

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider - Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Mécanique  
Réf: .....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم الهندسة الميكانيكية  
المرجع: .....

Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du diplôme de  
**Magister**

Spécialité: **Génie Mécanique**  
Option: **Energétique**

**MODELISATION ET SIMULATION  
D'ÉCOULEMENT DE FLUIDE  
MULTICONSTITUANTS EN MILIEU POREUX**

Présenté Par: **El-hachemi ZIDI**

Soutenu publiquement le: .....

**Devant le jury composé de:**

<b>Dr. N. MOUMMI</b>	Président	Maitre de conférences A	Université de Biskra
<b>Dr. A. HASSEINE</b>	Rapporteur	Maitre de conférences A	Université de Biskra
<b>Pr. M. HECINI</b>	Examineur	Professeur	Université de Biskra
<b>Dr. A. MOUMMI</b>	Examineur	Maitre de conférences A	Université de Biskra



A ma mère et  
mon père



A tous ceux  
qui m'aiment

# REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord Dieu le tout puissant qui nous éclaire le bon chemin.

Les mots ne me sont pas suffisants pour exprimer ma profonde gratitude et ma reconnaissance à Monsieur le Docteur Abdelmalek HASSEINE pour l'encadrement, les conseils scientifiques, la confiance et l'esprit de famille qu'il m'a toujours procurés

Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur le Docteur Nouredine MOUMMI pour avoir accepté de présider cette thèse, et qui était toujours proche de moi dans ma formation de Magister, et qui par sa sagesse et sa compétence a semé en moi l'amour de la science.

Je suis très sensible à l'honneur que me font Messieurs les Docteurs Abdelhafid MOUMMI et Mabrouk HECINI, en acceptant, malgré leurs nombreuses charges, de participer à ce jury.

Je remercie également les enseignants du département de génie mécanique pour leur aide et leur encouragement.

Enfin, je ne saurais oublier mes collègues de mécanique-énergétique, pour leur aide et la bonne ambiance qu'ils ont su créer tout au long de ces années.

## PROLOGUE

**L**e soleil couchait dans un fluide d'or oscillant comme le pendule de l'horloge des siècles, un ciel qui ne voyait guère de nuages, les vents caressaient une terre parfaitement lisse, pas de pluies, pas d'averses dans la météo simulée sur le micro-ordinateur primaire d'EDWARD LORENZ (1963). L'univers, selon ses calculs, est fantastique, mais en réalité il est beaucoup plus compliqué et non linéaire. LORENZ, lui ne savait pas, à l'époque, qu'il travaillait sur un problème typiquement chaotique. Il décrivit peu de temps après la convection de RAYLEIGH BENARD selon une nouvelle approche, il s'agissait de la théorie du chaos, éliminant l'utopie Laplacienne d'une prédictibilité déterministe. Il détecta une logique dessinant une suite de bifurcations qui étaient avant lui imprévisibles. Les bifurcations étaient la pierre philosophale recherchée, et des milliers de scientifiques sont partis à la poursuite.

Le problème de BENARD remonte dans le temps à l'année zéro du siècle précédent. Ses origines les plus significatives étaient les expériences d'HENRI BENARD (1900), et la théorie linéaire de LORD RAYLEIGH (1842- 1919) peu après. Les intérêts se développaient dès lors, et les effets se croisaient, une longue file de physiciens se succédant sans relâche sur le problème, afin de lui donner sa dimension la plus universelle.

JEAN-LOUIS MARIE POISEUILLE (1797-1869), C. LUDWIG (1856), C. SORET (1879) et HENRY DARCY (1803-1858) travaillaient chacun d'eux dans son coin et à son époque dans des problèmes touchant les fluides, mais sans être identiques ou même proches, et sans jamais savoir que leurs noms seront un jour réunis pour baptiser la désignation d'un problème qui allait les allier à leurs successeurs RAYLEIGH et BENARD. Il s'agit de la convection mixte sous effet LUDWIG dans un milieu poreux.

Dans toutes ces histoires, HENRI NAVIER (1785-1835) et GEORGES STOKES (1819-1903) restent maîtres de l'œuvre de point de vue mathématique puisque, en se basant sur les travaux de DANIEL BERNOULLI (1700-1782) et LEONHARD EULER (1707-1783), NAVIER découvre les fameuses équations en 1821 et 1822. Elles sont fondamentales dans la description mathématique des fluides. Celles-ci sont correctes mais la méthode pour y aboutir ne l'est pas. La bonne sera trouvée par STOKES, mathématicien irlandais, quelques années plus tard. Quelle que soit l'apport d'une tierce personne venant insérer un terme portant son nom dans les équations de conservation en dynamique des fluides, il se trouve qu'on se ramène toutefois à la forme canonique toujours baptisée équations de NAVIER-STOKES.

Étant décrit par ces mêmes équations de NAVIER-STOKES, le problème de RAYLEIGH BENARD est le paradis des mathématiques appliquées. Que ce soit sous leur forme analytique ou numérique, des théories diverses ont été établies à ce propos. Chacun façonnait les équations dans son moule selon les outils mathématiques, numériques et expérimentales dont il disposait. On fondait des paradigmes divers, mais au delà de leur divergence ils ont un point d'accumulation, voire d'adhérence, commun c'est le problème de RAYLEIGH BENARD. La théorie du chaos, l'analyse entropique, les modèles avec tension superficielle variable, sans ou avec approximation de BOUSSINESQ, avec génération de chaleur au sein du fluide, et l'analyse de stabilité linéaire connurent un âge d'or, des analyses asymptotiques et spectrales aussi. Et finalement le monde du numérique vient d'ébranler l'impitoyable abstraction des mathématiques et la lourde inertie des expériences, avec la dernière révolution des calculateurs superpuissants de nos jours. Il est pratiquement impossible de dénombrer le nombre de travaux touchant les différentes variantes du problème de BENARD, et pourtant le champ est encore exploitable et très fertile.

On vient d'évoquer cet historique pour dire que ce travail n'est qu'une initiation vers le cosmos de la science et les recherches scientifiques. C'est à ce moment que nous profitons de l'occasion afin de fructifier les expressions d'hommage aux grands philosophes des mathématiques et de physique qui ont converti le réel en abstrait et reconverti l'abstrait en réel.

# SOMMAIRE

Nomenclature.....	1
Introduction générale.....	5

## Chapitre I

### Généralités et Synthèse Bibliographique

<b>I.1. Généralités sur la convection influencée par l'effet Soret</b> .....	8
I.1.1. Convection naturelle, forcée et mixte .....	8
I.1.2. L'effet SORET (ou LUDEWIG) .....	9
I.1.3. Intérêt pratique et industriel de l'effet SORET .....	10
<b>I.2. Généralités sur les Milieux Poreux</b> .....	11
I.2.1 Porosité .....	11
I.2.2 Perméabilité .....	12
I.2.3 Tortuosité .....	12
I.2.4 Conductivité thermique équivalente .....	12
I.2.5 Volume élémentaire représentative .....	13
I.2.6 Modèle d'écoulement en milieu poreux .....	14
a. La loi de Darcy .....	14
b. Formulation de Forchheimer .....	14
c. Formulation de Brinkman .....	14
d. Mode générale .....	15
<b>I.3. Synthèse bibliographique</b> .....	15
<b>I.4. Conclusion</b> .....	19

## Chapitre II

### Géométrie et Modélisation Physique et Mathématique

<b>II.1. Introduction</b> .....	21
<b>II.2. Configuration étudiée</b> .....	21
<b>II.3. Hypothèses simplificatrices</b> .....	22
<b>II.4. Modélisation mathématique</b> .....	23
II.4.1. Equation de conservation de la masse totale .....	24

II.4.2. Modèle de Darcy .....	25
II.4.2.1 Equation de Darcy généralisée .....	25
II.4.2.2 Limite de validité de la loi de Darcy .....	25
II.4.3. Equation de conservation d'énergie.....	26
II.4.4. Equation de conservation de la masse de chaque espèce .....	27
<b>II.5. Mise en forme adimensionnelle des équations</b> .....	<b>29</b>
<b>II.6. Conditions initiales et aux limites</b> .....	<b>31</b>
II.6.1. Conditions initiales .....	31
II.6.2. Conditions aux limites .....	31
<b>II.7. Conclusion</b> .....	<b>31</b>

## Chapitre III

### Discrétisation et Méthode de Résolution

<b>III.1. Introduction</b> .....	<b>33</b>
<b>III.2. Méthodes des différences finis, principe et représentation</b> .....	<b>33</b>
<b>III.3. Maillage et stockage des variables</b> .....	<b>34</b>
<b>III.4. Discrétisation temporelle des équations</b> .....	<b>36</b>
<b>III.5. La discrétisation</b> .....	<b>37</b>
III.5.1. Discrétisation de l'équation de conservation d'énergie.....	37
III.5.2. Discrétisation de l'équation de conservation de la masse de chaque espèce.....	38
III.5.3. Discrétisation des équations de Darcy et de la conservation de la masse totale .....	39
III.5.3.1. Discrétisation temporelle .....	39
III.5.3.2. Condition aux limites de l'équation de pression .....	41
III.5.3.3. Discrétisation de l'équation de Darcy .....	41
III.5.3.4. Discrétisation de l'équation de poisson de pression .....	43
III.5.3.4.1. Discrétisation des conditions aux limites de pression .....	43
<b>III.6. Résolution du couplage pression-vitesse</b> .....	<b>44</b>
III.6.1. Formulation par Volume Finis de l'équation de poisson de pression (la méthode de Projection) .....	44

III.6.2. Résolution de l'équation de Poisson pour la pression (méthode de Gauss-Seidel) .....	46
III.6.3. La norme résiduelle de l'équation de pression .....	47
<b>III.7. Solution des systèmes d'équations discrétisés .....</b>	<b>47</b>
<b>III.8. Critère de convergence .....</b>	<b>49</b>
<b>III.9. Détails numérique .....</b>	<b>49</b>
<b>III.10. Conclusion .....</b>	<b>49</b>

## Chapitre IV

### Résultats et Discussions

<b>IV.1. Introduction .....</b>	<b>51</b>
<b>IV.2. Choix et influence du maillage .....</b>	<b>51</b>
<b>IV.3. Validation du programme numérique .....</b>	<b>52</b>
IV.3.1. Validation qualitative du programme numérique .....	52
IV.3.2. Validation quantitative du programme numérique .....	55
<b>IV.4. Résultats et discussion .....</b>	<b>58</b>
IV.4.1. Influence du nombre de Rayleigh-Darcy .....	58
IV.4.1.1. Influence du $Ra$ sur les fonctions de courants .....	59
IV.4.1.2. Influence du $Ra$ sur la distribution des températures .....	61
IV.4.1.3. Influence du $Ra$ sur la distribution des concentrations .....	62
IV.4.1.4. Influence du $Ra$ sur la distribution des pressions .....	63
IV.4.2. Influence du gradient de température sur la distribution des concentrations .....	64
IV.4.3. Influence du nombre de Lewis sur la distribution des concentrations .....	65
IV.4.4. Influence du rapport d'aspect .....	66
IV.4.5. Evolution temporelle des champs de concentration .....	69
<b>IV.5. Conclusion .....</b>	<b>72</b>
<b>Conclusion et Perspectives.....</b>	<b>73</b>
<b>Références Bibliographiques.....</b>	<b>75</b>



# NOMENCLATURE

## Lettres latines

$A$	: rapport d'aspect, H/L .....
$C$	: fraction massique adimensionnelle du constituant considéré.....
$C^*$	: fraction massique du constituant considéré.....
$C_P$	: chaleur spécifique à pression constante ..... $J.Kg^{-1}.K^{-1}$
$D$	: coefficient de diffusion de Fick ..... $m^2.s^{-1}$
$D_T$	: coefficient de thermodiffusion ..... $m^2.s^{-1}.K^{-1}$
$F, G$	: abréviations (utilisés dans le chapitre III) .....
$g$	: accélération de pesanteur ..... $m.s^{-2}$
$H$	: hauteur de l'enceinte ..... m
$imax$	: nombre de sous-domaines dans la direction horizontale.....
$jmax$	: nombre de sous-domaines dans la direction verticale .....
$K$	: perméabilité du milieu poreux ..... $m^2$
$L$	: longueur de l'enceinte ..... m
$Le$	: le nombre de Lewis .....
$N$	: facteur de séparation considéré.....
$P$	: pression adimensionnelle .....
$r$	: la norme résiduelle de l'équation de pression .....
$Ra$	: nombre de Rayleigh-Darcy .....
$Re$	: nombre de Reynolds de pore .....
$Rhs$	: coté droite de l'équation de pression .....

$S^T$	: coefficient de Soret .....	$K^{-1}$
$t$	: temps adimensionnelle .....	
$t^*$	: temps .....	s
$T$	: température adimensionnelle .....	
$T^*$	: température .....	K
$U$	: vitesse horizontale adimensionnelle .....	
$V$	: vitesse verticale adimensionnelle .....	
$x$	: coordonnées cartésiennes horizontales .....	
$y$	: coordonnées cartésiennes verticales .....	

### **Lettres grecques**

$\beta_T$	: coefficient d'expansion thermique.....	$K^{-1}$
$\beta_S$	: coefficient d'expansion massique.....	$g.mol.l^{-1}$
$\mu$	: viscosité dynamique.....	$kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\nu$	: viscosité cinématique.....	$m^2.s^{-1}$
$\alpha$	: coefficient de diffusivité thermique.....	$m^2.s^{-1}$
$\lambda$	: coefficient de conductivité thermique.....	$W.m^{-1}.K^{-1}$
$\sigma$	: rapport des capacités calorifiques (moyenne et de fluide).....	
$\Phi$	: variable générale dépendante.....	
$\Psi$	: fonction du courant adimensionnelle.....	
$\varepsilon$	: porosité normalisé du milieu poreux .....	
$\varepsilon^*$	: porosité du milieu poreux .....	
$\Delta C$	: différence de fraction massique .....	
$\Delta T$	: différence de température .....	K

- $\Delta x$  : dimension d'un sous-domaine dans la direction horizontal ..... m
- $\Delta y$  : dimension d'un sous-domaine dans la direction vertical..... m
- $\rho^*$  : Masse volumique .....  $\text{kg.m}^{-3}$

### **Vecteurs**

- $g$  : vecteur accélération de pesanteur .....  $\text{m.s}^{-2}$
- $J$  : flux de masse .....  $\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$
- $n$  : normale sortante d'une surface .....
- $v^*$  : vecteur vitesse interstitielle .....  $\text{m.s}^{-1}$
- $V$  : vecteur vitesse moyenne adimensionnelle .....
- $V^*$  : vecteur vitesse moyenne .....  $\text{m.s}^{-1}$

### **Opérateurs mathématiques**

- $\nabla$  : opérateur gradient
- $\nabla \cdot$  : opérateur divergence
- $\partial$  : dérivée partielle

### **Indices et exposants**

- $i$  : indice d'un point de maillage suivant x
- $j$  : indice d'un point de maillage suivant y
- $k$  : référence au constituant  $k$  du mélange
- $f$  : référence au fluide
- $s$  : référence au solide
- $m$  : référence au quantité équivalente (mélange)

- $n$  : relatif au temps  $t$
- $n+1$  : relatif au temps  $t+\Delta t$
- $E$  : relatif aux points à la frontière droite
- $W$  : relatif aux points à la frontière gauche
- $N$  : relatif aux points à la frontière supérieure
- $S$  : relatif aux points à la frontière inférieure
- $it$  : relatif au nombre de l'itération
- $F$  : référence à la température froide
- $H$  : référence à la température chaude
- $^{\circ}$  : relatif à l'état de référence
- $*$  : relatif aux variables dimensionnelles

## INTRODUCTION GENERALE

L'étude de fluides multiconstituants est utilisée dans de nombreux domaines: la modélisation des gisements pétroliers, le transfert d'humidité à travers des fibres isolantes et dans le transport de polluants dans le sol, etc.

Le comportement des fluides multiconstituants dans les milieux poreux est caractérisé par de nombreux phénomènes. En particulier, lorsqu'un mélange de plusieurs espèces au départ homogène, est soumis à un gradient de température, on observe une migration relative des espèces les uns par rapport aux autres. Selon les espèces et les conditions thermiques, cette migration partielle s'effectue vers les zones chaudes ou froides. En effet, les différences de température et de concentration provoquent une distribution non uniforme de la densité du milieu, ce qui donne naissance au mouvement du fluide sous l'effet de la gravité. Ce phénomène est appelé convection thermosolutale (ou convection bidiffusive).

Le choix de ce thème est justifié par l'importance fondamentale qui représentent les interactions des phénomènes de transfert de chaleur et de masse couplés dans les milieux poreux, et par l'importance pratique de ses applications surtout dans l'industrie pétrolière et ce qui concerne la productivité et l'optimisation de l'exploitation des gisements pétroliers.

Le travail présenté dans ce mémoire a pour but l'étude des mouvements de convection naturelle bidiffusive se développant dans une cavité rectangulaire, remplie par un milieu poreux saturé par un fluide multiconstituant. Les gradients de température et de concentration sont engendrés par des conditions aux limites thermique et solutale, imposées sur les parois actives du système. Bien entendu, la configuration géométrique de l'enceinte et les conditions aux limites imposées à ses frontières ont une influence majeure sur la structure de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse résultants.

L'investigation porte essentiellement sur les effets de la variation des paramètres de contrôle du problème sur la structure de l'écoulement et sur les transferts de chaleur et de masse au sein du système.

### **Contenu du mémoire**

La représentation de ce mémoire est comme suit:

Le premier chapitre a été consacré à des notions de base sur la convection naturelle influencée par l'effet Soret et les milieux poreux, et une synthèse bibliographique des travaux théoriques, expérimentaux et numériques ayant trait à la convection naturelle bidiffusive dans les milieux poreux.

La définition de la géométrie du problème étudié, ses modélisations mathématiques basées sur le modèle de Darcy, la mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernantes et des conditions aux limites, et la mise en évidence des grandeurs caractéristiques qui servent de paramètres de contrôle du problème sont abordés dans le deuxième chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation de la méthode des différences finis, sa mise en œuvre pour la discrétisation des équations du problème ainsi que le maillage adéquat, le stockage des variables et la méthode employée pour la résolution du système d'équation résultant de cette discrétisation.

On rassemble dans le chapitre quatre la validation de notre programme de calcul ainsi que les principaux résultats numériques de cette étude. Les commentaires, interprétations et analyses des divers résultats de cette étude paramétrique sont également présentés dans ce chapitre.

Enfin, une conclusion générale, qui résume les principaux résultats obtenus, donnée à la fin du mémoire, quelques recommandations pour les études futures sont également formulées.

Chapitre I:  
Généralités et  
Synthèse Bibliographique

## **I.1. Généralités sur la convection influencée par l'effet Soret [01]**

Dans une solution initialement homogène constituée au moins de deux espèces, un gradient thermique engendre, par simple diffusion, des transferts de matière au sein du mélange. Il en résulte la formation d'un gradient de concentration (effet Soret). La poussée d'Archimède thermo-compositionnelle résultante donne naissance à un écoulement convectif au sein de la solution. Si cette dernière est confinée dans une enceinte appropriée, le couplage de la convection et la thermodiffusion appelée thermo-gravitation, peut conduire à une séparation des composants du mélange. Ce principe simple de la nature est utilisé avec une grande efficacité dans les applications de recherche et les applications industrielles.

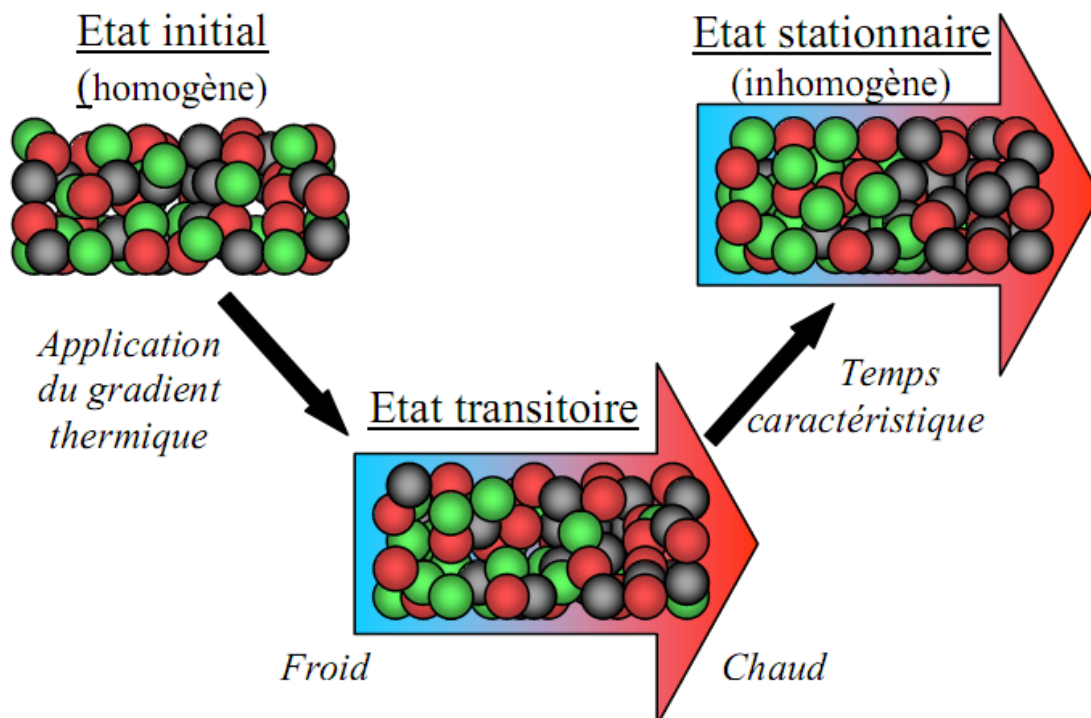
### **I.1.1. Convection naturelle, forcée et mixte**

Le terme convection est utilisé pour définir les mouvements dus à l'agitation thermique engendrant les différences de densités entre les molécules d'un fluide. Un fluide est le terme désignant un liquide ou un gaz : corps pur ou mélange dont les molécules ont assez de liberté pour se mouvoir les unes par rapports aux autres. On parle de la convection naturelle lorsqu'il s'agit d'agitations induites dans le fluide par des forces (de volume ou de surface) agissant à l'intérieur du volume étudié. Les mouvements générés sont dus aux variations locales de la masse volumique du fluide en fonction de la température et/ou de la concentration pour le cas de la convection naturelle d'origine thermique et/ou massique. La convection forcée concerne les mouvements convectifs qui apparaissent sous l'action d'une source externe, telle qu'une pompe ou le déplacement d'un objet dans le fluide, les mouvements induits par une différence de pression sont des mouvements de convection forcée où l'écoulement persiste même en l'absence de gradient de température. Quand la convection est due aux effets couplés cités précédemment on parle alors de convection mixte.



### I.1.2. L'effet Soret (ou Ludewig)

Dans un fluide soumis à un gradient de température il apparaît un gradient de concentration dû au gradient de température, c'est l'effet Soret ou bien encore appelé effet Ludewig (plus généralement, le nom « thermodiffusion » désigne cet effet en milieu gazeux, alors que l'expression « effet Soret » sera plus utilisé dans les liquides). Cet effet fut découvert simultanément par Ludewig en 1856, et (mieux exploité) par C. SORET en 1879, d'où le nom attribué au phénomène. Dans le champ de pesanteur, la convection au sein d'un fluide pur est due aux changements locaux de la masse volumique qui dépend non seulement de la température, mais également de sa composition. Généralement, les phénomènes de convection et de thermodiffusion ne peuvent être dissociés. Ce couplage est appelé diffusion thermogravitationnelle. Il est important de noter les travaux de Dufour qui, en 1872, avait déjà découvert l'effet inverse de l'effet Soret qui porte également son nom, qui consiste en l'apparition d'un gradient de température induit par un gradient de concentration. Toutefois, cet effet est négligeable en dehors des phases gazeuses. Dans notre étude, cet effet sera négligé devant l'effet Soret.



**Figure I.1:** Représentation de l'effet SORET dans un mélange ternaire

### **I.1.3. Intérêt pratique et industriel de l'effet Soret**

Les écoulements monophasiques et multiconstituants interviennent dans de nombreux secteurs industriels. Les combustibles sont en effet souvent stockés sous forme liquide ou solide pour les moteurs à combustion interne ou pour les moteurs fusées, il est aussi possible de séparer les isotopes d'un même élément. De plus, en couplant la convection naturelle au phénomène de thermodiffusion, il est possible d'accroître notablement le degré de séparation. La maîtrise de la quantification de ces écoulements est très importante aussi pour les métallurgistes lors des traitements thermo-chimiques des métaux dans les bains salins. Dans un but d'optimisation des coûts de production lors de l'extraction des fluides de gisements par les producteurs pétroliers (extraction à des profondeurs de plus en plus importantes et donc nécessitant des moyens technologiques plus avancés), il est important de connaître de façon précise la distribution des différentes espèces à l'intérieur d'un gisement. Cette distribution s'est établie pendant de longues périodes de formation du gisement et a été principalement influencé par la gravité ainsi que par la distribution des pressions dans le réservoir. Des moyens importants ont été mis en œuvre afin d'obtenir des modèles thermodynamiques fiables, permettant de restituer de manière correcte la répartition des espèces dans le réservoir. Etant donné qu'il n'est pas possible de négliger l'importante extension d'un gisement, il est très probable que cette répartition soit influencée par la convection naturelle, mais aussi par le gradient géothermique (gradient de température naturelle de la Terre), ce gradient pourrait être la cause de la migration d'espèces par l'effet Soret. Ce dernier consiste en l'établissement d'un gradient de concentration d'un composant chimique par la présence d'un gradient thermique, c'est-à-dire l'existence d'un gradient thermique est cause d'une migration différenciée des espèces.

## I.2. Généralités sur les Milieux Poreux

Un milieu poreux est un milieu continu, cohésif ou non, qui présente intérieurement une fraction de volume accessible à un fluide. Cette fraction de volume non solide, composée de cavernes, de crevasses, de pores etc. constitue ce que l'on appelle la porosité du milieu poreux. La porosité est évidemment un élément descriptif essentiel du milieu, toutefois, deux milieux poreux présentant la même porosité peuvent avoir des propriétés très différentes. On peut trouver dans un milieu poreux des pores ne débouchant pas (pores aveugle) ou occlus ; un milieu poreux contenant à la fois des pores aveugles et des pores ouverts plus ou moins interconnectés, pourra grâce à ces pores ouverts laisser s'écouler le fluide. Dans la réalité complexe que constitue un milieu poreux, des paramètres comme le diamètre de capillaire ou la porosité, ne constitue que des valeurs globales moyennes, incapables de traduire exactement la topologie complexe de l'écoulement réel à travers le milieu. Dans le cas où les espaces vides sont remplis par une même phase (liquide ou gazeuse), le milieu poreux joue un rôle important dans de nombreux secteurs industriels et phénomènes naturels. Pour nous limiter à l'exemple du génie pétrolier.

### I.2.1 Porosité

La porosité d'un milieu poreux noté  $\varepsilon^*$ , désigne le rapport du volume des pores sur le volume total du milieu poreux:

$$\varepsilon^* = \frac{\text{Volume des pores}}{\text{Volume total du milieu poreux}} \quad (\text{I.1})$$

### I.2.2 Perméabilité

La perméabilité  $K$  d'un milieu poreux dépend de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. L'unité de la perméabilité  $K$  est le *DARCY* ( $1\text{DARCY}$ = perméabilité d'un milieu poreux de  $1\text{cm}^2$  de section,  $1\text{cm}$  de longueur, soumis à une différence de pression de  $1\text{ bar}$  traversé par un fluide dont la vitesse de filtration est  $1\text{cm/s}$ )  $1\text{DARCY}=9,87.10^{-9}\text{ m}^2$ . La valeur de la perméabilité est déterminée par la mesure expérimentale, c'est le moyen le plus efficace pour évaluer cette valeur. Plusieurs évaluations ont été proposées donnant la perméabilité en fonction de la géométrie du milieu poreux.

### I.2.3 Tortuosité

La description de la géométrie des pores fait intervenir la notion de connectivité, correspondant à la complexité d'un chemin continu à travers l'espace des pores. Il faut aussi tenir compte des 'bras morts', qui sont nombreux dans les milieux peu poreux et très hétérogènes. Pour décrire ces différents aspects, on introduit un paramètre  $\tau$ , appelé tortuosité, que l'on définit de la manière suivante:

$$\tau = \left(\frac{L_e}{L}\right)^2 \quad (\text{I.2})$$

où  $L_e$  est la longueur réelle des lignes de courant du fluide traversant un échantillon de longueur  $L$ . la tortuosité joue un rôle important en diffusion.

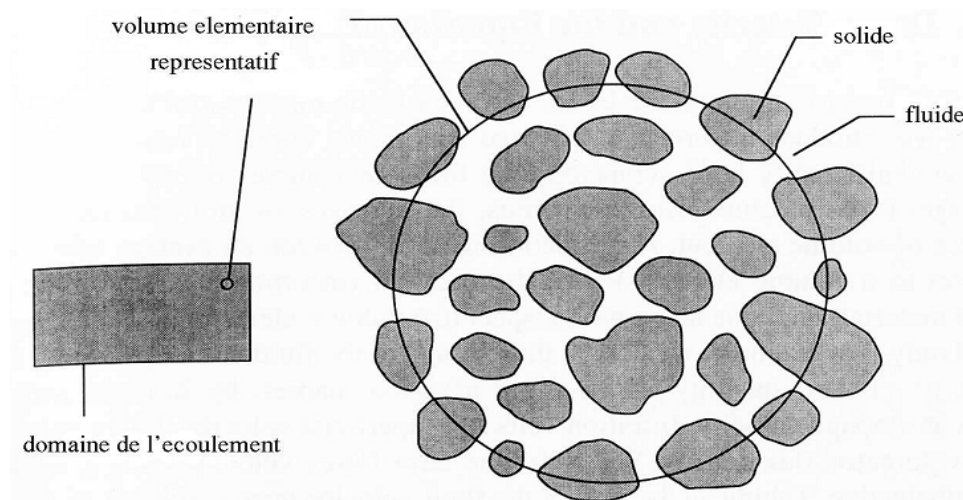
### I.2.4 Conductivité thermique équivalente

La conductivité équivalente est une fonction complexe des conductivités du solide et du fluide. En général, on ne pourrait pas évaluer la valeur exacte de la conductivité. Le moyen efficace est la mesure expérimentale dans les conditions d'utilisation en régime permanent.

### I.2.5 Volume élémentaire représentative [V.E.R]

Lorsqu'on étudie les écoulements en milieux poreux, deux échelles s'imposent pour la description des phénomènes:

- L'échelle des pores, ou microscopique, à l'intérieur de laquelle les grandeurs locales peuvent très largement varier, en général, cette échelle est associée au diamètre moyen des pores.
- L'échelle du milieu poreux, ou macroscopique, caractéristique des variations significatives de ces mêmes grandeurs, définies en moyenne sur un certain volume de milieu poreux, appelé communément Volume Élémentaire Représentatif et noté V.E.R. Cette échelle macroscopique est associée à la dimension géométrique du milieu.



**Figure I.2:** Volume élémentaire représentatif du milieu poreux.

### I.2.6 Modèle d'écoulement en milieu poreux

Les lois des écoulements en milieu poreux ne constituent que des approximations. On s'intéresse en général qu'au phénomène à l'échelle macroscopique. Plusieurs lois phénoménales sont utilisées, la plus importante est la loi de Darcy, les autres lois sont en majorité des extensions de cette loi.

#### a. La loi de Darcy

Etabli par Darcy(1856) sur la base d'observations expérimentales, c'est une relation empirique qui décrit macroscopiquement les écoulements dans les milieux poreux, moyennant la vitesse de filtration:

$$\vec{V}^* = -\frac{K}{\mu}(\vec{\nabla}^* P^* - \rho^* \vec{g}) \quad (\text{I.3})$$

Nous pouvons citer les formulations les plus souvent utilisées dans la littérature.

#### b. Formulation de Forchheimer

La formulation de Forchheimer décrit l'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux homogène et isotrope, en régime stationnaire et en présence de la pesanteur, est la suivante:

$$\nabla P^* = \rho^* g - \frac{\mu}{K} V^* + \frac{b\rho}{\sqrt{K}} |V^*| V^* \quad (\text{I.4})$$

$b$ : Paramètre de Forchheimer.

#### c. Formulation de Brinkman

Brinkman a encore généralisé la loi de Darcy en introduisant un terme de dissipation visqueuse dans la loi de Stokes:

$$\nabla P^* = \rho^* g - \frac{\mu}{K} V^* + \mu_{eff} \nabla^2 V^* \quad (\text{I.5})$$

$\mu_{eff}$  : Le terme de Brinkman.

#### d. Mode générale

On généralise les trois derniers équations en introduisons un terme transitoire et le terme convectif  $(V^*\nabla)V$ , ce qui conduire à l'équation suivante:

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial V^*}{\partial t^*} + \frac{\rho}{\varepsilon^2} (V^*\nabla)V = -\nabla P^* + \rho^* g - \frac{\mu}{K} V^* + \frac{b\rho}{\sqrt{K}} |V^*| V^* + \mu_{eff} \nabla^2 V^* \quad (I.6)$$

Cette équation est équivalente à l'équation de Navier Stokes issue du bilan de quantité de mouvement en milieu fluide.

### I.3. Synthèse bibliographique

La convection naturelle thermosolutale comme l'on déjà signalé a une grande importance dans de nombreux domaines, la plupart des travaux expérimentaux, analytiques et numériques qui traitent des transferts convectifs de chaleur et de masse dans les milieux poreux ont été résumés dans l'ouvrage de **Nield et Bejan [02]**, parmi ces travaux nous citons:

**Bennacer et al [03]** ont présenté une étude numérique et analytique concernant le transfert combiné de chaleur et de masse dans un milieu poreux. Ce milieu est globalement homogène et présente une anisotropie thermique. L'équation qui gouverne l'écoulement est celle de Darcy-Brinkman. Le système d'équations couplées est résolu par la méthode classique des volumes finis. Le schéma hybride est utilisé pour la discrétisation spatiale des équations. Le système d'équations linéarisées est résolu par un double balayage(TDMA). Le couplage pression-vitesse est assuré par une procédure itérative par l'accouplement de deux algorithmes, Simpler et Simplec. Dans le cas d'écoulement d'origine thermique, l'analyse d'échelle est appliquée pour prédire analytiquement l'évolution du transfert de chaleur et de masse en fonction de l'anisotropie thermique. Les simulations numériques sont présentées pour une cavité carrée en faisant varier une large gamme de

paramètres. L'influence des différents paramètres caractérisant ce genre problème a été exploré numériquement en faisant varier le taux d'anisotropie thermique, le nombre de Darcy, le nombre de Lewis, le rapport des forces de volume, le nombre de Rayleigh thermique et le rapport des conductivités. Une corrélation globale a été établie permettant de prédire le transfert de masse pour les milieux poreux thermiquement anisotropes en régime Darcy. Par ailleurs les auteurs ont découpé dans cette étude les effets de l'anisotropie thermique et hydraulique afin de pouvoir analyser plus précisément l'influence de chaque anisotropie.

**Benano-Melly et al [04]** ont étudié numériquement et expérimentalement le phénomène de thermodiffusion dans un mélange binaire pour le but de mesurer le coefficient de thermodiffusion (coefficient de Soret), la cavité utilisée est une cavité verticale poreuse soumise à un gradient horizontal de température, ils ont étudié en détail l'influence de la convection d'origine thermique sur le transport d'un soluté de faible fraction massique dans l'eau. En outre, ils ont montré que la théorie représente bien le comportement de soluté quand la convection solutale est négligeable. Les résultats obtenus montrent un écart entre les mesures numériques et les mesures expérimentales, ils ont démontré que cet écart revient à la dispersion existante dans le milieu poreux. Ils ont conclu que l'influence de la dispersion sur le transport de soluté par diffusion et thermodiffusion peut-être forte.

**Willbois et al [05]** ont construit un modèle macroscopique simulant le transfert de chaleur et de masse d'un liquide contenant de nombreuses espèces dans les milieux poreux. Afin de l'utiliser dans la modélisation des champs de pétrole, les phénomènes physiques étudiés sont la ségrégation gravitationnelle, la thermodiffusion, la convection et la diffusion. L'originalité de cette approche est de simuler le mouvement de chaque composante afin d'en déduire la distribution des espèces et des flux de mélange. Le flux de masse calculé par un équilibre entropique est comparé avec l'équation de Darcy pour évaluer les



coefficients phénoménologiques. Après avoir présenté les origines possibles de variations dans la composition et les façons dont ils sont habituellement étudiés, après **F. Montel et al [06]** ont développé un autre modèle similaire et amélioré, en ajoutant l'influence des réactions chimiques entre les espèces sur le comportement et la distribution des espèces au sein des mélanges.

**Adrian Postelnieu [07]** a étudié numériquement la convection naturelle bidiffusive sur une surface verticale intégrée dans un milieu poreux saturé par un fluide soumis à une réaction chimique, en tenant compte la diffusion-thermo (effet Dufour) et la thermo-diffusion (effet Soret), les équations gouvernantes sont résolues par une méthode numérique de Keller-box (une version modifiée), les paramètres de problème sont le nombre de Lewis, les coefficient de Dufour et de Soret, le coefficient de séparation (sustentation), l'ordre et la paramètre de la réaction chimique, il a présenté les profils de concentration sans dimension dans la couche limite ainsi que les nombres local de Nusselt et de Sherwood sous forme graphique, et dans les tableaux pour différentes valeurs de paramètres du problème, il a conclu que l'ordre et la paramètre de la réaction chimique ont un rôle crucial dans la solution.

**Joly et al [08]** ont étudié l'influence de l'effet Soret sur la convection naturelle dans une enceinte verticale (l'hauteur >> la largeur) remplie par un fluide binaire, les parois vertical sont soumises à des flux thermiques constantes, tant que les autres parois sont adiabatiques, l'analyse porte sur une situation particulière où les forces induisent par les effets thermique et solutale sont opposés entre eux, les équations gouvernantes sont résolues analytiquement (méthode basée sur la théorie des écoulement parallèle) et numériquement, une étude paramétrique a été faite a la fin de cette étude.

**Elossmani et Amaziane [09]** ont étudié numériquement un modèle d'écoulement incompressible ayant des applications dans l'ingénierie pétrolière et l'hydrogéologie, en modélisant le transport d'un fluide en une seule phase (un contaminant dans l'eau). Le milieu considéré n'est pas homogène, et composé de diverses couches géologiques.

**El-hijri et Draoui [10]** ont étudié numériquement le transfert et la diffusion des polluants dans une cavité bidimensionnelle différentiellement chauffée. Cette étude consistera essentiellement au développement d'un code de calcul et à la réalisation d'une simulation numérique menée à l'aide de celui-là.

**Ould-Amer et Slama [11]** ont étudié la convection naturelle dans une cavité carrée poreuse multicouche. Chaque couche de milieu poreux (trois couche) est considérée homogène, isotrope et saturé par un seul fluide. Cette enceinte est soumise à des températures différentes le long des parois latérales, les deux autres parois sont isolées. Dans le but de généraliser les résultats, les équations gouvernantes sont mises sous forme adimensionnelle. Les paramètres de l'étude sont les nombres de Rayleigh modifié et fluide, le nombre de Darcy, le nombre de Prandtl ainsi que les rapports des perméabilités entre différentes couches. La convection naturelle bidimensionnelle laminaire est modélisée numériquement par la méthode numérique des volumes finis.

**Bousri et Bouhadef [12]** ont étudié numériquement le transfert de chaleur et de masse simultanés dans les écoulements de certains fluides dans des milieux poreux réactifs. Une analyse basée sur le modèle de Darcy-Brinkman et les équations de conservation, qui décrit l'évolution spatiale et temporelle des phénomènes couplés de réaction chimique, de diffusion et de transfert thermique a été entreprise. L'approche est faite à partir d'un modèle 2D, en convection forcée, avec une configuration géométrique cylindrique, le système d'équations gouvernantes obtenu est discrétisé et traité numériquement, grâce à la méthode des volumes finis. La résolution a ensuite effectué à partir de l'algorithme Simpler, les résultats obtenus ont permis de quantifier les différents échanges de chaleur et de masse, et d'établir la variation de la concentration et de la température dans le milieu poreux réactif, en fonction d'un certain nombre de paramètres tel que le nombre de Darcy, le nombre de Reynolds, et le nombre de Frank-Kametskii modifié.

D'après cette recherche bibliographique, on a constaté que la plupart des études ont été menées en utilisant un modèle mathématique qui permet seulement des études en régime établi et pour des fluides binaires dont le soluté a une faible fraction massique ( $C_{soluté} \ll 1$ ), la nouveauté de notre travail consiste donc à considérer l'évolution temporelle des champs massique, thermique et dynamique pour un fluide binaire contenant des espèces de fraction massique importante, et de choisir par conséquent une autre méthode numérique pour résoudre le système d'équations gouvernants notre problème, notre but étant toujours de trouver une description de la convection naturelle bidiffusive influencée par l'effet Soret, qui permet de mettre en évidence l'interaction entre les transferts thermique et massique dans les milieux poreux. Dans ce travail on a mené également à une étude paramétrique plus détaillées que celle dans la littérature.

#### **I.4. Conclusion**

Après cette recherche bibliographique et la définition des axes de cette étude, on aborde le choix du modèle mathématique ainsi que les conditions aux limites, qui lui sont associés, dans le chapitre suivant.

Chapitre III :  
Géométrie  
et Modélisation Physique  
et Mathématique

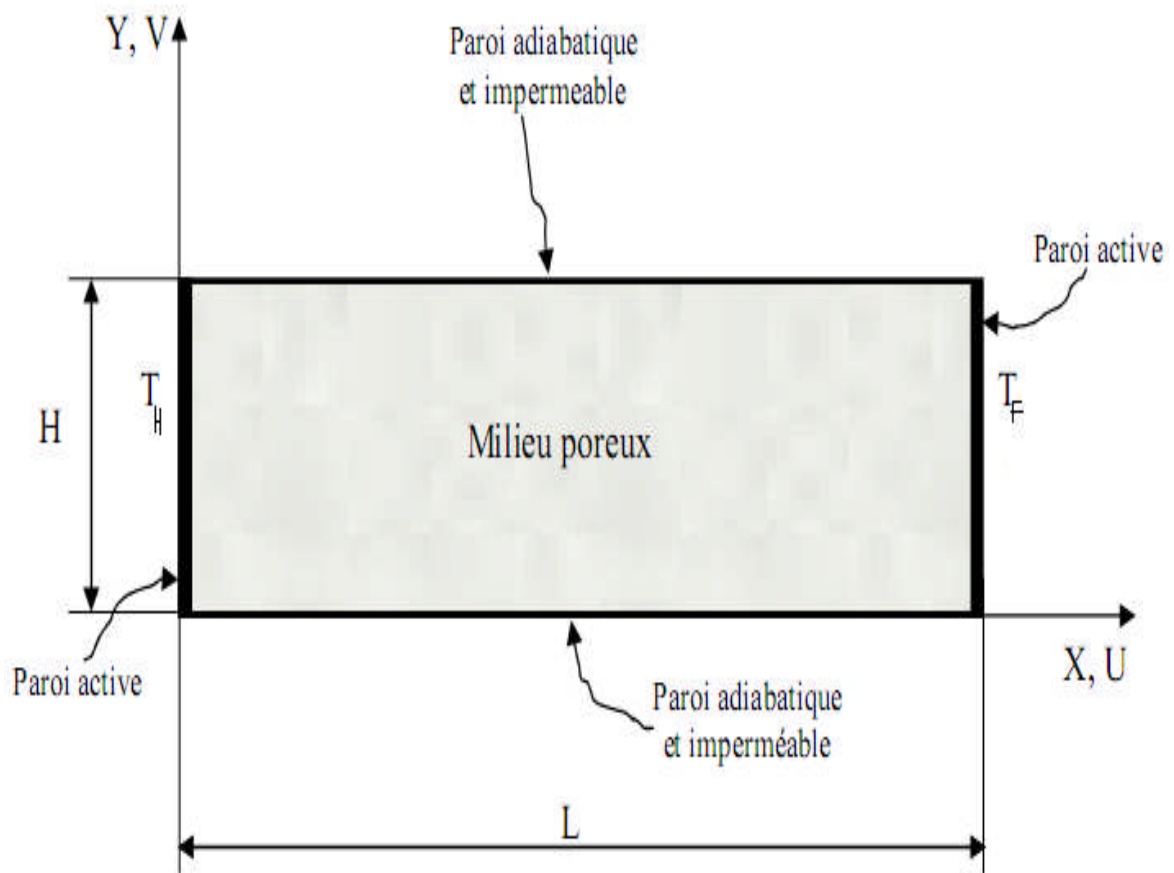
## II.1. Introduction

Dans ce chapitre on va présenter les équations aux dérivées partielles (E.D.P) modélisant notre problème (convection thermique et massique), les hypothèses simplificatrices ainsi que les conditions initiales et aux limites appropriées à notre configuration.

## II.2. Configuration étudiée

Nous allons considérer la simulation numérique de la convection naturelle thermique et massique dans un milieu poreux contenu dans une enceinte rectangulaire. La géométrie du problème considéré est illustrée sur la figure(II.1). Il s'agit d'une enceinte rectangulaire de longueur  $L$  et de hauteur  $H$ , ayant un rapport d'aspect  $A = \frac{H}{L}$ .

L'enceinte est remplie d'une matière poreuse homogène et isotrope. Les parois verticales de l'enceinte sont supposées imperméables et soumises à des températures constantes mais différentes, tandis que les parois horizontales sont considérées comme adiabatiques et imperméables. Le fluide constitué d'au moins deux composants, les gradients de température et de concentration résultants des conditions aux limites produisent la convection naturelle thermosolutale.



**Figure II.1:** Description de la géométrie du problème.

### II.3. Hypothèses simplificatrices

Pour une formulation simple du modèle mathématique, nous considérons les approximations les plus couramment employées dans ce type de problème, entre autres les approximations de Boussinesq. Nous supposons alors que:

1. Le milieu poreux est considéré homogène, isotrope et ne subit pas de variation spatiale de la porosité dans l'enceinte.
2. Le fluide qui s'écoule est incompressible.
3. Le problème est bidimensionnel.

4. L'écoulement engendré est laminaire.
5. Il n'y a ni réaction chimique, ni source de chaleur ou de masse dans le domaine étudié.
6. Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
7. Dans la convection naturelle, le couplage de transfert de chaleur et de matière est nécessaire, parce que la densité de mélange du fluide dépend de la température et de la concentration. Les propriétés thermo-physiques du fluide sont constantes et sont évaluées à la température et à la concentration de référence. On considère approximativement que  $\rho^* = \rho_0$  est constante dans tous les termes, sauf celui qui contient l'accélération de la pesanteur  $g$  où  $\rho = f(T, C)$ ,  $\rho$  est en fonction de la température et de concentration.

On a alors:

$$\rho^* = \rho_0 \cdot [1 - \beta_T(T^* - T_0) - \beta_S(C^* - C_0)] \quad (\text{II.1})$$

$T_0, C_0$  : La température et la concentration de référence.

Dans l'équation (II.1)  $\beta_T$  et  $\beta_S$  représentent respectivement les coefficients d'expansion thermique et massique donnée par Ben Ahmed [01]:

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho^*}{\partial T^*} \right)_{C^*} \quad (\text{II.2})$$

$$\beta_S = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho^*}{\partial C^*} \right)_{T^*} \quad (\text{II.3})$$

## II.4. Modélisation mathématique

En tenant compte de toutes les hypothèses considérés, le système d'équation aux dérivées partielles décrivant ce problème est composé de l'équation de conservation de la masse (équation de continuité), l'équation de darcy (équation de mouvement), l'équation de transfert de chaleur et l'équation de conservation de la masse de chaque espèces dans un milieu poreux. Les

équations modélisantes à travers un milieu poreux s'écrivent alors sous les formes suivantes [13][14]:

#### II.4.1. Equation de conservation de la masse totale

S'écrit sous la forme:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \vec{\nabla}^* \cdot (\rho^* \vec{v}^*) = 0 \quad (\text{II.4})$$

Pour adapter cette équation en milieux poreux on applique la méthode de prise de moyenne, qui permet d'établir une équivalence entre le milieu dispersé réel et le milieu continu fictif. On introduit la notion de vitesse de filtration  $\vec{V}^*$ , qui correspond à la vitesse moyenne du fluide prise sur un V.E.R (Volume Élémentaire Représentative). En comparant cette vitesse à la vitesse moyenne du fluide dans les pores, ou la vitesse interstitielle  $\vec{v}^*$ , on a la relation:

$$\vec{V}^* = \varepsilon^* \cdot \vec{v}^* \quad (\text{II.5})$$

L'équation de conservation de la masse s'écrit:

$$\varepsilon^* \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \vec{\nabla}^* \cdot (\rho^* \vec{V}^*) = 0 \quad (\text{II.6})$$

Dans le cas particulier d'un fluide incompressible l'équation (II.6) se ramène à:

$$\vec{\nabla}^* \cdot \vec{V}^* = 0 \quad (\text{II.7})$$



### II.4.2. Modèle de Darcy

La formulation adoptée dans notre étude repose sur la validité de la loi de Darcy pour décrire l'écoulement au sein d'un milieu poreux. Cette loi n'est valable que pour des écoulements à basses vitesses et pour des milieux de porosité pas trop élevée. Si les écarts de températures imposés ne sont pas trop importants, les vitesses de fluides sont suffisamment faible pour que les écoulements puissent être considérés comme Darcéens, la porosité utilisée dans la plupart de nos études ne dépasse pas les limites de validité de cette loi.

#### II.4.2.1 Equation de Darcy généralisée

L'équation se généralise pour un milieu poreux isotrope à:

$$\vec{V}^* = -\frac{K}{\mu} (\vec{\nabla}^* \vec{P}^* - \rho^* \vec{g}) \quad (\text{II.8})$$

où  $\rho^*$  désigne la masse volumique du fluide saturant le milieu poreux.

#### II.4.2.2 Limite de validité de la loi de Darcy

Pour les écoulements en milieu poreux, on définit un nombre de Reynolds de pore basé sur la vitesse interstitielle  $\vec{v}^*$  et une longueur  $d$ , caractéristique de la dimension des pores soit :

$$Re = \vec{v}^* \frac{d}{\nu} \quad (\text{II.9})$$

Où  $\nu = \frac{\mu}{\rho^*}$  désigne la viscosité cinématique de fluide. On prend souvent  $d = \sqrt{k}$ , pour le calcul du nombre de Reynolds de pore.

Selon la littérature on distingue plusieurs régimes d'écoulement que l'on peut classifier de la manière suivante:

1. Pour des nombres de Reynolds de pore inférieurs à 1, le régime d'écoulement est laminaire, les forces visqueuses sont prédominantes et la loi de Darcy est applicable.

2. Lorsque  $Re$  est compris entre 1 et 10, les couches limites au niveau des parois solide des pores se développent. En dehors de ces couches limites apparait un régime d'écoulement inertiel. Les forces d'inertie deviennent alors importantes et il n'y a plus de proportionnalité entre le gradient de pression et la vitesse de filtration: la loi de Darcy n'est plus applicable. Ce régime d'écoulement stationnaire laminaire, persiste jusqu'à un nombre de Reynolds de 150 environs.
3. Pour des nombres de Reynolds de pore entre 150 et 300, un régime d'écoulement laminaire instationnaire se développe. Ce régime est d'abord oscillatoire résultant de la superposition de plusieurs modes des périodes d'amplitude distinctes.
4. Au delà de  $Re$  de l'ordre de 300, le régime d'écoulement devient chaotique, et présente les caractéristiques d'un écoulement turbulent.

### II.4.3. Equation de conservation d'énergie

Soit un milieu isotrope dans lequel les effets radiatifs, la dissipation visqueuse et l'effet de variation de pression sont négligeable. On considère que chaque élément de volume est en équilibre thermique local,  $T_s^* = T_f^* = T^*$  : on parle de modèle a une température. Enfin la conduction de chaleur se fait en parallèle dans le solide et le fluide, il n'y a pas donc de transfert de chaleur d'une phase à l'autre.

L'équation de transfert de chaleur dans la phase solide s'écrit:

$$(1 - \varepsilon^*)(\rho c_p)_s \frac{\partial T_s^*}{\partial t^*} = (1 - \varepsilon^*) \vec{\nabla}^* \cdot (\lambda_s \vec{\nabla}^* T_s^*) \quad (\text{II.10})$$

Et pour la phase fluide s'écrit:

$$\varepsilon^*(\rho c_p)_f \frac{\partial T_f^*}{\partial t^*} + (\rho c_p)_f \vec{\nabla}^* \cdot T_f^* \vec{V}^* = \varepsilon^* \vec{\nabla}^* \cdot (\lambda_f \vec{\nabla}^* T_f^*) \quad (\text{II.11})$$

Utilisant l'hypothèse d'un équilibre thermique locale,  $T_s^* = T_f^* = T^*$ , et sommant les deux équations en température, il vient:

$$(\rho c_p)_m \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + (\rho c_p)_f \vec{\nabla}^* \cdot T^* \vec{V}^* = \vec{\nabla}^* \cdot (\lambda_m \vec{\nabla}^* T^*) \quad (\text{II.12})$$

avec:

$$(\rho c_p)_m = (1 - \varepsilon^*)(\rho c_p)_s + \varepsilon^*(\rho c_p)_f \quad (\text{II.13})$$

$(\rho c_p)_m$ : La capacité calorifique équivalente du milieu

et :

$$\lambda_m = (1 - \varepsilon^*)\lambda_s + \varepsilon^*\lambda_f \quad (\text{II.14})$$

$\lambda_m$ : La conductivité thermique équivalente du milieu.

On introduit  $\sigma$ , le rapport de la capacité calorifique moyenne à celle du fluide, et  $\alpha$  la diffusivité thermique définit par:

$$\sigma = \frac{(\rho c_p)_m}{(\rho c_p)_f} \quad (\text{II.15})$$

et:

$$\alpha = \frac{\lambda_m}{(\rho c_p)_f} \quad (\text{II.16})$$

L'équation de conservation de l'énergie sera:

$$\sigma \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \vec{\nabla}^* \cdot T^* \vec{V}^* = \alpha \vec{\nabla}^* \cdot (\vec{\nabla}^* T^*) \quad (\text{II.17})$$

#### II.4.4. Equation de conservation de la masse de chaque espèce

D'après l'équation (II.6) on peut écrire l'équation de conservation de la masse de chaque constituant:

$$\varepsilon^* \frac{\partial \rho_k^*}{\partial t^*} + \vec{\nabla}^* \cdot (\rho_k^* \vec{V}_k^*) = 0 \quad (\text{II.18})$$

où :  $\vec{V}_k^*$  : La vitesse intrinsèque du constituant  $k$ .

$\rho_k^*$  : La concentration du constituant  $k$ , le plus lourd du mélange.

L'équation précédente devient:

$$\varepsilon^* \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \vec{\nabla}^* \cdot \left( \sum_k \rho_k^* \vec{V}_k^* \right) = 0 \quad (\text{II.19})$$

ce qui revient à la conservation de la masse, si on identifie la vitesse du mélange à [13]:

$$\vec{V}^* = \frac{1}{\rho^*} \sum_k \rho_k^* \vec{V}_k^* \quad (\text{II.20})$$

Le mouvement d'un constituant par rapport au mélange est uniquement due au phénomène de diffusion, ainsi  $(\vec{V}_k^* - \vec{V}^*)$  est la vitesse de diffusion de constituant  $k$ , et  $\vec{j}_k$  est le flux de diffusion du constituant  $k$ .

$$\vec{j}_k = \rho_k^* (\vec{V}_k^* - \vec{V}^*) \quad (\text{II.21})$$

L'équation (II.19) sera :

$$\rho^* \left[ \varepsilon^* \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + \vec{\nabla}^* \cdot (C^* \vec{V}^*) \right] = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{j}_k) \quad (\text{II.22})$$

avec:

$$C^* = \frac{\rho_k^*}{\rho^*} \quad (\text{II.23})$$

Dans le cas qui nous intéresse, on tient compte de l'effet Soret. Le vecteur flux de diffusion du constituant  $k$ , de fraction massique  $C$ , est donné par:

$$\vec{J} = -\rho^* D \vec{\nabla}^* C^* - \rho^* C^* (1 - C^*) D_T \vec{\nabla}^* T^* \quad (\text{II.24})$$

$C^*$  : Fraction massique du constituant  $k$  le plus dense du mélange

$D_T$  : Coefficient de thermo-diffusion.

$D$  : Coefficient de diffusion de Fick.

Finalemment l'équation de conservation de la masse du constituant  $k$  en milieu poreux est:

$$\varepsilon^* \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + \vec{\nabla}^* \cdot (C^* \vec{V}^*) = \vec{\nabla}^* \cdot [D \vec{\nabla}^* C^* + C^* (1 - C^*) D_T \vec{\nabla}^* T^*] \quad (\text{II.25})$$

## II.5. Mise en forme adimensionnelle des équations

Pour mettre le système d'équations précédent sous une forme adimensionnelle, nous avons choisi comme longueur de référence la longueur  $L$  de l'enceinte, car c'est sur cette longueur qu'agissent les forces motrices donnant naissance à l'écoulement convectif. On fait l'hypothèse que le terme  $C^*(1 - C^*)$  présent dans l'équation de conservation des espèces varie peu par rapport à  $C^*_0(1 - C^*_0)$  désignant la fraction massique à l'état initial [14].

Dans cette étude les grandeurs sont rendues sans dimension par les variables adimensionnelle suivante :

le terme de Boussinesq:

$$\rho^* = \rho^*_0 [1 - \beta_T (T^* - T^*_0) - \beta_S (C^* - C^*_0)] \quad (\text{II.26})$$

$$x = \frac{x^*}{L} \quad (\text{II.27})$$

$$y = \frac{y^*}{L} \quad (\text{II.28})$$

$$t = \frac{\alpha}{\sigma H^2} t^* \quad (\text{II.29})$$

$$U = \frac{L}{\alpha} U^* \quad (\text{II.30})$$

$$V = \frac{L}{\alpha} V^* \quad (\text{II.31})$$

$$T = \frac{T^* - T_o^*}{\Delta T^*}, \quad \text{avec : } \Delta T^* = T_H^* - T_F^* \quad (\text{II.32})$$

$$C = \frac{C^* - C_o^*}{\Delta C^*}, \quad \text{avec : } \Delta C^* = -\Delta T^* \cdot C_o^* (1 - C_o^*) S^T \quad (\text{II.33})$$

$$S^T = \frac{D_T}{D} \quad (\text{II.34})$$

$$P = \frac{K}{\mu \alpha} P^* \quad (\text{II.35})$$

Le système d'équations sans dimension obtenue est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \\ \vec{V} = -\vec{\nabla} P + Ra(T + N \cdot C) \cdot \vec{e}_y \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = \nabla^2 T \\ \varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} C = \frac{1}{Le} (\nabla^2 C - \nabla^2 T) \end{array} \right. \quad (\text{II.36})$$

Tel que:

$$Ra = \frac{K g L \beta_T \Delta T^*}{\nu \alpha} : \text{Le nombre de Rayleigh-Darcy.}$$

$$N = -C_o^* (1 - C_o^*) \frac{\beta_S D_T}{\beta_T D} : \text{Le facteur de séparation.}$$

$$Le = \frac{\alpha}{D} : \text{Le nombre de Lewis.}$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon^*}{\sigma} : \text{La porosité normalisée.}$$

$S^T$  : Le coefficient de Soret.

$\vec{e}_y$  : Vecteur unitaire porté par l'axe vertical (Y).

## II.6. Conditions initiales et aux limites

La solution du problème non dimensionnel dépend des valeurs des paramètres de contrôle et des conditions initiales et aux limites adimensionnelles nécessaires pour la résolution des équations de ce système. Ces conditions sont les suivantes:

### II.6.1. Conditions initiales

- à  $(t=0)$  ;  $U=V=0$ ,  $T = \frac{T_F+T_H}{2}$  et  $C=C_0$  (*état initial*) (II.37)

### II.6.2. Conditions aux limites

Le problème reste incomplet sans l'introduction des conditions aux limites que nous spécifions ces dessous :

- $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$  ; pour toutes les parois. (II.38)

- $T = T_H$ ,  $(\vec{\nabla}C - \vec{\nabla}T) \cdot \vec{n} = 0$  pour  $x = 0$ ,  $\forall y$ . (II.39)

- $T = T_F$ ,  $(\vec{\nabla}C - \vec{\nabla}T) \cdot \vec{n} = 0$  pour  $x = 1$ ,  $\forall y$ . (II.40)

- $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial y} = 0$  pour  $y = 0$  et  $y = \frac{H}{L}$ ,  $\forall x$ . (II.41)

## II.7. Conclusion

Après avoir développé les équations dynamiques, thermiques et massiques, ainsi que les conditions aux limites associées à notre configuration, on va modéliser numériquement le problème. Pour cela la méthode des différences finis (version de Griebel [15]) a été choisie pour la discrétisation des équations gouvernantes. Les questions relatives à la technique de résolution, ainsi que le choix du maillage seront donc également abordées dans le chapitre suivant.

Chapitre III :  
Discrétisation  
et  
Méthode de Résolution



### III.1. Introduction

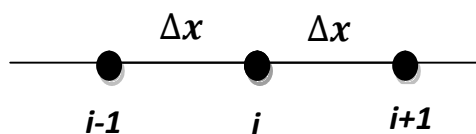
En plus de la méthode des différences finis adoptée dans cette étude, la méthode des volumes finis est fréquemment utilisée dans les simulations numériques des problèmes de convection thermosolutale et de la mécanique des fluides. Lors de la simulation numérique on procède par la discrétisation, qui permet la substitution des équations différentielles de transport par des équations algébriques.

Ces équations algébriques décrivent les mêmes phénomènes physiques modélisés par les équations différentielles originales, mais en un certain nombre discret de points.

### III.2. Méthodes des différences finis, principe et représentation

La méthode des différences finis consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction, en un nombre fini de points discrets ou nœuds de maillage.

Soit le maillage régulier en 1D:



**Figure III.1** : Maillage régulier unidimensionnel.

$$\text{où: } \Delta x = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$$

On exprime les dérivées partielles en fonction des valeurs aux points de discrétisation, on a:

$$\left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]_i = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{III.1})$$

et :

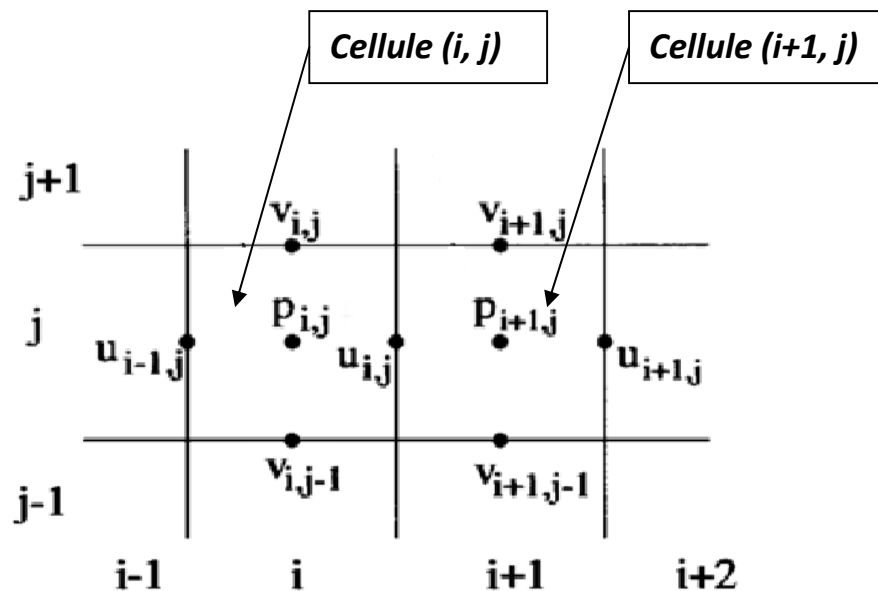
$$\left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_i = \begin{cases} \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} & \text{schema décentré à droite} \\ \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} & \text{schema décentré à gauche} \\ \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} & \text{schema centré} \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

On peut noter qu'a priori, on a le choix entre les trois formes d'approximation de la dérivée première.

### III.3. Maillage et stockage des variables

Dans la simulation par la méthode des différences finis, le domaine de calcul (domaine physique) est divisé en un nombre fini de sous-domaines élémentaires appelés cellules, qui sont la résultante de l'intersection des grilles horizontales et verticales.

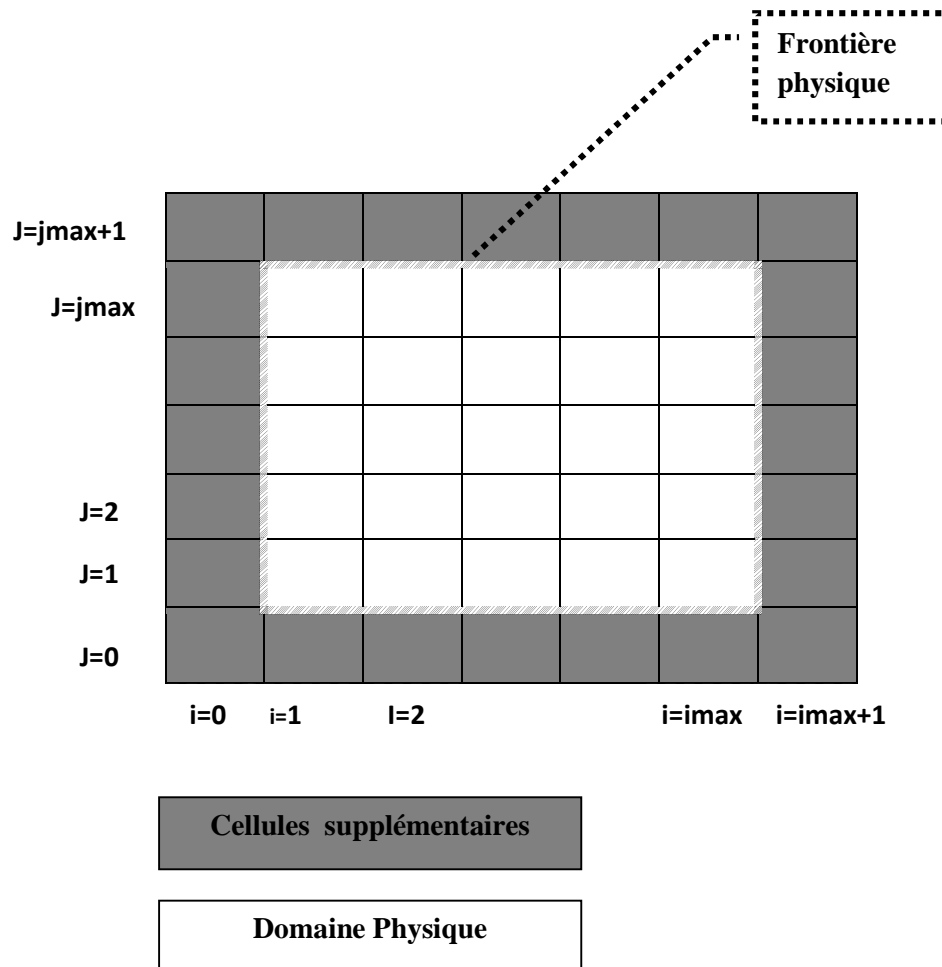
Les grandeurs scalaires (Pression, température et concentration) sont stockées aux centres des cellules, tandis que les grandeurs vectorielles ( $U$  et  $V$ ) sont stockées dans les milieux des bords, les composantes horizontales  $U$  sont placées sur les bords verticaux et les composantes verticales  $V$  sont placées sur les bords horizontaux, ce type de maillage dit «maillage décalé» qui permet une bonne approximation des flux convectifs, et une meilleure évaluation des gradients de pression ainsi qu'une stabilisation numérique des solutions (Figure III.2).



**Figure III.2:** Stockage des variables dans le maillage décalé.

En conséquence, les valeurs discrètes du  $U$ ,  $V$  et les grandeurs scalaires sont stockées dans trois réseaux séparés en deux dimensions qui ne sont pas montré dans la figure ci-dessus.

De plus, pas tous les points extrêmes se trouvent sur les frontières du domaine. Les limites verticales, par exemple, ne portent pas les valeurs de  $V$ , tous comme les limites horizontales ne portent pas les valeurs de  $U$ . pour cette raison, des cellules supplémentaires sont introduites (voir Figure III.3).



**Figure III.3:** Domaine de calcul avec des cellules supplémentaires.

### III.4. Discrétisation temporelle des équations

Il est nécessaire d'effectuer plusieurs itérations pour atteindre la solution stationnaire du problème. A chacune de ces itérations, la solution réelle est avancée temporellement d'une quantité appelée pas de temps et notée  $\Delta t$ .

Le calcul des champs à l'itération  $t^{n+1}$  à partir de leurs valeurs aux temps précédents peut se faire de plusieurs façons, dans notre travail on a

utilisé les résultats de l'itération  $n$ . C'est le schéma d'Euler, basé sur un développement décentré de Taylor à l'ordre 1:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^{n+1} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} \quad (\text{III.3})$$

Dans notre système d'équations, toutes les variables sont évaluées à l'instant  $t^n$  que les termes présentant une variation temporelle, sont eux traité par un développement en série de Taylor, et les termes des équations de mouvement et de conservation de la masse totale.

Ces traitements permettent de s'affranchir à des critères de stabilité de type *Courant-Friedrich-Lewy* (CFL) liant le pas de temps au pas d'espace.

### III.5. La discrétisation

#### III.5.1. Discrétisation de l'équation de conservation d'énergie

On considère l'équation de conservation d'énergie non dimensionnelle:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(UT)}{\partial x} + \frac{\partial(VT)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (\text{III.4})$$

La discrétisation de tous les termes de l'équation

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial t} \right]_{i,j}^{n+1} + \left[ \frac{\partial(UT)}{\partial x} \right]_{i,j} + \left[ \frac{\partial(VT)}{\partial y} \right]_{i,j} = \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_{i,j} + \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right]_{i,j} \quad (\text{III.5})$$

est donnée par:

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial t} \right]_{i,j}^{n+1} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (\text{III.5.1})$$

(La méthode de *Donor-Cell Scheme* a été utilisée pour la discrétisation des termes convectifs [15]).

$$\left[ \frac{\partial(UT)}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{1}{\Delta x} \left( U_{i,j} \frac{T_{i,j} + T_{i+1,j}}{2} - U_{i-1,j} \frac{T_{i-1,j} + T_{i,j}}{2} \right) \quad (\text{III.5.2})$$

$$\left[ \frac{\partial(VT)}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{1}{\Delta y} \left( V_{i,j} \frac{T_{i,j} + T_{i,j+1}}{2} - V_{i,j-1} \frac{T_{i,j-1} + T_{i,j}}{2} \right) \quad (\text{III.5.3})$$

$$\left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{III.5.4})$$

$$\left[ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (\text{III.5.5})$$

$$\text{pour } \begin{cases} i = 1, \dots, imax \\ j = 1, \dots, jmax \end{cases}$$

### III.5.2. Discrétisation de l'équation de conservation de la masse de chaque espèce

On considère l'équation de conservation des espèces non dimensionnelle:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(UC)}{\partial x} + \frac{\partial(VC)}{\partial y} \\ = \frac{1}{Le} \left[ \left( \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right] + \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right] \right) - \left( \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] + \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \right) \right] \quad (\text{III.6}) \end{aligned}$$

La discrétisation de tous les termes de l'équation

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot \left[ \frac{\partial C}{\partial t} \right]_{i,j}^{n+1} + \left[ \frac{\partial(UC)}{\partial x} \right]_{i,j} + \left[ \frac{\partial(VC)}{\partial y} \right]_{i,j} \\ = \frac{1}{Le} \left[ \left( \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right]_{i,j} + \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right]_{i,j} \right) - \left( \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_{i,j} + \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right]_{i,j} \right) \right] \quad (\text{III.7}) \end{aligned}$$

est donnée par:

$$\left[ \frac{\partial C}{\partial t} \right]_{i,j}^{n+1} = \frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (\text{III.7.1})$$

$$\left[ \frac{\partial(UC)}{\partial x} \right]_{i,j} = \frac{1}{\Delta x} \left( U_{i,j} \frac{C_{i,j} + C_{i+1,j}}{2} - U_{i-1,j} \frac{C_{i-1,j} + C_{i,j}}{2} \right) \quad (\text{III.7.2})$$

$$\left[ \frac{\partial(VC)}{\partial y} \right]_{i,j} = \frac{1}{\Delta y} \left( V_{i,j} \frac{C_{i,j} + C_{i,j+1}}{2} - V_{i,j-1} \frac{C_{i,j-1} + C_{i,j}}{2} \right) \quad (\text{III.7.3})$$

$$\left[ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{C_{i+1,j} - 2C_{i,j} + C_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{III.7.4})$$

$$\left[ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{C_{i,j+1} - 2C_{i,j} + C_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (\text{III.7.5})$$

$$\left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{III.7.6})$$

$$\left[ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right]_{i,j} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (\text{III.7.7})$$

$$\text{pour } \begin{cases} i = 1, \dots, imax \\ j = 1, \dots, jmax \end{cases}$$

### III.5.3. Discrétisation des équations de Darcy et de la conservation de la masse totale

#### III.5.3.1. Discrétisation temporelle

Soit les équations de darcy adimensionnelles:

$$\begin{cases} U = -\frac{\partial P}{\partial x} \\ V = -\frac{\partial P}{\partial y} + Ra.T + Ra.N.C \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

en première étape on discrétise temporellement les deux équations:

$$\begin{cases} U^{n+1} = -\frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} \\ V^{n+1} = -\frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} + Ra.T^{n+1} + Ra.N.C^{n+1} \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

et on introduit les abréviations ( $F$  et  $G$ ), afin de trouver les formes suivantes:

$$\begin{cases} U^{n+1} = F - \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} \\ V^{n+1} = G - \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Les champs de pression sont déterminés par l'évaluation de l'équation de conservation de la masse totale dans le temps  $t^{n+1}$ . Nous remplaçons la relation (III.10) pour les champs de vitesse ( $U^{(n+1)}$ ,  $V^{(n+1)}$ ) dans l'équation de conservation de la masse totale, on trouve:

$$0 = \frac{\partial U^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial V^{n+1}}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial y^2} \quad (\text{III.11})$$

Qui après le réarrangement, devient une équation de poisson pour la pression  $P^{(n+1)}$  dans le temps  $t^{n+1}$ :

$$\frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \quad (\text{III.12})$$



### III.5.3.2. Condition aux limites de l'équation de pression

Pour résoudre l'équation de poisson de pression (III.12), on a besoin des valeurs aux limites pour la pression. En général le traitement des conditions aux limites est spécial, il y a deux types de conditions aux limites pour les équations de pression:

- Soit la pression est donnée à la frontière : dans ce cas, on s'arrange pour que  $P_{frontières} = P_{données}$ .
- Soit la vitesse normale est donnée à la frontière : dans ce cas, on utilise l'équation de continuité de la pression aux limites, cette approche correspond à la méthode de projection [15].

La deuxième approche satisfait nos conditions aux limites citées dans le chapitre précédant, dans ce cas l'équation de continuité de la pression est donnée par:

$$\begin{aligned} grad P^{n+1} \cdot \vec{n} &= \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} \cdot n_1 + \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \cdot n_2 \\ &= -((U^{n+1} - F) \cdot n_1 + (V^{n+1} - G) \cdot n_2) \end{aligned} \quad (III.13)$$

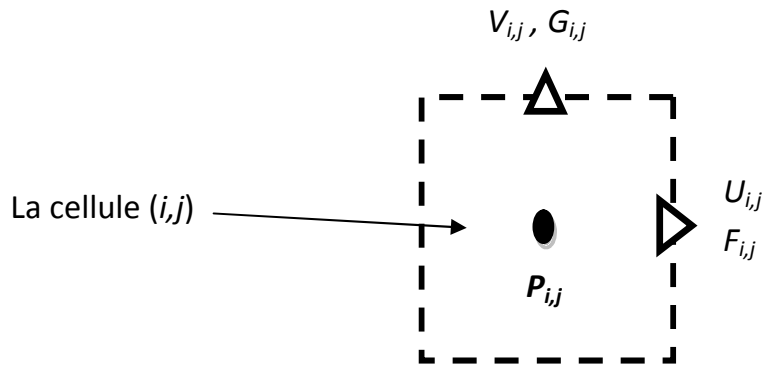
$(n_1, n_2)$  : normales aux frontières considérées.

### III.5.3.3. Discrétisation de l'équation de Darcy

Après la discrétisation temporelle des équations de mouvement, on aborde la discrétisation spatiale des équations (III.10):

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{i,j}^{n+1} = F_{i,j} - \frac{1}{\Delta x} (P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}) \\ \text{pour } i = 1, \dots, imax - 1 \\ \quad j = 1, \dots, jmax \\ V_{i,j}^{n+1} = G_{i,j} - \frac{1}{\Delta y} (P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}) \\ \text{pour } i = 1, \dots, imax \\ \quad j = 1, \dots, jmax - 1 \end{array} \right. \quad (\text{III.14})$$

Dans lequel les quantités  $F$  et  $G$  sont discrétisées dans les milieux des bords à droite et supérieure de la cellule  $(i, j)$ , respectivement comme montrer dans la figure suivante:



**Figure III.4:** placement des quantités  $F$  et  $G$

Les quantités  $F$  et  $G$  sont discrétisées de la façon suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{i,j} = 0 \\ \text{pour: } i = 1, \dots, imax - 1 \\ \quad j = 1, \dots, jmax \\ G_{i,j} = Ra \cdot \frac{T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{2} + Ra \cdot N \frac{C_{i,j}^{n+1} + C_{i,j+1}^{n+1}}{2} \\ \text{pour: } i = 1, \dots, imax \\ \quad j = 1, \dots, jmax - 1 \end{array} \right. \quad (\text{III.15})$$

### III.5.3.4. Discrétisation de l'équation de poisson de pression

L'équation de poisson de pression discrétisée est:

$$\begin{aligned} \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{P_{i,j+1}^{n+1} - 2P_{i,j}^{n+1} + P_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \\ = \left( \frac{F_{i,j} - F_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{G_{i,j} - G_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

pour  $\begin{cases} i = 1, \dots, imax \\ j = 1, \dots, jmax \end{cases}$

#### III.5.3.4.1. Discrétisation des conditions aux limites de pression

Pour résoudre l'équation (III.16), les valeurs aux limites suivantes pour la pression est nécessaire:

$$\begin{cases} P_{0,j} , P_{imax+1,j} , & j = 1, \dots, jmax \\ P_{i,0} , P_{i,jmax+1} , & i = 1, \dots, imax \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

En outre, nous avons besoin des valeurs aux limites de  $F$  et  $G$  pour le coté droit de l'équation de pression:  $Rhs$  ( $Rhs$  : Right-hand-side)

$$\begin{cases} F_{0,j} , F_{imax,j} , & j = 1, \dots, jmax \\ G_{i,0} , G_{i,jmax} , & i = 1, \dots, imax \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Pour déterminer ces valeurs aux limites nous regardons les équations (III.13) et (III.19). Par exemple la discrétisation de l'équation (III.13) le long de la limite gauche du domaine est donnée par:

$$\frac{P_{0,j}^{n+1} - P_{1,j}^{n+1}}{\Delta x} = (U_{0,j}^{n+1} - F_{0,j}) \quad (\text{III.19})$$

L'injection de l'équation (III.19) dans l'équation de poisson pour la pression (III.16), pour la frontière gauche ( $i=1$ ), donne l'équation suivante:

$$\begin{aligned} \frac{P_{2,j}^{n+1} - P_{1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{P_{1,j+1}^{n+1} - 2P_{1,j}^{n+1} + P_{1,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \\ = \left( \frac{F_{1,j} - U_{0,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{G_{1,j} - G_{1,j-1}}{\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Il en ressort que cette équation ne dépend pas des valeurs de  $F_{0,j}$ . Ainsi  $F_{0,j}$  peut être choisi arbitrairement, le plus simple choix est  $F_{0,j} = U_{0,j}^{n+1}$ , ce qui conduit à  $P_{0,j}^{n+1} = P_{1,j}^{n+1}$  [15].

Les limites droite, inférieure et supérieure sont traitées de manière analogue, ce qui donne les valeurs aux limites suivant:

$$\begin{cases} P_{0,j} = P_{1,j} , & P_{imax+1,j} = P_{imax,j} , & j = 1, \dots, jmax \\ P_{i,0} = P_{i,1} , & P_{i,jmax+1} = P_{i,jmax} , & i = 1, \dots, imax \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

et :

$$\begin{cases} F_{0,j} = U_{0,j} , & F_{imax,j} = U_{imax,j} , & j = 1, \dots, jmax \\ G_{i,0} = V_{i,0} , & G_{i,jmax} = V_{i,jmax} , & i = 1, \dots, imax \end{cases} \quad (\text{III.22})$$

### III.6. Résolution du couplage pression-vitesse

#### III.6.1. Formulation par Volume Finis de l'équation de poisson de pression (la méthode de Projection)

En raison de problème aux limites, l'équation de poisson de la pression doit-être modifiée dans les cellules adjacentes à la limite du domaine physique,

on utilise la définition de  $F$  et  $G$  à la limite choisie, pour simplifier le système nous suggérons le système suivant:

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon_i^E (P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}) - \epsilon_i^W (P_{i,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1})}{(\Delta x)^2} \\ & + \frac{\epsilon_j^N (P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}) - \epsilon_j^S (P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1})}{(\Delta y)^2} \\ & = \left( \frac{F_{i,j} - F_{i-1,j}}{(\Delta x)} + \frac{G_{i,j} - G_{i,j-1}}{(\Delta y)} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Pour  $i = 1, \dots, imax$  ,  $j = 1, \dots, jmax$

Les paramètres

$$\begin{aligned} \epsilon_i^W &= \begin{cases} 0, & i = 1 \\ 1, & i > 1 \end{cases} & \epsilon_i^E &= \begin{cases} 1, & i < imax \\ 0, & i = imax \end{cases} \\ \epsilon_j^S &= \begin{cases} 0, & j = 1 \\ 1, & j > 1 \end{cases} & \epsilon_j^N &= \begin{cases} 1, & j < jmax \\ 0, & j = jmax \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

indiquent si la cellule  $(i, j)$  est adjacente à la frontière du domaine, auquel cas les valeurs de pression doivent être éliminées. Les exposants  $W$ ,  $E$ ,  $N$  et  $S$  indiquent dans quelle direction se situe la frontière, soit:

$W$  : West-----indique la frontière gauche,

$E$  : East-----indique la frontière droite,

$N$  : North-----indique la frontière supérieure,

$S$  : Sud-----indique la frontière inférieure.

### III.6.2. Résolution de l'équation de Poisson de pression (la méthode de Gauss-Seidel)

La nouvelle équation de poisson représente un système d'équations linéaires contenant  $(imax \times jmax)$  équations et  $(imax \times jmax)$  inconnues. Pour résoudre ce type d'équations, les méthodes itératives sont généralement favorables par rapport aux méthodes directes en termes du temps de calcul et de stockage.

La résolution de ce système peut s'obtenir en suivant l'algorithme de «Gauss-Seidel», pour augmenter la vitesse de convergence, nous avons introduit un paramètre de surrelaxation  $\omega$ , la solution est donnée par:

$$\begin{aligned}
 &it = 1, \dots, it_{max} \\
 &i = 1, \dots, imax \\
 &j = 1, \dots, jmax \\
 P_{i,j}^{it+1} &= (1 - \omega) \cdot P_{i,j}^{it} \\
 &+ \frac{\omega}{\left( \frac{\epsilon_i^E + \epsilon_i^W}{(\Delta x)^2} + \frac{\epsilon_j^N + \epsilon_j^S}{(\Delta y)^2} \right)} \cdot \left( \frac{\epsilon_i^E \cdot P_{i+1,j}^{it} + \epsilon_i^W \cdot P_{i-1,j}^{it+1}}{(\Delta x)^2} \right. \\
 &\left. + \frac{\epsilon_j^N \cdot P_{i,j+1}^{it} + \epsilon_j^S \cdot P_{i,j-1}^{it+1}}{(\Delta y)^2} - rhs_{i,j} \right) \tag{III.25}
 \end{aligned}$$

L'itération est terminée lorsque  $(it = it_{max})$  ou  $(r_{i,j}^{it} \leq \text{la tolérance choisi})$  tel que:

$r_{i,j}^{it}$  : est la norme résiduelle de l'équation de pression.

### III.6.3. La norme résiduelle de l'équation de pression

La formule de la norme résiduelle de l'équation de pression est:

$$r_{i,j}^{it} = \frac{\epsilon_i^E (P_{i+1,j}^{it} - P_{i,j}^{it}) - \epsilon_i^W (P_{i,j}^{it} - P_{i-1,j}^{it})}{(\Delta x)^2} + \frac{\epsilon_j^N (P_{i,j+1}^{it} - P_{i,j}^{it}) - \epsilon_j^S (P_{i,j}^{it} - P_{i,j-1}^{it})}{(\Delta y)^2} - rhs_{i,j} \quad (\text{III.26})$$

Pour  $i = 1, \dots, imax$  ,  $j = 1, \dots, jmax$

### III.7. Solution des systèmes d'équations discrétisées

On résume toutes les procédures utilisées pour la résolution de notre système d'équations dans l'algorithme suivant:

**I) Poser  $t := 0$  ,  $n := 0$**

**II) Attribuer les valeurs initiales de  $U, V, P, T$  et  $C$**

**III) Tant que ( $t < t_{end}$ )**

**1) Choisir le pas de temps  $\Delta t$  (satisfaisant les critères de stabilité CFL)**

**2) Définir les valeurs aux limites pour  $U, V, T$  et  $C$**

**3) Calculer  $T^{n+1}$**

**4) Calculer  $C^{n+1}$  (pour chaque espèce)**

**5) Calculer les quantités  $F$  et  $G$**

**6) Calculer le Rhs (le coté droite de l'équation de poisson de pression)**

**7) Poser ( $it := 0$ )**

**8) Tant que ( $it < it_{max}$ ) et  $\|r^{it}\| > 10^{-9}$**

**a) Effectuer un cycle SOR accordé à l'équation (III.25)**

**b) Calculer la norme résiduelle de l'équation de pression**

**c) ( $it := it + 1$ )**

**9) Calculer  $U^{n+1}$  et  $V^{n+1}$  accordé à l'équation (III.14)**

**10) ( $t := t + \Delta t$ )**

**11) ( $n := n + 1$ )**

**Algorithme III.1 : Procédure de résolution du système d'équations**



### III.8. Critère de convergence

Dans le cas où le régime est permanent, la convergence est vérifiée après chaque itération. La différence entre deux valeurs successives entre deux itérations consécutives aux temps  $t$  et  $t+\Delta t$ , des variables  $T$ ,  $C$ ,  $U$  et  $V$  doit être négligeables telle que:

$$\left( \left| \frac{\phi_{i,j}^{t+\Delta t} - \phi_{i,j}^t}{\phi_{i,j}^{t+\Delta t}} \right| \right) \leq 10^{-9} \quad (\text{III.27})$$

### III.9. Détails numérique

Un code de calcul basé sur l'algorithme précédent a été réalisé et exécuté sur un micro-ordinateur personnel Pentium 4 de 2.40GHz et 1 Go de RAM.

### III.10. Conclusion

Après la modélisation numérique et la résolution du système d'équations qui ont fait l'objet de ce chapitre, on va procéder dans la suite aux simulations numériques, pour étudier l'influence des paramètres physiques caractérisant la configuration étudiée.

Chapitre IV :  
Résultats  
et Discussion

### IV.1. Introduction

Après avoir écrit le programme de calcul, les principaux résultats obtenus, reflétant le comportement des champs dynamique, thermique et massique pour notre configuration, sont exposés dans ce chapitre.

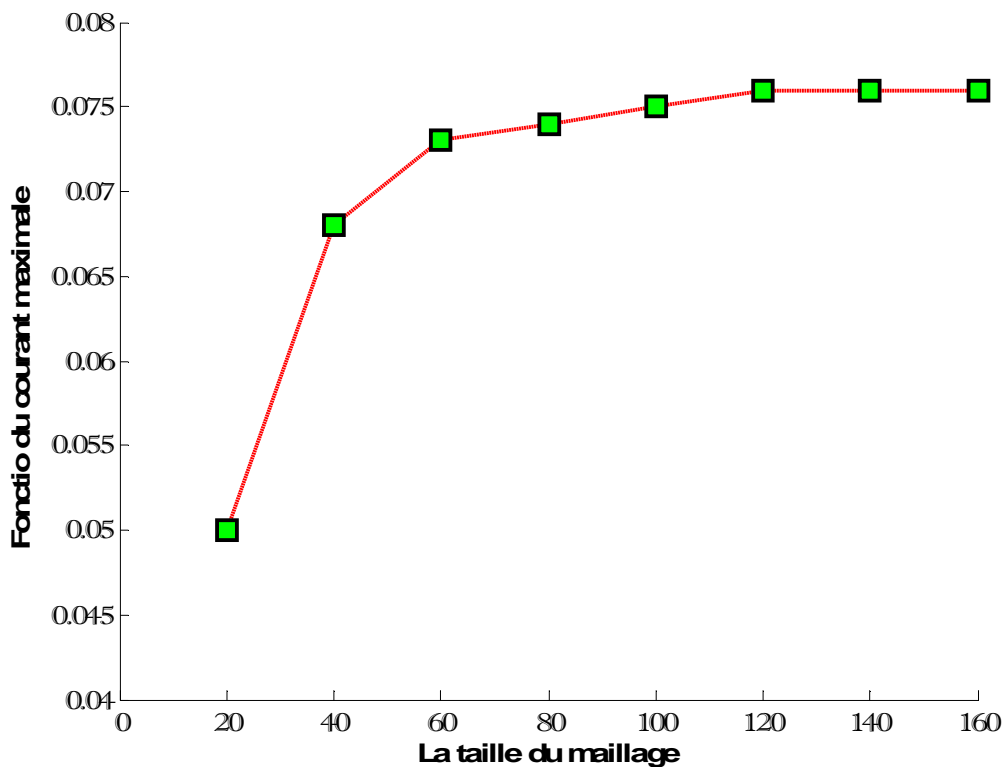
Le but de ce chapitre est d'étudier l'écoulement des fluides binaires. L'un des intérêts de ce problème vient du fait que dans la nature, la plupart des fluides se trouvent sous formes d'un mélange de plusieurs constituants, et dans la plupart des cas, l'un de ces constituants a une importance particulière dans l'industrie, donc il est important de pouvoir l'extraire du mélange.

### IV.2. Choix et influence du maillage

Pour choisir le meilleur maillage qui permet d'avoir les résultats les plus exactes possibles, on a étudié l'influence de la taille et la répartition des nœuds sur la fonction de courant maximale  $|\Psi_{max}|$ . Les résultats de cette étude sont exposés dans le tableau (IV.1) et la figure (IV.1). Pour cela, une répartition uniforme des nœuds a été utilisée. On a considéré le cas d'une cavité rectangulaire de rapport d'aspect égale à 1, A partir de ce tableau il apparait que  $|\Psi_{max}|$  devient indépendante au nombre de nœuds à partir de la grille (120×120).

Maillage	20×20	40×40	60×60	80×80	100×100	120×120	140×140	160×160
$ \Psi_{max} $	0.05	0.068	0.073	0.074	0.0745	0.076	0.076	0.076

**Tableau. IV.1:** Influence de la taille du maillage sur  $|\Psi_{max}|$ .

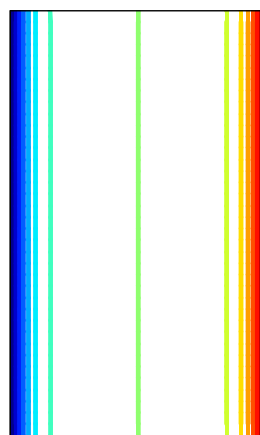


**Figure IV.1:** Influence de la taille du maillage sur  $|\Psi_{max}|$ .

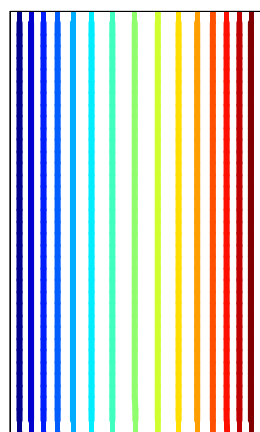
### IV.3. Validation du programme numérique

#### IV.3.1. Validation qualitative du programme numérique

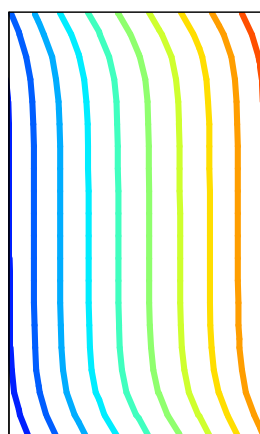
Le programme numérique qu'on a élaboré, pour résoudre les équations, a été validé qualitativement en prenant comme références certaines études numériques disponible dans la littérature, en particulier, Benano-Melly et Caltagirone [04] qui on étudié numériquement ce problème, pour des fluides binaire dans lequel le soluté a une faible fraction massique, en utilisant la méthode de Lagrange augmenté basé sur les algorithmes d'Uzawa pour la résolution du système d'équations, les résultats sont présentés ci-dessous:



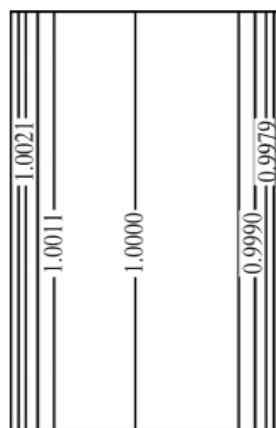
(a)



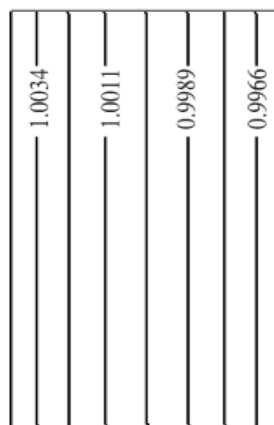
(b)



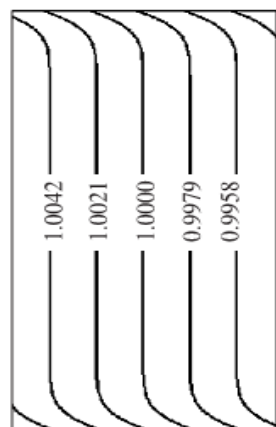
(c)



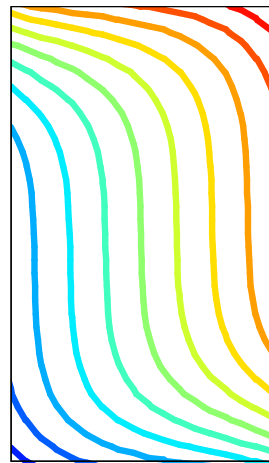
(a)



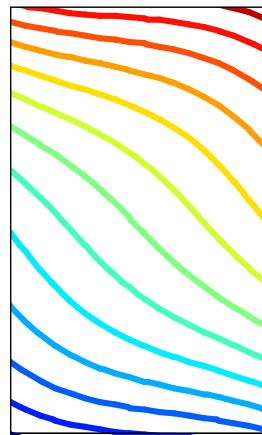
(b)



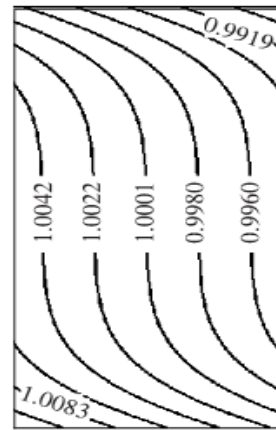
(c)



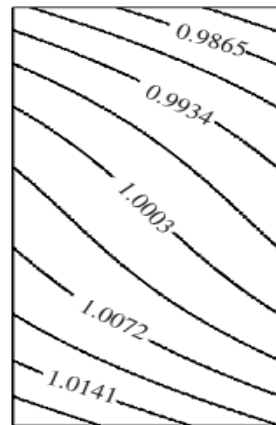
(d)



(e)



(d)



(e)

Nos résultatsRésultats de [04]

**Figure IV.2:** Evolution temporelle de la concentration du soluté du début de la séparation (a) jusqu'à l'état stationnaire (e)

### Commentaire

La figure (IV.2) montre l'évolution temporelle de la concentration du soluté pour différent moment du début de la convection jusqu'à l'état stationnaire.

En premier temps des gradients horizontaux de concentrations apparaissent à proximité des parois verticales (figure IV.2.a), ces gradients

avancent vers le centre de la cavité (figure IV.2.b). Ces gradients horizontaux sont dus au mode de transfert par diffusion (le mode dominant), car la vitesse de convection au début de l'écoulement est faible.

La vitesse d'écoulement augmente de plus en plus avec le temps, et la convection massique sera plus importante qu'au début (figure IV.2.c+d), l'écart de concentration augmente jusqu'à ce que les flux convectif et diffusif s'équilibrent, ce qui correspond à l'état d'équilibre (figure IV.2.e), cet équilibre entre les différentes forces est responsable de la direction oblique des gradients (horizontal et vertical) de concentration.

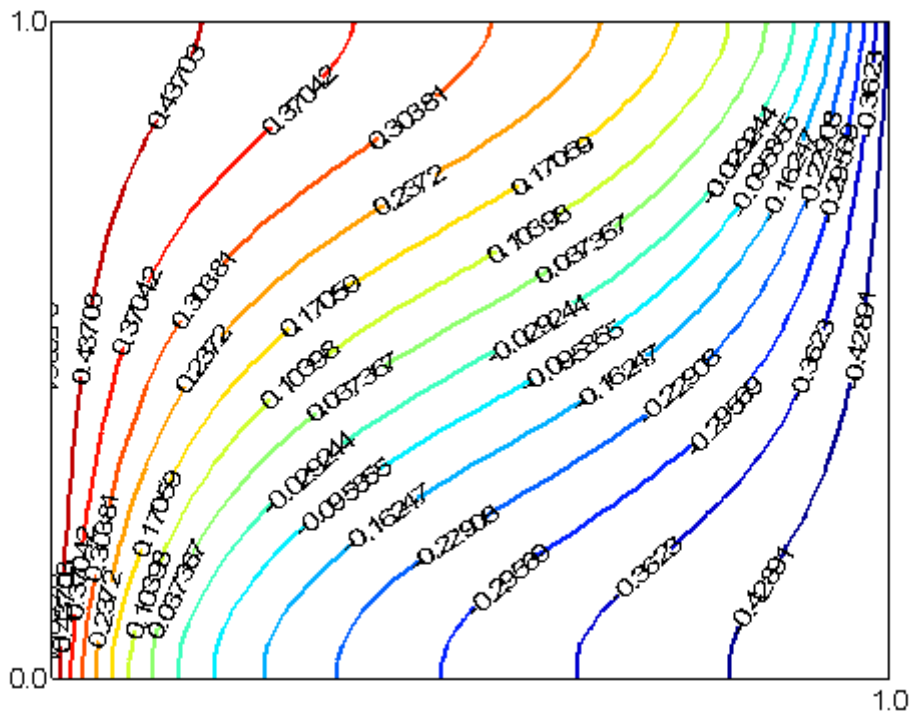
Cette comparaison montre qu'il y a un bon accord qualitatif entre les résultats qu'on a obtenus et ceux de Benano-Melly et Caltagirone [04], ce qui nous réconforte dans le choix de notre modèle mathématique et numérique.

### IV.3.2. Validation quantitative du programme numérique

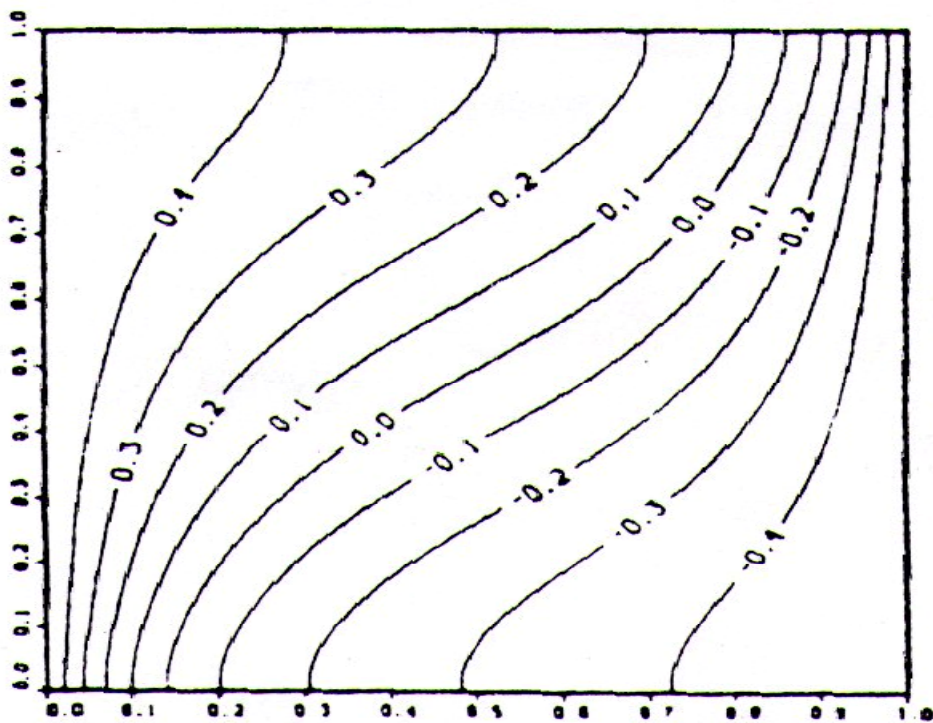
De manière à vérifier l'exactitude des résultats numérique obtenus dans le présent travail, une validation quantitative a été faite en comparant les résultats de cette étude avec ceux obtenus précédemment par Younsi, Harkati et Kalache [16] et Boris [17], ces résultats sont présentés dans le tableau(IV.2), et posés sur les isocontours de température et de fonction de courant dans les figures (IV.3, IV.4):

Le nombre de Nusselt					
<b>Ra</b>	Lauriat et Prasad [16]	Trevisan et Bejan [16]	Nithiarasu et al [16]	Younsi, Harkati et Kalache [16]	Présent travail
10	1.07	/	1.08	1.06	1.02
50	/	2.02	1.958	1.936	2.00
100	3.09	3.27	3.02	2.98	3.09

**Tableau. IV.2:** comparaison entre des résultats numériques pour le nombre de Nusselt pour:  $N=0$ ,  $Le=100$



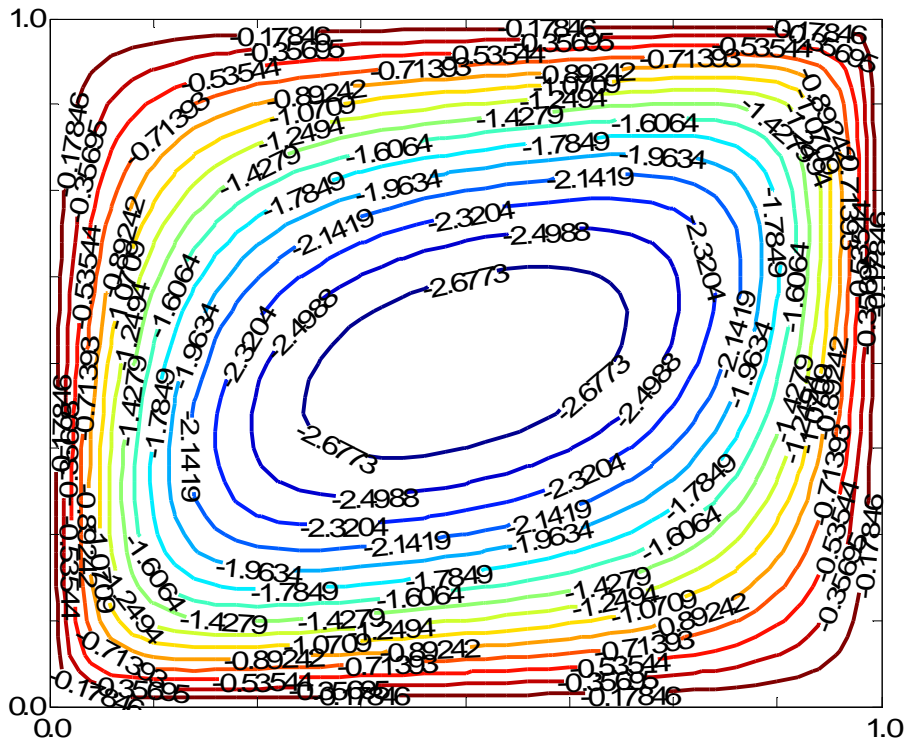
Nos résultats



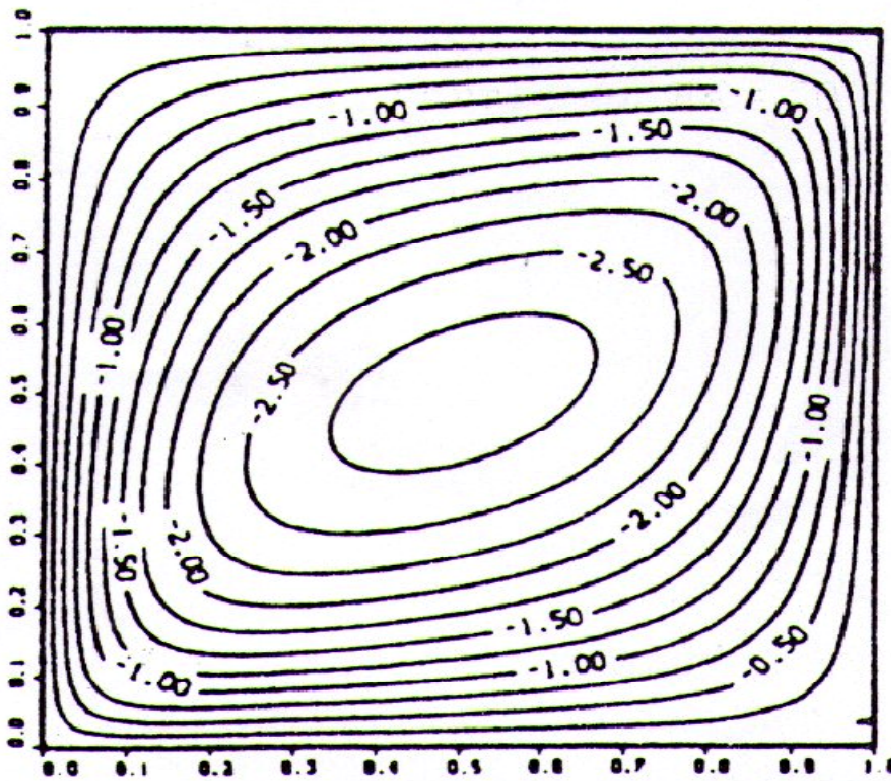
Résultats de Boris [17]

Figure IV.3: Isocontours de Température dans une cavité carrée ( $Ra=50$ )





Nos résultats



Résultats de Boris [17]

Figure IV.4: Isocontours de Fonction de courant dans une cavité carrée (Ra=50)

On remarque bien qu'il y a une concordance satisfaisante avec des différences minimales observées.

#### IV.4. Résultats et discussion

Nous nous intéressons dans cette partie à un mélange binaire dans une cavité carrée, remplie par une matière poreuse, et soumis à un gradient horizontal de température.

Le fluide étudié est un fluide binaire composé de l'eau et de l'éthanol, dont la fraction massique de l'eau est  $C_{eau}=0.6088$ , les propriétés de ce mélange sont données par [14].

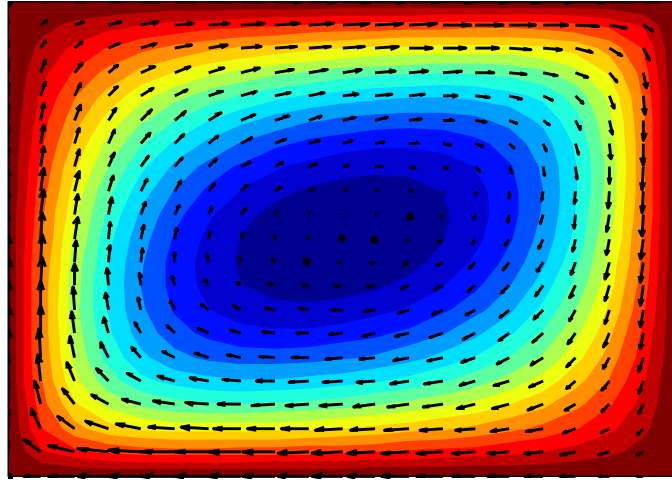
##### IV.4.1. Influence du nombre de Rayleigh-Darcy

D'après les équations adimensionnées décrivant l'écoulement et le transfert de masse et de chaleur établis dans le chapitre II, notre problème dépend du nombre de Rayleigh-Darcy, et il est nécessaire d'étudier son influence.

Les paramètres contrôlant l'écoulement des fluides binaires et le transfert de chaleur et de masse en convection naturelle sont:  $[A, Ra, N, Le, \varepsilon]$ . Tous ces paramètres sont maintenus fixes  $[A=1, N=0.2, Le=231.5, \varepsilon=0.7]$  à l'exception du nombre de Rayleigh-Darcy qui sera varié pour voir son influence sur  $[\psi, T, C, P]$ .

**N.B:** sur les figures suivantes, on présente les isocontours du  $[\psi, T, C, P]$ , dont les lignes présentent les isocontours et les couleurs présentent l'intensité. La couleur rouge correspond aux valeurs plus élevées, et la couleur bleue correspond aux valeurs plus faibles.

#### IV.4.1.1. Influence du Ra sur les fonctions de courants



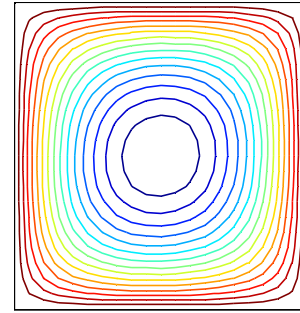
**Figure IV.5:** Profil des vitesses et lignes de courant pour  $Ra=28.10^{-1}$ .

La figure (IV.5) montre que le fluide à coté de la paroi gauche (chaude) reçoit de la chaleur, il devient plus léger et devient ascendant le long de cette paroi, et puisque la paroi droite est froide, le fluide est refroidi, devient plus lourd et descendant le long de cette paroi. Ce phénomène crée un vortex tournant dans le sens des aiguilles d'une montre (sens horaire).

Pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh-Darcy, les résultats obtenus sont illustrés sur la figure (IV.6):

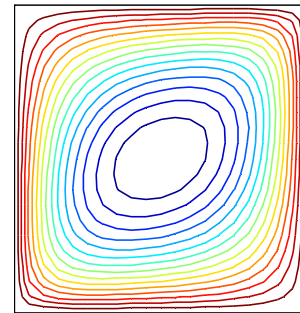
La figure (IV.6) montre les isocontours de fonction de courant pour  $Ra = [28.10^{-2}, 28.10^{-1}, 28.10^0, 28.10^1]$ , on constate que :

Pour  $Ra \leq 28.10^{-2}$  : les isocontours de fonction de courant montrent un degré de symétrie par rapport au centre de la cavité.



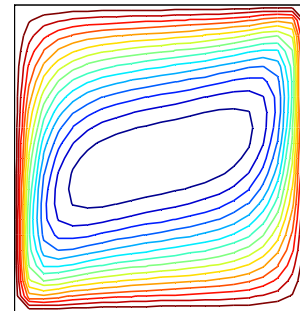
$Ra=28.10^{-2}$

Pour  $Ra = 28.10^{-1}$  : Cette symétrie est légèrement compromise à mesure que le nombre de Rayleigh devient  $28.10^{-1}$



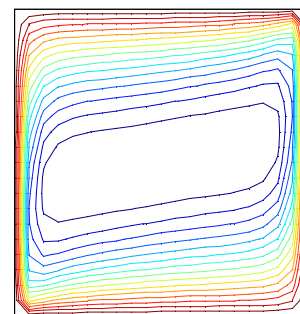
$Ra=28.10^{-1}$

Pour  $Ra \geq 28.10^0$  : les isocontours de fonction de courant deviennent plus serrés à côté des parois latérales à mesure que le nombre de Rayleigh-Darcy augmente.



$Ra = 28$

Ceci suggère que l'écoulement s'accélère à mesure que le nombre de Rayleigh augmente ou bien la convection naturelle est intensifiée



$Ra = 28.10^1$

**Figure IV.6:** La variation des lignes de courant en fonction de  $Ra$

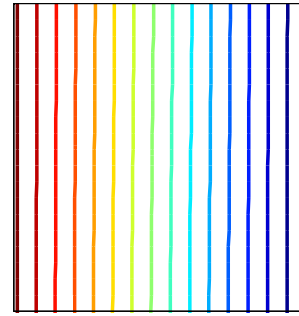
#### IV.4.1.2. Influence du Ra sur la distribution des températures

La variation de la température dans l'enceinte est présentée par des isothermes illustrés dans la figure en face:

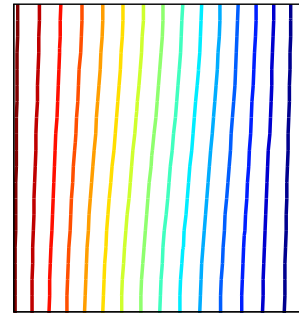
Pour  $Ra \leq 28 \cdot 10^{-3}$  : les isothermes sont verticales et quasi-parallèles, on conclut donc que dans ces conditions le mode de transfert de chaleur par diffusion est parfaitement dominant (diffusion pure).

Pour  $Ra = 28 \cdot 10^{-2}$  : les isothermes montrent une légère déviation par rapport au cas de la diffusion pure

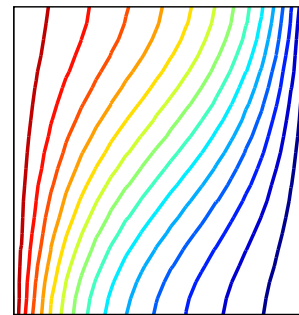
Pour  $Ra \geq 28 \cdot 10^{-1}$  : les isothermes sont déformés de gauche à droite en haut de l'enceinte, et de droite à gauche en bas, pour  $Ra = 28$ , on remarque que la distribution de la température sera faiblement variable suivant l'axe horizontale, mais variable suivant l'axe verticale de façon à satisfaire la stratification thermique stable. On conclut que dans ces conditions le mode de transfert de chaleur par convection est dominant.



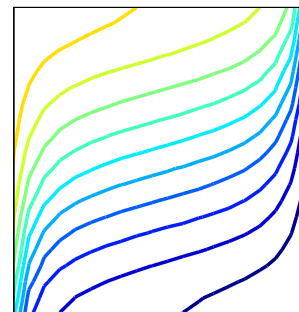
$Ra = 28 \cdot 10^{-3}$



$Ra = 28 \cdot 10^{-2}$



$Ra = 28 \cdot 10^{-1}$



$Ra = 28$

**Figure IV.7:** La distribution de la température en fonction de  $Ra$ .

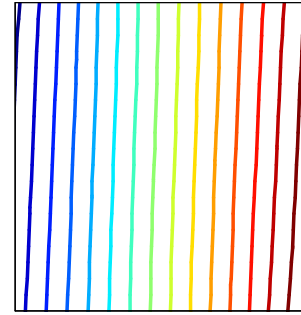
#### IV.4.1.3. Influence du $Ra$ sur la distribution des concentrations

La variation de la concentration de l'eau (espèce le plus lourd) dans l'enceinte est présentée par des isocontours illustrés dans la figure en face:

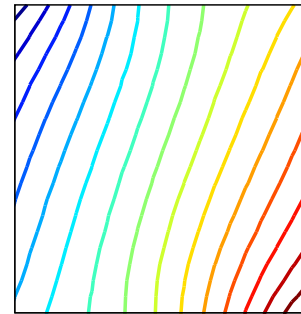
Pour  $Ra \leq 28.10^{-5}$  : les isocontours de concentration sont presque verticales et quasi-parallèles, on conclut donc que dans ces conditions le mode de transfert de masse par diffusion est parfaitement dominant.

Pour  $Ra = 28.10^{-4}$  : les isocontours de concentration sont faiblement déformés de gauche à droite en haut de l'enceinte, et de droite à gauche en bas de l'enceinte, l'équilibre entre les flux convectif et diffusif est le responsable de la direction oblique du gradient de concentration.

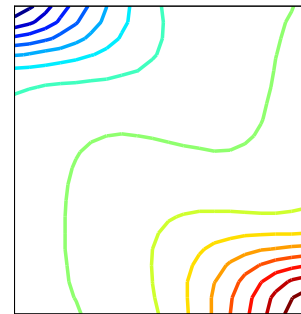
Pour  $Ra \geq 28.10^{-3}$  : les gradients de concentration sont très fortement concentrés près des parois verticales (près de la paroi verticale droite en bas et près de la paroi verticale gauche en haut), tandis qu'au centre de l'enceinte la concentration a des valeurs quasi-constantes. On conclut que dans ces conditions le mode de transfert de masse par convection est dominant.



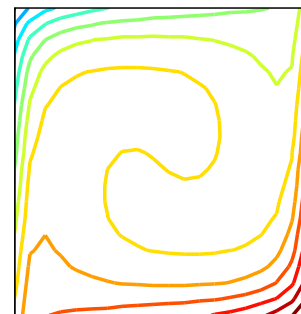
$Ra = 28.10^{-5}$



$Ra = 28.10^{-4}$



$Ra = 28.10^{-3}$



$Ra = 28.10^{-2}$

**Figure IV.8:** La distribution de la concentration en fonction de  $Ra$ .

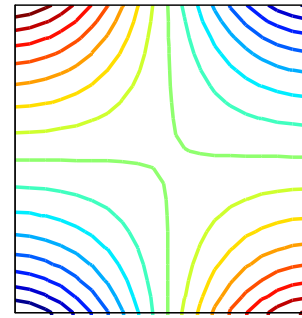
#### IV.4.1.4. Influence du $Ra$ sur la distribution des pressions

La distribution de la pression dans l'enceinte est présentée par des isocontours illustrés dans la figure en face:

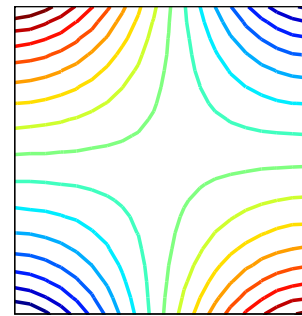
Pour

$Ra = [28 \cdot 10^{-4}, 28 \cdot 10^{-2}, 28 \cdot 10^{-1}]$  : On remarque que les plus grandes valeurs de la pression se situent en haut du côté de la paroi verticale gauche (où la température est maximale), et en bas du côté de la paroi verticale droite (où la concentration est maximale), les petites valeurs de pression se situent en haut à côté de la paroi droite et en bas à côté de la paroi verticale gauche, tandis qu'au centre de la cavité les valeurs de la pression sont moyennes. Ceci est dû aux conditions aux limites thermique et solutale et aux valeurs prises pour le nombre de Rayleigh-Darcy.

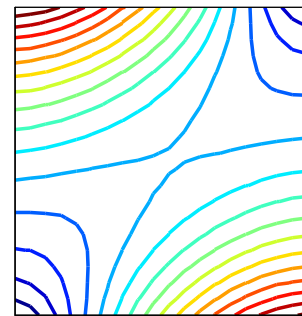
Pour  $Ra = 28$  : On remarque que les plus grandes valeurs de la pression se situent en haut du côté de la paroi verticale gauche et en bas du côté de la paroi verticale droite, tandis que dans le reste de l'enceinte la pression a une valeur quasi-constante selon une direction oblique. Ceci est dû aux conditions aux limites thermique et solutale et aux valeurs prises pour le nombre de Rayleigh-Darcy.



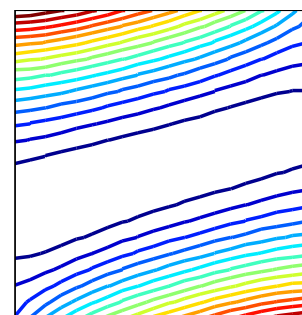
$Ra = 28 \cdot 10^{-4}$



$Ra = 28 \cdot 10^{-2}$



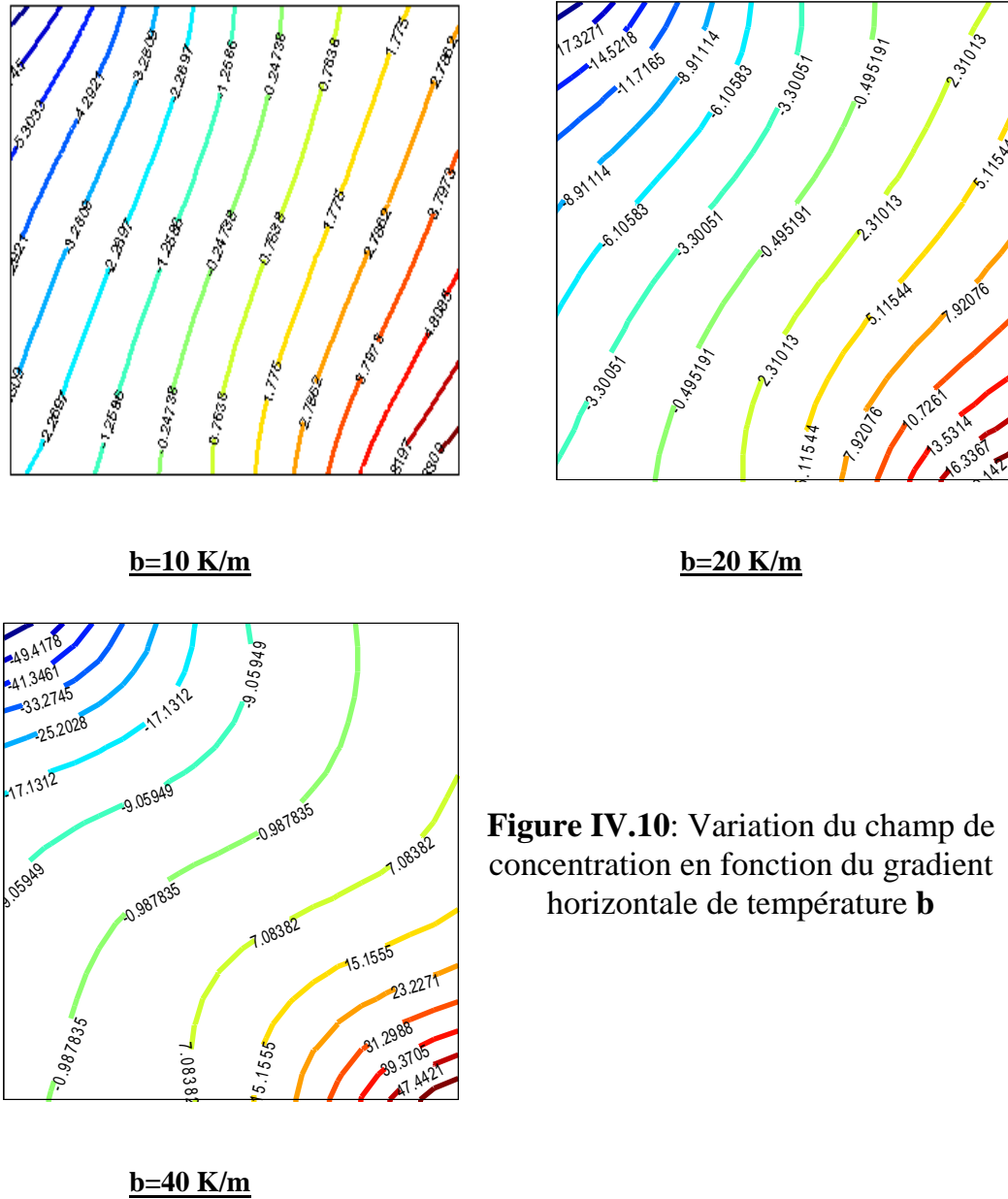
$Ra = 28 \cdot 10^{-1}$



$Ra = 28$

**Figure IV.9:** La distribution de la pression en fonction de  $Ra$ .

**IV.4.2. Influence du gradient de température sur la distribution des concentrations**



**Figure IV.10:** Variation du champ de concentration en fonction du gradient horizontal de température  $b$

La figure (IV.10) montre la variation du champ de concentration en fonction du gradient horizontal de température  $b$ , pour la même cavité et le même fluide (mélange eau-éthanol).



On remarque que pour un faible gradient de température ( $b=10$  K/m), les isoconcentrations sont presque verticales (légèrement oblique) ce qui montre que le transfert de masse est dû principalement par la diffusion.

En augmentant le gradient de la température ( $b=20$  K/m), la vitesse convective augmente et les isocontours de concentration sont déformés de plus en plus. Quand le gradient de température augmente encore ( $b=40$  K/m) la convection devient très importante devant la diffusion, la courbure des isoconcentrations augmente, et les gradients de concentration seront de plus en plus concentrés près des parois verticales (près de la paroi verticale droite en bas et près de la paroi verticale gauche en haut).

#### **IV.4.3. Influence du nombre de Lewis sur la distribution des concentrations**

La figure(IV.11) illustre les champs de concentration obtenus pour différents nombres de Lewis ( $Le=1$ ,  $Le=100$ ,  $Le=231.5$ ), on constate que les isocontours de concentration sont parfaitement verticales pour  $Le=1$ , c'est la diffusion pure qui gouverne le transfert de masse. Les isocontours de concentration sont déformés de plus en plus avec l'augmentation du nombre de Lewis (déformé de gauche à droite en haut et de droite à gauche en bas).

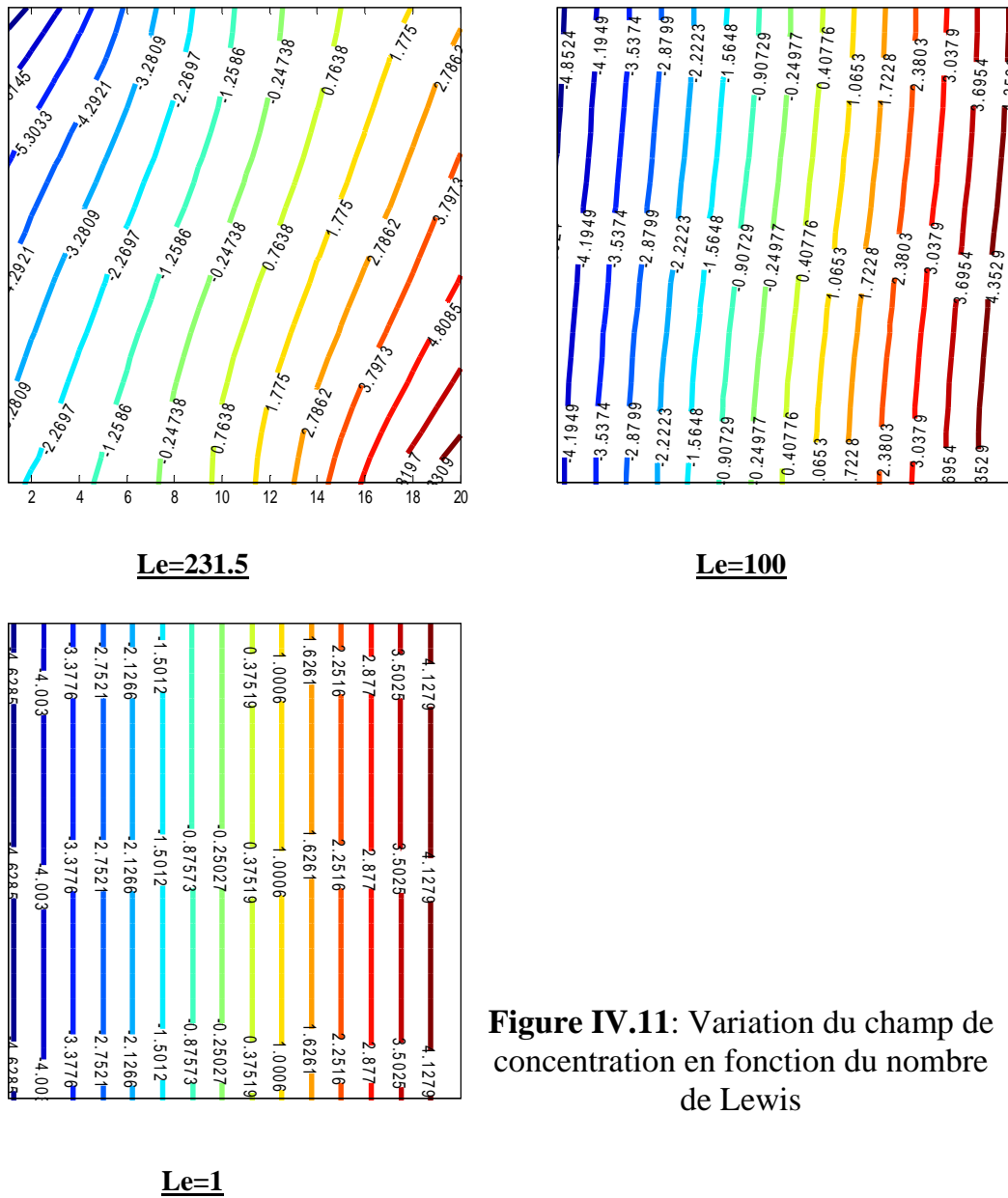


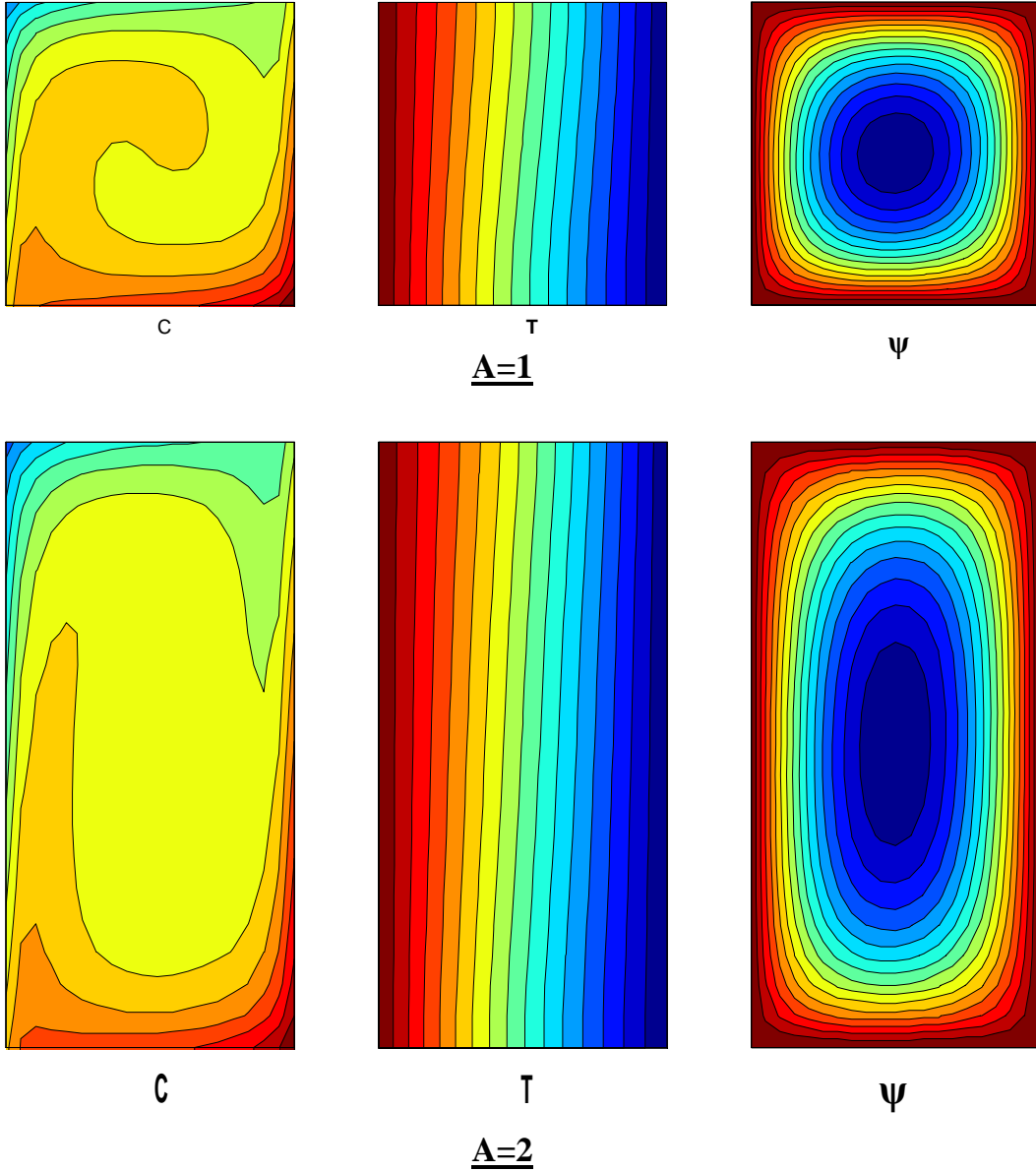
Figure IV.11: Variation du champ de concentration en fonction du nombre de Lewis

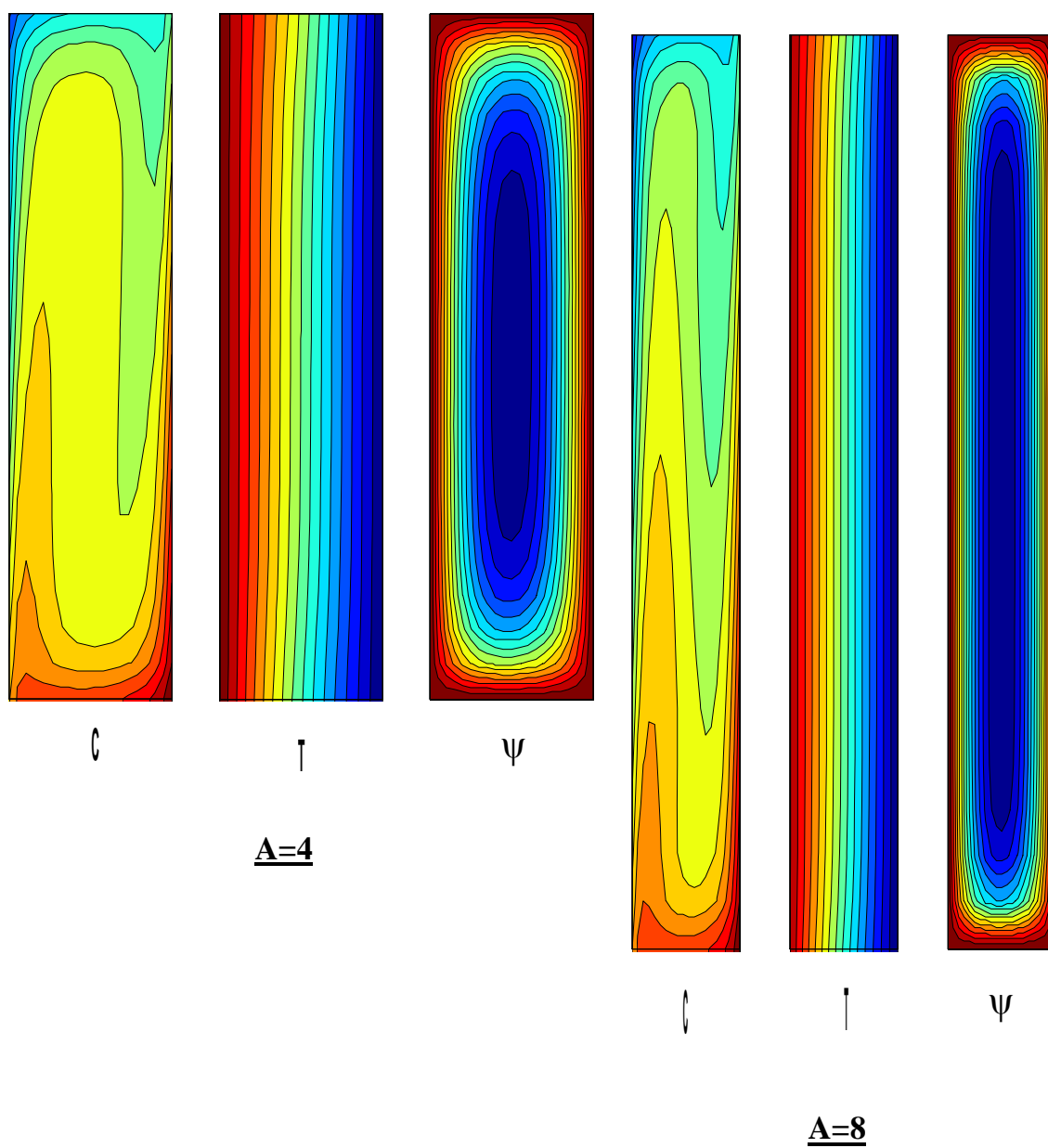
#### IV.4.4. Influence du rapport d'aspect

La figure (IV.12) illustre les isocontours de concentration, de température et de fonction de courant obtenus pour le cas  $[Ra=28.10^2, Le=231.5, N=0.2]$ , et pour différentes valeurs de rapport de forme A  $(A = \frac{H}{L})$ .

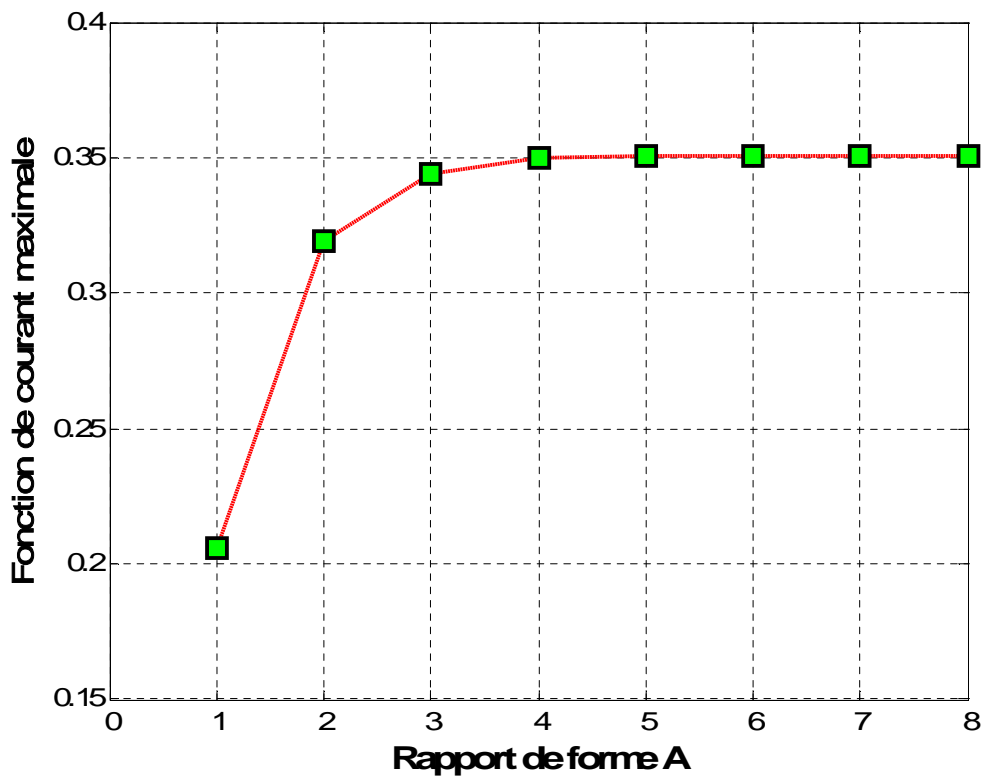
Cependant au fur et à mesure que l'on augmente le rapport de forme A, les figures indiquent que l'écoulement devient progressivement parallèle dans le cœur de la cavité.

La figure (IV.13) indique que la fonction de courant maximale  $|\Psi_{max}|$  devient constante pour  $A \geq 4$ , le fait d'augmenter le rapport de forme  $A$  pour un nombre de Rayleigh-Darcy donné, conduit donc à une situation pour laquelle la solution devient indépendante de  $A$ .





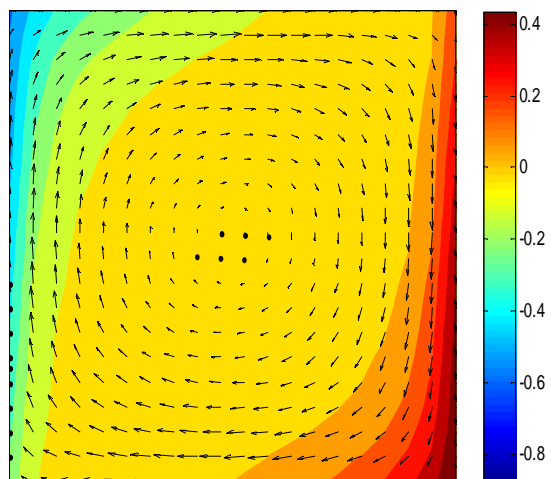
**Figure(IV.12)** : Influence du rapport d'Aspect  $A$  sur les isocontours de :  
concentration, température et de fonction de courant.



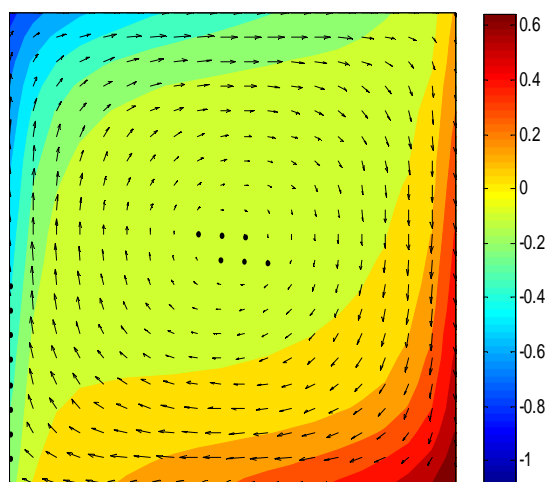
**Figure (IV.13):** Effet de rapport de forme A sur la fonction du courant

#### IV.4.5. Evolution temporelle des champs de concentration

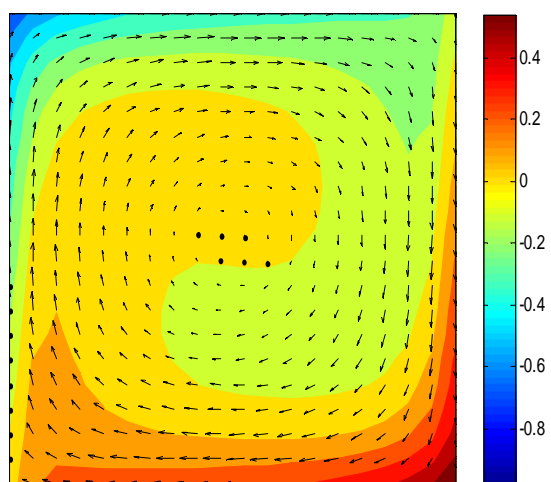
La figure (IV.14) illustre l'évolution temporelle des profils de vitesses et des champs de concentration pour un nombre de Rayleigh-Darcy donné ( $Ra=28.10^{-2}$ ) pour différent temps d'écoulement.



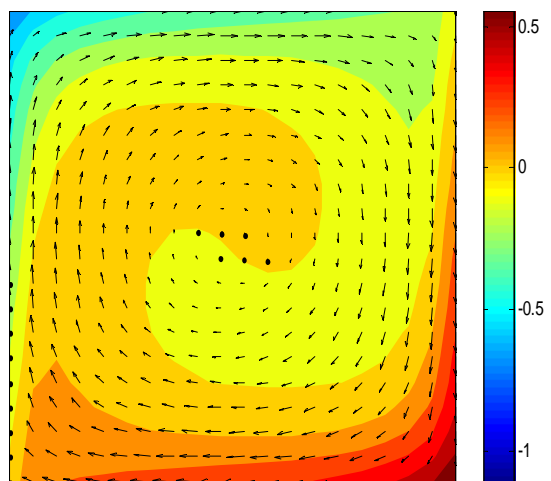
(a)



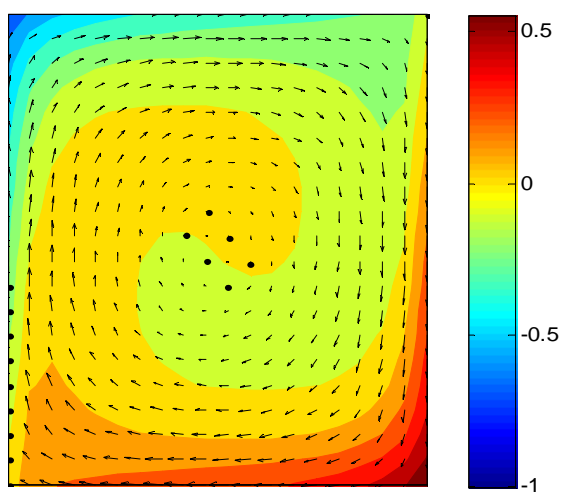
(b)



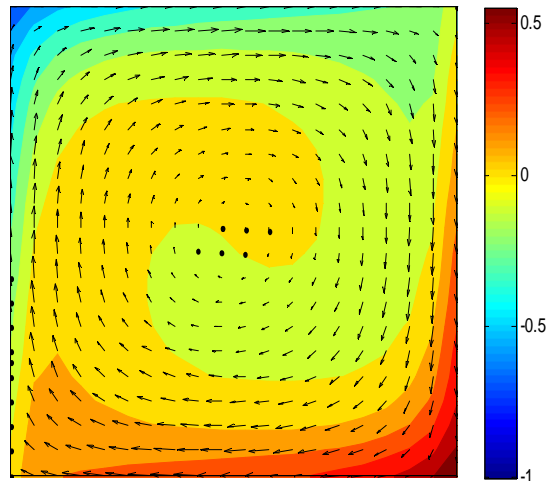
(c)



(d)



(e)



(f)

**Figure IV.14:** Evolution temporelle de la concentration de l'eau et du profil de vitesse du début de la convection (a) jusqu'à la fin (f)

#### IV.5. Conclusion

Nous sommes intéressés dans ce chapitre aux principaux résultats numériques de cette étude. Les commentaires, interprétations et analyses des divers résultats sont également présentés.



## CONCLUSION et PERSPECTIVES

Dans ce mémoire, on a présenté une étude numérique de transfert de chaleur et de masse couplés par convection naturelle dans une enceinte rectangulaire remplie par une matière poreuse homogène et isotrope, saturée par un fluide multiconstituants. Le fluide utilisé est un fluide binaire composé de l'eau et de l'éthanol, dont la fraction massique de l'eau est 60.88%, tous les parois de l'enceinte sont imperméables, les parois verticales de l'enceinte sont soumises à un gradient de température, les autres parois sont adiabatiques.

En se basant sur les approximations de Boussinesq, on a développé le modèle mathématique décrivant notre problème, l'écoulement et le transfert thermique et massique sont modélisés par le modèle de Darcy, les équations de conservation de la masse totale, de la masse de chaque espèce et d'énergie. Ces équations ont été discrétisées avec la méthode des différences finis (version de Griebel [15]), le couplage vitesse-pressure a été mené avec la méthode de projection formulé en volume finis et résolues par la méthode itérative de Gauss Seidel.

Ce travail a été validé qualitativement et quantitativement par comparaison avec les résultats trouvés dans la littérature. Un bon accord a été trouvé.

Les résultats obtenus nous ont permis de mettre en évidence l'interaction entre le transfert de chaleur et de masse, et d'établir une description de la convection naturelle bidiffusive dans les milieux poreux. L'intensité de l'écoulement et le transfert de chaleur et de masse sont exprimé en fonction de certains paramètres de contrôle de problème. Ces paramètres étant le nombre de Rayleigh-Darcy, le gradient thermique, le nombre de Lewis et le rapport de forme. A la fin du mémoire on a présenté l'évolution temporelle des champs de concentration dans une cavité carrée

Dans cette étude les modèles mathématiques utilisés sont basés sur de nombreuses hypothèses simplificatrices. Dans le futur ils nous semblent intéressants de modifier ces hypothèses de façon à tenir en compte de certains effets, tel que les effets multidimensionnelles et les effets d'anisotropie. Il sera possible d'étudier l'écoulement des fluides compressibles et réactifs dans les milieux poreux.

## Références bibliographiques

- [01] **Haykel Ben Ahmed**, Etude de la Convection Mixte d'Origine Thermosolutale sous l'Influence de l'Effet Soret dans un Milieu Poreux : Analyse de Stabilité Linéaire et Simulation 3D, Thèse de Doctorat, Université de Tunis ELMANAR(2008).
- [02] **D.A. Nield, A. Bejan**, Convection in Porous Media. Third edition, Springer, 2006.
- [03] **R.Bennacer, A.Tobbal, H.Beji**, Double Diffusive Convection in a Vertical Enclosure Filled With Anisotropic Porous Media, Int. Journ. Thermal Science, 40, 1, (2001) 30-41.
- [04] **L.B. Benano Melly, J.P. Caltagirone, B. Faissat, F.Montel**, Modeling Soret Coefficient Measurement Experiments in Porous Media Considering Thermal and Solutale Convection, International Journal of Heat and Mass Transfer 44 (2001) 1285-1297.
- [05] **B. Willbois, G. Galliéro, J.P. Caltagirone, F. Montel**, Macroscopic Model of Multi-component Fluids in Porous Media, Phil. Mag., Vol83 (2003) 2209-2219,
- [06] **François Montel, Jacques Bickert**, Initial State of Petroleum Reservoir: A Comprehensive Approach, Journal of Petroleum Science and Engineering 58 (2007) 391-402.
- [07] **Adrian Postelnieu**, Influence of Chemical Reaction on Heat and Mass Transfer by Natural Convection From Vertical Surfaces in Porous Media Considering Soret and Dufour Effects, Heat Mass Transfer (2007), 43: 595-602.
- [08] **F.Joly, P. Vasseur, G.Labrosse**, Soret-Driven Thermosolutal Convection in a Vertical Enclosure, Int. Comm. Heat Mass Transfer. Vol27, No6, 755-764(2000).
- [09] **M. Elossmani, B. Amaziane**, Simulation Numérique d'Ecoulement et de Transport de Contaminants en Milieu Poreux Hétérogènes, Congrès International MAMERN, 09-11 Mai2005, Maroc.
- [10] **J. El-hijri, A. Draoui, C. Beghein, F. Allard**, Modélisation du Transport et Diffusion des Polluants Dans une Cavité Bidimensionnelle Thermiquement Entraînée, 12ème JITH, Maroc 15-17 Novembre 2005.

- [11] **Y.Ould-Amer, S.Slama**, Convection Naturelle Dans un Milieu Poreux Multicouche, JITH2007, Albi : France(2007).
- [12] **A. Bousri, K. Bouhadef**, Etude Numérique de Transfert de Chaleur et de Masse dans un Cylindre Rempli d'un Milieu Poreux Réactifs, Eurotherm Seminar N81, Reactive Heat Transfer in Porous Media, Albi, France, Juin 4-6, 2007.
- [13] **Boris Willbois**, Modèle Macroscopique d'Écoulement de Fluide Multiconstituants en Milieu Poreux Applicable aux Gisements Pétroliers, Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux I(2003).
- [14] **Bilal Elhajjar**, Sur le Couplage Thermodiffusion-Convection : Séparation et Instabilités Induites par de Nouvelles Configuration Géométriques et Thermiques, Thèse de Doctorat, Université de Toulouse(2008).
- [15] **Michael Griebel, Thomas Donseifer, Tillman Neunhoeffler**, Numerical Simulation in Fluid Dynamics: A Practical Introduction, The society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1998).
- [16] **R. Younsi, A. Harkati, D. Kalache**, Numerical Simulation of Double-Diffusive Naturel Convection in Porous Media : Opposing Flow. The Arabian Journal of Science and Engineering, Vol.27, N°1C, 2002.
- [17] **S. Bories**, Ecole d'Été sur la Convection Naturelle en Milieu Poreux Confine, Institut de la Mécanique des Fluides de Toulouse, LUMINY (BOUCHES DU RHONE) (1-10 Juillet 1982).
- [18] **A. Ramirez, J.L. Gonzalez, F. Carrillo, S. Lopez**, Simulation of Incompressible Fluid Flow through a Porous Media, Fluid Phase Equilibria, 100 (1994)209-222.
- [19] **B. Faissat, F.Montel**, Fundamental Statements about Thermal Diffusion for a Multi-Component Mixture in a Porous Medium, Fluid Phase Equilibria, 100 (1994) 209-222.
- [20] **B. Karasözen, V.G. Tsybulin**, Mimic Discretisation of two dimensional Darcy convection, Computer Physics Communications 167 (2005) 203-213
- [21] **B. Karasözen, V.G. Tsybulin**, Staggered Grids Discretisation in Three-Dimensional Darcy Convection, Computer Physics Communications 178 (2008) 885-893
- [22] **Kambiz Vafai**, Handbook of Porous Media, Second Edition, Taylor and Francis Group, LLC, 2005.

## Références Bibliographiques

---

- [23] **L. Preziosi, A. Farina**, On Darcy's Law for Growing Porous Media, International Journal of Non-Linear Mechanics 37 (2002) 485-491.
- [24] **S.V. Patankar**, Numerical Heat transfer and fluid flow, Hemisphere, Washington (1980).
- [25] **Tarek Ahmed, Paul D. McKinney**, Advanced Reservoir Engineering, GPP ELSEVIER, 2005.
- [26] **Zoltan E.Heinemann**, Fluid Flow in Porous Media, Vol1, Leoben, October 2005
- [27] **G. Bardan, A. Mojtabi, A. Jounet**, Convective Vibrationnelle dans un Milieu Poreux, 17ème Congrès Français de Mécanique, Nancy, 3-7 Septembre 2001.
- [28] **M. Er-raki, M. Hasnaoui, A. Amahmid**, Etude de la Convection Thermosolutale en Régime de Couche Limite dans une Cavité Poreuse Vertical en Présence de l'Effet Soret, 12ème JITH, Maroc 15-17 Novembre 2005.
- [29] **Nasri Loubna**, Analyse de et Evaluation du Transfert de Chaleur Dans un Ecoulement Avec Réaction Chimique, Mémoire de Magister, Université de Constantine (1999).
- [30] **G. Galliéro**, Simulation Numérique dans un Milieu Poreux d'un Mélange Fluide d'Alcanes Normaux par Dynamique Moléculaire hors Equilibre, Mémoire de DEA, Université de Bordeaux I(1998).

## ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة عددية لانتقال المادة و الحرارة المزدوج بواسطة الحمل الطبيعي في تجويف مسامي مشبع بمائع متعدد المكونات. المعادلات التي استعملناها تم تحليلها بواسطة طريقة الفوارق المنتهية. النتائج التي تحصلنا عليها تمت مقارنتها بنتائج أعمال أخرى. و درسنا أيضا تأثير المعاملات المتحكممة في الانتقال على حقول التركيز و حقول الحرارة و حقول التيار. كما استعرضنا التطور الزمني لحقول التركيز.

## RESUME

Dans ce travail on a présenté une étude numérique de transfert de chaleur et de masse couplés par convection naturelle dans une cavité poreuse saturée par un fluide multiconstituant. Les équations gouvernantes ont été discrétisées par la méthode des différences finis. La résolution du couplage (pression-vitesse) a été menée avec la méthode de projection formulée en volumes finis. Notre procédure de simulation a été validée en comparant les résultats qu'on obtient avec ceux d'autres travaux. Les résultats obtenus ont permis l'étude de l'influence des paramètres de contrôle sur les champs massiques, thermiques et dynamiques. L'évolution temporelle des concentrations a été également présenté dans cette mémoire.

## Abstract

In this work, we presented a numerical study of a coupled heat and mass transfer by natural convection in a porous enclosure saturated by a multi-components fluid, the governing equations were discretized using the finite differences method, the resolution of the pressure-velocity coupling was obtained using the projection method (formulated by finite volume method), our procedure of numerical simulation was validated by comparing our results with those of other authors, the results obtained allow the study of the influence of certain parameters on the flow, mass and heat transfer, the temporal evolution of concentration was also presented in this work.