTIF DU TRAVAIL :

Notre étude, est une suite des études qui ont été commencée par notre projet du fin d'étude et d'autres projets. Mais cette fois ci, on va se baser sur les méthodes des résolutions numériques.

Cependant, on va utiliser plusieurs méthodes (méthodes des différences finis et méthode des volumes finis), avec les trois méthodes de résolution (explicite , implicite, Crank -Nicholson), pour définir la meilleure méthode et l'influence de chaque méthode sur l'étude.

En plus, on va vérifier l'influence du comportement rhéologique (les différents modèles de viscosité) sur la modélisation du remplissage.

Cette étude devra permettre de réaliser un logiciel de simulation de la phase de remplissage avec une bibliothèque des données.

Ce genre de logiciel existe déjà depuis une vingtaine d'années tel que le logiciel *MOLDFLOW* qui est capable de modéliser le remplissage de moules de géométrie complexe, depuis plusieurs nouvelles versions de *MOLDFLOW* ont été commercialisées et d'autres logiciels sont apparus : *CADMOULD*, *PROCOP*, *C.FLOW*, *ABC-FLOW*, *FILL2*. Il est difficile et périlleux de vouloir porter un jugement sur ces logiciels car les hypothèses et les méthodes numériques sur les quelles se fondent ne sont pas toujours publiées. On peut cependant distinguer plusieurs logiques résumées sur la figure1[17].

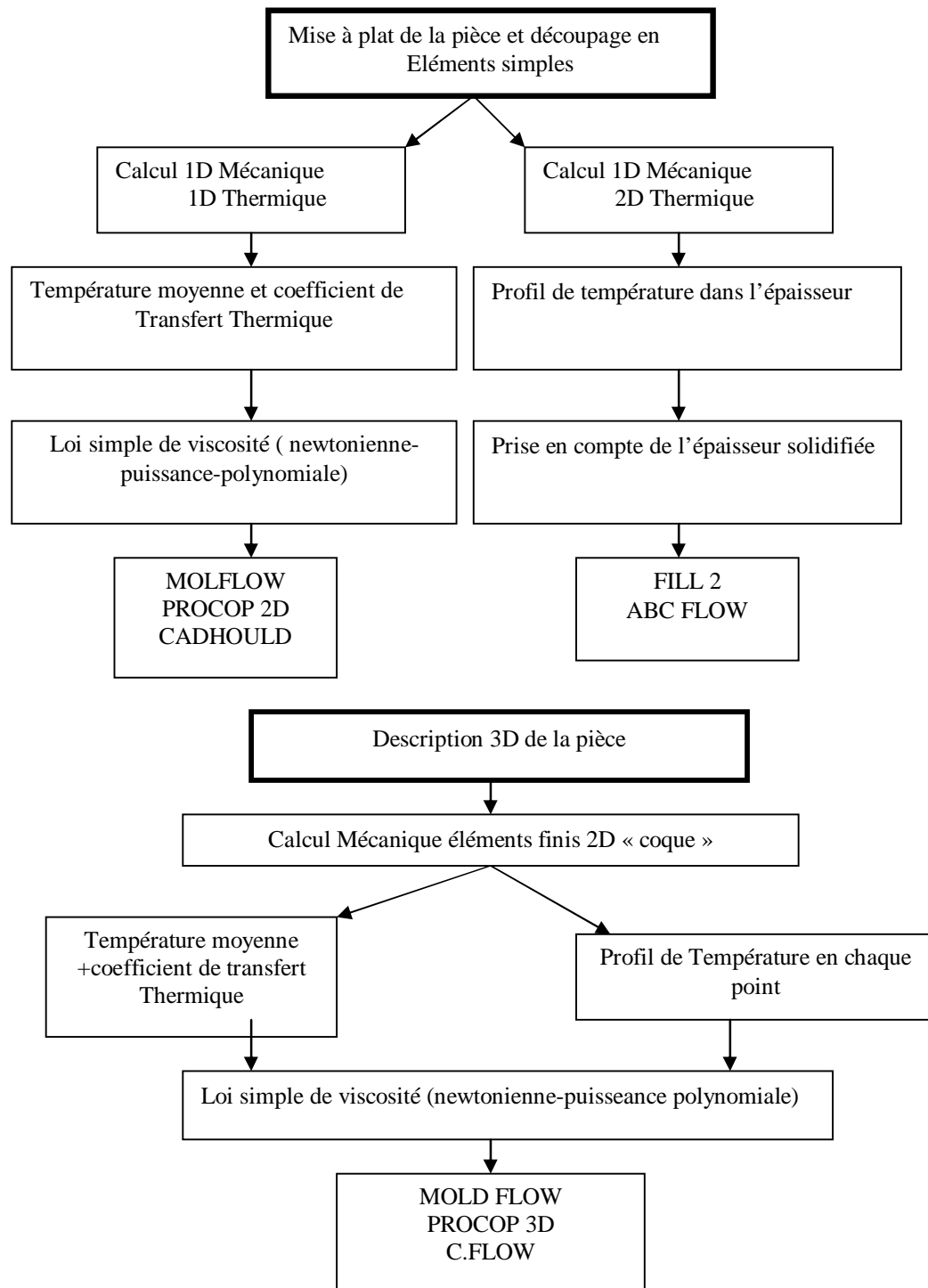


Fig.1. La logique des logiciels de remplissage des moules d'injection [17]

Le plan de travail est le suivant :

Chapitre I : Généralités

Ce chapitre présente en bref les structures des polymères et le procédé de moulage des matières plastiques.

Chapitre II : Comportement rhéologique du polymère

Ce chapitre montre les différents modèles de viscosité.

Chapitre III: Modélisation du remplissage

Ce chapitre présente les principes de la mécanique des milieux continus utilisés pour étudier les phénomènes de moulage. Il traite en détail les équations qu'on a utilisés pour déterminer les paramètres mécaniques et thermiques du moulage .

Chapitre IV: Programmation

Ce chapitre présente l'organigramme général et détaille du la programmation qu'on suivi. Le logiciel utilisé pour cette programmation est MATLAB

Chapitre V : Etude des cas d'application

Dans ce chapitre on a présenté un cas réel d'un moule de forme d'un secteur avec des dimensions et conditions d'injection prédéfinis; Ceci est suivi des interprétations des résultats graphiques obtenus.

Un cas d'une pièce formée des trois géométries élémentaires (canal , secteur, plaque) a été étudié.

Conclusion et perspectives:

Généralités

I.1 HISTORIQUE

On peut considérer que la science des polymères a véritablement commencé dans les années vingt, grâce au chimiste allemand Hermand Staudinger qui fut le premier à imaginer le concept de macromolécule.

La deuxième grande découverte dans le domaine de cette science est due au savant américain Wallas Hum Carothers qui, à la fin des années vingt (brevet déposé en 1931), synthétisa pour la première fois une de ces fameuses macromolécules (le polymère).

Le physicien et chimiste français Henri Victor Regnault observe la formation d'une substance solide dans un récipient rempli de chlorure de vinyle exposé à la lumière (1838).

L'inventeur américain Charles Goodyear découvre le procédé de réticulation du caoutchouc au moyen du soufre (brevet déposé en 1839).

Poursuivant les travaux du français Henri Braconnot (1832), le chimiste allemand Christiane freidrich Schonbein met au point la fabrication du nitrate de cellulose(1846).[6]

I.2 STRUCTURE DES POLYMERES:[9]

Les différents types de macromolécules sont :

a) Macromolécules linéaire:

Dans ce type il y a trois parties:

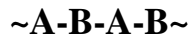
- **Homopolymères:**

Le polyéthylène, le polychloryre de vinyle et beaucoup d'autre matières plastiques industrielles sont constitués de macromolécules, (molécules géantes), pouvant être considérée en première approximation comme étant des enchaînements linéaires de motifs structuraux identiques correspondant à la petite molécule (monomère) utilisée pour leur synthèse

A est le motif monomère :



En polycondensation on utilise fréquemment deux molécules différents A et B pour la synthèse, et l'on obtient un enchaînement régulier alterné des deux motifs.



- **Copolymères**

La copolymérisation ou la copolycondensation, qui permettent d'incorporer plusieurs motifs différents dans la chaîne, peuvent conduire à une très grande variété de structures, les cas extrêmes étant présentés par:

le copolymère alterné:



le copolymère séquence:



les copolymères statiques:



b) Macromolécules ramifiées:

- **Homopolymères**

Dans certain cas, les méthodes industrielles de synthèses ne conduisant pas à des macromolécules rigoureuses en linéaire

On observe la formation de ramification courte et longue.

Ces dernières peuvent jouer un rôle important au niveau des propriétés rhéologiques

- **Copolymères:**

A ramification est délibérément recherchée dans certains copolymères sur tronc constitué par une macromolécule linéaire, on greffe des chaînes plus ou moins longues, les sites de ramification étant plus ou moins espacés

- **Polymère à cycle dans la chaîne:**

Dans certains cas, le squelette des macromolécules est constitué de succession du cycle juxtaposés (structure en échelle)

Ce types de compromis est fréquent dans le domaine des polymères thermostables.

I.3.MOULAGE DES THERMOPLASTIQUES :

I.3.1 Principe:

Le moulage permet de fabriquer un objet immédiatement utilisable, l'organe central de la machine est le moule contenant l'empreinte en creux de la pièce à réaliser . la machine doit permettre de remplir, cette forme avec la matière plastique choisie par l'utilisateur.

La matière ne peut remplir, l'empreinte que sous forme fondue. Pour y parvenir, la matière doit être chauffée à une température supérieure au point de transition vitreuse ou au point de fusion.

Sous cette forme, la matière peut être contrainte de remplir le moule par plusieurs techniques au procédés dont le moulage par injection qui est le sujet de notre étude.

a- Moulage par injection:

Le procédé de moulage par injection permet de produire à grande cadence, avec une grande régularité, et de façon automatique, des pièces de formes complexes, dont la masse varie de l'ordre du gramme jusqu'à plusieurs kilogrammes. On injecte selon des techniques présentant de grandes similitudes, des polymères thermoplastiques, des polymères thermodurcissables, et des élastomères. Les différences principales concernent les températures : le polymère thermoplastique « chaud » (entre 200 et 300 °C le plus souvent) est injecté dans un moule « froid » (entre 20 et 80 °C), tandis que les thermodurcissables et les élasto-mères « froids » (20 à 80 °C) sont injectés dans un moule « chaud » (environ 200 °C), qui va activer la réaction de polymérisation ou de vulcanisation.[23]

La machine d'injection est capable de faire entrer, sous forte pression, la matière fondue dans l'empreinte. Un tel matériel possède:

- Un dispositif pour faire "fondre" la matière.
- Un système de piston pour l'introduire dans le moule (sous pression).
- Un système de refroidissement du moule pour "solidifier" la matière et permettre le démoulage de l'objet.

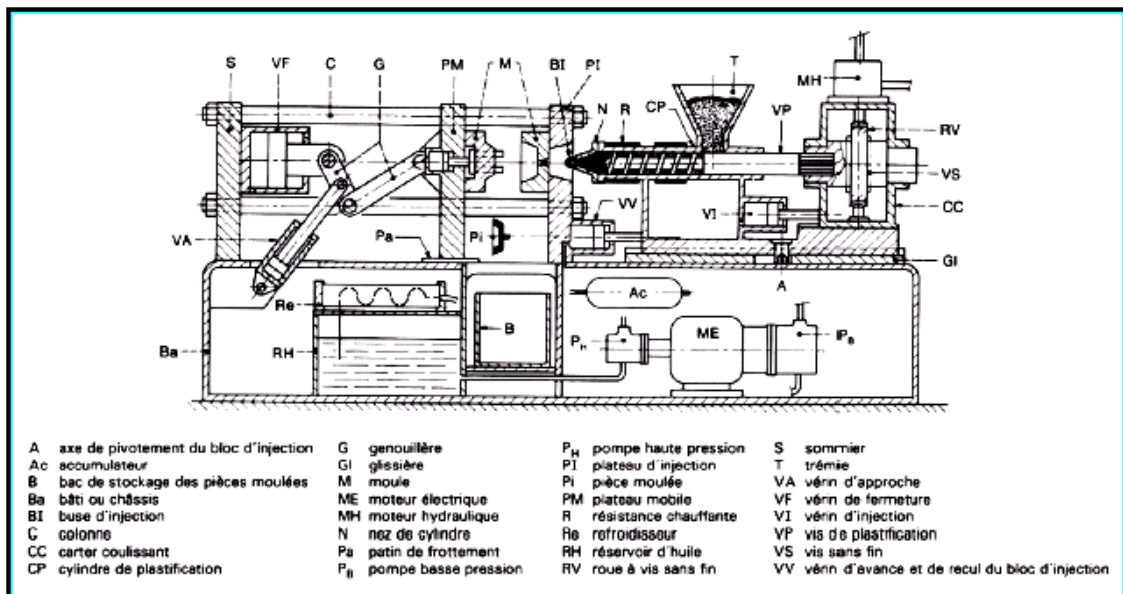


Fig.I.1. Presse à injecter les thermoplastiques[24]

La figure(I.1) présente le principe général et les principaux éléments d'une presse à injection.

Les différences entre ces machines sont fonction des choix des fonctions principales:

- le principe de plastification,
- le dispositif d'injection,
- le fonctionnement de la fermeture du moule.

- **Plastification et injection:**

Un dispositif remplit les deux fonctions de plastification et d'injection en un seul mécanisme. il s'agit du système vis-piston.

La vis tourne et plastifie la matière comme dans une extrudeuse Figure (I.1). Les granules sont pris au niveau de la trémie, chauffés, fondus, et homogénéisés. La matière est acheminée vers la partie avant le dispositif pour stoker la quantité de matière nécessaire à la fabrication d'une pièce.

Le dispositif Vis-Piston peut reculer dans le fourreau de la machine. Quand la quantité voulue de matière est plastifiée, la vis arrête de tourner et de reculer.

Pour injecter, un vérin hydraulique pousse la vis, celle-ci plaque le clapet sur son siège. La matière ne peut plus refluer vers l'arrière. L'ensemble injecte sous pression la matière dans le moule.

- **Compactage :**

L'empreinte étant remplie, la matière est alors compactée à pression constante, ce qui a pour effet de compenser le retrait volumique qui commence à se manifester dans le moule.

- **Refroidissement :**

Le seuil d'injection étant figé, la pression de maintien n'est plus transmise, ainsi le retrait n'est plus compensé. La matière se rétracte dans le moule et la pièce se déforme après l'éjection.

- **Cycle de moulage :**

La figure (I.2) représente les six phases essentielles du procédé de moulage constituant le cycle de fabrication.

- **Démoulage :** le moule occupe la position de fin d'ouverture qui assure à la pièce l'espace libre pour être éjectée.

- **Fermeture du moule** : ce mouvement commence avec une vitesse lente puis rapide, et se termine de nouveau lentement pour éviter le choc entre les plans de joint et pour donner le temps d'agir au système de sécurité.
- **Verrouillage** : si le système de sécurité n'a décelé aucune anomalie, la commande peut appliquer la force de fermeture. Selon le système de fermeture, la force est créée par le produit de la surface et de la pression, ou par la mise en contrainte des colonnes.
- **Injection** : c'est la phase de remplissage des l'empreintes avec la matière plastifiée et le maintien sous pression pour compenser les retraits.
- **Refroidissement** : il a lieu le temps nécessaire pour que le plastique se solidifie dans le moule. Dans la pratique, on plastifie souvent, pendant ce temps, la matière pour le prochain cycle. De plus, si nécessaire au cours de ce temps, on peut séparer la buse du cylindre d'injection et le moule.
- **Ouverture du moule** : le plastique étant suffisamment refroidi pour pouvoir être démoulé, la partie mobile du moule s'écarte de la partie fixe.[24]

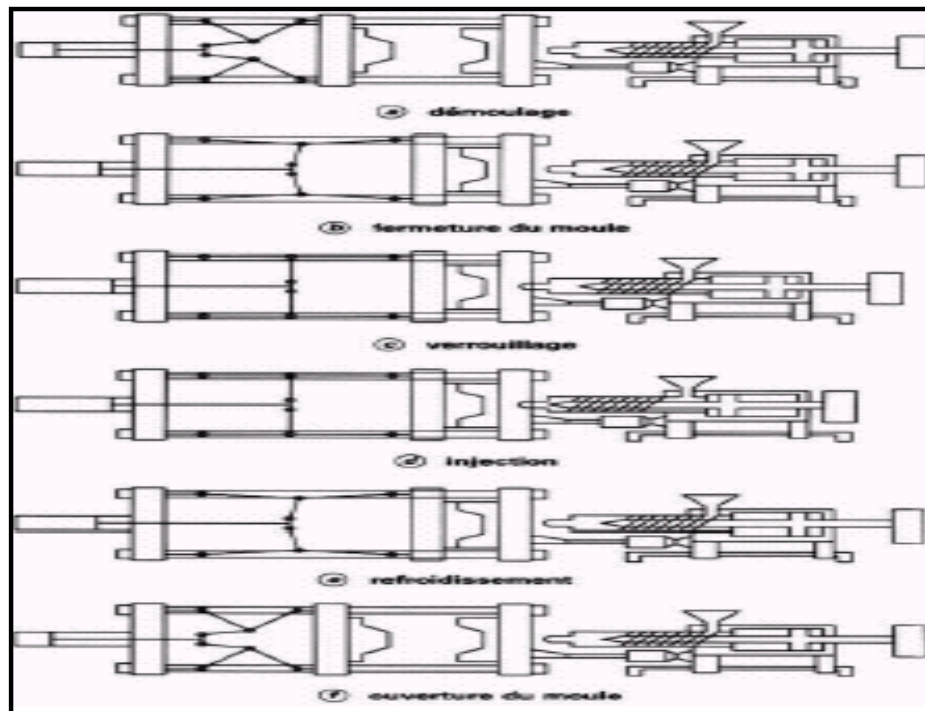


Fig.I.2.Cycle de moulage [24]

Ainsi le cycle de moulage par injection est souvent décomposé en trois phases dans le temps (figure (I.3)).

- Phase de remplissage
- Phase de compactage
- Phase de refroidissement

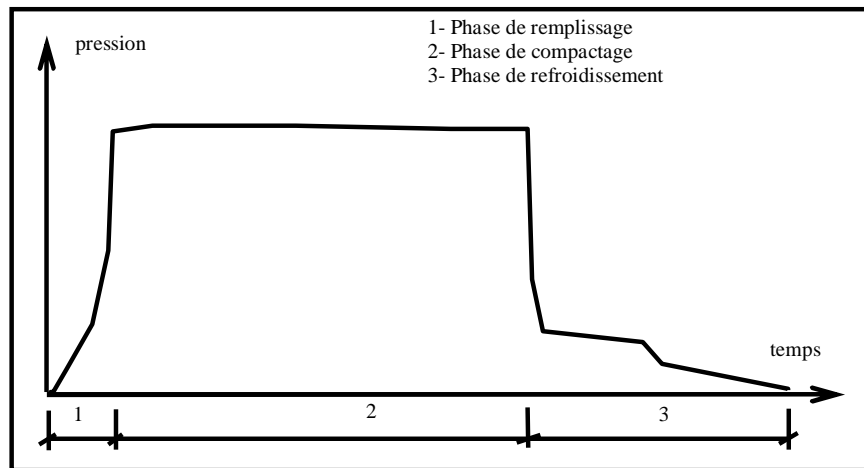


Fig.I.3. Cycle de moulage

I.3 2.Description de la phase d'injection :

I.3.2.1.Généralités :

C'est phase la plus complexe du procédé : celle de l'injection. Pour pouvoir injecter le plastique dans le moule, nous devons avoir : un moule fermé avec une force de fermeture connue, une unité d'injection permettant d'injecter le plastique dans le moule sous une pression élevée, une buse d'injection pour relier le cylindre d'injection au moule, un canal (ou des canaux) d'alimentation et un (ou des) seuil(s) d'injection par lesquels le polymère passe pour remplir la (ou les) cavité(s) du moule, selon que le moule a une ou plusieurs empreintes. Comme cette courte description le montre, la phase d'injection se réalise dans un cadre bien défini, qu'il faut connaître dans le moindre détail car la qualité de la pièce en dépend directement.

Or, des pièces de cette qualité ne peuvent pas être fabriquées si nous ne maîtrisons pas suffisamment en détail la phase d'injection.

Les considérations rhéologiques qui nous intéressent sont celles qui traitent de l'écoulement visqueux dans une section relativement faible de 0,5 à 5 mm d'épaisseur. En effet le plastique fondu refoulé par la vis-piston arrivant dans l'empreinte, via le nez du cylindre, le canal d'alimentation et le seuil d'injection, n'a pour limites que les deux parois du moule. Quand le plastique commence à remplir l'empreinte, juste après avoir passé le seuil d'injection, il forme une petite bulle. La peau extérieure du polymère (de la bulle), en contact avec le moule froid, gèle très rapidement, tandis que l'intérieur reste liquide. Au fur et à mesure que la vis-piston pousse, la matière passe entre les peaux froides et pousse ce qui est déjà présent vers l'avant et vers les parois de la cavité.

La couche gelée est formée par extension de la bulle sur les parois froides de la cavité et, de ce fait, elle n'est pas soumise à des contraintes de cisaillement importantes donc elle a un taux d'orientation moléculaire réduit. Une fois figées, les macromolécules ne peuvent pas s'orienter davantage. La pièce moulée a donc, sur les faces extérieures, un taux d'orientation faible.

Mais regardons maintenant ce qui se passe à l'intérieur du flux de matière. Le plastique chaud s'écoule continuellement, apportant de la matière chaude et cela engendre, par frottement, de la chaleur supplémentaire. Mais, en même temps, le plastique perd de la chaleur par conduction dans le moule.

Initialement, la couche froide est très mince, la chaleur s'évacue rapidement et il en résulte un refroidissement du plastique; l'épaisseur de la couche gelée grandit et ralentit l'évacuation de la chaleur. Au bout d'un certain temps, l'épaisseur de la couche figée sera telle que la quantité de chaleur perdue par conduction sera égale à celle apportée par le frottement entre les différentes couches de viscosité de la matière. L'équilibre thermique est réalisé.

Lors de l'écoulement, le plastique subit deux types de contraintes :

- le premier est la contrainte de cisaillement qui force les molécules à s'orienter elles-mêmes dans la direction générale de l'écoulement ;
- le second est le taux de cisaillement qui est le rapport des vitesses de glissement entre les différentes couches.

Les contraintes de cisaillement varient d'un maximum à l'extérieur jusqu'à zéro au centre de l'écoulement. Le taux de cisaillement est nul à la surface, passe par un maximum à la frontière interne de la couche gelée, et chute à zéro au centre de l'écoulement.

Si l'on stoppe l'écoulement et qu'on laisse le plastique se refroidir très lentement, l'orientation due aux contraintes de cisaillement se relâchera et la pièce aura un très bas niveau résiduel d'orientation. Autrement dit, si l'on refroidit la pièce rapidement sous contraintes, l'orientation résiduelle sera importante. La partie interne de la couche froide est sujette à un niveau de contraintes très important. Quand l'écoulement s'arrête, la matière se fige, bloquant les molécules telles quelles, dont l'orientation est très marquée.

Ce modèle d'orientation permet d'évaluer les niveaux de contraintes résiduelles dans la pièce et d'aborder les paramètres de moulage, c'est-à-dire les grandeurs physiques (vitesse, pression, longueur, température) que l'on impose par des organes de commande dont les presses sont munies lors de leur construction.[22]

I.3.2.2 Mise en œuvre de la phase d'injection

Les considérations précédentes, même sommaires, nous montrent qu'au cours du remplissage du moule il se passe des phénomènes importants pour la qualité de la pièce et trop complexes pour vouloir les résoudre avec des moyens simples. Si nous regardons maintenant la part qu'occupent les équipements de réglage des paramètres sur une presse en termes de coût, nous voyons qu'il faut les rentabiliser au mieux.

Avant d'aborder la description proprement dite de la phase d'injection, il nous semble indispensable de rappeler sa définition de base pour qu'elle nous serve de guide : dans le procédé de transformation des matières plastiques par injection, la **phase d'injection** consiste à établir les paramètres physiques suivants :

- température du moule.
- température de la matière.
- vitesse de propagation de la matière en fonction de la course de la vis-piston.
- pression sur la matière en fonction du temps.

Les valeurs de ces paramètres doivent être établies pour que la matière, lors du remplissage du moule, ait un comportement optimal en fonction de la forme de l'empreinte, garantissant ainsi la qualité de la pièce.

La première opération consiste à mettre le moule à la bonne température. Pour des moules qui fabriquent des pièces techniques, cette température varie entre 70 et 120 °C (exemple : polyamide, polycarbonate, ABS, polyoxyméthylène).

Pour des articles destinés à l'emballage ou à des tâches ménagères, ni la stabilité dimensionnelle, ni le comportement à la fatigue ne présentent des exigences très strictes. On cherche un prix de fabrication faible, donc des cadences élevées; la température de ces moules peut varier entre 7 et 40 °C.[22]

La température de la matière varie selon sa nature. En règle générale, on retient que les matières amorphes ont une fourchette de réglage plus large que celle des polymères cristallins; les fabricants donnent toujours sur ce plan tous les renseignements.

La phase de remplissage elle-même comporte trois étapes :

- remplissage.
- pressurisation.
- compensation.

Le **remplissage** est la phase dynamique de l'injection. L'huile de la commande hydraulique arrive dans le vérin d'injection et, de ce fait, la vis-piston se déplace vers l'avant. Le clapet de l'embout de la vis se ferme (la bague s'ajuste sur son siège en arrière) et le plastique, sous l'effet du mouvement, se comprime et monte en pression.

Quand la pression arrive à la valeur qui permet de vaincre la résistance de la matière dans le nez du cylindre, le plastique pénètre dans le moule, passe par le canal d'alimentation (carotte) et commence à remplir l'empreinte par son seuil. La vitesse de propagation du plastique dans l'empreinte sera directement liée à la vitesse du déplacement de la vis-piston. Le paramètre principal est donc la vitesse de déplacement de la vis-piston exprimée en mm/s, que l'on obtient à partir du débit d'huile exprimé en cm³/s. Notons que, pendant cette **phase de travail**, la pression de commande aura une consigne de valeur maximale afin de disposer de la force nécessaire pour vaincre les pertes de charge de l'écoulement, au fur et à mesure que le plastique avance dans l'empreinte.

Vers la fin du remplissage du moule, quand les pertes de charge des écoulements du plastique deviennent importantes, approchant de 70 % de la pression disponible, l'injection a atteint sa **phase de pressurisation**. Dans cette phase de travail, la pression hydraulique de commande provoque l'ouverture de la soupape de sûreté qui fait retourner au réservoir une partie du débit hydraulique. Cette perte de débit ralentit la vitesse de déplacement de la vis-piston jusqu'à son arrêt total qui signifie que l'empreinte est remplie.

Le moule étant rempli, la **phase dite de compensation** commence et il se produit alors la commutation.

En fin de remplissage, le plastique occupe le volume total de l'empreinte, mais la matière continue à s'écouler avec un très faible débit associé à la compressibilité du polymère à la température considérée. Le plastique, à ce stade, est à une température élevée. Sa masse volumique croît avec la pression que certains auteurs appellent **pression de bourrage**.

Par conduction, le plastique perd sa chaleur, le refroidissement n'entraîne pas de modification de la masse volumique tant que la pression interne existe, ce qui explique que la pression exercée dans le moule est beaucoup plus élevée que la pression de remplissage.

Il faut, pour cela, qu'une certaine quantité de matière soit maintenue sous pression à l'extrémité du cylindre d'injection, que l'on appelle *matelas*. Quand le plastique, sous l'effet du refroidissement, atteint un état de viscosité tel que la pression de compensation baisse, seule la phase de refroidissement continue jusqu'à ce que l'objet atteigne la température qui permet de le démouler. L'injection est terminée.[23]

Comportement Rhéologique du Polymère

II.1.GENERALITES :

La rhéologie est la science qui étudie la déformation des corps sous l'effet des contraintes appliquées en tenant compte du temps (ou vitesse d'application de contraintes). Plus généralement, elle étudie la relation entre la contrainte et la déformation en fonction du temps dans le matériau.[8]

Les procédés de préparation de produits (solutions, pâtes,.....etc) ou de la mise en forme des pièces (en métallurgie, en **plasturgie**,etc) nécessitent inmanquablement l'étude de l'écoulement de la matière, il est donc nécessaire de connaître le comportement de la matière pour déterminer les forces mises en jeu.

D'une manière générale, la rhéologie suppose que

- Le matériau est continu (pas de vide dans le matériau).
- Chaque point du corps se déplace de façon continue.
- Deux points du corps infiniment voisines avant la déformation le sont encore après la déformation.
- Les propriétés physiques du corps varient d'une façon continue d'un point à un autre.

On peut classer la rhéologie en trois type :

- La rhéologie expérimentale : elle détermine expérimentalement la relation de comportement entre les contraintes et la vitesse de déformation.
- La rhéologie structurale : elle explique le comportement du matériau à partir de sa structure.
- La rhéologie théorique : elle fournit des modèles mathématiques en nombre limité des comportements indépendamment de la structure microscopique.[4]

Les corps gazeux, liquides ou solides se divisent en deux classes :

- **les fluides newtoniens** : ce sont tous les gaz et un grand nombre de liquides; leur équation rhéologique est simple ces corps ne possèdent qu'une caractéristique rhéologique : la viscosité

- **les corps à équation rhéologique compliquée** : ce sont des liquides non newtoniens et les solides.

Dans le cas des polymères, la rhéologie n'étudie donc que les déplacements qui sont grands par rapport à la taille des macromolécules. Les mouvements intramoléculaires et l'enchevêtrement des chaînes sont des mouvements que la rhéologie par nature ne peut pas décrire. En revanche, ces mouvements locaux sont à la base de l'explication du comportement rhéologique des polymères fondus.

La viscosité est un paramètre très important dans l'étude de l'écoulement du polymère, cette dernière qui est d'environ 10^6 à 10^8 fois celle de l'eau, est fonction de certains paramètres qui sont:

- Le poids moléculaire du polymère;
- La température;
- La pression;
- Le taux de cisaillement ;

La viscosité est une mesure de la friction interne d'un liquide. Pour la déterminer, on applique une force mesurable sur le liquide et l'on mesure en même temps la vitesse de déformation, ou vice versa.

Étudions le comportement d'un polymère fluide simple (un fluide newtonien dont la viscosité ne dépend pas de la vitesse de cisaillement) soumis à une contrainte.

Prenons le cas d'un tel liquide contenu entre deux plateaux selon la figure ci dessous. Le plateau inférieur est fixe. Le déplacement du plateau supérieur entraîne une partie du fluide dans son mouvement.

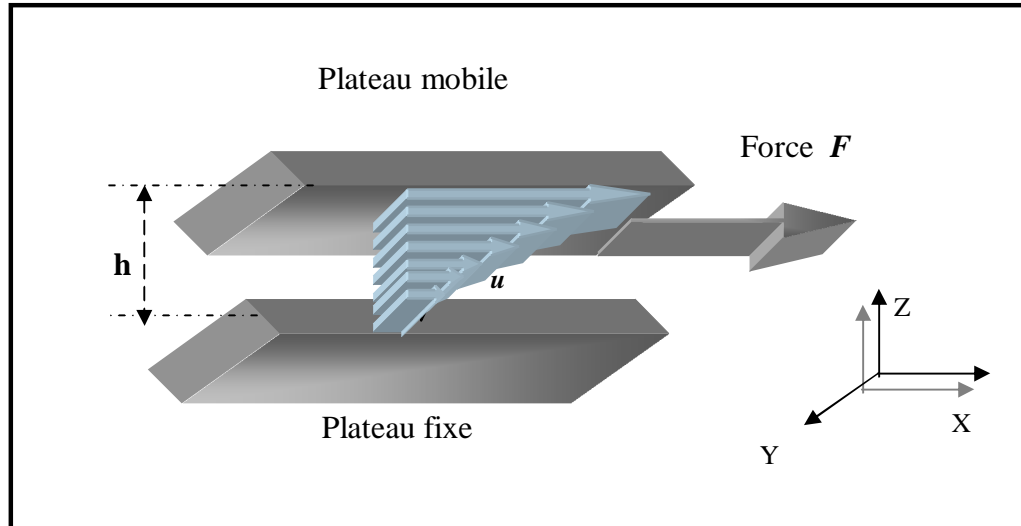


Fig. II.1 Cisaillement simple

Le fluide est contenu entre les deux plateaux. La translation du plateau supérieur à la vitesse u_1 nécessite l'application d'une force F_1 .

Si on augmente (en multipliant par 2) la vitesse du plateau supérieur ($u=u_2$), il est nécessaire d'appliquer une force F_2 qui vaudra le double de la force F_1 .

On constate que la force F nécessaire pour animer le plateau supérieur d'un mouvement de translation n'est pas proportionnelle au déplacement U mais à la vitesse u du plateau supérieur.

Pour le fluide, ce qui distingue les deux cas précédents c'est la vitesse de déformation. Contrairement au cas des solides, la force n'est pas liée à la déformation mais à la vitesse de déformation du matériau. Pour décrire le comportement mécanique du polymère à l'état liquide il est nécessaire d'introduire la notion de vitesse de déformation.[6]

II.1.1 Propriétés rhéologiques des polymères :

Certains liquides n'obéissent pas à la loi de Newton. Il est connu expérimentalement que les polymères fondus ne sont pas newtoniens. Leur viscosité apparente est fonction décroissante du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$; cette propriété est appelée la pseudo-plasticité.

L'écoulement du polymère dans un moule; est généralement en fonction de la section de passage de ce dernier et le refroidissement au contact du paroi de moule froid.

La basse température du moule par rapport au polymère, augmente la viscosité de ce dernier, la matière aura du mal à se couler , on dit alors que le polymère est visqueux.

La vitesse d'écoulement d'un polymère fondu entre deux bords varie (entre le cœur et la paroi), cette variation est due au caractère visqueux des polymères.

La modélisation de l'écoulement du polymère nécessite de trouver des fonctions qui donnent la viscosité en fonction du taux de cisaillement et la température, ces deux derniers sont les paramètres les plus influents.

La figure(II.2) donne des courbes typiques de la variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement et de la température.

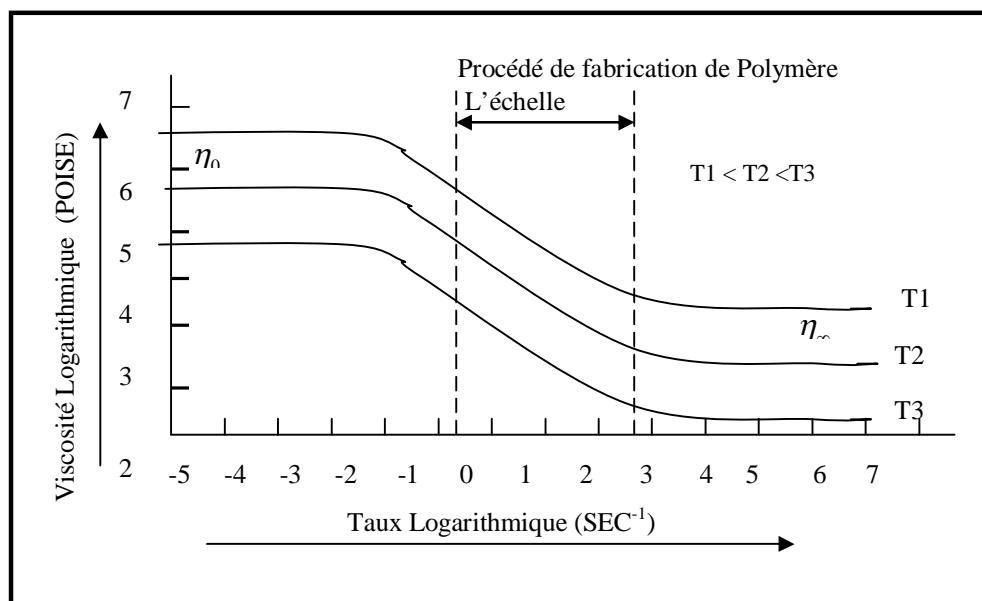


Fig.II.2. Evolution Typique de la viscosité [3]

II.2. LES DIFFERENTS MODELES DE VISCOSITE :

Considérons un liquide visqueux cisailé entre deux plaques parallèles de surface S , distantes d'une épaisseur h ; l'une des plaques est animée par rapport à l'autre de la vitesse u . Cet écoulement est comparable à l'écoulement d'un fluide entre deux parois fixes (Figure II.1).[6]

On distingue Trois types de modèle de viscosité :

- *Modèle Newtonien .*
- *Modèle Pseudo-plastique .*
- *Modèle Pseudo-plastique thermo-dépendant.*

II.2.1. Modèle Newtonien :

La viscosité a été définie par Newton comme le coefficient de proportionnalité entre la contrainte de cisaillement et la vitesse de cisaillement.

Reprenons le cas d'un fluide newtonien contenu entre deux plateaux selon la figure (II.1). le plateau inférieur est fixe. La force F nécessaire pour animer le plateau supérieur d'une vitesse u est proportionnelle à cette vitesse. $F=Ku$

Les composantes du vecteur vitesse sont les suivantes : $\vec{u} \begin{cases} u = \dot{\gamma} \cdot y \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases}$

Cette force rapportée à la surface sur laquelle elle s'exerce est la contrainte de cisaillement $\tau = \frac{F}{S}$ proportionnelle à la vitesse de cisaillement : $\dot{\gamma} = \frac{u}{h}$

$$\tau = \eta \cdot \dot{\gamma}$$

Le coefficient de proportionnalité entre τ et $\dot{\gamma}$ s'appelle la viscosité dynamique η .

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (\text{Loi de Newton})$$

Si, pour une substance newtonienne quelconque, on trace le graphe représentant la contrainte de cisaillement en fonction du gradient de vitesse, on obtient une droite qui passe par l'origine. Ce graphique est un rhéogramme (figure II.3.a).

La viscosité représentée en fonction du gradient de vitesse donne une droite parallèle à l'axe des abscisses (figure II.1.b) [22].

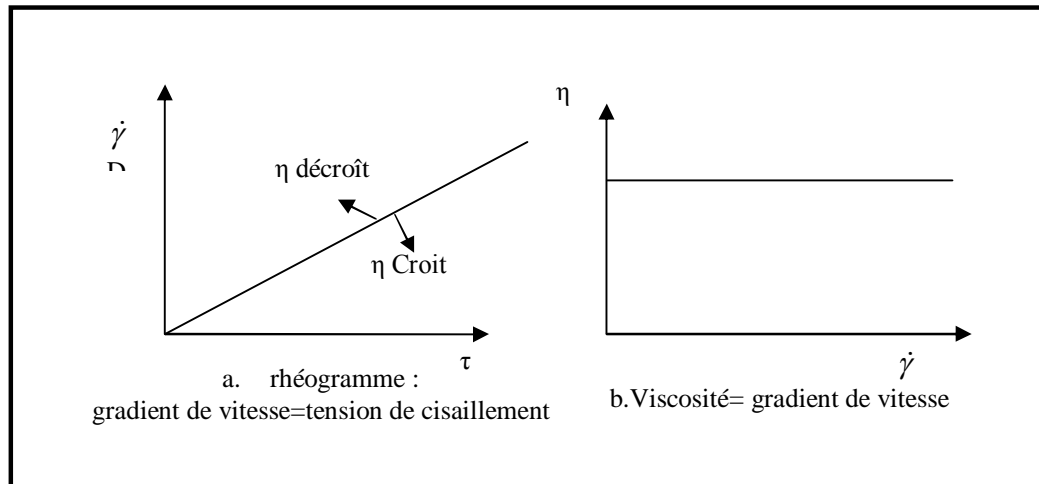


Fig.II.3. Viscosité d'un liquide newtonien

II.2.2. Modèle Pseudo-plastique:

La plupart des polymères n'ont pas un comportement newtonien. Cela signifie que leur viscosité n'est pas indépendante de la vitesse de cisaillement mais décroît en fonction de la vitesse de cisaillement.

La pseudo-plastique est la propriété d'un matériau qui exprime le fait que la viscosité soit une fonction décroissante du taux de cisaillement. [12]

Les modèle rhéologiques proposes sont :

II.2.2.1.Loi de puissance :

Le premier modèle de comportement pour un fluide non gazéifié à été développé par Ostwald et de Waele.

Le modèle est basé sur l'observation d'une plage linéaire de la viscosité en fonction du taux de cisaillement sur un graphique log-log (Fig.II.4).

$$\eta(\dot{\gamma}) = K \left[\frac{II}{2} \right]^{(n-1)/2}$$

En cisaillement pur ($II=2 \cdot \dot{\gamma}^2$) Ce qui conduit au modèle suivant :

$$\eta(\dot{\gamma}) = K \dot{\gamma}^{n-1}$$

K : est la consistance du liquide [N.sec²/m²]

n : indice de pseudo-plasticité.

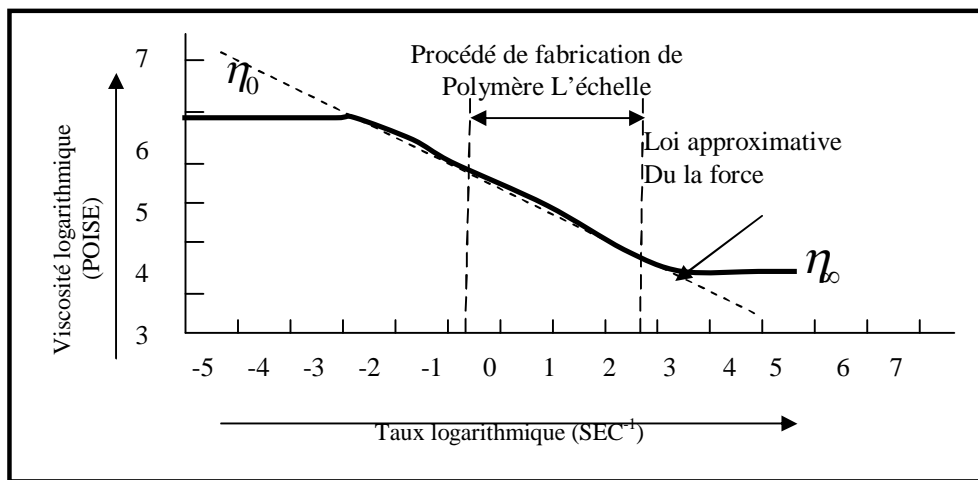


Fig.II.4.Loi de puissance[4]

La relation entre η et $\dot{\gamma}$ est en général représenté en échelles logarithmiques, la loi de puissance se traduisant alors par une droite de pente n-1 (Fig.II.5).

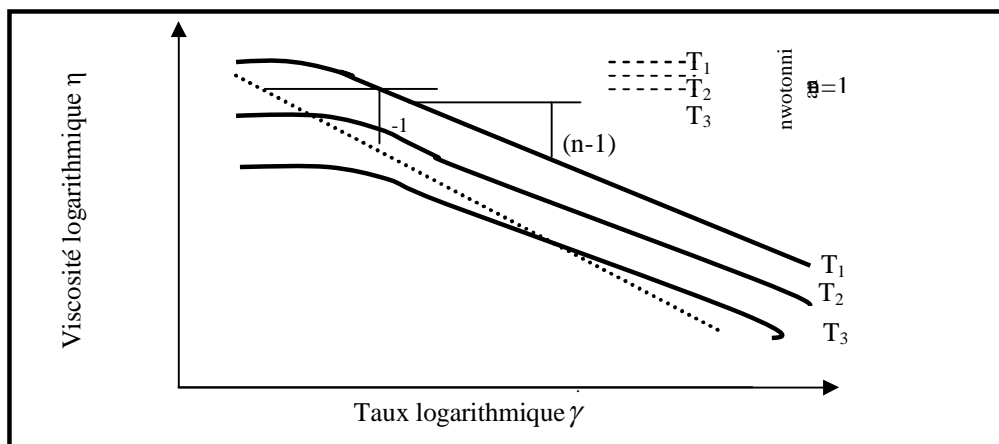


Fig.II.5.Loi de Puissance pour différentes températures[4]

II.2.2.2. Modèle de Carreau :

Le modèle de la loi de puissance s'applique sur une plage limitée de la courbe de viscosité. En réalité à des faibles taux de cisaillement les polymères ont un comportement newtonien, c-a-d que la viscosité est indépendante du taux de cisaillement. Carreau a développé un modèle qui représente complètement la courbe de viscosité et qui prend en charge ce plateau, son modèle s'écrit :

$$\eta = \eta_0 \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}$$

η_0 : viscosité à cisaillement nul.

λ : constante de temps.

n : indice de la loi de puissance.

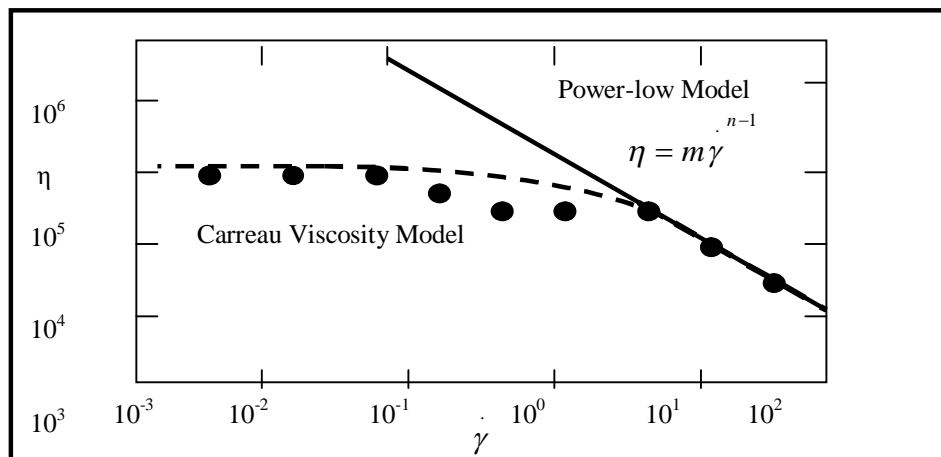


Fig.II.6. Modèle de Carreau [4]

II.2.2.3. Modèle de Ellis :

Le modèle d'Ellis exprime la viscosité en fonction du taux de cisaillement. Son équation de comportement est plus difficile à utiliser que celle de la loi de puissance, mais elle y est supérieure, car elle prédit un plateau Newtonien à faible cisaillement.

$$\frac{\eta_0}{\eta(\tau)} = 1 + \left[\frac{\tau}{\tau_{1/2}} \right]^{(\alpha-1)}$$

η_0 : viscosité à cisaillement nul.

$\tau_{1/2}$: taux de cisaillement à $\eta_0/2$.

$\alpha-1$: pente de $\log[\eta_0/2-1]$ versus $\log(\tau/\tau_{1/2})$

$$\tau = \eta(\dot{\gamma}) \cdot \dot{\gamma}$$

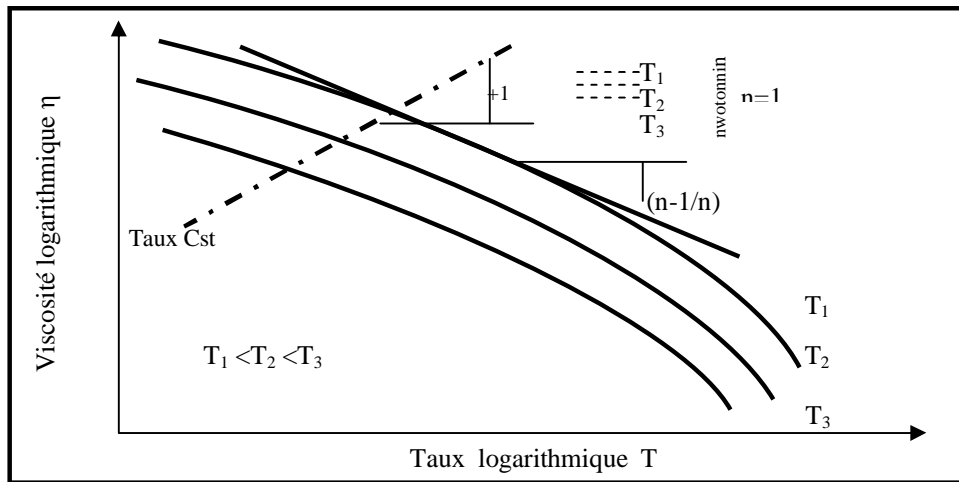


Fig.II.7.Modèle de Ellis

II.2.2.4.Modèle de Cross :

Le modèle de cross est une variante du modèle carreau, il s'écrit :

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{1}{1 + |\lambda \dot{\gamma}|^{1-n}}$$

Sous une autre forme :

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{1}{1 + \left(\eta_0 \cdot \dot{\gamma} / \tau^* \right)^{(1-n)}}$$

τ^* : taux de cisaillement marquant le début de la zone de pseudo-plasticité.

On trouve sur la figure suivante, trois courbes expérimentales de viscosité ainsi que trois courbes calculées à partir du modèle de cross pour une résine de PS.

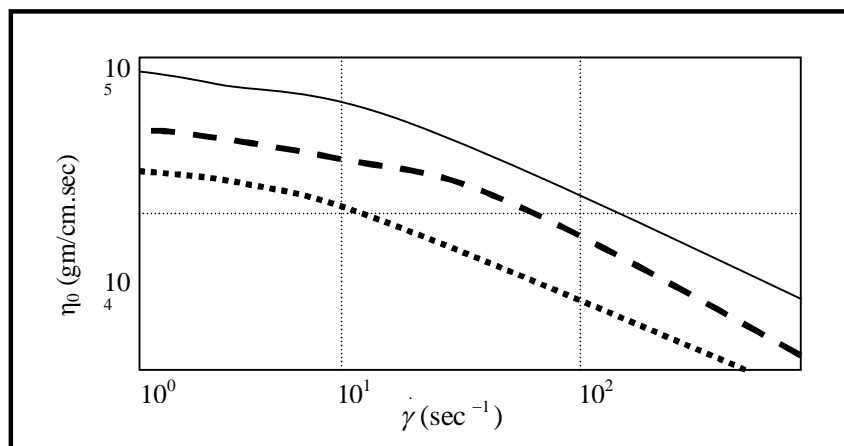


Fig.II.8.Modèle de Cross

II.2.3. Modèle Pseudo-plastique thermo-dépendant:

Le modèle pseudo-plastique thermo-dépendant tient compte de la variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement et de la température.

Une augmentation de température résulte en une diminution de la viscosité du à l'augmentation de mobilité des chaînes de polymères. En règle générale la viscosité des polymères amorphes est plus sensibles aux variations de la température que la viscosité des polymères semi-cristallins.

Afin d'étudier l'effet de la température sur la viscosité, il est intéressant de présenter le graphique de la viscosité en fonction de la contrainte de cisaillement pour différentes valeurs de la température (Fig.II.2, Fig.II.5, Fig.II.7).

Il est donc possible de faire glisser toutes les courbes de viscosité le long d'une ligne à un taux de cisaillement constant pour obtenir une courbe unique (à une température de référence). On peut utiliser le facteur de glissement a_T , est une fonction de la température, il représente l'écart entre une courbe de viscosité à la température T et la courbe de viscosité à la température de référence.[6]

Le facteur de glissement a_T est une fonction de la température et il peut être calculé à partir d'une Loi d'Arrhenius pour les polymères semi-cristallins ou de l'équation WLF (Williams-Landel-Ferry) pour les polymères amorphes à une température entre T_g et T_g+100^0 c.[6]

$$a_T = \frac{\eta_0(T)}{\eta_0(T_{ref})}$$

$$a_T = \exp \left[\frac{E}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}} \right) \right]$$

a_T : facteur de glissement.

E (J/mol) : énergie d'activation.

R= 8.31(J. mol⁻¹. K⁻¹) : constante molaire des gaz parfaits.

T : température.

T_{réf}: température de référence.

II.2.3.1. Equation d'Arrhenius :

$$\eta = \eta_{T_{ref}} \cdot \exp \left[\frac{E}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}} \right) \right]$$

II.2.3.2. Equation de Williams-Landel-Ferry (WLF) : [17]

$$a_T = \frac{\eta_0(T)}{\eta_0(T_{ref})} = \exp \left[\frac{-c_1(T - T_0)}{c_2(T - T_0)} \right]$$

On peut utiliser deux séries de coefficient (c_1 et c_2) en fonction de la température de référence utilisée :

$$T_0 = T_g \quad c_1 = 17.44 \quad c_2 = 51.6$$

Ou

$$T_0 = T_g + 43 \quad c_1 = 8.86 \quad c_2 = 101.6$$

II.2.3.3. Loi de Carreau-Yasuda :

$$\eta_{T_{ref}}(\dot{\gamma}) = \eta_0 \left(1 + \left(\lambda \dot{\gamma} \right)^b \right)^{(m-1)/b}$$

Pour obtenir la viscosité à d'autres températures, nous utilisons le principe de superposition temps-température.

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = a_T \eta_{T_{ref}}(\dot{\gamma} a_T)$$

T: la température de la matière

II.2.3.4. Loi d'Andrade :

$$\eta = \eta_0 e^{\frac{E}{RT}}$$

T : température

E : énergie d'activation.

R : constante des gaz parfaits.

η_0 : constante.

II.2.3.5. Loi de puissance :

Pour exprimer cette propriété on considère que le consistence k du polymère dépend de la température suivant la fonction suivante:

$$k = A \exp(CT)$$

La viscosité est donnée par :

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = A \exp(CT) |\dot{\gamma}|^B \quad (\text{II.2})$$

A, B et C sont des constantes du matériau.

T : la température de la matière.

Une autre forme en tangente hyperbolique :

$$\eta = \eta_0(T) \exp \left[\alpha(T) \operatorname{th} \left[\beta(T) \operatorname{Ln} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} \right) \right] \right]$$

$$\operatorname{Ln} \eta = \operatorname{Ln} \eta_0 + \alpha(T) \operatorname{th} \left[\beta(T) \operatorname{Ln} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} \right) \right]$$

Modélisation du Remplissage

III.1. INTRODUCTION :

La modélisation de l'injection des polymères thermoplastique au niveau des trois phases est un axe de recherche récent par rapport aux autres procédés de mise en forme des métaux.

De part leurs difficultés intrinsèques, les travaux scientifiques sur les phases de remplissage ont longtemps gardés un caractère de pionnier.

Plusieurs schémas de modélisation des phases de remplissage ont initialement été développés, les premiers travaux théoriques ont été effectués il y a une trentaine d'années, ils sont dans des géométries simples.

Des auteurs supposent généralement que le polymère a un comportement de type, « loi puissance » et ils résolvent à chaque pas de temps et de façon couplée une équation d'équilibre dynamique stationnaire et une équation de bilan thermique instationnaire comme WINTER, GUTFINGER et BROYER, WHITE, KAMAL. [17]

Devant les dernières années, la modélisation de la phase de remplissage contenir d'une façon bien organisée et bien perfectionnée.

En 2000, RONG-YOU CHANG et WEN-HSIEN YONG (National Tsing-Hua University, HSIN-chu TAIWAN 30043-ROC). Ont étudié la phase de remplissage d'une pièce avec la méthode de taux de présence et résolution numérique par la méthode du volume fini [15].

En 2001, l'étude faite par DAVID Garcia, GUY Gourbebaisse et MICEL Jourlin [16]. Ont étudié la phase de remplissage d'une plaque suivant les équations de conservations.

Une étude faite par le professeur AGASSANT [23], c'est une étude très approfondie pour la modélisation de la phase de remplissage, étude d'un cas de moule de disque injection par centre, par la méthode de mise à plat.

Dans notre pays au niveau de la recherche scientifique, cette recherche est nouvelle elle n'est pas encore répandue, et il ya quelques études concernant cette modélisation qui ont été faite par *DJOUDI* tarek et *DJEMIA* hocine [12] juin 2001, et dans ce travail, il a étudié les paramètres thermiques et mécaniques par la méthode numérique (Méthode des Différences finis ,Explicite).

En 2002, une étude faite par *DJELLAB* mounir et *HELLEL* yazid [18]. Il ont fait une étude sur pièce par la méthode numérique (Méthode des Différences Finis, Méthode de Résolution Explicite).

III.1.1. Spécificités de la phase de remplissage :

La phase de remplissage de la pièce est la phase dynamique de transfert de matière dans le moule.

Il y a progression du front de matière, dont il faut déterminer à chaque instant la position.

Le temps de remplissage est court, de l'ordre de quelques secondes, et donc les débits d'injection sont élevés, de l'ordre de 100 à 1 000 cm³/s. En combinaison avec la forte viscosité des polymères, la dissipation d'énergie est donc importante, et la température de la matière peut augmenter localement malgré le refroidissement du moule. De plus les pressions sont importantes, de l'ordre de plusieurs dizaines de mégapascals.

Les polymères étant peu conducteurs de la chaleur, la température à cœur est proche de la température d'injection, tandis qu'à la paroi elle est proche de la température du moule. La viscosité des polymères dépendant fortement de la température, il faut évaluer avec précision les gradients thermiques, et coupler étroitement les calculs mécaniques et thermiques.

III.1.2.Principales hypothèses :

Le polymère est supposé avoir un comportement purement visqueux. En effet, on peut négliger la composante élastique du comportement si les déformations de cisaillement sont prépondérantes. C'est le cas de nombreuses pièces dont l'épaisseur est assez régulière. Cependant, il existe toujours des régions, souvent localisées, comme les seuils, où les déformations élongationnelles sont non négligeables, et où l'approximation purement visqueuse n'est plus licite.

Les données de viscosité sont disponibles pour différents taux de cisaillement et différentes températures, mais il faut les interpoler, et surtout les extrapoler en dehors du domaine de mesure (forts taux de cisaillement). Le plus simple est d'utiliser un lissage en «loi puissance», mais il est préférable d'employer une loi permettant de rendre compte d'un plateau newtonien à bas taux de cisaillement, comme la loi de Carreau ou de Carreau-Yasuda.

La viscosité est supposée indépendante de la pression, mais ceci peut être contestable pour les grandes pièces ou pour des polymères très visqueux.

Les forces de masse et d'inertie sont le plus souvent négligées. Il est à noter que ces dernières pourront jouer un rôle dans certaines situations où l'accélération est importante, par exemple dans un seuil de petite section.

On peut supposer le polymère incompressible. Cela est réaliste dans de nombreuses circonstances, car les niveaux de pression atteints pendant le remplissage ne sont pas trop élevés. Cela devient moins vrai vers la fin de cette phase et à la transition avec la phase de compactage. De plus, on néglige également la variation de masse volumique avec la température.

La conduction de chaleur dans le sens de l'écoulement est négligée devant la convection, ce qui est justifié par la faible conductivité thermique des polymères.

En première approximation, nous considérerons que la conductivité thermique du polymère est indépendante de la pression et de la température.

III.2. MODELISATION DE LA PHASE DU REMPLISSAGE : [18]

III.2.1. Plastification :

La modélisation de la phase de remplissage doit donner l'état de la matière au cours et à la fin du remplissage.

- **Paramètres d'entrée de la modélisation:**

- La géométrie
- Conditions d'injection (température d'injection, le temps de remplissage ou le débit).
- Caractéristiques de la matière.
- Conditions de refroidissement.

- **Paramètres de sortie de la modélisation:**

- Pression.
- Vitesse.
- Taux de cisaillement.
- Position du front à un instant donné.
- Température.

III.2.2 Formulations Mathématiques :

Le modèle simulant le remplissage s'appuie sur trois principes de la physique des milieux continus :

- La conservation de la masse qui se traduit par l'équation de continuité:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}[\rho \cdot v] = 0$$

- La conservation de la quantité de mouvement qui se traduit par l'équation de l'équilibre dynamique:

$$\text{div}[\sigma] + \rho(\vec{F} - \vec{g}) = 0$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \sum_{i,j} \dot{\epsilon}_{ij}^2}$$

σ (Pa) : tenseur des contraintes.

u (m/s) : vecteur vitesse.

η (Pa.s) : viscosité dynamique.

T (°C) : température.

ρ (kg/m³) : masse volumique.

\vec{F} : force d'inertie.

\vec{g} : force de masse.

$\dot{\varepsilon}_{ij}$ (s^{-1}) : composantes du tenseur des vitesses de déformation.

$\dot{\gamma}$ (s^{-1}) : vitesse de déformation généralisée .

- La conservation de l'énergie qui se traduit par l'équation de la chaleur:

$$\rho \cdot c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \text{grad} T \right) = K \Delta T + \dot{W}$$

$$\dot{W} = \sum \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$$

c ($J \cdot ^\circ C^{-1} \cdot kg^{-1}$) : capacité calorifique.

t (s) : temps.

K ($W \cdot m^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$) : conductivité thermique.

\dot{W} ($W \cdot m^{-3}$) : puissance dissipée par unité de volume.

A ces équations de conservation peut s'ajouter l'équation du comportement du fluide qui s'écrit :

$$\sigma = -pI + 2\eta(T, \dot{\gamma})\dot{\varepsilon}$$

p (Pa) : pression hydrostatique.

I : tenseur identité.

La modélisation du remplissage consiste à résoudre numériquement les quatre équations précédentes en tenant compte des hypothèses indiquées auparavant. Ainsi cette résolution doit comporter deux parties de calcul :

- **La première partie** : Calcul Mécanique

Cette partie consiste à résoudre les équations de continuité et l'équation de l'équilibre dynamique pour les différents modèles de viscosité (Newtonien, Pseudo-Plastique et Pseudo-Plastique Thermo-Dépendant). Pour déterminer les paramètres mécaniques en tout point de la pièce et à chaque instant (Pression, Vitesse, Taux de cisaillement ...).

- **La deuxième partie** : Calcul Thermique

Dans cette partie, on doit étudier l'échange thermique entre la matière qui coule et le moule froid et pour ce la on utilise plusieurs méthodes numériques du calcul pour résoudre l'équation de la chaleur (La Méthode des Différences Finies et La Méthode des Volumes Finis). Avec les différents types de schémas (Explicite, Implicite, Crank-Nicholson).

Chaque méthode de calcul numérique donne la température à chaque instant au cours du l'écoulement de la matière suivant l'équation de la conservation de l'énergie .

La modélisation de remplissage se fait avec le couplage des deux parties autrement dit les calculs Mécaniques et les calculs Thermiques sont couplés par le biais de la dépendance de la viscosité avec la température.

La méthode utilisée dans cette étude est la méthode de mise à plat. La pièce considérée étant décomposée en éléments de géométrie simple (plaque, secteur et canal) puis ils seraient assemblés suivant un réseau décrivant l'écoulement dans le moule.

Ainsi nous sommes amenés à modéliser le remplissage dans les différents éléments simples.

III.3. MODELISATION DE L'ÉCOULEMENT DANS UN MOULE PLAQUE : [18]

Cette situation d'écoulement est fréquemment rencontrée lorsque l'on injecte en moule nous allons d'abord considérer un écoulement en condition isotherme et non isotherme. Et pour cela, on va étudier les trois modèles de viscosité.

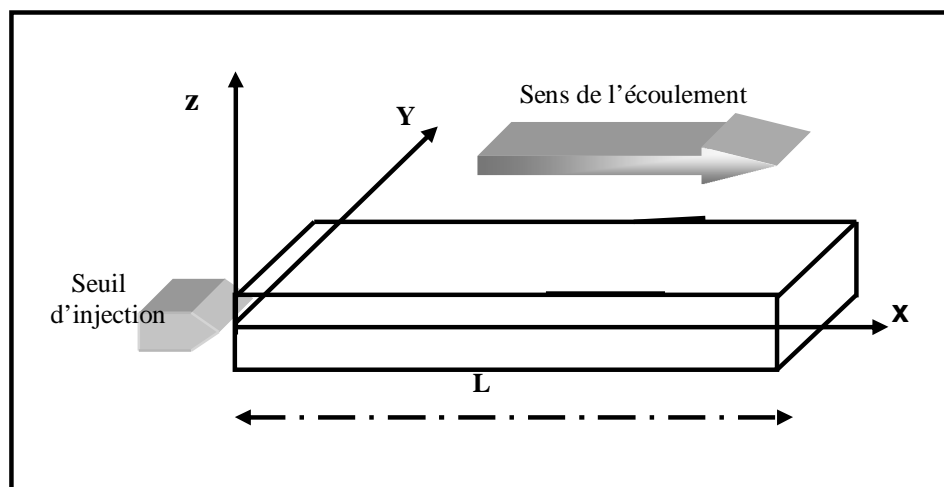


Fig.III.2. Schéma du moule en forme de plaque

Au temps $t=0$, nous supposons que le polymère entre à débit constant dans le moule.

En dehors du voisinage du point d'injection, on pourra supposer que l'écoulement est unidirectionnel (Figure.III.2) .

$$U = \begin{cases} u(x, y, z); \\ v = 0; \\ w = 0; \end{cases}$$

III.3.1.MODELE NEWTONIEN :

Dans ce cas η : constant.

III.3.1.1.Le champ de vitesse[11] :

III.3.1.2.Tenseur de vitesse de déformation :

$$[\dot{\varepsilon}] = \frac{1}{2} \times (\text{grad}\vec{U} + \text{grad}'\vec{U})$$

$[\text{grad}\vec{U}]$: le gradient de \vec{U} . $[\text{grad}'\vec{U}]$: le gradient transposé de \vec{U} .

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Puisque $v=0$ et $w=0$

$$[\dot{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & \frac{1}{2} \times \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \times \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\text{Trace}[\dot{\varepsilon}] = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \text{ Ce qui nous donne } u = A(z) ;$$

III.3.1.3. Le déviateur de contrainte :

$$[S] = 2 \eta [\varepsilon] ;$$

$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ \eta \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III.3.1.4. Le tenseur de contrainte :

$$[\sigma] = -P[I] + [S]$$

P : pression hydrostatique .

[I] :matrice identité.

Si nous adoptons une loi de comportement newtonienne, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} -P & 0 & \eta \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} \\ 0 & -P & 0 \\ \eta \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} & 0 & -P \end{pmatrix}$$

Les équations de l'équilibre dynamique nous conduisent à :

$$\vec{f} + div[\sigma] = 0 .$$

f : forces volumiques.(négligeables devant les forces de viscosité)

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \times \frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2} = 0; & \text{(III.5)} \\ -\frac{\partial P}{\partial y} = 0; & \text{(III.6)} \\ -\frac{\partial P}{\partial z} = 0; & \text{(III.7)} \end{cases}$$

L'équation (III.6), (III.7) montre que la pression ne dépendant que de x

L'équation (III.5) donne :

$$\frac{1}{\eta} \times \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 A(z)}{\partial^2 z} = C \quad (\text{III.8})$$

C : est une constante

En remarquant que les deux membres de l'équation (III.8) ne peuvent être égaux l'un à l'autre que s'ils sont indépendants de x et de z et égaux à une constante C, on peut déduire de (III.8) la fonction A(z)

IV.3.1.5. Calcul du champ des vitesses dans le moule :

Pour déterminer le champ du vitesse dans le moule on intègre l'équation (III.8) :

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\eta} \times \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) z + c_1$$

le cisaillement est maximale au milieu de la plaque

$$z=0 \Rightarrow \dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow c_1=0.$$

En intégrant encore par rapport à (z) on trouve

$$u(z) = \frac{1}{2\eta} \times \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) z^2 + c_2; \quad (\text{III.9})$$

Il est a note que pour cet écoulement simple le gradient de pression, $\frac{\partial P}{\partial x}$ est traité en tant que constante par rapport à z. Le constante c_2 doivent être déterminée à partir des conditions de frontière. Si le fluide visqueux s'écoule entre deux plaques fixes ;la vitesse au contact de plaque est nulle à cause de la condition de non glissement ; donc $u=0$ pour $z = \pm h$.

$$c_2 = -\frac{C \times h^2}{2}$$

Ainsi, la distribution de vitesse devient :

$$u(z) = \frac{C}{2} \times (z^2 - h^2) \quad (\text{III.10})$$

Nous supposons que le débit est connu et constant, tout au long du cycle d'injection (en réalité, sur les presses à injecter modernes, on peut faire varier de façon discrète le débit pendant le remplissage, afin, en particulier, de conserver une vitesse du front de matière constante, quelle que soit la section de passage rencontrée).

- Le débit est connu et constant

$$Q = \int_{-h}^h u(z) \times w \times dz \quad \text{ou} \quad Q = \frac{-2 \times C \times h^3 \times w}{3} \quad (\text{III.11})$$

En écrivant l'expression du débit Q, qui est une donnée dans la phase de remplissage, et que l'on supposera constant, on peut calculer la valeur de C :

$$C = -\frac{3 \times Q}{2 \times h^3 \times w}$$

- Le champ des vitesses sera :

$$u(z) = \frac{3Q}{4hw} \times \left(1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right)$$

La vitesse moyenne :
$$u_m = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{w \times 2h}$$

- L'évolution de la pression dans le moule:

Le premier membre de l'équation (III.6) conduit à :

$$P(x) = \frac{3 \times Q \times \eta \times (L - x)}{2 \times h^3 \times w}$$

En tenant compte de la condition aux limites , la pression est nulle au front de la matière correspondant à $x=L$, ou L est le longueur du front de matière à l'instant t.

$$P(L) = 0 ;$$

La pression d'injection correspond à $x = 0$:

$$P_{inj} = \frac{3 \times Q \times \eta \times L}{2 \times h^3 \times w} \quad (\text{III.12})$$

- Le temps du passage du front en un point :

A une distance x du seuil correspond un volume V_t de matière présente dans le moule; le temps d'arrivé de front à cette position s'écrit :

$$t = \frac{V_t}{Q} = \frac{2.h.x.w}{Q}$$

avec :

$$V_t = 2.h.x.w$$

Le temps de remplissage s'écrit en particulier

$$t_r = \frac{2 \times h \times L \times w}{Q}$$

III.3.2.MODELE PSEUDO-PLASTIQUE :

Dans ce cas $\eta = k|\dot{\gamma}|^{m-1}$

On effectue le même type d'hypothèse cinématique que dans le cas Newtonien:

III.3.2.1.Le tenseur des contraintes

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} -P & 0 & k|\dot{\gamma}|^{m-1} \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} \\ 0 & -P & 0 \\ k|\dot{\gamma}|^{m-1} \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} & 0 & -P \end{pmatrix}$$

Avec:

Le taux de cisaillement généralisé est alors définit par :

$$\dot{\gamma} = \frac{dA}{dz}$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \times \sum_{i,j} \dot{\epsilon}_{i,j}^2}$$

L'équation (III.5) devient comme suite :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + k \times \frac{d}{dz} \left(\frac{dA(z)}{dz} \right)^m = 0$$

$$\frac{1}{k} \frac{dP}{dx} = \frac{d}{dz} \left(\frac{dA}{dz} \right)^m = C \tag{III.13}$$

III.3.2.2. Calcul du champs de vitesse dans le moule :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^m = C \times z + c_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (C \times z + c_1)^{\frac{1}{m}}$$

Les conditions aux limites $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$; lorsque $z = 0$ le cisaillement est maximale au milieu de la plaque => $c_1 = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (C \times z)^{\frac{1}{m}}$$

$$u(z) = \frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times z^{\frac{1+m}{m}} + c_2;$$

$$c_2 = -\frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times h^{\frac{1+m}{m}};$$

$$u(z) = -\frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times \left(1 - \left(\frac{|z|}{h} \right)^{\frac{1+m}{m}} \right) \times h^{\frac{1+m}{m}} \tag{III.14}$$

Le débit est calcule par la formule :

$$Q = 2 \times \int_0^h u(z) \times w \times dz; \tag{III.15}$$

$$Q = 2 \times \int_0^h -\frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times \left(1 - \left(\frac{|z|}{h} \right)^{\frac{1+m}{m}} \right) \times h^{\frac{1+m}{m}} \times w \times dz;$$

$$Q = 2 \times \int_0^h -\frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times \left(h^{\frac{1+m}{m}} - (|z|)^{\frac{1+m}{m}} \right) \times w \times dz$$

$$Q = -2 \times \frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times \left(h^{\frac{1+m}{m}} \times z - \frac{1}{\frac{1+m}{m} + 1} (|z|)^{\frac{1+m}{m} + 1} \right) \times w \Big|_0^h$$

$$Q = -2 \times \frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times \left(h^{\frac{1+m}{m}} \times h - \frac{m}{1+2m} (h)^{\frac{1+m}{m} + 1} \right) \times w$$

$$Q = -2 \times \frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times \left(h^{\frac{1+2m}{m}} - \frac{m}{1+2m} (h)^{\frac{1+m}{m} + 1} \right) \times w$$

$$Q = -2 \times \frac{m}{1+m} \times c^{\frac{1}{m}} \times \left(1 - \frac{m}{1+2m} \right) \times h^{\frac{1+2m}{m}} \times w$$

$$Q = -2 \times \frac{m}{1+m} \times c_m^{\frac{1}{m}} \times \left(\frac{m+1}{1+2m} \right) \times h^{\frac{1+2m}{m}} \times w$$

La forme générale de débit volumique s'écrit par :

$$Q = -2 \times \frac{m}{1+2m} \times c_m^{\frac{1}{m}} \times h^{\frac{1+2m}{m}} \times w \quad (\text{III.16})$$

La vitesse moyenne :

$$u_m = \frac{Q}{h \times w} ;$$

$$u_m = -2 \times \frac{m}{1+2m} \times c_m^{\frac{1}{m}} \times h^{\frac{1+m}{m}} ; \quad (\text{III.17})$$

On tenant compte que le débit est constant, L'expression du champ des vitesses s'écrit :

$$u(z) = \frac{2m+1}{1+m} \times u_m \times \left(1 - \left(\frac{|z|}{h} \right)^{\frac{1+m}{m}} \right) \times h^{\frac{1+m}{m}} \quad (\text{III.18})$$

III.3.2.3. Calcul de l'évolution de la pression dans le moule :

L'intégration du premier membre de l'équation (III.13) conduit dans ce cas à l'expression suivante de la pression dans le moule:

$$P(x) = C \times k \times (L - x)$$

avec

$$C = \sqrt[m]{\frac{(2m+1) \times Q}{2m \times h^{\frac{1+2m}{m}} \times w}}$$

L'expression de pression devient :

$$P(x) = \sqrt[m]{\frac{(2m+1) \times Q}{2m \times h^{\frac{1+2m}{m}} \times w}} \times k \times (L - x) \quad (\text{III.19})$$

$$P_{inj} = \sqrt[m]{\frac{(2m+1) \times Q}{2m \times h^{\frac{1+2m}{m}} \times w}} \times k \times L \quad (\text{III.20})$$

III.3.3. MODELE PSEUDO-PLASTIQUE THERMO-DEPENDANT:

Le modèle pseudo-plastique thermo-dépendant tient compte de la variation de la viscosité en fonction de la température ainsi que du taux de cisaillement

Pour exprimer cette dépendance on considère que la consistance k dépend de la température:

$$\eta(\dot{\gamma}) = k(T) |\dot{\gamma}|^{m-1} \quad (\text{III.21})$$

La consistance du liquide k peut être donnée par différentes méthodes. $k = k(T)$

III.3.3.1 Le tenseur des contraintes

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} -P & 0 & k(T) |\dot{\gamma}|^{m-1} \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} \\ 0 & -P & 0 \\ k(T) |\dot{\gamma}|^{m-1} \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} & 0 & -P \end{pmatrix}$$

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} -P & 0 & k(T) \left| \frac{\partial A(z)}{\partial z} \right|^{m-1} \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} \\ 0 & -P & 0 \\ k(T) \left| \frac{\partial A(z)}{\partial z} \right|^{m-1} \times \frac{\partial A(z)}{\partial z} & 0 & -P \end{pmatrix}$$

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} -P & 0 & k(T) \times \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right)^m \\ 0 & -P & 0 \\ k(T) \times \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right)^m & 0 & -P \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} (k(T) \times \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right)^m) = 0; \end{cases} \quad \text{(III.22)}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial y} = 0; \end{cases} \quad \text{(III.23)}$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{(III.24)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} (k(T) \times \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right)^m) = C;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k(T) \times \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right)^m \right) = C$$

$$\partial (k(T) \times \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right)^m) = C \times \partial z$$

$$k(T) \times \left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right)^m = C \times z$$

$$\left(\frac{\partial A(z)}{\partial z} \right) = \left(\frac{C \times z}{k(T)} \right)^{\frac{1}{m}};$$

La température dépendante de z et k=k(T) on obtient k=k(z).

on a : A(z) =u(z)

$$u(z) = C^{\frac{1}{m}} \times \int_z^h \left(\frac{z}{k(z)} \right)^{\frac{1}{m}} \times \partial z$$

Le débit est constant

$$Q = 2 \times \int_0^h u(z) \times w \times dz;$$

$$Q = 2 \times \int_0^h \left(C^{\frac{1}{m}} \times \int_z^h \left(\frac{z}{k(z)} \right)^{\frac{1}{m}} \times \partial z \right) \times w \times \partial z$$

$$Q = 2 \times C^{\frac{1}{m}} \times w \times \int_0^h \left(\int_z^h \left(\frac{z}{k(z)} \right)^{\frac{1}{m}} \times \partial z \right) \times \partial z$$

$$Q = 2 \times C^{\frac{1}{m}} \times w \times \int_z^{\frac{1}{m}+1} \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \times \partial z$$

$$C^{\frac{1}{m}} = \frac{Q}{2 \times w \times \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \partial z}$$

$$u(z) = \frac{Q}{2 \times w \times \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \partial z} \times \int_z^h \left(\frac{z}{k(z)} \right)^{\frac{1}{m}} \times \partial z \quad (\text{III.25})$$

III.3.3.2. Calcul de l'évolution de la pression dans le moule [2]:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = C ;$$

$$C = \left(\frac{Q}{2 \times \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \partial z} \right)^m ;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{Q}{2 \times \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \partial z} \right)^m ;$$

$$P(x) = \left(\frac{Q}{2 \times \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \partial z} \right)^m (L-x)$$

$$P(x) = \left(\frac{Q}{2 \times \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \partial z} \right)^m (L-x) \quad (\text{III.26})$$

Pression d'injection :

$$P_{inj} = \left(\frac{Q}{2 \times \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} \partial z} \right)^m L \quad (\text{III.27})$$

Par la suite de la même méthode de calcul d'auparavant, on obtient la forme des équations de calcul mécanique (Pression et Pression d'injection, Vitesse..) pour les autres formes géométriques élémentaires (Canal et secteur).

Le tableau ci-dessous présente les équations de calcul mécanique pour chaque élément (Canal, Plaque et Secteur).

Avec :

$$DEH = \int_0^R \frac{r^{\frac{2m+1}{m}}}{2k(z)^{\frac{1}{m}}} dr$$

$$F = \frac{-Q}{2\alpha \int_0^h \frac{z^{\frac{1}{m}+1}}{k(z)^{\frac{1}{m}}} dz} \frac{1}{1-m}$$

V : la vitesse moyenne

$$V = -\frac{1}{8} \frac{\Delta P}{\eta L} R^2$$

$$V^* = \frac{m}{3m+1} \left[\frac{-\Delta P}{2kL} \right]^{\frac{1}{m}} R^{\frac{1}{m}+1}$$

Programmation

IV. LA PROGRAMMATION :

Le but essentiel de notre travail est la simulation des phénomènes thermomécaniques au cours de la phase de remplissage. Cette simulation permet de donner l'état de la matière pendant et à la fin de cette phase.

Le programme est effectué dans l'environnement MATLAB 5.3.

Ce choix a été favorisé parce qu'il possède les meilleures fonctionnalités adaptées à notre calcul.

IV.1.ORGANISATION GENERALE DU PROGRAMME :

Notre programme peut être représenté par quatre blocs :

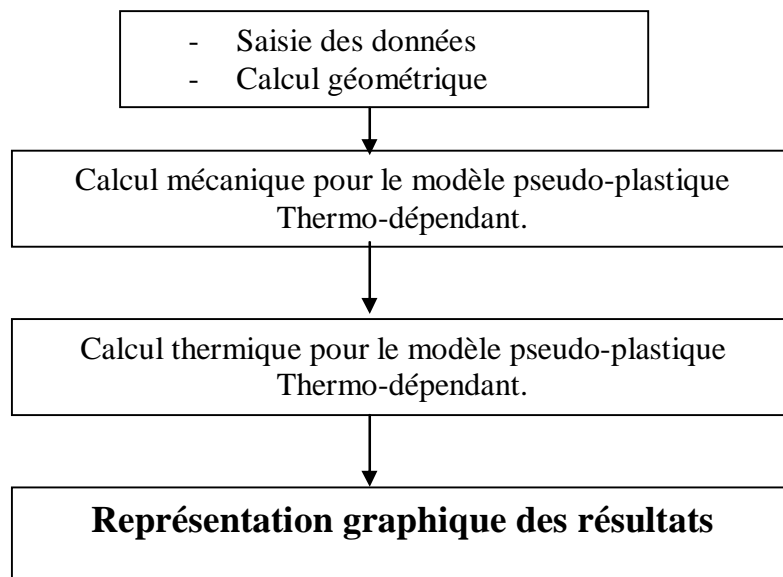


Fig.IV.1.Organigramme global du programme

IV.2.L'ORGANIGRAMME DETAILLE DU PROGRAMME :

Le calcul est organisé en deux étapes :

- Calcul pour la première position du front.
- Calcul bouclé pour les autres positions du front.

Dans chaque nouvelle position du front, on effectue le calcul thermique et le calcul mécanique de toutes les zones précédentes.

L'organigramme suivant représente les suites logiques de cette étude et détaille les différentes étapes du calcul.

Pour ce cas (modèle pseudo- plastique thermo-dépendant), la viscosité étant dépendante de la température, donc il y a un couplage entre le calcul mécanique et thermique.

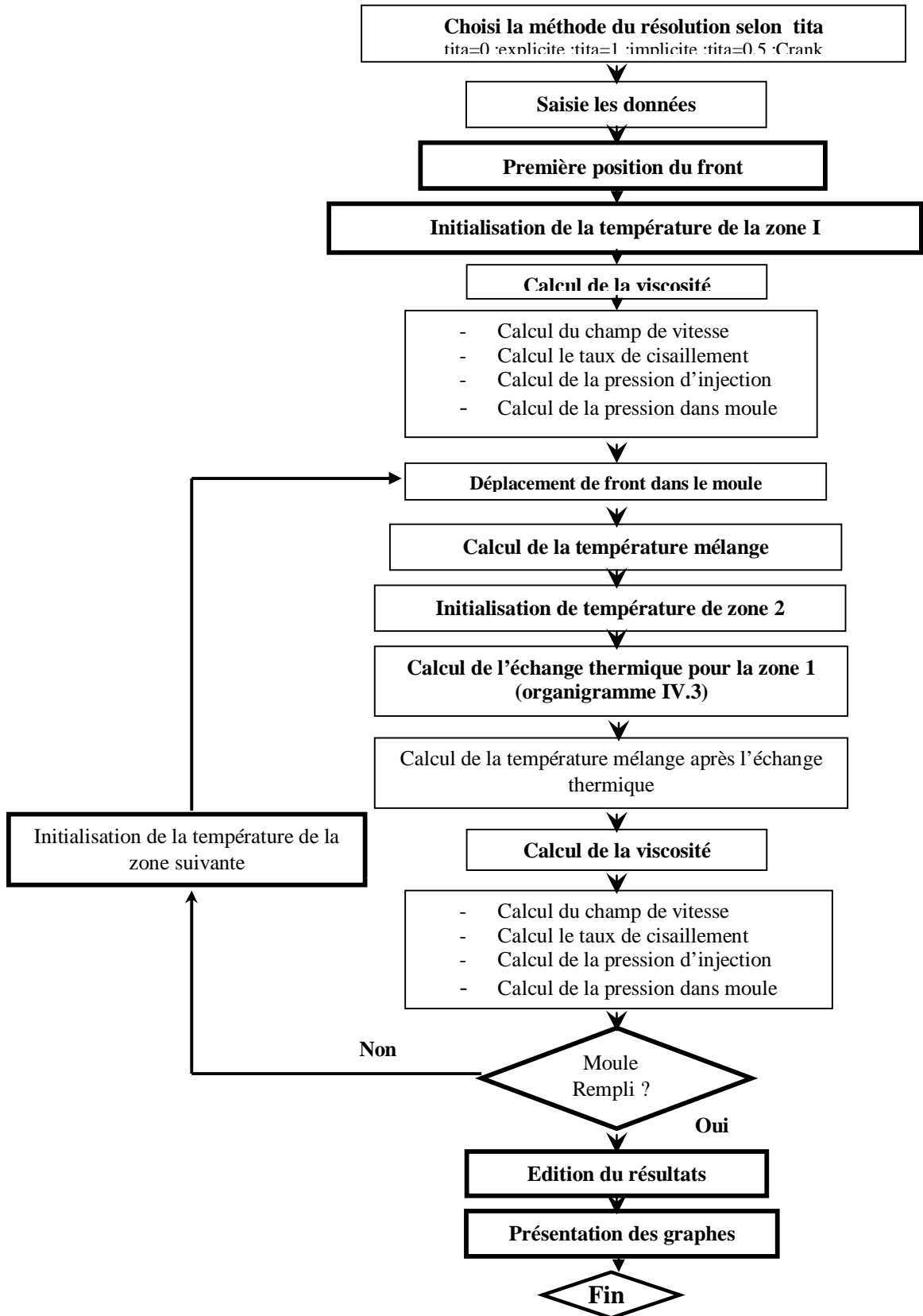


Fig.IV.2.Organigramme du programmation

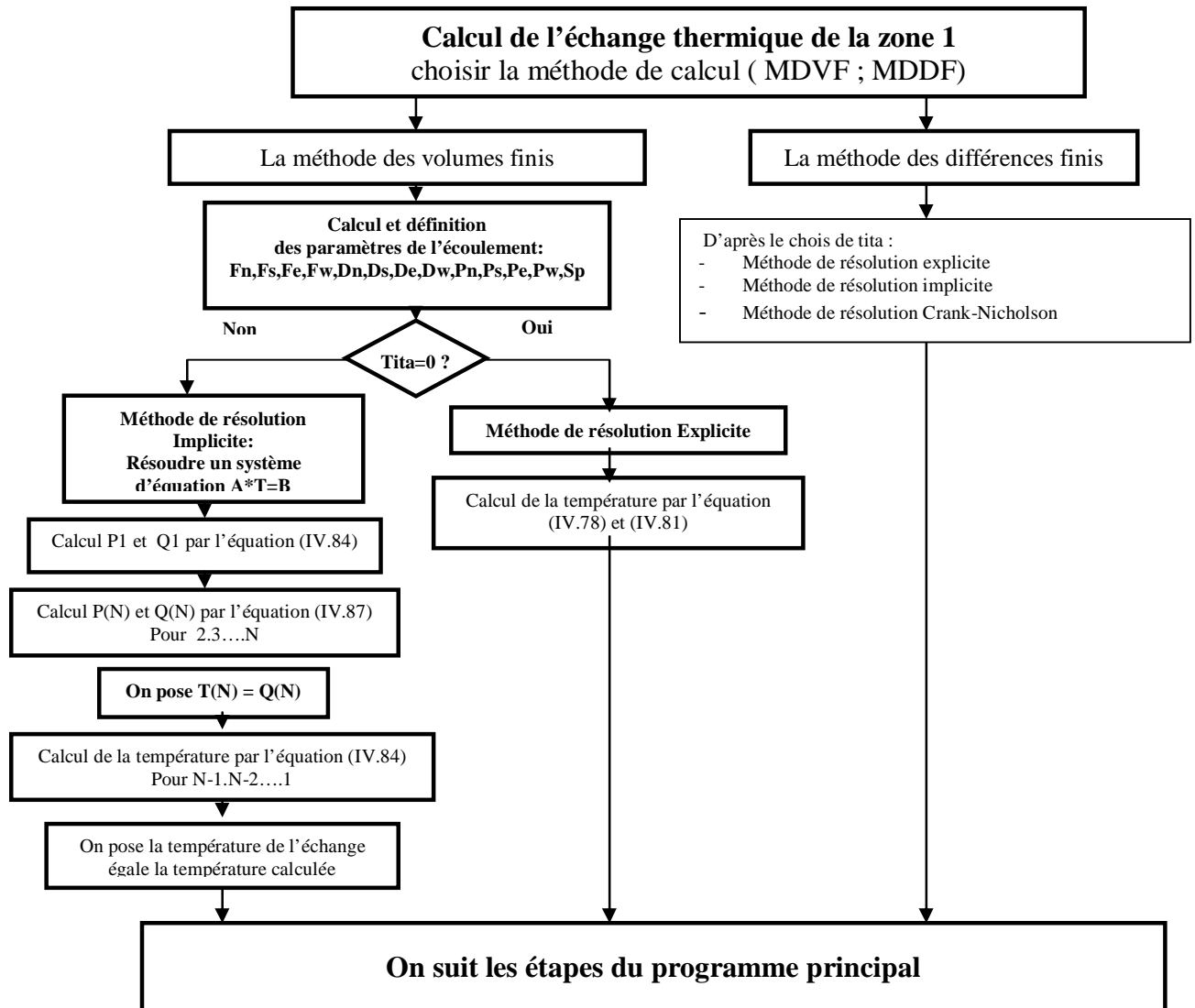


Fig.IV.3.Organigramme du Calcul de l'échange Thermique

L'organigramme (IV.2) fonctionne suivant les étapes ci-dessous :

- **Détermination de la première position de front** : Pour la première zone ;
- Initialisé la température jusqu'au front de la matière de la zone 1

La température de cette zone est égale la température d'injection.

- Calcul de la viscosité d'après le choix de la loi
 - Loi de puissances
 - Loi d'Arrhenius
- Le calcul mécanique :
 - Calcul de champ de vitesse par l'équation (III.25).
 - Calcul pression d'injection par l'équation (III.27)
 - Calcul la pression dans le moule par l'équation (III.26)
 - Calcul du taux de cisaillement par l'équation $\dot{\gamma} = \sqrt{2 \times \sum_{i,j} \varepsilon_{i,j}^2}$

Remarque :

Le choix des équations du calcul mécanique pour les différentes pièces élémentaires se fait suivant le tableau (III.1).

- **Détermination de nouvelle position de front** :
- Calcul de la température de mélange au niveau du front de la zone 1 par l'équation (III.94). Et on l'utilise pour l'initialisation de la température dans la zone 2.
- **Calcul de l'échange thermique dans la zone 1 : (Organigramme IV.3)**
 - Choisir la méthode du calcul
 - 1-Méthode des différences finis (sans détails)
 - Choisir la méthode de résolution d'après tita (explicite, implicite et Crank-Nicholson)
 - 2-Méthode des volumes finis :
 - Choisir la méthode de résolution d'après la valeur de tita
 - Si tita est égale zéro, on a la méthode explicite et on calcule la température par les équation (III.78),(III.79) et (III.81).
 - Si non, on a la méthode implicite, on résoud le système d'équation $A \cdot T = B$ par l'application de la méthode du TDMA.

A ce niveau on sort de l'organigramme (III.3) et on continue la suite de l'organigramme (IV.2)

- Calcul de la température au niveau du front changé après le calcul d'échange thermique. Ce qui nous permet de recalculer la température de mélange.
- Calcul de la viscosité.
- Le calcul mécanique :
 - Calcul du champ de vitesse par l'équation (III.25)
 - Calcul du taux de cisaillement par l'équation précédente.
 - Calcul de la pression d'injection par l'équation (III.27)
 - Calcul de la pression dans le moule par l'équation (III.26)
- Quand la matière coule et le moule n'est pas encore rempli on initialise la température de la zone suivante par la température de mélange dernièrement calculée.
- Quand le moule sera rempli, on sort du boucle suivi de l'édition des résultats.
- Exécution du programme des sorties graphiques.

IV.3. DONNEES ET RESULTATS DU PROGRAMME:**IV.3.1. Données :**

- Pour l'organigramme IV.2, on doit saisir les données suivantes :

.Géométrie :

Plaque :

- L : longueur de la plaque [m]
- h : hauteur de la plaque

Secteur :

- ro : le rayon intérieur [m]
- R : le rayon extérieur [m]
- h : hauteur [m]
- α : l'angle [°]

Canal :

- L_c : la longueur [m]
- h : R_c : le rayon [m]

.Maillage :

- l : nombre de domaines dans le sens d'écoulement
- n : nombre de nœuds suivant x par domaine
- M : nombre de nœud suivant y

.Caractéristiques de la matière plastique :

- La conductivité thermique : K_p [W/m°C]
- Capacité calorifique : $C_c = \rho.c$ [J/m°C].
- La viscosité :

pour le cas de la loi de puissance on a :

- A, B, C : constantes du matériau.

pour le cas de la loi d'Arrhenius

- η_0 , λ , b, m, Tréf, E/R.

.Le moule (acier) :

- e : Distance entre la canal de refroidissement et la paroi de contact [m].
- K_{ac} : conductivité thermique de l'acier [W/m°C].

.Conditions d'injection :

- T_{inj} : Température d'injection [$^{\circ}C$].
- T_{ref} : Température de refroidissement [$^{\circ}C$].
- t : Temps de remplissage [s].

IV.3.2.Résultats :

L'exécution de l'organigramme va nous donner les résultats suivants :

- Les valeurs de la température dans les différents nœuds du maillage.
- Les valeurs de la viscosité dans les différents nœuds du maillage
- Les valeurs de la pression d'injection
- Les valeurs du taux de cisaillement les différents nœuds du maillage
- Les valeurs de champ de vitesse les différents nœuds du maillage
- Les valeurs de la pression dans différents nœuds du maillage

Etude de cas d'application

Dans ce chapitre, on va étudier deux cas :

- Un cas de géométrie élémentaire de forme secteur avec un angle variant.
- Un cas d'une pièce constitué par trois géométrie élémentaires (Canal, Secteur et Plaque).

Avec :

- l'influence des lois de comportement sur les calcul de paramètres mécaniques et thermiques pour un l'élément secteur (loi de puissances et d'Arrhenius).

V.1.GEOMETRIE DU SECTEUR :

V.1.1.Donnees géométriques :

On a pris un secteur qui à les dimensions suivantes :

ro : rayon intérieur.	ro =0.01 [m]
R : rayon total .	R=0.2 [m]
α : angle .	$\alpha=30^\circ$
h : hauteur .	h=0.005 [m]

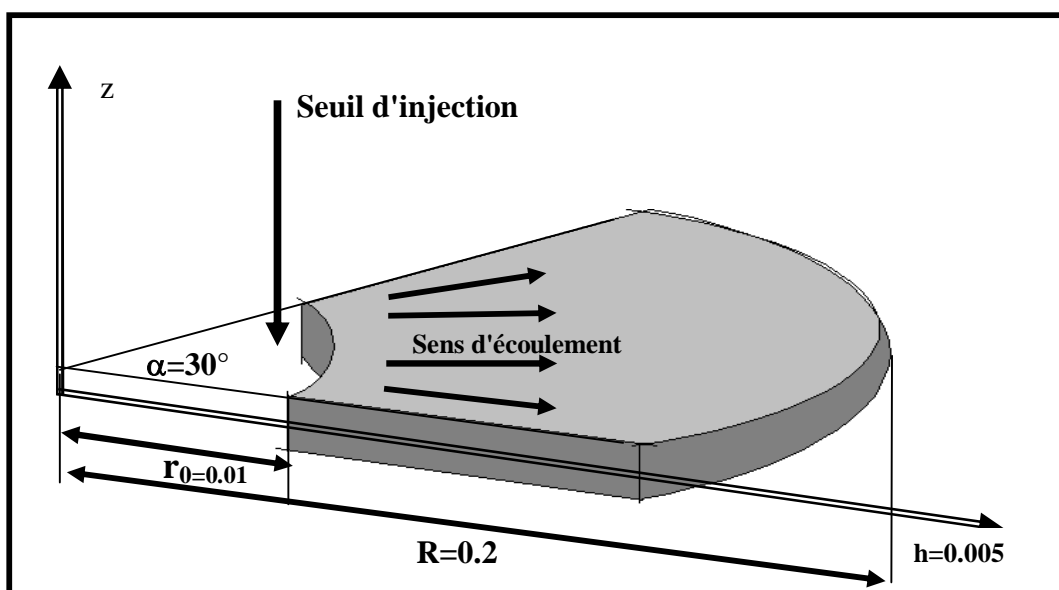


Fig.V.1.Representation d'un secteur

VI.1.2.Maillage :

On a divisé le rayon en quatre domaines dans le sens de l'écoulement soit :

La longueur d'un domaine

$$L1=(R-ro)/4$$

Le maillage est composé de N_x nœuds suivant le sens d'écoulement et N_z nœuds dans le sens transversal

$$\Delta x = L1 / (N_x - 1) \text{ et } \Delta z = h / (N_z - 1)$$

Cette discrétisation est représentée par la figure ci – dessous :

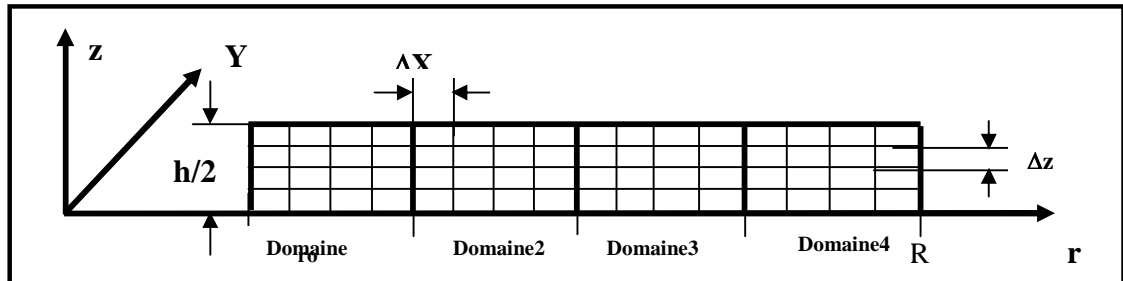


Fig.V.2.maillage de la moitié supérieure du secteur

V.1.3.Matériau :

Le matériau choisi pour cette modélisation est le : **polypropylène**, les caractéristiques de ce matériau sont [23] :

La viscosité :

- Pour le modèle pseudo-plastique thermo-dépendant η est donnée par :

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = A \exp(C \cdot T) \dot{\gamma}^B \text{ pour la loi de puissance}$$

Avec

$$A = 43350$$

$$B = -0.61971$$

$$C = -0.0088522$$

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = \eta_{Tréf} \cdot \exp\left[\frac{E}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{Tréf}}\right)\right] \text{ pour la loi d'Arrhenius}$$

Avec

$\eta_{Tréf}$ est donnée par la loi de Carreau-Yasuda

$$\eta_{Tréf}(\dot{\gamma}) = \eta_0 \left(1 + (\lambda \dot{\gamma})^b\right)^{m-1/b}$$

$$\eta_0 = 4\,000 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\lambda = 0,008 \text{ s}$$

$$b = 0,25$$

$$m = 0,026$$

$$T_{Tréf} = 220 \text{ [}^\circ\text{C]}$$

$$E/R = 4800 \text{ [}^\circ\text{K]}$$

- Conductivité thermique du plastique : $K_p = 0.175 \text{ [W/m} \cdot \text{}^\circ\text{C]}$
- Capacité calorifique : $C_c = 2.02 \cdot 10^6 \text{ [J/}^\circ\text{C} \cdot \text{m}^3]$

V.1.4. Moule (acier) :

- Distance entre le canal de refroidissement et la proi de contact : $e = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.
- Conductivité de l'acier : $K_{ac} = 14.6 \quad [\text{W/m} \cdot ^\circ\text{C}]$.

VI.1.5. Condition d'injection :

- Temps de remplissage : $t_r = 4 \quad [\text{s}]$.
- Température d'injection : $T_{inj} = 250 \quad [^\circ\text{C}]$.
- Température de refroidissement : $T_{ref} = 20 \quad [^\circ\text{C}]$.

V.1.6. LES RESULTAT:

Ces graphes présentent les résultats pour la méthode des volumes finis.

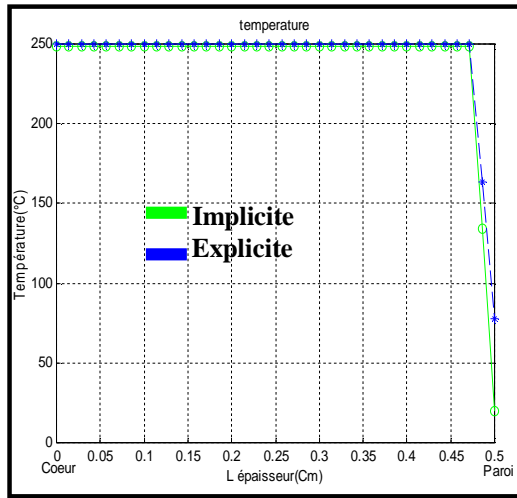


Fig.V.3. Température dans le moule

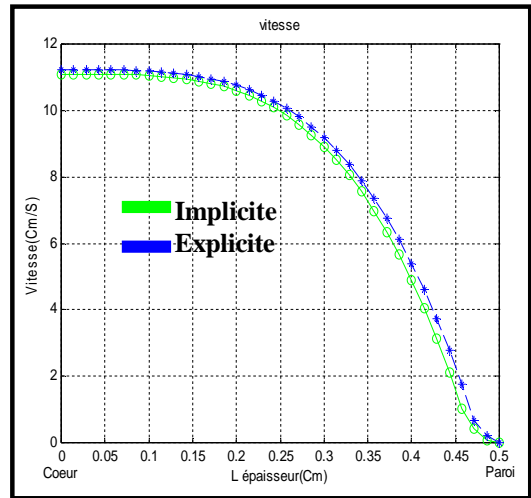


Fig.V.4. Champs du vitesse

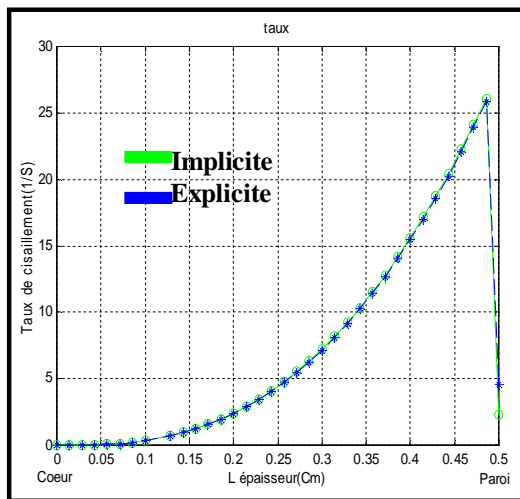


Fig.V.5. Taux de cisaillement

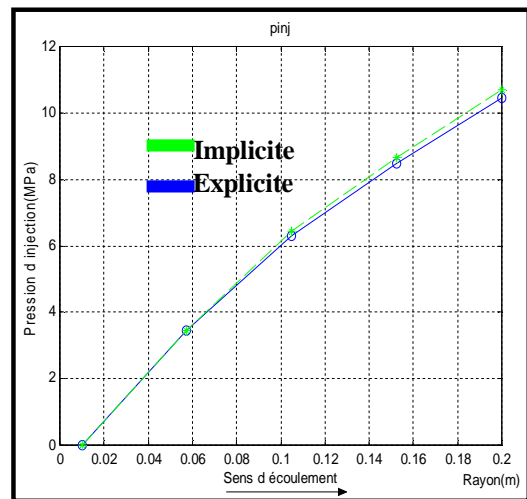


Fig.V.6. Pression d'injection

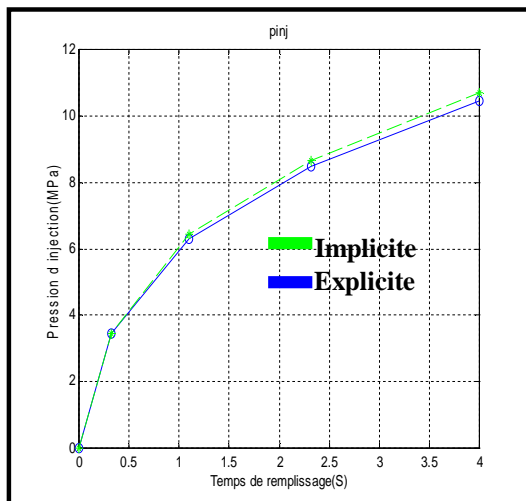


Fig.V.7. Pression d'injection

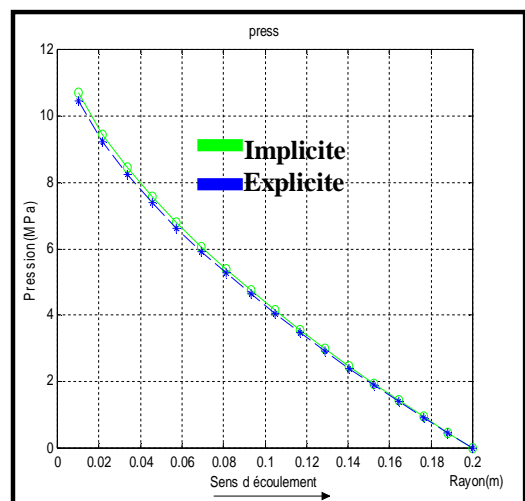


Fig.V.8. Pression dans le moule

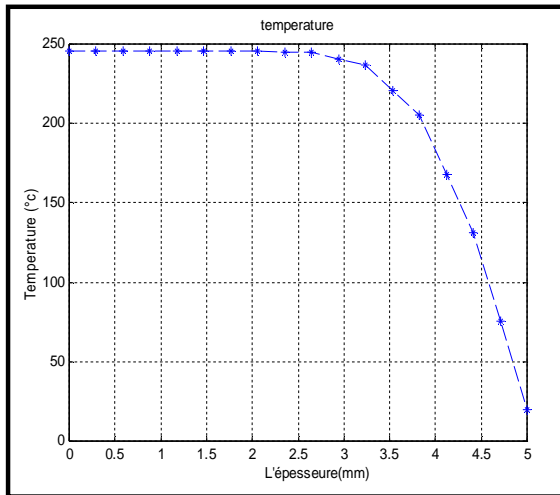


Fig.V.9. Température dans le moule

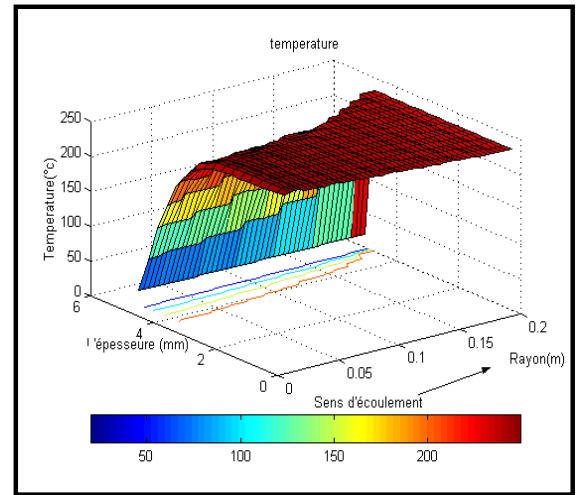


Fig.V.10. Carte de température dans le moule

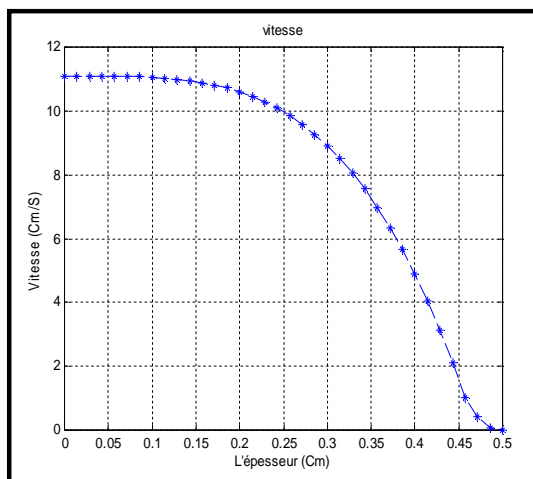


Fig.V.11. Champs du vitesse

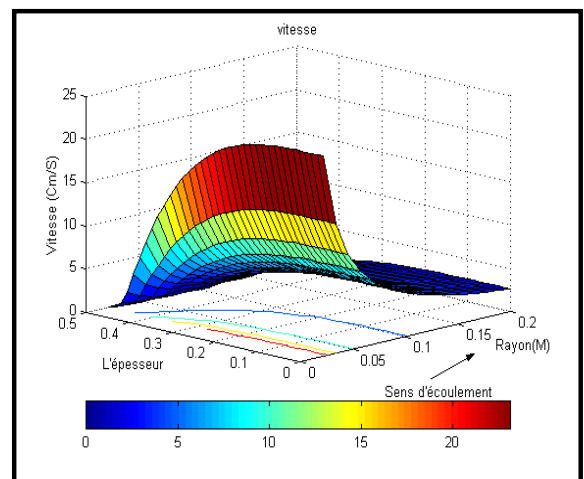


Fig.V.12. Carte du champs de vitesse

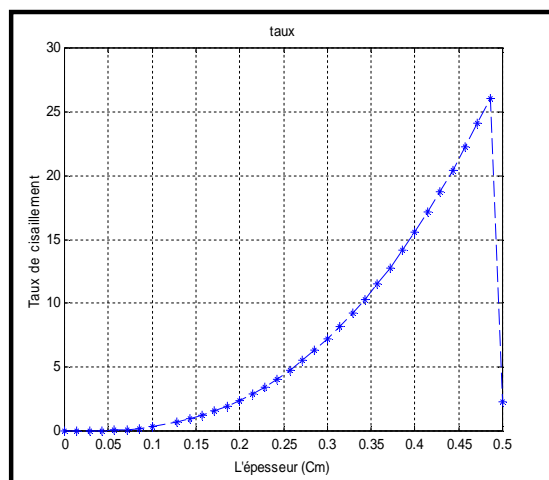


Fig.V.13. Taux de cisaillement

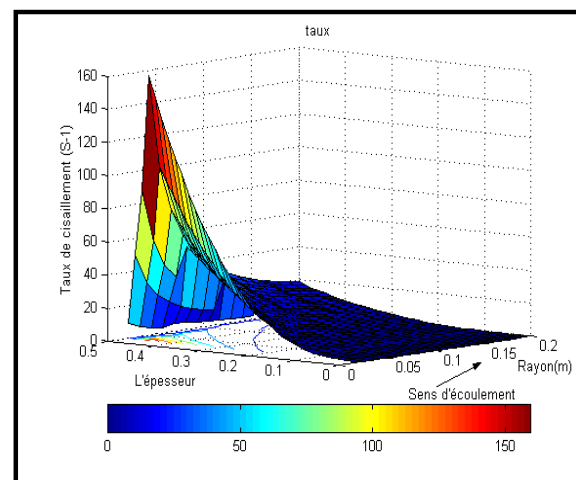


Fig.V.14. Carte de Taux de cisaillement

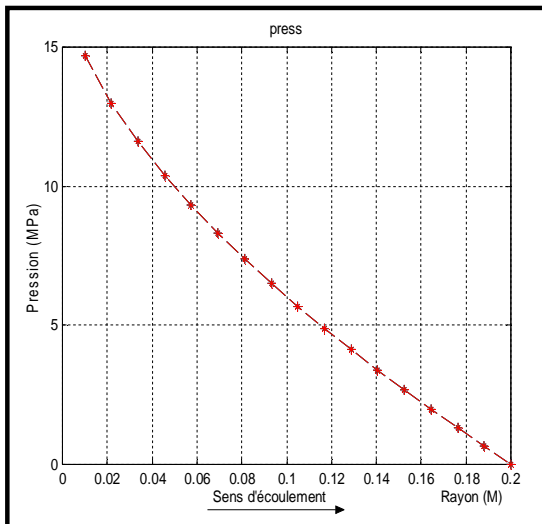


Fig.V.15. Pression dans le moule

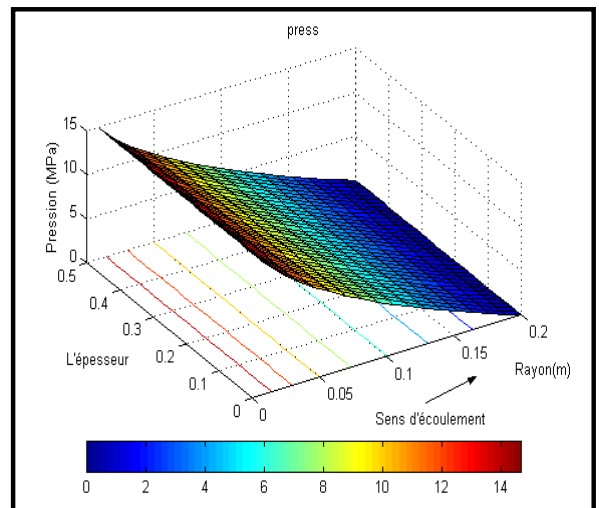


Fig.V.16. Carte de la pression dans le moule

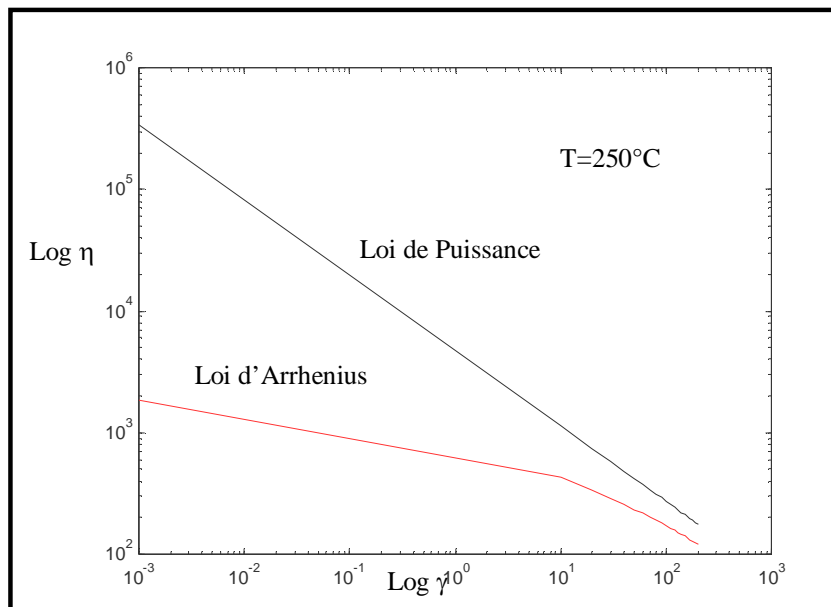


Fig.V.17. Loi de puissance et Loi d'Arrhenius

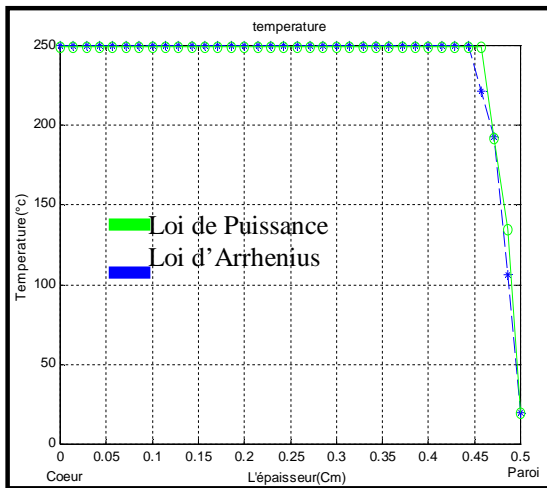


Fig V.18. Température dans le moule

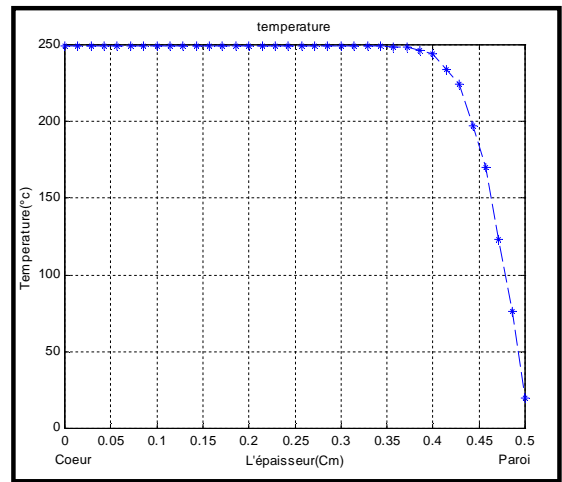


Fig V.19. Température dans le moule (loi d'Arrhenius)

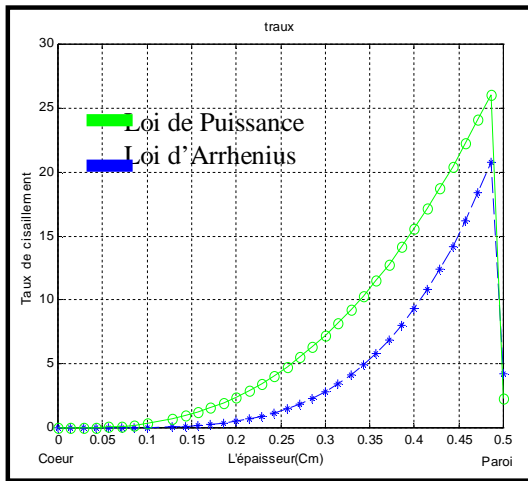


Fig V.20. Taux de cisaillement

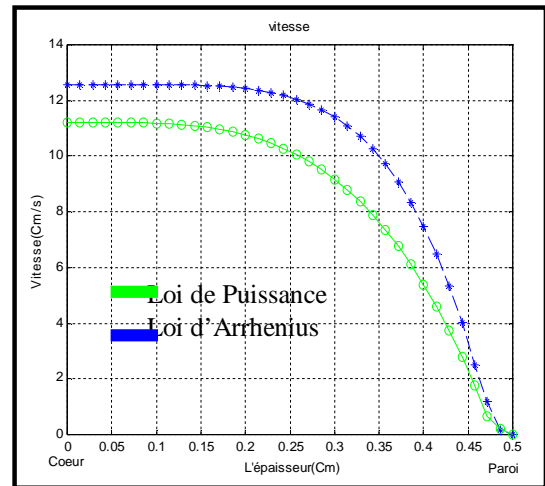


Fig V.21. Champs de vitesse dans l'épaisseur

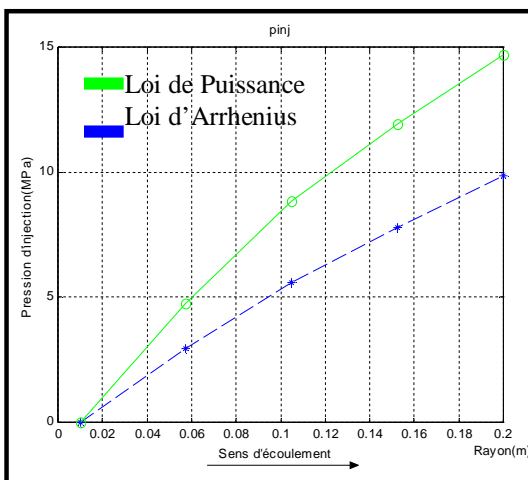


Fig V.22. Pression d'injection

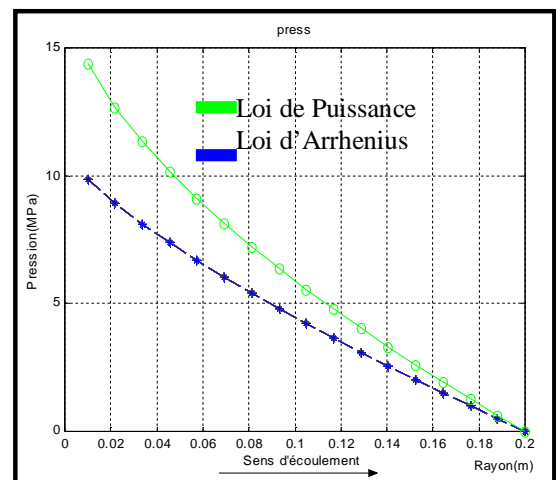


Fig V.23. Pression dans le moule

Ces graphes présentent les résultats graphique pour la méthode des différences finis et volumes finis.

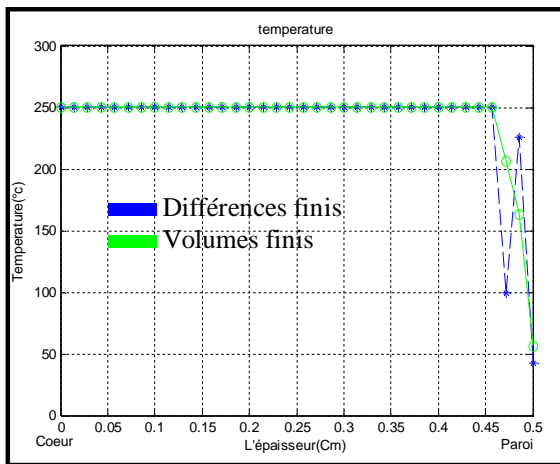


Fig.V.24. La température dans le moule

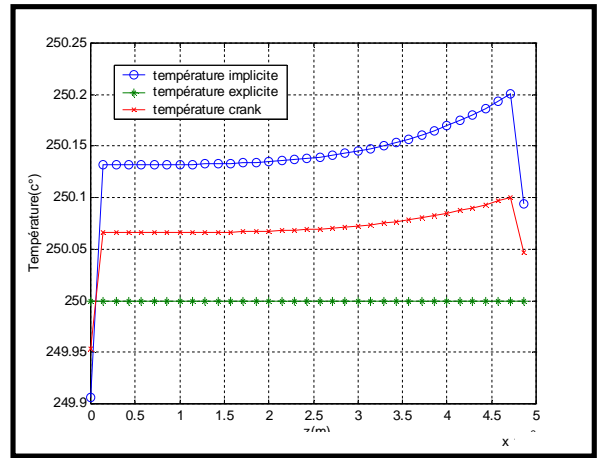


Fig.V.25. La température au milieu de moule

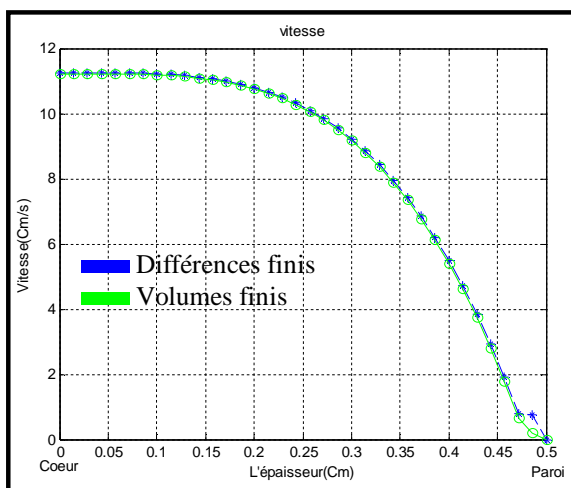


Fig.V.26. Champs de vitesse

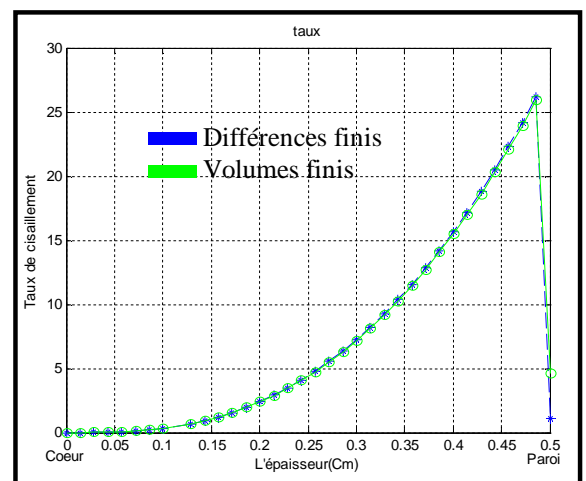


Fig.V.27. Taux de cisaillement

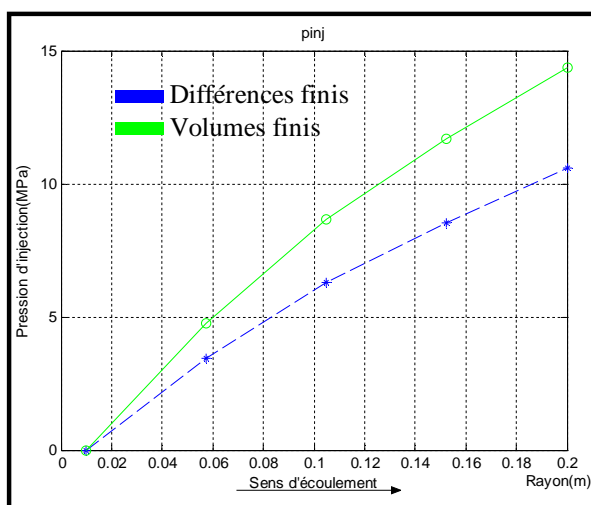


Fig.V.28. Pression d'injection

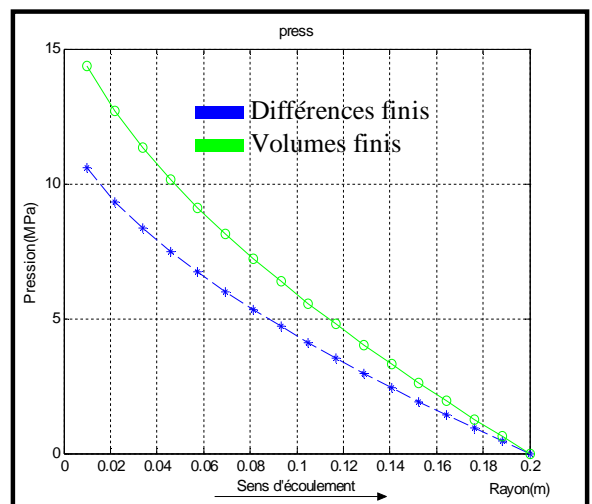


Fig.V.29. Pression dans le moule

Ces graphes présentent les résultats graphique pour un cas d'un disque [25].

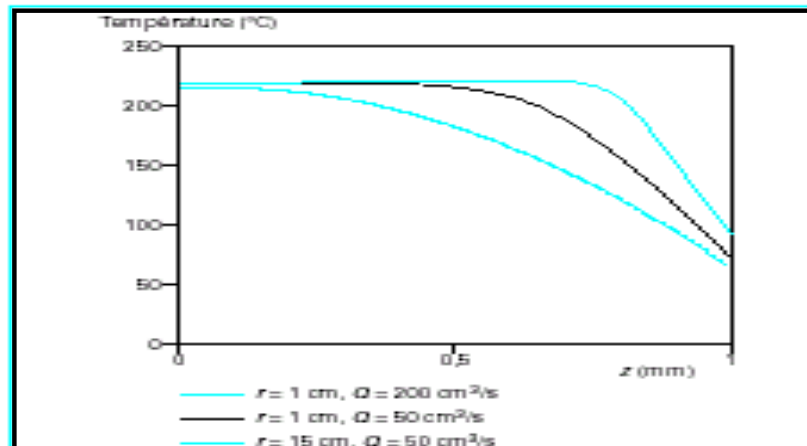


Fig.V.30. Profils de température (loi d'Arrhenius) [25]

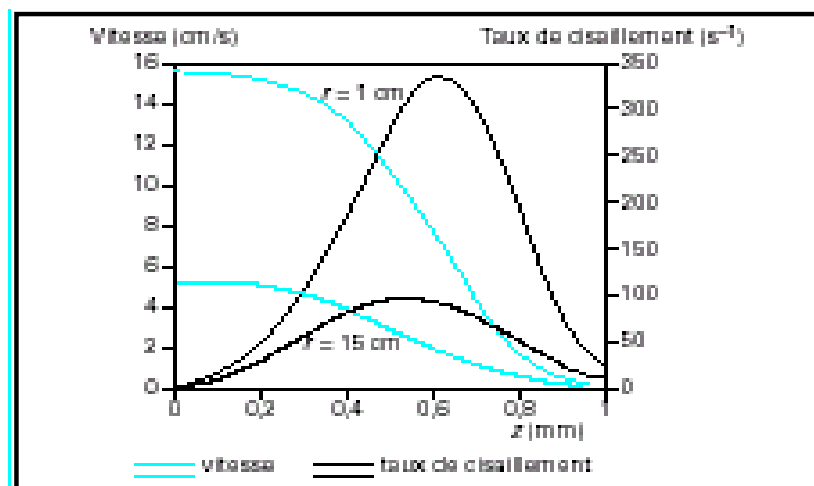


Fig.V.31. Profils de vitesse et de taux de cisaillement (disque)
Loi d'Arrhenius[25]

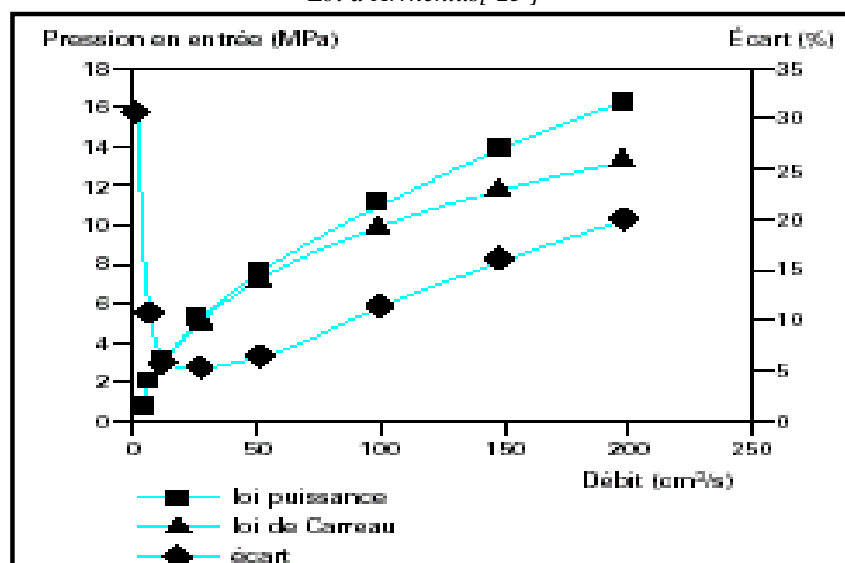


Fig.V.32. La pression d'injection [25]
Loi puissance et Loi de Carreau

V.2.CAS D'UNE PIECE:

Dans notre cas en représente une pièce réelle formée de trois géométries élémentaires (canal, secteur et plaque), pour voir l'influence de la modélisation géométrique de la pièce (la méthode de mise à plat).

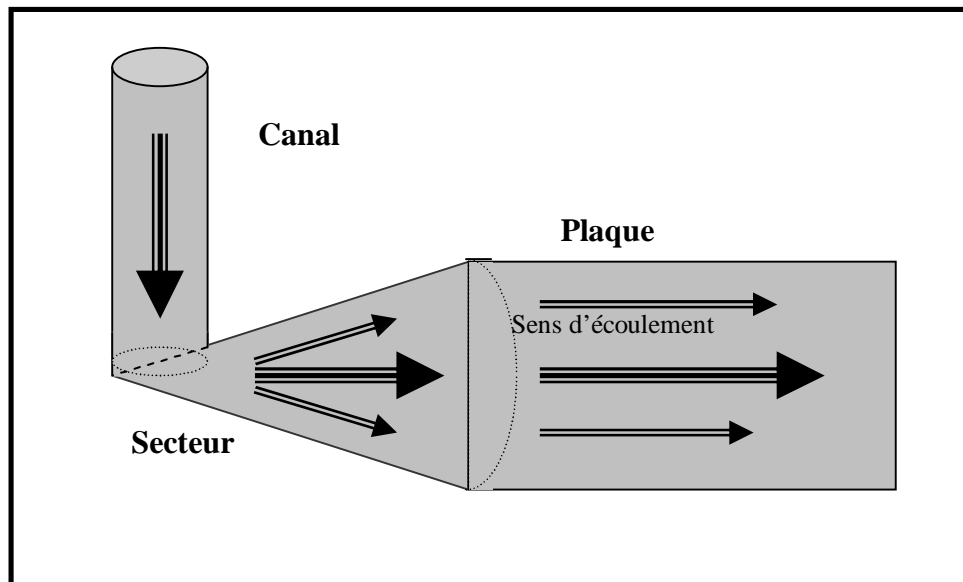


Fig.V.33.La pièce réelle

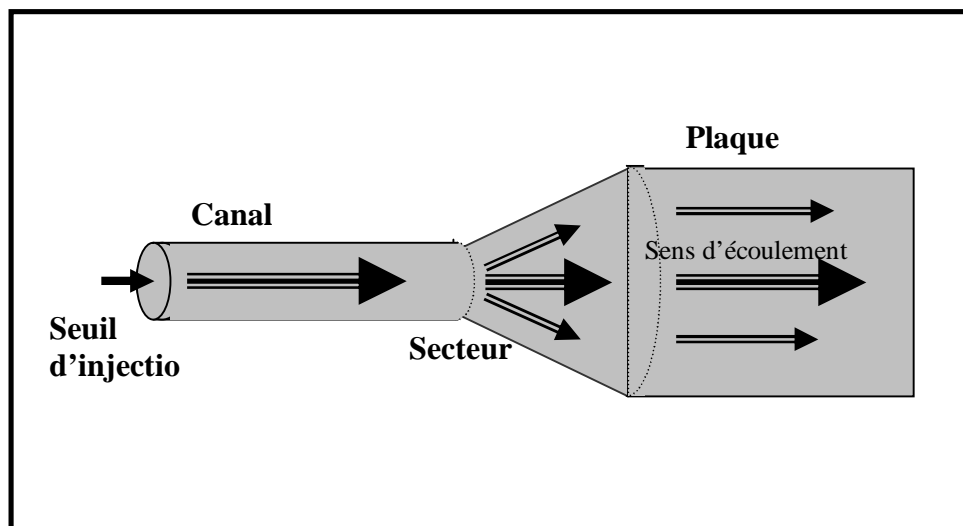


Fig.V.34.Modélisation géométrique de la pièce

V.2.1. Les données:**Canal:**

Lc: la longueur totale Lc=0.100m

Rc: rayon total Rc=0.005m

Secteur:

Rro: rayon intérieur ro=0.005m

Rs: rayon total Rs=0.100m

hs: hauteur hs=0.004m

Plaque:

Lp: la longueur total Lp=0.120m

hp: hauteur hp=0.004m

W: la largeur W=0.120m

Le Matériau:

Les caractéristiques de matériau:

Le matériau choisi pour cette modélisation est le : **polypropylène.**

La viscosité :

- Pour le modèle pseudo-plastique thermo-dépendant η est donnée par :

$$\eta(\dot{\gamma}) = A \exp(C.T) \dot{\gamma}^B$$

Avec

$$A = 43350/10^6$$

$$B = -0.61971$$

$$C = -0.0088522$$

- Conductivité thermique du plastique : $K_p = 0.175$ [W/m.°C]
- Capacité calorifique : $C_c = 2.02 \cdot 10^6$ [J/°C.m³]

Le Moule :

Les caractéristiques de Moule (acier) :

- Distance entre le canal de refroidissement et la proi de contact : $e = 4 \cdot 10^{-3}$ m.
- Conductivité de l'acier : $K_{ac} = 14.6$ [W/m.°C].

Condition d'injection :

- Temps de remplissage : $t_r = 7$ [s].
- Température d'injection : $T_{inj} = 250$ [°C].
- Température de refroidissement : $T_{ref} = 20$ [°C].

V.2.2. Le Maillage :

En raison de la symétrie par rapport au centre de la pièce. Le maillage ne concerne que la moitié supérieure de la pièce.

On a divisé la pièce en trois géomètres élémentaires (canal, secteur et plaque) et on a divisé la longueur totale de chaque géométrie en quatre domaines dans le sens de l'écoulement.

Chaque domaine est divisé en quatre éléments dans le sens de l'écoulement et quatre éléments dans le sens transversal.

Cette discrétisation est représentée par la figure ci-dessous :

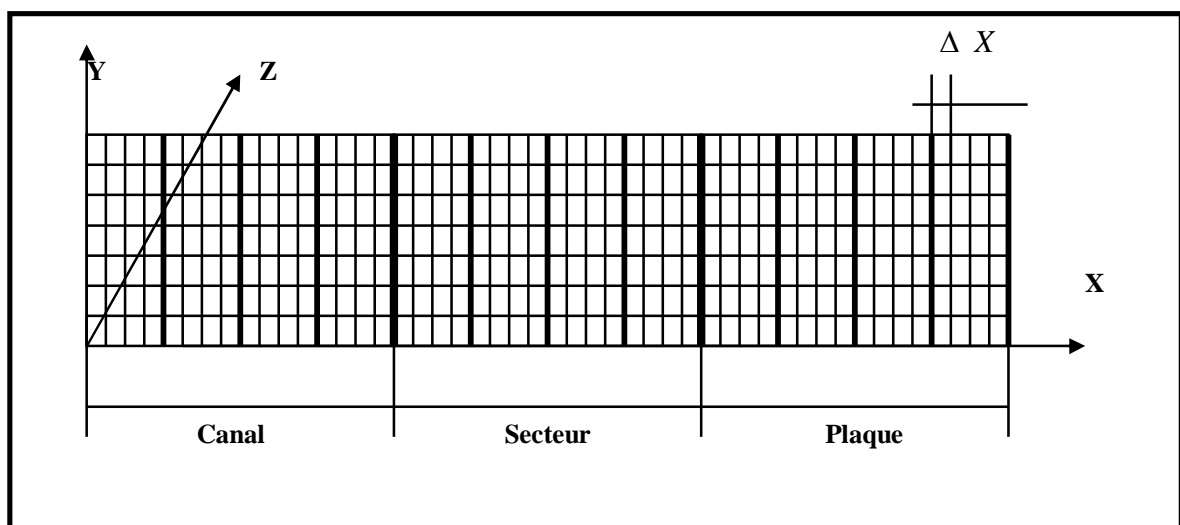


Fig.V.35. Maillage de la moitié supérieure de la pièce

V.2.3. Les Graphes:

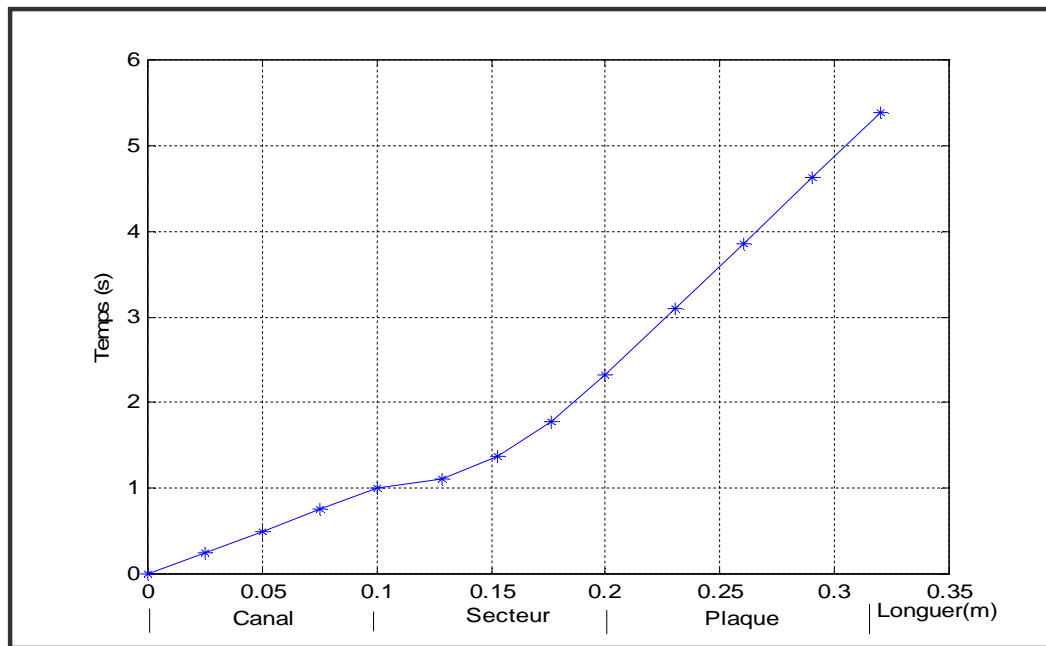


Fig.V.36. Temps d'avancement du front de la matière

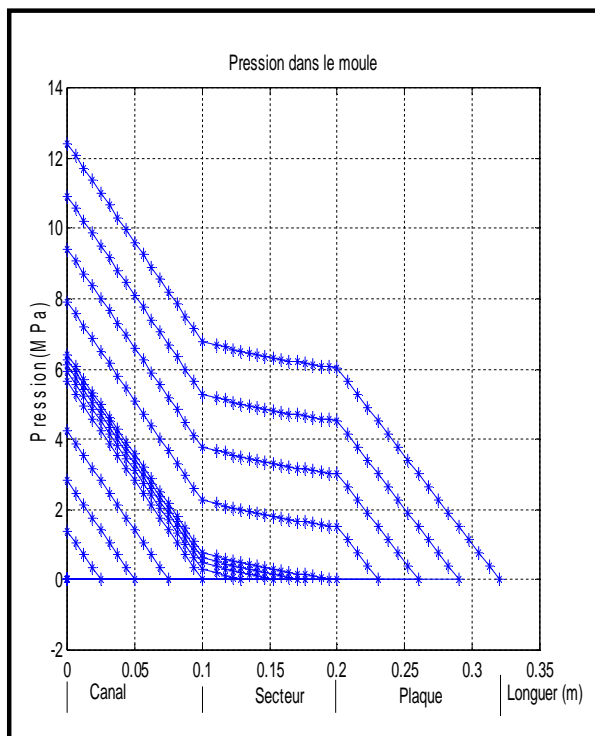


Fig.V.37. Pression dans le moule

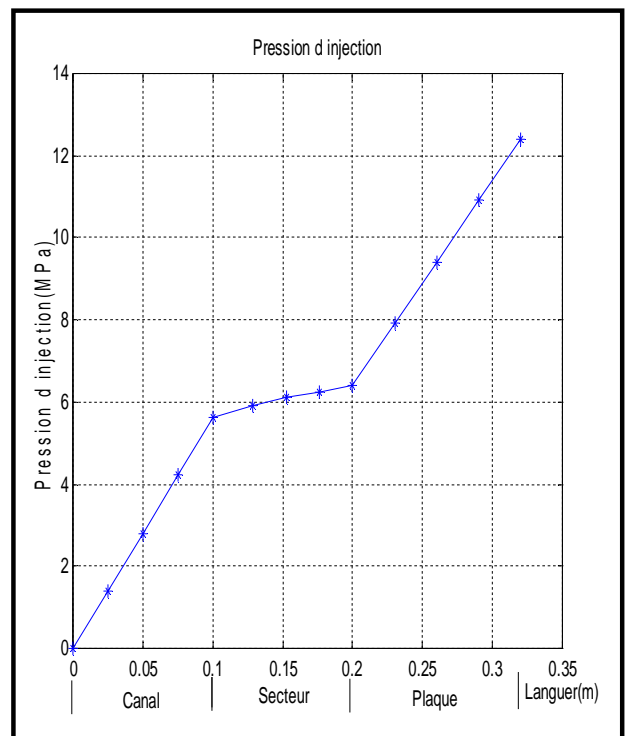


Fig.V.38. Pression d'injection

V.3.INTERPRETATION DES GRAPHES:

Les figures (V.3 jusqu'à V.8) représentent les paramètres de remplissage d'un moule de géométrie simple, le secteur.

Les graphes de la figure (V.3) jusqu'à la figure (V.8) présentent une comparaison entre la résolution obtenue par la méthode explicite et la méthode implicite.

La figure (V.3) donne le profil de température dans l'épaisseur, il est constant et maximal dans le cœur et dans la majorité de l'épaisseur et chute au niveau de la paroi froide du moule à cause du refroidissement.

La figure (V.4) représente la variation de la vitesse dans l'épaisseur, elle est maximale au cœur, et décroît d'une façon parabolique jusqu'elle s'annule au contact de la paroi froide (condition de non glissement).

La figure (V.5) donne le profil du taux de cisaillement dans l'épaisseur. Le taux étant la dérivée de la vitesse par rapport à l'épaisseur, il est nul au cœur et augmente jusqu'à atteindre un maximum à proximité de la paroi et elle chute brusquement.

La pression d'injection étant la pression de la presse nécessaire pour faire avancer la matière dans le moule. La figure (V.6) représenté cette pression en fonction de la position du front dans le moule. Cette courbe n'est pas linéaire à cause de la variation de la surface du front au cours du remplissage. La figure (V.7) donne cette même pression, mais en fonction de la position du front dans le moule, ce qui donne une courbe similaire à celle de la figure (V.6).

La figure (V.8) donne la pression de la matière dans le moule à la fin du remplissage. Elle est maximale et égale à la pression d'injection au seuil et décroît pour devenir nulle au front de la matière.

Les températures obtenues par la méthode implicite sont nettement inférieure à celles obtenues par la méthode explicite. La chute de la température est plus graduelle dans le premier cas que dans la deuxième figure (V.9). Ceci est du au fait que la méthode implicite donne un système d'équation pour déterminer la température des différents nœuds du maillage. L'influence de refroidissement sera alors transmis graduellement de la paroi vers les nœuds intérieures. Ce qui est

n'est pas le cas pour la méthode explicite ou le calcul de la température s'effectue séparément dans les nœuds des milieux les nœuds de l'intérieur et les nœuds de l'interface.

Une température dans le cas explicite est supérieure à celle dans le cas implicite ce qui donne naturellement une viscosité inférieure.

Ceci a une influence directe sur les paramètres mécaniques. Le polymère est plus fluide dans le cas explicite donc la vitesse sera plus grande figure (V.4) le taux de cisaillement plus faible figure (V.5) la pression nécessaire pour avancer le fluide sera moins importante figure (V.6 et V.7) ce qui engendre une pression dans le moule plus faible figure (V.8).

Les figures (V.9 jusqu'à V.18) représentent le cas des paramètres obtenus avec le calcul implicite de la température ainsi que les cartes donnant l'évolution dans l'épaisseur et dans le sens d'écoulement.

La figure (V.10) montre la variation de l'allure de la chute de la température du seuil d'injection jusqu'à la fin du remplissage. Cette chute est parabolique au niveau du seuil d'injection et devient plus franche à la fin du remplissage. Ces résultats sont similaires à celles obtenus par J.F. AGASSANT et M. VINCENT du Centre de mise en forme des matériaux (CEMEF-France) et représentés à la figure (V.30) [25].

La figure (V.12) montre que la vitesse diminue depuis le seuil jusqu'à la fin du remplissage. On remarque la même allure pour le taux de cisaillement de la figure (V.14). Des résultats d'allure comparable représentés d'une manière différente à la figure (V.31) ont été obtenus par les chercheurs du CEMEF (France) [25].

La figure (V.16) donne la carte de pression dans le moule qui est constante dans l'épaisseur ($dp/dx = 0$) et décroissante dans le sens de l'écoulement. Ceci est en parfaite accord avec les résultats obtenus par J.F. AGASSANT et M. VINCENT du CEMEF(France) et sont représentés par la figure (V.32) [25].

La figure (V.19) représente une comparaison entre le calcul de viscosité obtenue par la loi de puissance et la loi d'Arrhenius. L'allure de la courbe de cette dernière est la plus proche de la réalité. Cette différence influe clairement sur les courbes des paramètres obtenus.

Les figures (V.20 jusqu'à V.25) représentent une comparaison des résultats obtenus avec la loi de puissance et la loi d'Arrhenius relatives à la viscosité du polymère. L'allure des courbes de ces paramètres reste la même que celle obtenue auparavant.

La température calculée par la loi d'Arrhenius est inférieure que celle obtenue par la loi de puissance figure (V.20). Les faibles valeurs de la viscosité données par la loi d'Arrhenius (polymère plus fluide) donnent un taux de cisaillement plus faible figure (V.22) et une vitesse plus grande figure (V.23). La pression d'injection et la pression dans le moule seront plus faibles dans le cas de la loi d'Arrhenius que dans la cas de la loi de puissance figure (V.24 et V.25). Ceci est en parfaite accord avec les résultats obtenus par J.F. AGASSANT et M. VINCENT du centre de mise en forme des matériaux (CEMEF-France) et représentés à la figure (V.32) [25].

Les figures (V.26 jusqu'à V.27) représentent une comparaison entre les résultats obtenus par la méthode des volumes finis et la méthode des différences finis. Cette comparaison montre une légère différence des valeurs de température. Les valeurs obtenues par la méthode des différences finis sont les plus faibles et présentent un auto-échauffement près des paroi du moule dû au cisaillement figure (V.26).

La figure (V.27) présente les différences de valeurs de température obtenues par les différents schémas de la méthode des différences finis.

Ces différences n'ont pas engendrées d'influence sur la vitesse et le taux de cisaillement figure (V.28 et V.29). Par contre on trouve cette influence sur la pression d'injection et la pression dans le moule figure (V.30 et V.31).

Les Figures (Fig.V.36;Fig.V.37 et Fig.V.38) présentent l'étude d'une pièce réelle qui peut être modéliser géométriquement par trois géométrie élémentaires figure (V.32).

La figure (V.36) représente l'évolution du temps de remplissage au cours de l'avancement du front de la matière. Elle donne le temps d'arrivée de la matière en un point du moule.

La forme de la courbe est variable suivant les différentes géométrie. Ceci est dû à la variation de la section du front de la matière.

Remarque :

La forme de l'évolution de la température, la vitesse et le taux de cisaillement reste la même que dans le cas des différents géométrie prises individuellement.

La figure (V.37) présente la pression dans le moule. Elle donne la variation de la pression entre le seuil d'injection et le front de la matière à différents instants de remplissage.

La pression dans le moule diminue à partir de la pression d'injection jusqu'à ce qu'elle devient nulle au front de la matière. Cette pression au front est réellement très faible et assurée par la présence des événements qui évacuent l'air présent dans le moule.

On remarque le changement de la pente lorsqu'on passe d'une géométrie à l'autre.

La figure (V.38) représente la variation de pression d'injection en fonction de l'avancement de la matière dans le moule. On remarque aussi le changement de la pente suivant les différents géométrie .

On rappelle que la pression d'injection est la pression que doit fournir la presse pour faire avancer la matière dans le moule.

Conclusion et Perspectives

Conclusion.....

Cette étude a permis d'analyser la phase de remplissage par injection des matières plastiques par le calcul des paramètres thermomécaniques pendant cette phase.

Cette étude a débuté par la présentation des polymères et une description du moulage par injection de matières plastiques. Une intention particulière a été donnée au phénomène rhéologique de la phase d'injection.

La viscosité est une caractéristique importante pour la modélisation du phénomène thermique et mécanique durant la phase de remplissage.

L'étude de ce paramètre a permis de présenter les différents modèles mathématiques décrivant la variation de la viscosité en fonction du taux de cisaillement et de la température.

La modélisation des phénomènes thermomécaniques a été basée sur les équations de la mécanique des milieux continus. L'utilisation des modèles pseudo-plastique thermo-dépendants de la viscosité a nécessité d'établir un couplage des calculs d'intégrale pour les équations de la mécanique et la méthode de différences finies et la méthode des volumes finis pour la résolution numérique de l'équation de l'échange thermique.

L'adaptation de la méthode de mise à plat pour la modélisation géométrique de l'empreinte de moule a nécessité l'établissement des modèles de résolution pour les trois géométries élémentaires, la plaque, le secteur et le canal.

La programmation de ces méthodes de résolution a été effectuée sous l'environnement MATLAB.

Ceci a permis de mettre au point un programme de simulation de remplissage des géométries élémentaires et autres programmes pour les pièces complexes qui peuvent être modélisées par la méthode de mise à plat.

Pour tester les programmes établis de type de géométrie ont été traités:

- Géométrie simple: le secteur.

Une pièce formée par trois géométries simples, canal, secteur et plaque

Les résultats obtenus sont qualitativement satisfaisants et permettent de suivre l'état thermomécanique des polymères durant le remplissage du moule ainsi que la variation de la pression d'injection pour assurer l'avancée de la matière.

Ces résultats ont permis aussi de confirmer:

- Que les modèles pseudo-plastique thermo-dépendant de la viscosité sont la plus proche de la réalité rhéologique du polymère utilisés dans les procédés de moulage par injection

L'efficacité de la méthode de volume finis.

Ce travail nous a permis d'aborder un problème industriel qui est la mise en forme des matières plastique par le procédé de moulage par injection.

La modélisation de la phase de remplissage a permis aussi d'assimiler différentes méthodes numériques tel que le calcul d'intégral, méthode des différences finis et méthode des volumes finis.

Le choix de l'environnement MATLAB pour la programmation a été fortement justifié vu les différentes fonctionnalités numériques et graphiques utilisées.

Perspectives.....

Cette étude peut être sûrement améliorée par:

- La généralisation du programme pour des pièces plus complexes.
- Reformulation des hypothèses grossières adoptées tel que la gaine solide.
- Utilisation de méthode plus performante pour la détermination de la position de front tel que la méthode du taux de présences.