République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : **Probabilité**

Par Mr. (Mme/Melle.) TOURQUI abir

Titre :

Thérorème Central Limite, sous condition de Lindenberg, martingales

---

Devant le Jury :

Dr**.**	**Tamer Lazhar**	U.Biskra	**Président**
Dr.	**Mansouri Badreddine**	U.Biskra	**Encadreur**
Dr.	**Mezerdi Mohamed Al Amine**	U.Biskra	**Examinateur**

Soutenu Publiquement le : 19/06/2023

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes chères parentes ma mère **Fatima** *et mon père* **Madani** *pour leur patience, leur amour, leurs outien et leur sencouragements tout au long de mes années d'études.*

Mes cheres frères et ma chères soeurs : **Mohamed**, **Samir**, **Souraya**, **Khadra**, **Amel**, **Hanane**, **Yassmiin**.

pour leurs encouragements, soutiens et pour l'amour qu'ils m'ont donné.

Mes petite enfants : **Adam**, **Hamoudi**, **Anas**, **Ishak**, **meriem**.

Mes amis proches : **Amira**, **Ferial**, **Karima**, **Souheila**, **Jihan**.

Je dédie ce travail à tous les nembres de ma famille et à ceux qui m'ont aidé et m'ont encouragé.

Tout mes collègues de mathématiques 2022/2023.

Tout les professeurs du département de Mathématiques de Biskra.

♡*Abir Tourqui* ♡

Remerciements

Je suis reconnaissant au Dieu tout-puissant de m'avoir accordé la force, le courage et la patience nécessaires pour réussir à terminer mon mémoire.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de mémoire **Dr. Manssouri Baderddine** *pour ses précieux conseils et son assistance tout ou long de cette période de travail.*

Je tiens à remercier également les nombres de jurys : ***Dr.Tamer Lazher*** *et* **Dr. Mezerdi Mohmed al amine** *pour avoir accepté d'étudier et d'évaluer ce travail.*

Enfin, nous tenoons également à remecier toutes les presonnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Merci à tous ♡

Notations et symbols

Ω	:	Ensemble fondamentale.
$\mathcal{P}(E)$	:	L'ensemble de partie de E.
$\mathcal{F}$	:	Tribu d'événements sur Ω.
$(\Omega, \mathcal{F})$	:	Esoace probabilisable.
$(E, \mathcal{E})$	:	ESpace mesurable.
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	:	Espace probabilité.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$	:	Espace de probabilité filtré.
A^c	:	Complémentaire de A.
$\varnothing$	:	L'ensemble vide.
v.a	:	Variable aléatoire
P_A	:	Loi de probabilité conditionnelle.
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$	:	La tribu borélienne de $\mathbb{R}$.
1_A	:	Indicatrice de A, définie par : $1_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A, \\ 0, x \notin A. \end{cases}$
$\mathbb{E}[X]$	:	Espréance de variable aléatoire.
$\mathbb{N}, \mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres naturelles réels respectivement.
$\sigma(A)$	:	La tribu engendré par A
C	:	Ensemble de fonction dérivable et dont la premiér dérivée est continue.

C^2	:	Ensemble de fonction dérivable et dont la dérivée seconde est continue.
C_b	:	Ensemble des fonctions b fois continuement dérivables.
i.e	:	C'est -à-dire.
$\mathbb{R}^d$	:	Espace réel euclidien de dimension d.
L^2	:	L'espace des variables aléatoires de carré intégrables.
L^1, L^p	:	L'espace des variables aléatoires intégrables (resp. p-intégrables).
resp	:	Respectivement.
$S \wedge T$	:	$Min(S, T)$.
$S \vee T$	:	$Sup(S, T)$.
$p.s$	:	Presque sûrement.
$P - p.s$	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité P.
TCL	:	Théorème Central Limite.
$\langle S_n \rangle$	:	Variance quadratique (crochet stochastique) de S.

Table des matières

Introduction

Le nom martingale est synonyme de jeu équitable, c'est-à-dire d'un jeu où le gain que l'on peut espérer faire en tout temps ultérieure est égal à la somme gagnée au moment présent. En probabilités, On appelle donc martingale un processus stochastique $(X_n)_n$ tel que l'espérance conditionnelle $E[Xm \mid Xn]$ est ègale à X_n pour tout $m \geq n$. Les martingales, ainsi que leurs variantes les sous-martingales et les sur-martingales jouissent de nombreuses propriétés qui les rendent très utiles dans l'ètude de processus stochastique plus généraux. L'étude des martingales qui est proposée ci-dessous repose très fortement sur l'algèbre des espérances conditionnelles.

Le principe de Lindenberg, méthode issue de l'article [11], reprise par [15], est à l'origine une méthode pour démontrer le théorème Central Limite, sans avoir recours aux outils dérivant de l'analyse de Fourier. Le théorème Central Limite est fondamentalement une preuve d'une convergence en loi. Ainsi, ce qui va nous intéresser, c'est d'étudier des convergences du type :

$$\mathbb{E}(f(S_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f(Y)), \tag{1}$$

où

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k \tag{2}$$

est la somme qui nous intéresse dans ce théorème, dont on spécifiera tout au long de ce rapport les hypothèses plus précisément, et

$$Y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} Y_k \tag{3}$$

suit une loi normale centrée réduite que l'on peut écrire comme somme de lois normales centrées réduites indépendantes par stabilité de la loi normale.

Posons $Z_i = (X_1, \ldots, X_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_n); Z_n = X$.

$$|\mathbb{E}(f(S_n)) - \mathbb{E}(f(Y))| = \left| \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(f(\frac{Z_i}{\sqrt{n}}) - f(\frac{Z_{i-1}}{\sqrt{n}}) \right) \right|. \tag{4}$$

L'idée principale sera donc, par un développement de Taylor, de contrôler l'erreur $E\left(f(\frac{Z_i}{\sqrt{n}}) - f(\frac{Z_{i-1}}{\sqrt{n}}) \right)$.

Cette méthode s'étend remarquablement bien à des théorèmes de convergence beaucoup plus forts que le théorème Central Limite, et avec des hypothèses moins restrictives que, notamment, l'identique distribution des variables. En particulier, [6] donne une majoration de la quantité $|\mathbb{E}(g(f((X_1, \ldots, X_n))) - \mathbb{E}(g(f((Y_1, \ldots, Y_n)))|$, *qui permet d'étendre les résultats de convergence à bien plus que seulement des sommes de variables aléatoires.*

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le permier chapiter est notion de base de probabilité et rappel générale sur les processus stochastique. Dans le deuxième chapiter nous auvons étudié les martingales, et dans troisième chapitre nous avons défini théorème central limite et principe de Lindenberg, et nous avons appliqué ce théorme sur martingale sous condition Lindenberg.

Chapitre 1

Généralités

Le but de ce chapiter est de fournir des définitions de base et les résultats principaux afin de les utiliser dans les chapitres suivants.

1.1 Tribu

Définition 1.1.1 ***(Tribu)*** *Soit E un ensemble. On dit que $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ est une tribu (ou une σ-algèbre) si :*

– $E \in \mathcal{F}$;

– $\forall A \in \mathcal{F},\ A^c \in \mathcal{F}$;

– $\forall n \geq 0,\ A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{F}$.

Définition 1.1.2 ***(Tribu engendrée)*** *On appelle tribu engendrée par une classe de parties A de Ω la plus petite tribu sur Ω contenant A, et on note $\sigma(A)$. Elle est l'intersection de toutes les tribus contenant A.*

1.2 Espace probabilité

Définition 1.2.1 *On appelle probabilité définie sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *une application* P *de* $\mathcal{F}$ *dans* $[0,1]$ *telle que :*

1. $P(\Omega) = 1$.
2. *Pour toute ensemble dénombrable d'événements* $A_1, A_2, ..., A_n$,*de* $\mathcal{F}$ *deux á deux disjoints (incompatibles) :*

$$P(\bigcup_{i \in N^*} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *s'appelle espace probabilisé.*

Proporiétés élémentaires des probabilité

Tout probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{F})$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. $\forall A \in \mathcal{F},\ P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{F}$: si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.
4. $\forall A, B \in \mathcal{F} : P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
5. $\forall A_1, ..., A_n \in \mathcal{F},\ \ P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$.
6. Si (A_n) est un suite croissante d'événements de $\mathcal{F}$, alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in N}$ est covergente et

$$P(\bigcup_{n \geq 0} A_n) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n).$$

7. Si (A_n) est un suite décroissante d'événements de $\mathcal{F}$, alors la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n \in N}$

est covergente et

$$P(\bigcap_{n\geq 0} B_n) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n).$$

1.3 Variable aléatoire

Définition 1.3.1 *Tout application mesurable X d'un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans un espace $(E,\, \mathcal{E})$ définit une variable aléatoire X vériffie donc la propritété de muesurabilité*

$$\forall B \in \mathcal{E} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Théorème 1.3.1 *La mesure P_X définie sur $(E,\, \mathcal{E})$ par*

$$\forall B \in \mathcal{E} : P_X(B) = P(X^{-1}(B)),$$

est la probabilité image P par X définie sur $(E,\, \mathcal{E})$.

Définition 1.3.2 *Soit $(\Omega,\, \mathcal{F})$ un espace mesurable, une variable aléatoire réelle X est une application mesurable de $(\Omega,\, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}$ (donc telle que $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}; \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$). Une constante est une variable aléatoire de même qu'une fonction indicatrice d'ensemble de la tribu $\mathcal{F}$.*

Définition 1.3.3 ***(Fonction de répartition)*** *Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles, on définit :*

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propriètè 1.3.1 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, et X une varaible aléatoire réelle de fonction de répartition F_X et A l'ensemble de ses points* *de discontinuité. Alors*

$$\left(\forall x \notin A, F_{X_n}(x) \underset{n\to\infty}{\to} F_X(x)\right) \Rightarrow X_n \overset{Loi}{\underset{n\to\infty}{\to}} X.$$

Définition 1.3.4 *Notons C l'ensemble des fonctions uniformément continues et bornées sur $\mathbb{R}$, et notons C^2 l'ensemble des fonctions deux fois dérivables telles que $f, f', f'' \in C$.*

Propriètè 1.3.2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que :*

$$\forall f \in C^2, \quad \mathbb{E}(f(X_n)) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}(f(X)).$$

Alors $X_n \overset{Loi}{\underset{n\to\infty}{\to}} X$.

Preuve. Soit y un point en lequel F_X est continue. Fixons $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$F_X(y+\delta) - F_X(y-\delta) < \varepsilon.$$

Construisons alors f et g deux fonctions de l'espace C^2 telles que :

- $0 \leq f(x) \leq g(x) \leq 1$,
- $f(x) = 1$ si $x \leq y - \delta$,
- $f(x) = 0$ si $x \geq y$,
- $g(x) = 1$ si $x \leq y$,
- $g(x) = 0$ si $x \geq y + \delta$.

On a alors par construction :

$$F_X(y-\delta) \leq \mathbb{E}(f(X)) \leq F_X(y) \leq \mathbb{E}(g(X)) \leq F_X(y+\delta).$$

et également $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}\left(f(X_n)\right) \leq F_{X_n}(y) \leq \mathbb{E}(g(X_n)).$$

Or par hypothése, $\mathbb{E}(f(X_n)) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}(f(X))$ et $\mathbb{E}(g(X_n)) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}(g(X))$, donc :

$$\mathbb{E}(f(X)) \leq \liminf F_{X_n}(y) \leq \limsup F_{X_n}(y) \leq \mathbb{E}(g(X)),$$

et donc

$$F_X(y) - \varepsilon \leq \liminf F_{X_n}(y) \leq \limsup F_{X_n}(y) \leq F_X(y) + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a finalement :

$$F_{X_n}(y) \underset{n\to\infty}{\to} F_X(y),$$

et ce pour tout $y \notin A$. Ainisi, par la propriété 1.3.1, on a bien $X_n \underset{n\to\infty}{\overset{Loi}{\to}} X$.

Ce résultat s'apparente à un résultat de densité, puisque finalement on a montré :

$$\left[\forall f \in C^2, \mathbb{E}(f(X_n)) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}(f(X))\right] \Leftrightarrow \left[\forall f \in C_b, \mathbb{E}(f(X_n)) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}(f(X))\right].$$

■

1.4 probabilité conditionnelle

Définition 1.4.1 *soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et A un événement de probabilité non nulle. On définit une nouvelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$, appelée proba-*

bilité conditionnelle sachant A*, en posant pour tout* $B \in \mathcal{F}$*, la probabilité notée* $P(B\backslash A)$ *définie par*

$$P_A(B) = P(B\backslash A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{P(A)}.$$

On peut facilment voir que l'on a

$$\forall B \in \mathcal{F},\ P(A \cap B) = P(A)P(B\backslash A)$$

cela se généralise en

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2\backslash A_1)P(A_3\backslash A_1 \cap A_2)...P(A_n\backslash A_1 \cap ... \cap A_{n-1})$$

De plus, si $P(A^c) > 0$ *alors*

$$\forall B \in \mathcal{F},\ P(B) = P(A)P(B\backslash A) + P(A^c)P(B\backslash A^c)$$

et on en déduit la formule de Bayes permettant d'inverser les conditionnements :

$$\text{Si } P(B) > 0,\ P(A\backslash B) = \frac{P(A)P(B\backslash A)}{P(A)P(B\backslash A) + P(A^c)P(B\backslash A^c)}.$$

Il est possible de généraliser ces dernières relations lorsqu'on considère une partition dénombrable $(A_n)_{n \in N}$ *de* Ω*,* $(A_k \cap A_l = \varnothing, \cup_n A_n = \Omega$ *et* $P(A_n) > 0)$ *:*

$$\forall B \in \mathcal{A},\ P(B) = \sum_{n \geq 0} P(A_n)P(B\backslash A_n) \text{ (formule des probabilitités totales)}$$

$$P(A_n\backslash B) = \frac{P(A_n)P(B\backslash A_n)}{\sum_{n \geq 0} P(A_n)P(B\backslash A_n)} \text{ (formule de Bayes)}$$

1.5 Indépendance

Définition 1.5.1 *Deux sous-tribus $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont indépendantes si*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \forall A \in \mathcal{F}_1, \forall B \in \mathcal{F}_2.$$

Définition 1.5.2 *Un varialbe aléatoire X est indépendante d'une sous-tribu $\mathcal{G}$ si les tribus $\sigma(X)$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes.*

Proposition 1.5.1 *La variable aléatoire X est indépendante de sous-tribu $\mathcal{G}$ si et seulement si*

$$P\{B \cap (X \leq x)\} = P(B)P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall B \in \mathcal{G}.$$

Deux variables (X, Y) sont indépendantes si les tribus $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont indépendantes.

Définition 1.5.3 *On dit que n événements $A_1, ..., A_n$ sont indépendants si, pour tout sous-ensemble non vide $\{j_1, ..., j_p\}$ de $\{1, ..., n\}$, on a*

$$P(A_{j_1} \cap ... \cap A_{j_p}) = P(A_{j_1})...\mathbb{P}(A_{j_p}).$$

Remarque 1.5.1 *Cette définition n'est pas une équivalence, i.e il ne suffit pas que l'on ait*

$$P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)...P(A_n)$$

Pour dire que les événements A_i et A_j sont indépendants.

Remarque 1.5.2 *A et B indépendants si et seulment si $P(A \backslash B) = P(A)$.*

1.6 Espérance conditionnelles

Définition 1.6.1 ***(Espérance)*** *Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on appelle espérance de X l'intégrale de Lebsgue de X relativement à la mesure P, et on note $\mathbb{E}[X]$, tel que*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega)\ dP.$$

Espérance conditionnelles par rapport à une tribu

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une espace de probabilité et soit X une v.a définit sur cet espace. Soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 1.6.2 *On appelle l'espérance conditionnelles de la variable aléatoire X sachant $\mathcal{G}$ est l'unique variable aléatoire et on la note $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ tel que :*

1. $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ *est $\mathcal{G}$-mesurable*
2. $\displaystyle\int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\, dP = \int_A X\ dP,\ \forall A \in \mathcal{G}.$

Remarque 1.6.1 *c'est l'unique (à une égalité $P-$p.s prés) variable $\mathcal{G}$-mesurable telle que*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\, Y] = \mathbb{E}(XY),$$

pour tout variable Y, $\mathcal{G}$-mesurable bornée.

Espérance conditionnelle par rapport à une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ une espace probabilité fixé et donné. Soient X, Z deux v.a définies sur cet espace. Soit $\mathcal{G}$ la tribu engendré par Z (i.e $\mathcal{G} = \sigma(Z)$).

Définition 1.6.3 *On appelle l'espérance conditionnelle de X schant Z est une variable aléatoire définie comme l'espérance conditionnelle de X par rapport la tribu $\mathcal{G}$ (i.e $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$) on la note $\mathbb{E}(X \mid Z)$. Telle que $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$ est une fonction de Z (i.e $\mathbb{E}(X \mid Z)$ est une v.a mesurable par rapport la tribu engendrée par Z). L'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X \mid Z)$ est caractérisée par :*

1. *C'est une variable $\sigma(Z)$ mesurable.*
2. $\int\limits_A \mathbb{E}(X \mid Z)\, dP = \int\limits_A X dP, \forall A \in \sigma(Z)$.

Propriétés de l'espérance conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité donné, et soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. Soient X et Y deux v.a definies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

1. Soit a et b deux constantes tel que : $\mathbb{E}(aX+bY \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})+b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$ **(Linéarité).**
2. Soit X et Y deux v.a telles que $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$ **(Croissance).**
3. Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$.
4. Si Y est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$.
5. $\mathbb{E}\left[E\left(X \mid \mathcal{G}\right)\right] = \mathbb{E}(X)$.
6. Si X indépendante de $\mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.
7. Si X une v.a telle que $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P), \forall p \geq 1$. Alors $\|\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},P)} \leq \|X\|_{L^p(\Omega,\mathcal{F},P)}$.
8. Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux tribus telle que $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, alors

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}).$$

9. Si ϕ est une application convexe et mesurable, $\mathbb{E}\left[\phi(X) \mid \mathcal{G}\right] \geq \phi(\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right])$ **(Inégalité de Jensen).**

1.7 Convergence d'une suite de variable aléatoire

Définition 1.7.1 *soit X et $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

1. *On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge persque sûrement vers X ($X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s}{\to}} X$), si*
$$P(\left\{\omega \in \Omega : X(\omega) = \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega)\right\}) = 1.$$
2. *Si $p > 0$, on dénote $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ l'ensemble des variables aléatoires X telle que $\mathbb{E}(|X|^p) < +\infty$, on dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^p vers X ($X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{L^p}{\to}} X$), si*
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] = 0.$$
3. *On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers X ($X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{P}{\to}} X$), si*
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0.$$
4. *On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X ($X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} X$), si pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$:*
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[f(X_n)\right] = \mathbb{E}\left[f\left(X\right)\right].$$

Proposition 1.7.1 – *La convergence presque sûre ou dans L^p implique la conver-*

gence en probabilité.

- *La convergence en probabilité (ou presque sûre, ou dans L^p) implique la convergence en loi.*
- *De toute suite qui converge en probabilité il est possible d'extraire une sous -suite qui converge presque sûrement.*
- *La convergence dans L^p implique la convergence en L^q pour tout $q \leq p$.*
- *Si $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité (ou presque sûrement) vers X et qu'il existe $p \geq 1$ tel que la famille $|X_n|^p$ soit uniformément intégrable, alors $(X_n)_{n\geq 1}$ converge dans L^p vers X.*

Définition 1.7.2 ***(convergence étroite)*** *Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesure de probabilités sur $\mathbb{R}$. Elle converge étroitement vers μ mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ si seulement si :*

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}), \qquad \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) \underset{n\to\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx),$$

où $C_b(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Chapitre 2

Martingales

Dans ce chapiter, notre objectif est d'explorer le concept de martingale, qui joue un rôle central en probabilités et en statistiques.

La théorie des martingales vise à fournir les outils mathématiques nécessaires pour le calcul des prix des options, notamment les concepts de martingale, de temps d'arrêt et de théorème d'arrêt et de convergence.

2.1 Définition et propriétes

Définition 2.1.1 ***(Filtration)*** *soit* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espace de probabilité. Une filtration est une famille* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ *croissante de sous tribu de* $\mathcal{F}$ *:*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_n \subset ... \subset \mathcal{F}.$$

On appelle l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, P)$ *un espace de probabilité filtré.*

Définition 2.1.2 ***(Processus stochastique)*** *Une processus stochastique* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *est une famille de variable aléatoire définit sur espace de probanilité* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *tel* *que l'indice t est souvement interprété comme temps.*

- *Si $T \subseteq \mathbb{N}$ on dit que le precessus est temps discret.*

- *Si $T \subseteq \mathbb{R}$ on dit que le precessus est temps continue.*

Définition 2.1.3 ***(Processus adapté)*** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On dit que le processus est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ si X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 2.1.4 ***(Processus prévisible)*** *On dit qu'un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est prévisible (pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$) si X_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 2.1.5 ***(Inégalité de Jensen)*** *Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ vers lui même et X une v.a réelle telles que X et $\varphi(X)$ soient intégrables. On a alors :*

$$\varphi\left(\mathbb{E}\left(X\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\varphi\left(X\right)\right).$$

Définition 2.1.6 *Un processus stochastique $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (resp. sur-martingale, resp. sous-martingale) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :*

(i) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est $\mathbb{F}$-adapté (i.e X_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable pour tout n) ;*

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}\left[|X_n|\right] < +\infty$ *(i.e X_n est intégrable) ;*

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] = X_n$, *(resp. $\mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] \leq X_n$, resp. $\mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] \geq X_n$).*

Remarque 2.1.1

1. *La condition **(iii)** est équivalente à $\mathbb{E}\left[X_{n+1} - X_n/\mathcal{F}_n\right] = 0$, ou bien*

$$\forall A \in \mathcal{F}_n, \mathbb{E}\left[X_{n+1}1_A\right] = \mathbb{E}\left[X_n 1_A\right].$$

2. *Le processus $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale si seulement si le processus $-X = (-X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sur-martingale.*

Proposition 2.1.1 *soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale (resp. une sous-martingale) et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe (resp. convexe croissante) telle que $\varphi(X_n)$ soit intégrable alors $(\varphi(X_n))_{n\geq 0}$ est une sous-martingale.*

Preuve. D'aprés l'inégalité de Jensen on a :

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X_{n+1})/\mathcal{F}_n\right] \geq \varphi\left(\mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right]\right) = \varphi(X_n)$$

si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale. De même,

$$\varphi\left(\mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right]\right) \geq \varphi(X_n).$$

■

Propriètè 2.1.1 ***(propriétés des martingales)***

1. *Le processus $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale si seulement si, elle à la fois une sous-martingale et une sur-martingale.*
2. *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}$-martingale (resp. $\mathcal{F}$-sur martingale, $\mathcal{F}$-sous martingale) alors, la suite des réels $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante (resp. décroissante, croissante). En effet : $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_{m+1}/\mathcal{F}_n\right] = X_n &\Longrightarrow \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_{m+1}/\mathcal{F}_n\right]\right] = \mathbb{E}\left[X_n\right] \\ &\Longrightarrow \mathbb{E}\left[X_{m+1}\right] = \mathbb{E}\left[X_n\right].\end{aligned}$$

3. *$\forall n, m \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq m, \mathbb{E}\left[X_m/\mathcal{F}_n\right] = X_n$.*

En effet :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_m/\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\left[X_m/\mathcal{F}_{m-1}\right]/\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{m-1}/\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left[X_{m-1}/\mathcal{F}_{m-2}\right]/\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{m-2}/\mathcal{F}_n\right] \\
&\vdots \\
&= \mathbb{E}\left[X_{m+1}/\mathcal{F}_n\right] = X_n.
\end{aligned}$$

- Si $m \leq n, \mathbb{E}\left[X_m/\mathcal{F}_n\right] = X_m.$

Proposition 2.1.2 ***(Décomposition de Doob)*** *Toutes* $\mathcal{F}$*-sous martingales* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'écrit de façon unique de forme :*

$$X_n = M_n + A_n.$$

Où $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une* $\mathcal{F}$*-martingale et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un processus croissante et prévisible tels que :* $A_0 = 0.$

Preuve. Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une $\mathcal{F}$-sous martingale, on définit $A_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_{n+1} = A_n + \mathbb{E}\left[\left(X_{n+1} - X_n\right)/\mathcal{F}_n\right].$$

Par construction, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus croissante et prévisible car $\forall n \in \mathbb{N}$, A_{n+1} est $\mathcal{F}_n$-mesurable et

$$A_{n+1} - A_n = \mathbb{E}\left[\left(X_{n+1} - X_n\right)/\mathcal{F}_n\right] \geq 0.$$

De plus

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\left(X_{n+1}-A_{n+1}\right)/\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] - A_{n+1} \\
&= \mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] - A_n - \mathbb{E}\left[\left(X_{n+1}-X_n\right)/\mathcal{F}_n\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] - A_n - \mathbb{E}\left[X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right] + X_n \\
&= X_n - A_n \\
&= M_n.
\end{aligned}$$

On va montrer l'unicité : La décomposition est unique car : si, $X_n = M_n + A_n = M'_n + A'_n$, on a : $A_0 = A'_0 = 0$ et

$$\begin{aligned}
A'_{n+1} - A'_n &= (X_{n+1} - M'_{n+1}) - (X_n - M'_n) \\
&= (X_{n+1} - X_n) - (M'_{n+1} - M'_n).
\end{aligned}$$

et

$$A_{n+1} - A_n = (X_{n+1} - X_n) - (M_{n+1} - M_n).$$

D'où, en conditionnant par $\mathcal{F}_n$

$$\mathbb{E}\left[\left(A'_{n+1} - A'_n\right)/\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\left(X_{n+1} - X_n\right)/\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\left(A_{n+1} - A_n\right)/\mathcal{F}_n\right].$$

Donc $A'_{n+1} - A'_n = A_{n+1} - A_n$ d'où $A'_n = A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et par suite $M'_n = M_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$M_n = X_n - A_n,\ M'_n = X_n - A_n.$$

■

2.2 Martingales de carré intégrable

Définition 2.2.1 *Un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dit de carré intégrable, ou simplement dans L^2, si $\mathbb{E}\left[X_n^2\right] < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 2.2.2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable. Alors il existe un unique processus croissant et prévisible, intégrable et issu de 0, applé la variation quadratique de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et noté $([X,\, X]_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tel que le processus $(X_n^2 - [X,\, X]_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une martingale.*

La variation quadratique admet la représentation suivante : $[X,\, X]_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[X, X]_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(X_i - X_{i-1}\right)/\mathcal{F}_{i-1}\right].$$

Définition 2.2.3 ***(Transformation prévisible d'une martingale)*** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un martingale et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un processus prévisible. La transformation prévisible da la martingale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le processus $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par le processus donné par $\tilde{X}_0 = X_0$ et*

$$\tilde{X}_n := \tilde{X}_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i\left(X_i - X_{i-1}\right), \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Si la variable aléatoire A_n sont bornées, alors $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

Théorème 2.2.1 ***(Variation quadratique d'une transformation prévisible)***

Soit $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la transformation prévisible d'une martingale de carré intégrable $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par le processus prévisible $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, supposé borné. Alors on a la formule *suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\left[\tilde{X}, \tilde{X}\right]_n = \sum_{i=1}^{n} A_i^2([X,\ X]_i - [X,\ X]_{i-1}).$$

Preuve. On a $[\tilde{X},\ \tilde{X}]_0 = 0$ par définition et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
[\tilde{X}, \tilde{X}]_n &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\tilde{X}_i - \tilde{X}_{i-1}\right)^2 / \mathcal{F}_{i-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[A_i^2 \left(X_i - X_{i-1}\right)^2 / \mathcal{F}_{i-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_i^2 \mathbb{E}\left[\left(X_i - X_{i-1}\right)^2 / \mathcal{F}_{i-1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_i^2 \left([X,\ X]_i - [X,\ X]_{i-1}\right),
\end{aligned}$$

car le precessus $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est prévisible, d'où résultat désiré. ■

2.3 Théorèmes d'arrêt

Définition 2.3.1 *Un temps d'arrêt T est un variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\{T \leq n\} = \{\omega \diagup T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Proposition 2.3.1 *Soient S et T deux temps d'arrêt. Alors, $S + T$, $S \wedge T$ et $S \vee T$ sont des temps d'arrêts.*

En particulier, pour $k \in \mathbb{N}$, $T + k$, $T \wedge k$ et $T \vee k$ est un temps d'arrêt borné.

Plus généralement, si $(T_k)_{k\geq 0}$ est une suite de temps d'arrêt, alors $\inf T_k$ et $\sup T_k$, $\liminf T_k$ et $\limsup T_k$ sont aussi des temps d'arrêts.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\{S+T=n\} = \bigcup_{0\le k\le n} \{S=k\} \cap \{T=n-k\} \in \mathcal{F}_n.$$

$$\{S \wedge T \le n\} = \{S \wedge T > n\}^c = (\{S>n\} \cap \{T>n\})^c = \{S \le n\} \cup \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n.$$

$$\{S \vee T \le n\} = \{S \le n\} \cap \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n.$$

et

$$\{\inf T_k \le n\} = \bigcup_{0\le k\le n} \{T_k \le n\} \in \mathcal{F}_n.$$

$$\{\liminf T_k \le n\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\ge m} \{T_k \le n\} \in \mathcal{F}_n.$$

■

Définition 2.3.2 *Si T est un temps d'arrêt, on appelle tribu des évenements interieurs à T et la tribu suivante :*

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall n \in \mathbb{N},\ A \cap \{T=n\} \in \mathcal{F}_n\} \ \text{ où } \mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n\ge 0} \mathcal{F}_n\right).$$

Proposition 2.3.2 *Soit S et T deux temps d'arrêt. Alors :*

$$S \le T \Longrightarrow \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T.$$

Preuve. Soit $A \in \mathcal{F}_S$. Alors :

$$A \cap \{T=n\} = A \cap \bigcup_{k=0}^{n} \{S=k, T=n\} = \bigcup_{k=0}^{n} (A \cap \{S=k\} \cap \{T=n\}) \in \mathcal{F}_n.$$

car si $k \le n$, $A \cap \{S=k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$. ■

Théorème 2.3.1 ***(Théorème d'arrêt borné)***

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale (resp. une sous-martingale, une sur-martingale) et T une temps d'arrêt (pour la même filtration) borné. Alors on a

$$\mathbb{E}\left[X_T\right] = \mathbb{E}\left[X_0\right]$$

$$(resp.\ \mathbb{E}\left[X_T\right] \geq \mathbb{E}\left[X_0\right], \mathbb{E}\left[X_T\right] \leq \mathbb{E}\left[X_0\right]).$$

Preuve. Comme T est borné, il existe $N \geq 1$ tel que $0 \leq T \leq N$ d'où $X_{T\wedge N} = X_T$

$$X_T = X_{T\wedge N} = X_0 + \sum_{k=0}^{N-1} 1_{\{k<T\}}(X_{k+1} - X_k).$$

Or pour chaque $k = 0, 1, ..., N-1$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[1_{\{k<T\}}(X_{k+1} - X_k)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{\{k<T\}}(X_{k+1} - X_k)/\mathcal{F}_k\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[1_{\{k<T\}}\mathbb{E}\left[(X_{k+1} - X_k)/\mathcal{F}_k\right]\right].\end{aligned}$$

Maintenant, si X est une martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale), on a

$$\mathbb{E}\left[(X_{k+1} - X_k)/\mathcal{F}_k\right] = 0 \qquad (resp \geq 0, resp \leq 0).$$

d'où

$$\mathbb{E}\left[1_{\{k<T\}}(X_{k+1} - X_k)\right] = 0 \qquad (resp \geq 0, resp \leq 0).$$

par suite,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_T\right] &= \mathbb{E}\left[X_0\right] + \sum_{k=0}^{N-1}\mathbb{E}\left[1_{\{k<T\}}(X_{k+1}-X_k)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X_0\right] \quad (resp \geq \mathbb{E}\left[X_0\right], resp \leq \mathbb{E}\left[X_0\right]).\end{aligned}$$

■

2.4 Inégalités maximales de Doob

Théorème 2.4.1 *(Ingalité maximales de Doob) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale positive. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$P(\sup_{0\leq k\leq n} X_k \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}\left[X_k 1_{\left\{\sup\limits_{0\leq k\leq n} X_k \geq \lambda\right\}}\right]}{\lambda} \leq \frac{\mathbb{E}\left[X_n\right]}{\lambda}, \lambda > 0.$$

Par ailleurs, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a tous ses éléments dans L^p, où $p \geq 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(\sup_{0\leq k\leq n} X_k \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}\left[X_n^p\right]}{\lambda^p}, \lambda > 0.$$

Enfin, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sur-martingale positive, on a

$$P(\sup_{0\leq k\leq n} X_k \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}\left[X_0\right]}{\lambda}, \lambda > 0.$$

Théorème 2.4.2 *(Inégalité de Doob L^p) Soit $p > 0$. Supposons que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une sous-martingale positive telle que $X_n \in L^p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout*

$n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[(\sup_{0\leq k\leq n} X_k)^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p \mathbb{E}\left[X_n^p\right].$$

L'inégalité de Doob la plus utilisée est celle pour l'espace L^2, c'est-à-dire

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq k\leq n} |X_k|^2] \leq 4\mathbb{E}\left[X_n^2\right], n \in \mathbb{N}.$$

2.5 Convergence des martingales

Théorème 2.5.1 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale bornée dans L^2, i.e.*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[X_n^2\right] < +\infty.$$

Théorème 2.5.2 *soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable. Si l'on a $[X,X]_\infty < +\infty$ p.s la martingale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est p.s convergente.*

Théorème 2.5.3 *soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale bornée dans L^1, i.e*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n|\right] < +\infty.$$

Alors le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est p.s convergent.

Théorème 2.5.4 *Étant donné $p > 1$, soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale bornée dans L^p, i.e*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n|^p\right] < +\infty.$$

Alors le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^p vers une v.a $X_\infty \in L^p$.

2.6 Le cas de convergence $\mathbf{L}^1$

Définition 2.6.1 *Une la famille de v.a* $(X_i)_{i\in I}$ *est dite uniformément intégrable si,*

$$\lim_{a\to+\infty}\sup_{i\in I}\mathbb{E}\left[|X_i|\,1_{\{|X_i|>a\}}\right]=0.$$

Une telle famille est nécessairement bornée dans L^1.

Proposition 2.6.1 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires intégrables qui converge en probabilité vers* X. *Alors il y a équivalence entre*

(i) *La suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* X *dans* L^1.

(ii) *La suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément intégrable.*

Théorème 2.6.1 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une martingale. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La suite* X_n *converge vers* X_∞ *p.s et dans* L^1.

(ii) *Il exicte une v.a* Y *intégrable telle que* $X_n=\mathbb{E}\left[Y\mid\mathcal{F}_n\right]$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

(iii) *La suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément intégrable.*

Chapitre 3

Thérorème Central Limite, condition de Lindenberg, martingales

Dans ce chapitre, nous allons étudier le théorème central limite avec la condition de Lindenberg pour les martingales. L'objectif principal est d'analyser le comportement asymptotique des sommes de variables aléatoires indépendantes, en mettant l'accent sur les martingales.

3.1 Théorème Central Limite et principe de Lindenberg

3.1.1 Opérateur de convolution

Définition 3.1.1 *Posons quelle que soit la variable aléatoire Z réelle :*

$$T_Z : C \to C$$

$$f \longmapsto (x \longmapsto \mathbb{E}(f(Z+x)))$$

T_Z *est un opérateur linéaire bien défini de C dans C puisque d'une part :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(f(Z+x)) \leq \|f\|,$$

donc $\|T_Z(f)\| \leq \|f\|$ et d'auter part :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |T_Z(f)(x) - T_Z(f)(y)| \leq \sup_z |f(x+z) - f(y+z)|,$$

donc $T_Z(f)$ est bornée et uniformément continue. De plus, $T_{Z_1}T_{Z_2} = T_{Z_1+Z_2}$, d'après le théorème de Fubini. En particulier T_{Z_1} et T_{Z_2} commutent, ce qui donne la propriété suivante.

Propriètè 3.1.1 *L'opérateur T défini précédemment vérifie :*

$$\left\|(T_{Z_1}^n - T_{Z_2}^n)(f)\right\| \leq n \left\|(T_{Z_1} - T_{Z_2})(f)\right\|.$$

Propriètè 3.1.2 ***(Stabilité de la loi normale)*** *Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toute une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et soit $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}Y_n$. Alors :*

$$T_Y = T_{Z_n}^n.$$

Ce résultat découle directement du calcul du produit de convolution de deux lois normale : si l'on prend deux variables aléatoires indépendantes X et Y avec $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \alpha)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \beta)$, alors

$$X + Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}).$$

3.1.2 Preuve du TCL

Théorème 3.1.1 ***(Central Limite)*** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelle indépendantes et identiquement distribuées, centrées réduites. Alors*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k \underset{n\to\infty}{\overset{Loi}{\to}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Preuve. Posons $X = X_1$ et $\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma X_k$.

Première étape : Réduction du problème

A l'aide de la propriété 1.3.2, il suffit de montrer qu'en notant Y une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\forall f \in C^2, \quad \mathbb{E}(f(S_n)) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}(f(Y)).$$

Soit donc $f \in C^2$. Par récurrence, on a donc que $T_{S_n} = T^n_{\sigma X}$, et donc par les propiétés 3.1.1 et 3.1.2 :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(f(S_n)) - \mathbb{E}(f(Y))| &= |T^n_{\sigma X}(f)(0) - T^n_{\sigma Y}(f)(0)| \\ &\le \|T^n_{\sigma X}(f) - T^n_{\sigma Y}(f)\| \\ &\le n \left\| (T^n_{\sigma X} - T^n_{\sigma Y})(f) \right\| \qquad (3.1) \end{aligned}$$

Deuxiéme étape : Développement de Taylor

Puisque f est classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on peut écrire la formule de Taylor avec reste intégral entre a et $a+x$ réels :

$$f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \int_a^{a+x} (a+x-t)f''(t)dt$$

Que l'on préfèrera écrire :

$$f(a+x) = f(a) + xf'(a) + \frac{1}{2}x^2 f''(a) + \int_a^{a+x} (a+x-t)(f''(t) - f''(a))dt$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque f'' est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad |x| < \delta \Rightarrow |f''(a+x) - f''(a) \leq \varepsilon| \,.$$

Mais pour toute variable aléatoire Z réelle de moyenne nulle et de variance σ^2, on a :

$$\begin{aligned} T_Z\left(f\right)\left(a\right) &= \int_{\mathbb{R}} \left(f(a) + zf'(a) + \frac{1}{2}z^2 f''(\eta_{a,z}) \right) P_Z\left(dz\right) \\ &= f(a) + \frac{\sigma^2}{2} f''(a) + \int_{\mathbb{R}} \left(\int_a^{a+z} \left(a+z-t\right)\left(f''(t) - f''(a)\right)dt \right) P_Z\left(dz\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Notons temporairement : $R(a,z) = \int_a^{a+z} (a+z-t)\left(f''(t) - f''(a)\right)dt$. Le dernier terme de 3.2 se majore ainsi :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} R(a,z) P_Z\left(dz\right) \right| &\leq \left| \int_{|z|<\delta} R(a,z) P_Z\left(dz\right) \right| + \left| \int_{|z|\geq\delta} R(a,z) P_Z\left(dz\right) \right| \\ &\leq \int_{|z|<\delta} \frac{1}{2} z^2 P_Z\left(dz\right) + \|f''\| \int_{|z|\geq\delta} z^2 P_Z\left(dz\right), \end{aligned}$$

donc finalement :

$$\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\int_a^{a+z}(a+z-t)\left(f''(t)-f''(a)\right)dt\right)P_Z\left(dz\right)\right| \leq \frac{\sigma^2}{2}\varepsilon+\|f''\|\int_{|z|\geq\delta}z^2P_Z\left(dz\right). \tag{3.3}$$

Troisiéme étape : Majoration de 3.1

Lorsque l'on applique cette formule pour σX et σY, cette dernière intégrale s'écrite (si Z désigne maintenant X ou Y) :

$$\int_{|z|\geq\delta}z^2P_{\sigma Z}\left(dz\right)=\sigma^2\underbrace{\int_{|z|\geq\delta\sqrt{n}}z^2P_Z\left(dz\right),}_{\underset{n\to\infty}{\to}0}$$

puisque X et Y ont des variance 1, et donc en particulier celle intégrale est majorée par $\sigma^2\varepsilon$ pour n suffisamment grand. Finalement, on a pour n assez grand :

$$\begin{aligned}T_{\sigma X}\left(f\right)(a)-T_{\sigma Y}(f)(a)&=f(a)+\frac{\sigma^2}{2}f''(a)+\int_{\mathbb{R}}\left(\int_a^{a+z}(a+z-t)\left(f''(t)-f''(a)\right)dt\right)P_X\left(dx\right)\\&\quad-\left[f(a)+\frac{\sigma^2}{2}f''(a)+\int_{\mathbb{R}}\left(\int_a^{a+z}(a+z-t)\left(f''(t)-f''(a)\right)dt\right)P_Y\left(dy\right)\right],\end{aligned}$$

d'où, en injectant (3.3) :

$$\begin{aligned}\left\|\left(T_{\sigma X}-T_{\sigma Y}\right)(f)\right\|&\leq 2\left[\frac{\sigma^2}{2}\varepsilon+\|f''\|\int_{|z|\geq\delta}z^2P_Z\left(dz\right)\right]\\&\leq\sigma^2\varepsilon(1+2\left\|f''\right\|).\end{aligned}$$

Finalement, on a pour n assez grand

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}\left(f\left(S_n\right)\right) - \mathbb{E}\left(f\left(Y\right)\right)| &\leq n \left\|\left(T_{\sigma X} - T_{\sigma Y}\right)(f)\right\| \\ &\leq n\sigma^2\varepsilon(1 + 2\left\|f''\right\|) \\ &\leq \varepsilon(1 + 2\left\|f''\right\|). \end{aligned}$$

Et donc ceci étant valable quel que soit $\varepsilon > 0$, on a bien $\mathbb{E}\left(f\left(S_n\right)\right) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}\left(f\left(Y\right)\right)$. pour conclure, ceci est vrai quelle que soit $f \in C^2$, et par propriété 1.3.2, $S_n \overset{Loi}{\underset{n\to\infty}{\to}} \mathcal{N}\left(0,1\right)$. ■

3.2 Cas non identiquement distribué

Dans toute suite, on considère désormais une suite de variable aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes, de moyenne nulle, et notons $\mathbb{V}(X_n) = a_n^2 > 0$. On noté également :

$$s_n = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 3.2.1 ***(Critère de Lindenberg)*** *La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critére de Lindenberg si seulement si :*

$$\forall\delta > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{|x|\geq\delta s_n} x^2 P_{X_i}\left(dx\right) = 0.$$

3.2.1 Lemmes intermédiaires

Propriètè 3.2.1 *Si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont deux suites de variables aléatoires, alors*

$$\|T_{X_1}T_{X_2}\dots T_{X_n}(f) - T_{Y_1}T_{Y_2}\dots T_{Y_n}(f)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|T_{X_i}(f) - T_{Y_i}(f)\|.$$

Propriètè 3.2.2 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance* a_n^2*, et* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et de même distribution qu'une variable* Y *de moyenne nulle et de variance* 1*. Alors si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie le critère de Lindeberg,* (a_nY_n) *le vérifie également.*

3.2.2 Théorème de Lindenberg

Théorème 3.2.1 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes. Si* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie le critère de Lindenberg, alors :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to\infty}{\overset{Loi}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(0,1).$$

Preuve. Soit $S_n = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{n} X_i$, et notons $\sigma = \frac{1}{s_n} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. On note $T_{S_n} = T_{\sigma X_1}\dots T_{\sigma X_n}$, et $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

La preuve se déroule comme celle du théorème central limite, en écrivant au départ, pour $f \in C^2$:

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left(f\left(S_n\right)\right)-\mathbb{E}\left(f\left(Y\right)\right)\right| &= \left|T_{\sigma X_1}\ldots T_{\sigma X_n}\left(f\right)\left(0\right)-T_{\sigma a_1 Y}\ldots T_{\sigma a_n Y}\left(f\right)\left(0\right)\right| \\ &\leq \left\|T_{\sigma X_1}\ldots T_{\sigma X_n}\left(f\right)-T_{\sigma a_1 Y}\ldots T_{\sigma a_n Y}\left(f\right)\right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\left\|T_{\sigma X_i}(f)-T_{\sigma a_i Y}(f)\right\|,\end{aligned}$$

d'aprés la propriété 3.2.1.

On a pour n assez grand :

$$\sum_{i=1}^{n}\left\|T_{\sigma X_i}(f)-T_{\sigma a_i Y}(f)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n}\left[\sigma^2 a_i^2\varepsilon+\|f''\|\left(\int_{|\sigma x_i|\geq\delta}\sigma^2 x_i^2 P_{X_i}(dx_i)+\int_{a_i\sigma|y|\geq\delta}\sigma^2 a_i^2 y^2 P_Y(dy)\right)\right].$$

Par hypothèse, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Lindenberg, et donc par la propriété 3.2.2, $(a_n Y_n)$ aussi (où $Y_n \sim \mathcal{N}(0,1)$), ce qui signifie que

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{|x_i|\geq s_n\delta}x_i^2 P_{X_i}(dx_i)\underset{n\to\infty}{\to}0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{s_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i|y_i|\geq s_n\delta}a_i^2 y^2 P_Y\left(dy\right)\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Les conclusions sont les même et l'on obtient :

$$S_n \underset{n\to\infty}{\overset{Loi}{\to}} \mathcal{N}\left(0,1\right).$$

■

3.2.3 Tableaux tariangulaire

Définition 3.2.2 *$(X_{n,i})_{1\leq i\leq r_n, n\in\mathbb{N}}$ est appelée tableau tariangulaire dès que les variables de chaque étage $(X_{n,i})_{1\leq i\leq r_n}$ sont indépendantes, où pour tout entier n, $r_n \in \mathbb{N}^*$.*

Théorème 3.2.2 *Soit $S_n = \left(\sum_{i=1}^{r_n} a_{n,i}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{r_n} X_{n,i}$, où $(X_{n,i})$ est un tableau triangulaire, dont les variables sont de variance $a_{n,i}^2$, et vérifient le critère de Lindenberg étendu :*

$$\forall\delta > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{r_n} a_{n,i}^2\right)^{-1} \sum_{i=1}^{r_n} \int_{|x|\geq\delta s_n} x^2 P_{Xn,i}(dx) = 0.$$

Alors $S_n \underset{n\to\infty}{\overset{Loi}{\to}} \mathcal{N}(0,1)$.

Preuve. Une preuve de ce théorème est exposé dans [2], mais utilise les fonctions caractéristiques. Montrons brièvement que la preuve précédente s'adapte très bien dans ce cas.

Reprenons les étapes clés de la démonstaration, avec $f \in C^2$, $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ choisi par uniforme continuté de f'', et en notant $\sigma = \frac{1}{s_n}$:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(f(S_n)) - \mathbb{E}(f(Y))| &\leq \sum_{i=1}^{r_n} \left\|T_{\sigma X_{n,i}}(f) - T_{\sigma a_{n,i} Y}(f)\right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{r_n} \left[\sigma^2 a_{n,i}^2 \varepsilon + \|f''\| \left(\int_{|\sigma x_i|\geq\delta} \sigma^2 x_i^2 P_{X_{n,i}}(dx_i) + \int_{a_{n,i}\sigma|y|\geq\delta} \sigma^2 a_{n,i}^2 y^2 P_Y(dy)\right)\right. \\
&\leq \varepsilon(1 + 2\|f''\|),
\end{aligned}$$

pour n assez grand, grâce au critère de Lindenberg étendu. Les conclusions sont les mêmes et finalement, on obtient :

$S_n \underset{n\to\infty}{\overset{Loi}{\to}} \mathcal{N}(0,1)$. ■

3.3 TCL, condition de Lindenberg, martingales

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles de carré intégrable centrées. On note, pour tout $n \geq 1, S_n = X_1 + \ldots + X_n, s_n^2 = \mathbb{E}[S_n^2]$ et on pose si besoin $S_0 = 0$. L'objectif est d'obtenir le TCL sous la condition de Lindenberg

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_k^2 1_{|X_k|>\varepsilon s_n}\right] \overset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{3.4}$$

3.3.1 Variables indépendantes

On suppose dans ce paragraphe que les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et on note, pour $n \geq 1, b_n = s_n^{-2} \max_{1\leq k\leq n} \mathbb{E}[X_k^2]$.

Théorème 3.3.1 *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles de carré intégrable centrées. La condition de Lindenberg 3.4est vérfiée si et seuement si $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ et $(S_n/s_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers N de loi gaussienne centrée réduite.*

Nous allons en fait démontrer une généralisation de ce résultat aux cas des tableaux de variables indépendantes.

Soient $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers strictement positifs et pour tout $n \geq 1, X_{n,k}, 1 \leq k \leq p_n$ des variables aléatoires réelles de carré intégrable centrées. On note, pour tout $n \geq 1$ et tout $1 \leq k \leq p_n$,

$$Z_n = \sum_{1\leq k\leq p_n} X_{n,k}, \qquad \sigma_{n,k}^2 = \mathbb{E}\left[X_{n,k}^2\right], \qquad \sigma_n^2 = \sum_{1\leq k\leq p_n} \sigma_{n,k}^2, \qquad \delta_n = \max_{1\leq k\leq p_n} \sigma_{n,k}^2.$$

Dans ce contexte, la condition de Lindenberg s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lambda_n(\varepsilon) = \sum_{1 \le k \le p_n} \mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 1_{\left|X_{n,k}\right| > \varepsilon}\right] \overset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{3.5}$$

Théorème 3.3.2 *On suppose que, pour tout* $n \geq 1$*, les variables aléatoires* $X_{n,k}, 1 \leq k \leq p_n$ *sont indépendantes de carré intégrable et centrées tel que* $\sigma_n^2 \to \sigma^2 > 0$.

La condition de Lindenberg 3.5 est vérifiée si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$ *et* $(Z_n)_{n\geq 1}$ *converge en loi vers* σN *où* N *est gaussienne centrée réduite.*

Avant de faire la démonstration de ce résultat voyons comment il permet de retrouver le théorème 3.3.1*. Pour celà, il suffit, pour* $n \geq 1$ *et* $1 \leq k \leq n, X_{n,k} = X_k/s_n$*. On a alors,* $Z_n = S_n/s_n, \sigma_n^2 = 1, \delta_n = b_n$ *et*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lambda_n(\varepsilon) = \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_k^2 1_{|X_k| > \varepsilon s_n}\right].$$

Preuve. La condition de Lindenberg 3.5 implique que $\delta_n \to 0$. En effet, pour tout $1 \leq k \leq p_n$ et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{E}\left[X_{n,k}^2\right] = \mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 1_{\left|X_{n,k}\right| > \varepsilon}\right] + \mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 1_{\left|X_{n,k}\right| \le \varepsilon}\right] \le \lambda_n(\varepsilon) + \varepsilon^2 \tag{3.6}$$

et par suite, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\delta_n \le \lambda_n(\varepsilon) + \varepsilon^2, \qquad \limsup \delta_n \le \varepsilon^2.$$

Il suffit de prouver l'équivalence entre la condition de Lindenberg et le convergence en loi de Z_n vers σN sous l'hypothèse supplémentaire que $\delta_n \to 0$.

On utilise les fonctions caractéristiques $\varphi_{n,k}$ de $X_{n,k}$ et ψ_n de Z_n. En raison de indépendance des variables $X_{n,k}, 1 \leq k \leq n$, on a $\psi_n = \prod_{1\leq k\leq p_n} \varphi_{n,k}$. Selon le théorème de Paul Lévy, le théorème se résume à

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lambda_n(\varepsilon) \overset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_n(t) \overset{n\to+\infty}{\to} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Commençons par écrire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 Q(x),$$

avec, en particulier $\mathrm{Re}(Q(x)) = 1 - 2x^{-2}(1-\cos x)$ et

$$|1 - Q(x)| \leq 1, \quad |Q(x)| \leq \min\left(2, \frac{|x|}{3}\right). \tag{3.7}$$

Si X est une variable aléatoire de carré intégrable et centrée,

$$\mathbb{E}\left[e^{iX}\right] = \mathbb{E}\left[1 + iX - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^2 Q(X)\right] = 1 - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2 Q(X)\right]. \tag{3.8}$$

Notons $\log z$ la détermination principale du logarithme. Rappelons que, pour $|z-1| < 1$,

$$\log z = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)}{n}, \qquad |\rho(z) = \log z - (z-1)| \leq \sum_{n\geq 2} |z-1|^n = \frac{|z-1|^2}{1-|z-1|}.$$

On a, via 3.8, comme $|1-Q(x)| \leq 1$.

$$\left|\mathbb{E}\left[e^{iX}\right] - 1\right| = \left|\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2(1-Q(X))\right] \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]\right|. \tag{3.9}$$

En particulier, lorsque $\mathbb{E}\left[X^2\right] < 2$, $\left|\mathbb{E}\left[e^{iX}\right] - 1\right| < 1$ et

$$\log \mathbb{E}\left[e^{iX}\right] = \mathbb{E}\left[e^{iX}\right] - 1 + R(X), \quad \text{où} \quad R(X) = \rho\left(\mathbb{E}\left[e^{iX}\right]\right).$$

Si $\mathbb{E}\left[X^2\right] < 2$, il résulte de 3.8 et 3.9 que

$$\log \mathbb{E}\left[e^{iX}\right] = -\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2 Q(X)\right] + R(X), \quad \text{avec} \quad |R(X)| \leq \frac{1}{4}\frac{\mathbb{E}\left[X^2\right]^2}{1 - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X^2\right]}. \tag{3.10}$$

Prenons $t \in \mathbb{R}$. Par indépendance des variables $X_{n,k}, 1 \leq k \leq \rho_n$, on a

$$\psi_n(t) = \prod_{1 \leq k \leq p_n} \varphi_{n,k}(t);$$

d'auter part, on déduit de l'inégalité 3.9 que

$$\max_{1 \leq k \leq n} |\varphi_{n,k}(t) - 1| \leq \frac{t^2}{2}\delta_n.$$

Puisque $\delta_n \to 0$, pour n assez grand $\left(\delta_n < 2/t^2\right)$,

$$\psi_n(t) = \prod_{1 \leq k \leq p_n} e^{\log \varphi_{n,k}(t)} = \exp\left(\sum_{1 \leq k \leq p_n} \log \varphi_{n,k}(t)\right)$$

et compte tenu de 3.10 applliquée à $tX_{n,k}$ pour $1 \leq k \leq \rho_n$

$$\sum_{1 \leq k \leq \rho_n} \log \varphi_{n,k}(t) = -\frac{t^2}{2}\sum_{1 \leq k \leq \rho_n} \sigma_{n,k}^2 + \frac{t^2}{2}\sum_{1 \leq k \leq \rho_n} \mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 Q(tX_{n,k})\right] + \sum_{1 \leq k \leq \rho_n} R(tX_{n,k}).$$

Par hypothèse, $\sum_{1\leq k\leq \rho_n} \sigma_{n,k}^2 \to \sigma^2$ et l'inégalité de 3.10 donne, comme $x \mapsto 1/(1-x)$ est croissante sur $]0,1[$,

$$\left|\sum_{1\leq k\leq \rho_n} R(X_{n,k})\right| \leq \sum_{1\leq k\leq \rho_n} \frac{t^4}{4}\frac{\sigma_{n,k}^4}{1-\frac{t^2}{2}\sigma_{n,k}^2} \leq \frac{t^4}{4}\frac{\sigma_n}{1-\frac{t^2}{2}\sigma_n}\sum_{1\leq k\leq \rho_n} \sigma_{n,k}^2 \to 0.$$

Par conséquent, $\psi_n(t)$ converge vers $e^{-\sigma^2 t^2/2}$ si et seulement si

$$\sum_{1\leq k\leq \rho_n} \mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 Q(tX_{n,k})\right] \to 0.$$

Il s'agit donc de montrer que la condition de Lindenberg est équivalente à

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad l_n(t) = \sum_{1\leq k\leq \rho_n} \mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 Q(tX_{n,k})\right] \overset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Supposons la condition de Lindenberg vérifiée. On a alors, puisque $|Q(x)| \leq \min(2, |x|/3)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 \left|Q(tX_{n,k})\right|\right] &\leq \mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 \min(2, |tX_{n,k}|/3) 1_{|X_{n,k}|>\varepsilon}\right] + \mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 \min(2, |tX_{n,k}|/3) 1_{|X_{n,k}|\leq\varepsilon}\right] \\ &\leq 2\mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 1_{|X_{n,k}|>\varepsilon}\right] + \frac{|t|\,\varepsilon}{3}\mathbb{E}\left[X_{n,k}^2\right] \qquad (3.11)\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en sommant de $k=1$ à p_n, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$,

$$|l_n(t)| \leq 2\lambda_n(\varepsilon) + \frac{|t|}{3}\varepsilon \sum_{1\leq k\leq \rho_n} \sigma_{n,k}^2, \qquad \limsup_{n\to+\infty} |l_n(t)| \leq \frac{|t|}{3}\varepsilon\sigma^2.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} l_n(t) = 0$ pour tout réel t.

Réciproquement, supposons que $l_n(t) \to 0$ pour tout réel t. En particulier,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Re}(l_n(t)) = \sum_{1 \le k \le \rho_n} \mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 \,\mathrm{Re}(Q(tX_{n,k}))\right] \to 0.$$

Or $\mathrm{Re}(Q(x)) = 1 - 2x^{-2}(1 - \cos x) \ge 1 - 4x^{-2}$ pour $|x| > 0$. Si $|x| \ge 2\sqrt{2}$, $\mathrm{Re}(Q(x)) \ge \frac{1}{2}$ et comme $\mathrm{Re}(Q)$ est positive

$$\frac{1}{2} 1_{|x| \ge 2\sqrt{2}} \le \mathrm{Re}(Q(x)).$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{1 \le k \le \rho_n} \mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 1_{\left|X_{n,k}\right| > \varepsilon}\right] \le 2 \sum_{1 \le k \le \rho_n} \mathbb{E}\left[X_{n,k}^2 \,\mathrm{Re}(Q(2\sqrt{2}X_{n,k}/\varepsilon))\right] = 2\,\mathrm{Re}\left(l_n\left(2\sqrt{2}/\varepsilon\right)\right) \to 0.$$

■

Remarque 3.3.1 *Si on veut seulement montrer que la condition de Lindenberg est suffisante, la démonstaration est un peu plus simple. En effet, comme* $\sigma_n^2 \to \sigma^2$*, il suffit de démontrer que*

$$\left|\psi_n(t) - e^{\frac{t^2\sigma_n^2}{2}}\right| = \left|\prod_{1 \le k \le p_n} e^{\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2}}\right| \to 0.$$

Comme il s'agit de nombres complexes de module inférieur à 1*, on a*

$$\left|\prod_{1 \le k \le p_n} \varphi_{n,k}(t) - \prod_{1 \le k \le p_n} e^{\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2}}\right| \le \sum_{1 \le k \le \rho_n} \left|\varphi_{n,k}(t) - e^{\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2}}\right|.$$

En utilisant la relation 3.8, on obtient

$$\left|\varphi_{n,k}(t) - e^{\frac{t^2\sigma_{n,k}^2}{2}}\right| \leq \frac{t^2}{2}\mathbb{E}\left[X_{n,k}^2\left|Q(tX_{n,k})\right|\right] + \frac{t^4}{8}\sigma_{n,k}^4.$$

On obtient alors en utilisant l'inégalité 3.11 et en sommant sur k, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left|\psi_n\left(t\right) - e^{\frac{t^2\sigma_n^2}{2}}\right| \leq 2\lambda_n\left(\varepsilon\right) + \frac{|t|\,\sigma_n^2\varepsilon}{3} + \frac{t^4}{8}\sigma_{n,k}^4.$$

Il suffit de faire tendre n vers l'infini puis ε vers 0.

3.3.2 Le cas des martingales

On suppose à présent que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable centrée avec $S_0 = 0$.

On note $(\langle S_n\rangle)_{n\geq 0}$ le crochet prévisible de cette martingale à savoir

$$\langle S\rangle_0 = 0, \qquad \langle S\rangle_n = \sum_{1\leq k\leq n}\mathbb{E}\left(\left(S_n - S_{n-1}\right)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right), \quad n \geq 1.$$

Pour $n \geq 0$, on note $s_n^2 = \mathbb{E}\left[S_n^2\right] = \mathbb{E}\left[\langle S\rangle_n\right]$, et on pose, pour $n \geq 1$, $X_n = S_n - S_{n-1}$.

Théorème 3.3.3 *Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ est une martingale de carré intégrable telle que $S_0 = 0$.*

Si $(\langle S_n\rangle/s_n^2)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 1 et si la condition de Lindenberg 3.4 est vérifiée, alors $(S_n/s_n^2)_{n\geq 1}$ converge en loi vers N gaussienne centrée réduite.

Comme dans le cas des variables indépendantes, , nous allons montrer une généralisation de ce résultat pour des tableaux de différences de martingales. Soient

$(p_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers strictement positifs et, pout tout $n \geq 1$, $(Z_{n,k}, \mathcal{F}_{n,k})_{0\leq k\leq p_n}$ une martingale de carré intégrable telle que $Z_{n,0} = 0$. On note, pour tout $n \geq 1$ et tout $1 \leq k \leq p_n$,

$$X_{n,k} = Z_{n,k} - Z_{n,k-1}, \qquad V_{n,k} = \mathbb{E}_{n,k-1}\left(X_{n,k}^2\right), \qquad \triangle_n = \max_{1\leq k\leq p_n} V_{n,k},$$

où $\mathbb{E}_{n,k}$ désigne l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_{n,k}$. On note encore $A_{n,0} = 0$,

$$A_{n,j} = \sum_{1\leq k\leq j} \mathbb{E}_{n,k-1}\left((Z_{n,k} - Z_{n,k-1})^2\right) = \sum_{1\leq k\leq j} V_{n,k}, \qquad Z_n = Z_{n,p_n}, \qquad A_n = A_{n,p_n}.$$

Finalement, $\sigma_n^2 = \mathbb{E}\left[Z_n^2\right] = \mathbb{E}\left[A_n\right]$.

Théorème 3.3.4 *On suppose que $\lim_{n\to+\infty} \sigma_n^2 = \sigma^2 > 0$ et que $(A_n/\sigma_n^2)_{n\geq 1}$ converge vers 1 en probabilité.*

Si la condition de Lindenberg 3.5 est vérifiée alors $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers σN où N suit la loi gaussienne centrée réduite.

On retrouve le théorème 3 en considérant $X_{n,k} = (S_k - S_{k-1})/s_n$.

Preuve. Commençons par établir le théorème lorsqu'il existe une constante C telle que $A_n \leq C$ pour tout $n \geq 1$. Il s'agit donc de démontrer que $\mathbb{E}\left[e^{itZ_n}\right] \to e^{-\sigma^2 t^2/2}$. Puisque $\sigma_n^2 \to \sigma^2$, ceci revient à montrer que $\mathbb{E}\left[e^{itZ_n+\sigma_n^2 t^2/2}\right] \to 1$. Remarquons d'autre part que $e^{itZ_n+\sigma_n^2 t^2/2} - e^{itZ_n+A_n t^2/2}$ converge vers 0 dans L^1. En effet,

$$\left|e^{itZ_n+\sigma_n^2 t^2/2} - e^{itZ_n+A_n t^2/2}\right| = \left|e^{\sigma_n^2 t^2/2} - e^{A_n t^2/2}\right|$$

et comme $\sigma_n^2 \to \sigma^2, A_n/\sigma_n^2 \to 1$ en probabilité, cette dernière quantité converge vers 0 en probabilité. On obtient la convergence dans L^1 par convergence dominée puisque $0 \leq A_n \leq C$. Nous devons donc montrer que

$$\mathbb{E}\left[e^{itZ_n + A_n t^2/2}\right] = \mathbb{E}\left[e^{itZ_{n,p_n} + A_{n,p_n} t^2/2}\right] \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Soit $n \geq 1$. Posons, pour $0 \leq k \leq p_n$, $H_k = e^{itZ_{n,p_n} + A_{n,p_n} t^2/2}$. on a $e^{itZ_n + A_n t^2/2} - 1 = H_{p_n} - H_0$ puisque $H_0 = 1$ et

$$\left|\mathbb{E}\left[e^{itZ_n + A_n t^2/2}\right] - 1\right| = \left|\mathbb{E}\left[\sum_{1\leq k\leq \rho_n} (H_k - H_{k-1})\right]\right| = \left|\mathbb{E}\left[\sum_{1\leq k\leq \rho_n} \mathbb{E}_{n,k-1}(H_k - H_{k-1})\right]\right|.$$

Par conséquent,

$$\left|\mathbb{E}\left[e^{itZ_n + A_n t^2/2}\right] - 1\right| \leq \mathbb{E}\left[\sum_{1\leq k\leq \rho_n} \left|\mathbb{E}_{n,k-1}(H_k - H_{k-1})\right|\right]. \tag{3.12}$$

On a, pour tout $1 \leq k \leq p_n$,

$$\begin{aligned}
H_k - H_{k-1} &= e^{itZ_{n,k-1} + t^2 A_{n,k}/2}\left(e^{itX_{n,k}} - e^{-t^2 V_{n,k}/2}\right) \\
&= e^{itZ_{n,k-1} + t^2 A_{n,k}/2}\left(1 + itX_{n,k} - \frac{t^2 X_{n,k}^2}{2} + \frac{t^2}{2} X_{n,k}^2 Q(tX_{n,k}) - e^{-t^2 V_{n,k}/2}\right)
\end{aligned}$$

et puisque $A_{n,k}$, $Z_{n,k-1}$ et $V_{n,k}$ sont $\mathcal{F}_{n,k-1}$ mesurables et $\mathbb{E}_{n,k-1}(X_{n,k}) = 0$

$$\mathbb{E}_{n,k-1}(H_k - H_{k-1}) = e^{itZ_{n,k-1} + t^2 A_{n,k}/2}\left(\frac{t^2}{2}\mathbb{E}_{n,k-1}\left(X_{n,k}^2 Q(tX_{n,k}) - U\left(t^2 V_{n,k}^2/2\right)\right)\right)$$

où $U(x) = e^{-x} - 1 + x$. Comme $0 \leq U(x) \leq x^2/2$ pour $x \geq 0$ et $A_{n,k} \leq A_{n,p_n} \leq C$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}_{n,k-1}\left(H_k - H_{k-1}\right)\right| &\leq e^{Ct^2/2}\frac{t^2}{2}\left(\mathbb{E}_{n,k-1}\left(X_{n,k}^2\left|Q\left(tX_{n,k}\right)\right|\right) + \frac{t^2}{4}V_{n,k}^2\right)\\ &\leq e^{Ct^2/2}\frac{t^2}{2}\left(\mathbb{E}_{n,k-1}\left(X_{n,k}^2\left|Q\left(tX_{n,k}\right)\right|\right) + \frac{t^2}{4}\triangle_n V_{n,k}\right)\end{aligned}$$

et sommant ces inégalités de $k = 1$ à p_n, puisque $A_{n,p_n} = \sum_{1\leq k\leq \rho_n} V_{n,k} \leq C$,

$$\sum_{1\leq k\leq \rho_n}\left|\mathbb{E}_{n,k-1}\left(H_k - H_{k-1}\right)\right| \leq e^{Ct^2/2}\frac{t^2}{2}\left(\sum_{1\leq k\leq \rho_n}\mathbb{E}_{n,k-1}\left(X_{n,k}^2\left|Q\left(tX_{n,k}\right)\right|\right) + \frac{t^2}{4}\triangle_n C\right).$$

L'inégalité 3.12 donne alors

$$\left|\mathbb{E}\left[e^{itZ_n + A_n t^2/2}\right] - 1\right| \leq e^{Ct^2/2}\frac{t^2}{2}\left(\sum_{1\leq k\leq \rho_n}\mathbb{E}_{n,k-1}\left(X_{n,k}^2\left|Q\left(tX_{n,k}\right)\right|\right) + \frac{t^2}{4}\triangle_n C\right).$$

puis en utilisant 3.11, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left|\mathbb{E}\left[e^{itZ_n + A_n t^2/2}\right] - 1\right| \leq e^{Ct^2/2}\frac{t^2}{2}\left(2\lambda_n\left(\varepsilon\right) + \frac{|t|}{3}\varepsilon\sigma_n + \frac{t^2}{4}C\mathbb{E}\left[\triangle_n\right]\right). \qquad (3.13)$$

Il reste donc à estimer $\mathbb{E}\left[\triangle_n\right]$. Utilisant le même découpage que pour obtenir l'inégalité 3.6, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\triangle_n \leq \sum_{1\leq k\leq \rho_n}\mathbb{E}_{n,k-1}\left(X_{n,k}^2 1_{\left|X_{n,k}\right|>\varepsilon}\right) + \varepsilon^2, \qquad \mathbb{E}\left[\triangle_n\right] \leq \lambda_n\left(\varepsilon\right) + \varepsilon^2.$$

Il suffit de prendre $\limsup_{n\to+\infty}$ dans l'inégalité 3.13 pour conclure.

Affranchissons nous à présent de l'hypothèse $A_n \leq C$. Puisque A_n converge vers σ^2 en probabilité, $P\left(A_n > C\right)$ converge vers 0 pour tout $C > \sigma^2$. Prenons un tel $C > \sigma^2$ et posons

$$\forall n \geq 1, \quad \forall 1 \leq k \leq p_n, \qquad X^*_{n,k} = X_{n,k} 1_{A_{n,k} \leq C}.$$

Par construction, $\left|X^*_{n,k}\right| \leq \left|X_{n,k}\right|$ et, comme $A_{n,k}$ est $\mathcal{F}_{n,k-1}$-mesurable, $\mathbb{E}_{n,k}\left(X^*_{n,k}\right) = 0$ et $A^*_{n,p_n} \leq C$. D'autre part, $A^*_n = A_n$ et $Z^*_n = Z_n$ sur $\{A_n \leq C\} \rightarrow 1$, $A_n - A^*_n$ et $Z_n - Z^*_n$ converge vers 0 en probabilité. En particulier, A^*_n converge vers σ^2 en probabilité. En fait $A_n - A^*_n$ converge vers 0 dans L^1 puisque $0 \leq A^*_n - A_n \leq A_n$ et $(A_n)_{n\geq 1}$ est équi-intégrable car convergeante vers σ^2 dans L^1 via le lemme de Scheffé. Il s'en suit que $(\sigma^*_n)^2 = \mathbb{E}\left[A^*_n\right] \rightarrow \sigma^2$. Enfin $\lambda^*_n(\varepsilon) \leq \lambda_n(\varepsilon)$. On peut donc appliquer le résultat précédant à la suite $(Z^*_n)_{n\geq 1}$ qui converge en loi vers σN. Puisque $Z^*_n - Z_n$ converge vers 0 en probabilité, il en va de même de la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons exploré l'application du théorème central limite avec la condition de Lindenberg pour les martingales. Notre étude nous a permis de constater que cette théorie revêt une importance capitale dans l'analyse du comportement asymptotique des sommes de variables aléatoires indépendantes.

Bibliographie

[1] Ben Tahar, I., Trashorras, J., Turinici, G. *Éléments de calcul stochastique pour l'évaluation et la couverteur des actifs dérivés. Avec execices corrigés, travaux pratiques et études de cas.*

[2] Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*. Wiley.

[3] Brown, B.M. (1971). *Martingale central limite theorems*. The Annals of Mathematical Statistics, 59-66.

[4] Caumel, Y. (2015). *Probabilités et processus stochastiques*. Lavoisier. Paris ISBN : 978-2-7462-4717-8.

[5] Chabanol, M.L., Ruch, J.J. (2016). *Probabilités et statistiques pour l'épreuve de modélisation à l'agrégation de mathématiques*. Ellipses Édition Marketing S.A., 32, rue Bargue 75740 parise cedex 15.

[6] Chatterjee, S. (2005). A simple invariance theorem. *arXiv preprint math/0508213*.

[7] Donati, M. (2016). *Théorème Central Limite, stabilité et principe de Lindeberg.* Master Mathématique, CEREMADE, Paris-Dauphine.

[8] Hafayed, M. (2020). *Espréance conditionnelle et ses propriétes*. Master 1, Mathématiques appliqués, Université de Biskra.

[9] Jeanblanc, M. (2006). *Cours de Calcul Stochastique.* Master 2IF EVERY. Lecture Notes, University of Évry.

[10] Joulin, A. *Martingales et applications.* Cour 4éme année Spécialiité MMS. Université Insa Toulouse.

[11] Lindeberg, J.W. (1992). A new derivation of the exponential law in probability theory. *Mathematishe Zeitschrift,* pages 211-225.

[12] Rezgui, H. (2019). Mémoire de master. *Martingale en temps continue.* Université Mohamed Khider, Biskra, Algerie.

[13] Saporta, G. (2011). *Probabilités, Analyse des Données et statistique 3$^{ém\acute{e}}$ edition.* Edition Technip.

[14] Sebkhi, S. (2022). Mémoire de master. *Théorème Grisanov.* Université Mohamed Khider, Biskra, Algerie.

[15] Trotter, H.F. (1959). An elementary proof of the central limit theorems. *Archiv der Mathematik*, pages 226-234.

[16] Zdike, I. (2019). Mémoire de master. *Martingale et semi-martingale.* Université Mohamed Khider, Biskra, Algerie.

ملخص

في هذا العمل ، قمنا بدراسة المارتينغال ، و قدمنا نظرية النهاية المركزية تحت شروط ليندنبرغ خاصة في حالة المارتينغال.

الكلمات المفتاحية : المارتينغال ، شرط ليندنبرغ ، نظرية النهاية المركزية.

Résumé

Dans ce travail, nous avons étudié les martingales, et nous présentons le théorème central limite (TCL) sous condition de Lindenberg sur tout le cas des martingales.

Mot clés : Martingale, condition de Lindenberg, théorème central limite.

Abstract

In this work, we studied martingales and present the Lindeberg's conditional central limit theorem (CLT) for the general case of martingales.

Key words : Martingale, Lindeberg's conditional, Central limit theorem.