République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : Probabilité

Par RABIE Manal

Principe du maximum stochastique dans le cas général

Devant le Jury :

Pr.	GHERBAL Boulakhras	UMKB	Président
Pr.	CHALA Adel	UMKB	Encadreur
Dr.	GATT Rafika	UMKB	Examinateur

19/06/2023

Dédicace

*L*ouange à Allah tout puissant de m'avoir donné la force et le courage de mener

à bien ce modeste travail et je le dédie :

A mes parents les plus chers en ma vie,

A mon père précieux,

A Maman ma vie et plus merveilleuse de toutes les femmes au monde,

pour tous les sacrifices qu'ils consentirent durant tout ma vie.

A mes chers frères :Monder ; Lotfi ; Hamoudi ; Diaa et Mortada, je leur souhaite

une vie pleine de bonheur et de réussite.

A mes belles soeurs :Fella ; Dounia et Sonia, je leur souhaite bonheur et réussite.

A ma chère nièce, mon amour choyé :Mima.

A mes amis préférés : ATIA Nesrine ; BELAROUCI Amat allah ; Hana ; Amina et

Nouha, Je leur souhaite une vie heureuse et réussie.

A toute mes collègues le long de mes études et toute la promotion de master de

Mathématique de l'année universitaire 2022/2023

MANAL

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donnée pour achever mon travail de recherche.

*Je tiens à exprimer mes sincères et chaleureux remerciements à mon encadreur monsieur le prof **CHALA adel**, qui m'a suivie et dirigée.*

*Je voudrais également remercier tous les membres du jury les prof **GHERBAL Boulakhras** et **GATT Rafika** qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail.*

Je présente tous mes remerciements aux enseignants du département -MATHS- sans exceptions qui ont contribué à ma formation et à toutes les personnes qui n'ont manqué aucun effort et ont contribué de près et de loin à la réalisation de ce travail par leurs encouragements.

Je remercie toute ma famille pour leur soutien moral et leur aide, ainsi que tous ce qui m'ont soutenue et m'ont aidée tout le long de cette étude et toutes les personnes qui ont contribué directement ou indirectement à ce travail et à tous ceux qui ont montré et disposé à mes questionnements.

Table des matières

Introduction

$\mathcal{L}$e problème du contrôle optimal stochastique est très important dans la théorie du contrôle, et d'un point de vue mathématique, on constate deux approches dans la résolution du ce problème : la première est connue par "La programmation dynamique" depuis l'année 1957 [1], et la deuxième approche est "Le principe du maximum de Pontryagin", connue sous le nom "Conditions nécessaires d'optimalité" depuis l'année 1962 [9]. Dans cette mémoire, on s'intéresse au deuxième méthode qui s'appuie sur l'idée suivante : si un contrôle optimal existe qui minimise la fonction de coût sur un ensemble des contrôles admissibles, alors quelle sont les conditions nécessaires d'optimalité vérifiées par ce contrôle ?

Par conséquent, notre objectif dans cette mémoire est d'étudier les conditions nécessaires d'optimalité dans le cas où le domaine du contrôle est non convexe pour un système gouverné par une équation différentielle stochastique donné par la formule suivante :

$$\begin{cases} dX(t) &= g(t, X(t), v(t))dt + \sigma(t, X(t), v(t))dB_t, \\ X(0) &= X_0, \end{cases}$$

telle que :

- B est un Mouvement Brownien défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.
- Le drift et la diffusion sont des coefficients dépendent par le processus d'état et le contrôle stochastique.

La fonction de coût associé à ce problème est donné par :

$$J(v(.)) \quad = \quad \mathbb{E}\int_0^T l(t, X(t), v(t))dt + \mathbb{E}\left[h(X(T))\right].$$

Ce mémoire est organisé comme suit :

- ► Le premier chapitre est sous le titre "Rappels sur le calcul stochastique" : présente les différents outils nécessaires pour comprendre le concept Mathématiques sur les calculs stochastique.
- ► Le deuxième chapitre est sous le titre "Résultats préliminaires sur l'estimations de solutions" qui est détaillé comme suit : La première Section, nous considérons quelques hypothèses pour arriver à notre objectif sur l'estimations. La deuxième Section, nous obtenons aux les lemmes fondamentaux sur les convergences des solutions. Ce résultat a étudié par Shige PENG (1990).
- ► Le troisième chapitre est sous le titre "Processus adjoints et inégalité variationnelle" découvrez comme suit : L'équations adjoints du premier ordre et second ordre et aussi le théorème principal sur les conditions nécessaires d'optimalités. Ce résultat a étudié aussi par Shige PENG (1990), [8]

Chapitre 1

Rappels sur le calcul stochastique

𝔇ans ce chapitre, nous allons présenter les concepts de base de la théorie du calcule stochastique qui permettent de mieux comprendre notre problème, tout d'abord nous avons donnée quelques définitions (processus stochastique, mouvement Brownien, intégrale stochastique, processus d'Itô,...etc), pour plus des détailles nous nous inviterons de voir [3, 4, 5, 6].

1.1 Processus stochastique

Définition 1.1.1 *Soit* $\mathbb{T}$ *un ensemble* $(\mathbb{T} = [0, T]\,, \;ou\; \mathbb{T} = \mathbb{R}_+)$. *On appelle processus stochastique sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *indexé par* $\mathbb{T}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *une famille* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *d'applications mesurables de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *:*

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$$
$$(\omega, t) \longmapsto X_t(\omega)\,,$$

pour tout $t \in \mathbb{T}$, *soit* X_t *une variable aléatoire.*

Remarque 1.1.1 - *Si* $\mathbb{T} \subseteq N$ *le processus est à temps discret,* $\mathbb{T} = [0; T]$ *tel que* $T > 0$ *le processus est à temps continu.*

- *Pour t fixé,* $\omega \in \Omega \longmapsto X_t(\omega)$ *est une variable aléatoire.*

- *Pour* ω *fixé,* $t \in \mathbb{T} \longmapsto X_t(\omega)$ *est une fonction réelles, appelée trajectoire du processus.*

Notation 1.1.1 *La variable* $(\omega, t) \longmapsto X_t(\omega)$ *sera notée* X_t *et le processus sera notée* X *ou* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$.

Définition 1.1.2 *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications* $t \longmapsto X_t(\omega)$ *sont continues pour presque tout* ω.

Définition 1.1.3 *Un processus est dit* ***càd-làg*** *(continu à droite, limites à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite, pourvues de limites à gauche.*

Définition 1.1.4 *Un processus est dit* ***càglàd*** *(continu à gauche, pourvu de limites à droite) si ses trajectoires sont continues à gauche, pourvues de limites à droite.*

Définition 1.1.5 *Un processus* X *est dit mesurable si l'application :*

$$\begin{aligned}(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}\ ) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right) \\ (t, \omega) &\longmapsto X_t(\omega),\end{aligned}$$

est $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ *−mesurable, et par rapport aux tribus* $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

1.2 Filtration

Définition 1.2.1 *On appelle filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *de* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$*, .i.e.* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \forall s \leq t$.

Remarque 1.2.1 - *Il faut comprendre* $\mathcal{F}_t$ *comme l'information au temps* t.

- *Une filtration* $\{\mathcal{G}_t\}_{t\geq 0}$ *est dite plus grosse que* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si,* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t, \quad \forall t \geq 0$.

- *Si* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *est une filtration sur un espace de probabilité de* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *On dit que l'espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *est un espace filtré.*

Définition 1.2.2 *On dit qu'une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *est continue à droite si* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s, \forall 0 \leq s \leq t$.

Définition 1.2.3 *On dit qu'une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *est complète lorsque tout* $\mathcal{F}_t$ *contient l'ensemble des négligeabes* $\mathcal{N}$ *(ce qui équivaut à* $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$*).*

Remarque 1.2.2 *Un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *muni d'une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *est satisfait les conditions habituelles si :*

- *Les ensembles négligeables sont tous dans les* $\mathcal{F}_t$ *au sens où* $\mathbb{P}(A) = 0,\ A \in \mathcal{F}_0$.
- *La filtration est continue à droite i.e.* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s\ \forall 0 \leq s \leq t$.

Remarque 1.2.3 *La famille croissante de sous tribus* $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ *s'appelle la filtration naturelle du processus stochastique* X. *Mais* $\mathcal{G}_0$ *ne contient pas nécessairement les ensembles négligeables* $(\mathcal{N})$, *c'est pour cela on introduit la filtration naturelle augmentée de* X *définie par* $\mathcal{F}_t^X = \sigma(\mathcal{N} \cup \mathcal{G}_t)$. *Lorsque nous parlerons de filtration naturelle, il s'agira toujours de la filtration naturelle augmentée.*

Définition 1.2.4 *Un processus* X *est dit adapté par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si, pour tout* t, *la variable aléatoire* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Remarque 1.2.4 *Un processuce* X *est évidement adapté par rapport à sa filtration naturelle*$\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\geq 0}$.

Définition 1.2.5 *Un processus* X *est progressivement mesurable par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *si l'application :*

$$([0,t] \times \Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega),$$

est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

1.3 Martingales

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré.

Définition 1.3.1 *Un processus X à valeurs réelles est une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-martingale si*

- *Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adapté ($\mathcal{F}_t$-mesurable).*
- *Pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable i.e. $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$.*
- *Pour tout $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$.*

Définition 1.3.2 *Un processus X à valeurs réelles est une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sur-martingale (respectivement $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ sous-martingale) si*

- *Pour tout $t \geq 0$, X est $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adapté ($\mathcal{F}_t-$mesurable).*
- *Pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable, i.e. $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$.*
- *Pour tout $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$ (respectivement $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s$).*

Remarque 1.3.1 *Toute martingale X vérifie :*

$$\forall t \leq T, \; \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0].$$

Remarque 1.3.2 *Si B est un MB, alors $\{B_t^2 - t\}_{t\geq 0}$ et $\{exp(\sigma B_t - \sigma^2 t/2)\}_{t\geq 0}$ sont des martingales.*

Définition 1.3.3 *Un processus càdlàg adapté $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrět $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante vers l'infini telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ le processus arrêté X^{T_n} soit une martingale nulle en 0, i.e : $X_0 = 0$.*

Définition 1.3.4 *Une semi-martingale continue est un processus X qui s'écrit $X = M+V$, où M est une martingale locale continue et V est un processus continu adapté à variation borné telle que $V_0 = 0$.*

1.4 Mouvement Brownien

*L*e mouvement Brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau, observé par le botaniste **Robert Brown** en 1828 [7].

Définition 1.4.1 *On appelle mouvement Brownien standard un processus stochastique B à valeurs réelles tel que :*

1. $\mathbb{P}-p.s.t \longrightarrow B_t(\omega)$ *est continue.*
2. *Pour* $0 \leq s < t$ $B_t - B_s$ *est indépendant de la tribu* $\sigma\{B_u, u \leq s\}$ *et de loi gaussienne centrée de variance* $(t-s)$.
3. $B_0 = 0$ $\mathbb{P}-p.s.$

Remarque 1.4.1 *Le mouvement Brownien est en général noté* $(W_t, t \geq 0)$ *en référence à* ***Wiener*** *ou* $(B_t, t \geq 0)$ *en référence à* ***Brown.***

Proposition 1.4.1 *soit B un MB standard alors*

1. *Pour tout* $s > 0$, $\{B_{t+s} - B_s\}_{t\geq 0}$ *est MB indépendant de* $\sigma\{B_u, u \leq s\}$.
2. $-B$ *est aussi un MB.*
3. *Pour tout* $c > 0$, $\{cB_{t/c^2}\}_{t\geq 0}$ *est un MB.*
4. *Le processus défini par* $X_0 = 0$ *et* $X_t = t\ B_{1/t}$ *est un MB.*

1.5 Espérance conditionnelle

Soit X une variable aléatoire (intégrable) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$:

Définition 1.5.1 (Espérance conditionnelle) *On définit l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$, l'unique variable aléatoire* $\mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathcal{G}]$ $\mathcal{G}$*-mesurable sur* Ω *telle* *que :*

$$\int_A \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P}, \forall \mathbf{A} \in \mathcal{G}.$$

1.5.1 Propriétés de l'espérance conditionnelle.

Soit X et $Y \in (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ presque sŭrement on a :

1. Linéarit : Si X et $Y \in (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors :

$$\mathbb{E}[(\alpha\mathbf{X} + \beta\mathbf{Y}) \mid \mathcal{G}] = \alpha\mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathcal{G}] + \beta\mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathcal{G}].$$

2. Croissance : Soit X et Y deux variable aléatoire telle que $X \leq Y$, alors :

$$\mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[\mathbf{Y} \mid \mathcal{G}].$$

3. Si X est $\mathcal{G}$ mesurable alors :

$$\mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathcal{G}] = X.$$

4. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$ alors :

$$\mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbf{X}].$$

5. Si Y est $\mathcal{G}$ mesurable alors :

$$\mathbb{E}[\mathbf{XY} \mid \mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[\mathbf{X}].$$

1.6 Calcul d'Itô

1.6.1 Intégrale stochastique

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et B un movement Brownien sur cet espace, on désigne par $\mathcal{F}_t^B = \sigma\{B_s, s \leq t\}$ la filtration naturelle du MB.

L'intégrale stochastique ou l'intégrale d'Itô est un intégrale de la forme suivante :

$$\int_0^t \theta_s dB_s,$$

où $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique.

Définition 1.6.1 *On dit que $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est un bon processus s'il est $\mathcal{F}_t^W-$adapté, càdlág et si*

$$\mathbb{E}[\int_0^t \theta_s^2 ds] < \infty, \forall t \geq 0.$$

Proposition 1.6.1 *L'intégrale stochastique satisfait les propriétés :*

1. $\theta \to \int_0^t \theta_s dB_s$ est linéaire.
2. Le processus $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0 \leq t \leq T}$ est à trajectoires continues.
3. Le processus $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0 \leq t \leq T}$ est $\mathcal{F}_t$-adapté.
4. $\mathbb{E}[\int_0^t \theta_s dB_s] = 0$ et $\mathbf{Var}[\int_0^t \theta_s dB_s] = \mathbb{E}[\int_0^t \theta_s^2 ds]$.
5. Propriété d'isométrie : pour deux bons processus θ et Φ

$$\forall t, u \geq 0 : \mathbb{E}[(\int_0^t \theta_s dB_s)(\int_0^u \Phi_s dB_s)] = \mathbb{E}[\int_0^{t \wedge s} \theta_s \Phi_s ds].$$

1.6.2 Processus d'Itô

Nous introduisons à présent une classe de processus qui sera très utile dans la suite.

Définition 1.6.2 *On appelle processus d'Itô un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$\mathbb{P}.p.s \ \ \forall\ 0 \leq t \leq T, \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s,$$

où X_0 est $\mathcal{F}_0$_mesurable, K et H sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions, $\mathbb{P}.p.s$:

$$\int_0^T |K_s|^2 \, ds < \infty \quad et \quad \int_0^T |H_s|^2 \, ds < \infty.$$

Le processus s'écrit sous forme différentielle

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t, \quad X_0 = x.$$

Le cofficient K s'appelle la dérive (drift) et H s'appelle le cofficient de diffusion (ou volatilité).

Remarque 1.6.1 - *La décomposition d'un processus d'Itô est unique.*

- *Le processus $t \rightarrow x + \int_0^t K_s ds$ est la partie à variation finie de X.*
- *Le processus $t \rightarrow x + \int_0^t H_s dB_s$ est la partie martingale de X (martingale locale).*

1.6.3 Formules d'Itô

Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus d'Itô de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

cette formule s'écrit sous la forme differentielle suivant :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

X_0 : Condition initiale.

b_t : Le coefficient de dérive (drift) du processus X_t.

σ_t : Le coefficient de diffusion.

Le processus $t \longrightarrow x + \int_0^t b_s ds$ la partie a variation finie du processus X.

Le processus $\int_0^t \sigma_s dB_s$ est la partie martingale du processus X.

Théorème 1.6.1 (1ère formule d'Itô) *Supposons f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors*

$$f(X_t) = f(0,x) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d\langle X\rangle_s$$

cette formule s'écrit sous la forme differentielle suivant :

$$\begin{cases} df(X_t) = f'(x_s) dX_s + \frac{1}{2} f''(x_s) d\langle X\rangle_t, \\ f(X_0) = f(x). \end{cases}$$

Théorème 1.6.2 (2éme formule d'Itô) *Soit $f \in C^{1,2}$ $([0,T] \times \mathbb{R})$ et pour tout $0 \leq t \leq T$, nous avons presque surement*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X\rangle_s,$$

où $C^{1,2}$ $([0,T] \times \mathbb{R})$ est l'espace des fonction continues, dont les dérivées d'ordre 1 en t et les dérivées jusqu'à l'ordre 2 en x sont continues par rapport à (x) .

Cette formule s'écrit sous la forme differentielle suivant :

$$\begin{cases} df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) d\langle X\rangle_t, \\ f(0, X_0) = f(0, x). \end{cases}$$

Théorème 1.6.3 (3éme formule d'Itô) *Soient X et Y deux processus d'Itô, et f une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivées borneés*

$$f(X,Y) = f(X_0,Y_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s,Y_s)dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s,Y_s)dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s,Y_s)d\left\langle X\right\rangle_s,$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_s,Y_s)d\left\langle X,Y\right\rangle_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s,Y_s)dX_s.$$

Proposition 1.6.2 (Intégration par parties) *Si X et Y deux processus d'Itô, alors*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + d < X,Y >_s .$$

1.7 Inégalités et théorèmes utiles

Définition 1.7.1 *Soient g et σ deux fonction mesurables bornées de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles donnée, et B un $(\mathcal{F}_t)-$mouvement Brownien.*

Définition 1.7.2 *Une solution fort de l'équation différentielle stochastique, X est un processus continu tel que*

$$\begin{cases} dX_t = g(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t, \\ X_0 = x_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

1- X est Progressivement mesurable.

2- $\mathbb{P}-p.s$ $\int_0^T \left\{|b(t,X_t)| + |\sigma(t,X_t)|^2\right\} dt < \infty.$

3- $\mathbb{P}-p.s$ $X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s.$

Notation 1.7.1 *Soit $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ est l'éspace vectoriel fermé des processus X, progressivement mesurables, a valeur dans $\mathbb{R}^k$, tel que $\|X\|^2_{\mathcal{S}^2} = \mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T} |X_t|^2) < \infty.$*

$\mathcal{S}^2_c(\mathbb{R}^k)$ est le sous–espace formé par les processus continus.

$\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ *est l'éspace vectoriel formé des processus* Z*, progressivement mesurables, a valeur dans* $\mathbb{R}^{k\times d}$*, tel que* $\|Z\|^2_{\mathcal{M}^2} = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2\, dt\right] < \infty$*, où si* $Z \in \mathbb{R}^{k\times d}$*,* $\|Z_t\|^2 = trace(ZZ^*)$.

Proposition 1.7.1 (Inégalité maximale) *Soit* θ *un bon processus alors :*

$$\mathbb{E}([\sup_{\mathbf{t}\leq\mathbf{T}} \int_0^t \theta_s dB_s]^2) \leq 4\mathbb{E}(\int_0^T \theta_s dB_s]^2) = 4\mathbb{E}(\int_0^T \theta_s^2 ds). \tag{1.2}$$

Proposition 1.7.2 (Cauchy-Schwartz) *Si* f*,* g *sont des fonctions réelles, quand* $p = q = 2$ *l'inégalité de Hölder donne l'inégalité de* ***Cauchy-Schwartz****, i.e :*

$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_2 \| g \|_2 .$$

Définition 1.7.3 *Une fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite (globalement)* ***Lipschitzienne*** *s'il existe* $K \geq 0$ *telle que :*

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|\,,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.7.1 *Si* f *est* ***Lipschitzienne****, alors* f *est uniformement continue (et donc continue) sur* $\mathbb{R}$*, et son dérivées sont bornnées.*

Définition 1.7.4 *Une fonction* $f : (\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite* ***Lipschitzienne*** *s'il existe* $K \geq 0$ *telle que :*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K\,|x - y|\,, \forall t \in \mathbb{R}^+,\ x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.7.1 *Soient* g *et* σ *deux fonction mesurables bornées de* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$

1/ ***Condition de Lipschitz*** *: Il existe une constante* $K > 0$*, telle que pour tout*

$t \in \mathbb{R}$, pour tout x, $y \in \mathbb{R}$

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K\,|x-y|\,.$$

*2/ **Condition de croissance** : Il existe une constante $L > 0$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$*

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq L(1 + |x|).$$

3/ $\mathbb{E}\left[|x_0|^2\right] < \infty$.

Alors il existe une unique solution forte $x \in \mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^n)$ de (1.1), pour la démonstration (voir chapiter 4 [3])

Lemme 1.7.1 (Lemme de Gronwall) *Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t :*

$$g(t) \leq a + b\int_0^t g(s)ds,\ \ a \in \mathbb{R},\ \ b \geq 0,$$

alors pour tout t :

$$g(t) \leq a\exp(bt).$$

Théorème 1.7.2 (Théorème de Fubini) *Soit f une fonction continue sur $[a,b] \times [c,d]$ á valeurs dans un ensemble $\mathbb{E}$, alors :*

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy.$$

Théorème 1.7.3 (Formule de Taylor avec un reste intégral) *Si f est classe*

C^{k+1} *sur* U *et si* $h \in \mathbb{R}^n$ *est tel que le segment* $[a, a+h]$ *est inclus dans* U*, on a :*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Df(a) + ... + \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k \\ &+ \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(a+\lambda h)(h)^{k+1} dt. \end{aligned}$$

Soit l'équation déffirentielle stochastique rétrograde (EDSR) suivante :

$$\begin{cases} -dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \ t \in [0,T], \\ Y_T = \xi, \end{cases}$$

où sous forme intégrale

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, \ \forall t \in [0,T]. \tag{1.3}$$

Définition 1.7.5 *Une solution de l'EDSR* (1.3) *est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \le t \le T}$ *vérifiant*

1. Y et Z sont des progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k \times d}$.
2. $\mathbb{P}.p.s$ $\left(\int_0^t |f(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2 \right) ds < \infty.$
3. $\mathbb{P}.p.s$ on a $Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s$ et $0 \le t \le T$.

Hypothèse **(L)**

1/ La fonction f est **Lipschizienne** ie : Il existe une constante $K > 0$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $y,\ z,\ y',\ z' \in \mathbb{R}$ tel que $|f(t,y,z) - f(t,y',z')| \le K(|y-y'| + \|z-z'\|)$.

2/ Condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left(|\xi|^2 + \int_0^T |f(s,0,0)|^2 ds \right) < \infty.$$

Théorème 1.7.4 (Pardoux–Peng 90) *Soit un couple* (ξ, f) *vérifier l'hypothèse (L), alors l'EDSR* (1.3) *possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in \mathcal{M}^2$.

Chapitre 2

Résultats préliminaires sur l'estimation de solutions

$\mathcal{L}$e but dans ce chapitre est d'obtenir les résultats préliminaires sur l'estimation de solutions vérifié par un contrôle optimal, Dans le cas oú de la variable de contrôle inclu dans $\sigma(.,.)$ et domaine de contrôle $\mathbb{A}$ non nécessairement convexe, l'approche habituelle d'expansion du premier ordre ne fonctionne pas. Par conséquent, nous introduisons une méthode de développement du second ordre [8].

2.1 Formulation du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et on suppose que la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ est une filtration engendrée par $\{B_t; t \geq 0\}$ tell que $\{B_t; t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard.

On considérons le systéme du contrôle stochastique comme suit :

$$\begin{cases} dX_t &= g(t, X_t, v_t)dt + \sigma(t, X_t, v_t)dB_t, \\ X_0 &= x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où :

$g : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélenne telle que $g(t,x,a)$ est continue en a, uniformèment continue en t et x.

$\sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{A} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ une fonction borélienne.

X_0 : une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-adapté, indépendante de $(B_t)_t$ telle que :

$$\mathbb{E}(|x_0|^2) < \infty.$$

On suppose que $g(t,x,a)$ et $\sigma(t,x,a)$ sont dérivables et à dérivées continues, bornées, vérifiant :

il existe une constante $K > 0$ indépendante de (t,a) tel que : $\forall x,\, y \in \mathbb{R}$:

$$\|g(t,x,a) - g(t,y,a)\| \leq K\|x-y\| \text{ et } \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq K\|x-y\|, \tag{2.2}$$

$$\|g(t,x,a)\| \leq K(1+\|x\|) \text{ et } \|\sigma(t,x)\| \leq K(1+\|x\|), \tag{2.3}$$

Notation 2.1.1 *$\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ est l'éspace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, a valeur dans $\mathbb{R}^k$, tel que $\|Y\|_{\mathcal{S}^2}^2 = \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2) < \infty$.*

$\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)$ est le sous–espace formé par les processus continus.

$\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ est l'éspace vectoriel formé des processus Z, progressivement mesurables, a valeur dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tel que $\|Z\|_{\mathcal{M}^2}^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right] < \infty$, où si $Z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|Z_t\|^2 = trace(ZZ^*)$.

Remarque 2.1.1 *(2.3) et (2.2) nous assure l'existence et l'unicité des solutions de (2.1) (voir chapitre 4 [3]).*

Définition 2.1.1 (Contrôle admissible) *On appelle contrôle admissible tout processus $(v(t))_{t\in[0,T]}$ appartient à $\mathbb{L}^\infty([0,T]\times\Omega)$ à valeur dans $\mathbb{A}$. On note U_{ad} $([0,T])$*

l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

$$U_{ad}([0,T]) = \{v(.) : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{A} \ \textit{où} \ v(.) \in \mathbb{L}^{\infty}([0,T] \times \Omega)\}.$$

Pour tout contrôle admissible $v(.) \in U_{ad}([0,T]))$.

Remarque 2.1.2 $v(.) \in \mathbb{L}^{\infty}([0,T] \times \Omega)$ *implique que*

$$\mathbb{E} \int_0^T |v(t)|^2 \, dt = \mathbb{E} \int_0^T |v(t,\omega)|^2 \, dt < \infty.$$

Alors

$$U_{ad}([0,T]) = \left\{ v(.) : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{A} \ \textit{telle que} \ \mathbb{E} \int_0^T |v_t|^2 \, dt < \infty \right\}.$$

Définition 2.1.2 (Contrôle optimal) *Le probléme du contrôle optimal stochastique consiste a minimiser sur l'ensemble U_{ad} une fonction de coût de la forme suivante :*

$$J(v(.)) = \mathbb{E} \int_0^T l(t, X_t, u_t) dt + \mathbb{E} h(X(T)), \tag{2.4}$$

où $l(x,v) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$

Définition 2.1.3 *Un contrôle admissible est appellé contrôle optimal s'il vérifier .*

$$J(u(.)) = \inf_v J(v(.)), \ \textit{où} \ v(.) \in U_{ad}. \tag{2.5}$$

Remarque 2.1.3 *Le probleme (2.1), (2.4) et (2.5) s'appelle problème du contrôle optimal stochastique.*

Hypothèses H1

Au cours de ce chapitre, on suppose que les fonctions ci-dessus satisfait les hypothèses suivantes :

1. Les fonction g, σ, l, h sont deus fois continûment différentiables par rapport à x.
2. Les dérivées g_x, g_{xx}, σ_x, σ_{xx}, l_x, l_{xx}, h_x, h_{xx}, sont continues en (x, v).
3. g_x, g_{xx}, σ_x, σ_{xx}, l_x, l_{xx}, h_x, h_{xx} sont bornés, et g, σ, l_x, h_x sont bornés par $C(1+ \mid x \mid + \mid v \mid)$.

2.2 Estimation des solutions

Dans le cas où de la variable de contrôle inclu dans $\sigma(.,.)$ et domaine de contrôle $\mathbb{A}$ non nécessairement convexe, l'approche habituelle d'expansion du premier ordre ne fonctionne pas [2]. Par conséquent, nous introduisons une méthode de développement du second ordre.

Soit $(y(.), u(.))$ la solution optimal du notre probléme (2.1). On définit un contrôle admissible perturbé par la formule suivante :

$$u_t^\varepsilon = \begin{cases} v & \text{si } \theta \leqq t \leqq \theta + \varepsilon, \\ u_t & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $0 \leqq s \leqq t$ est fixé, $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit et v est une variable aléatoire $\mathcal{F}^t$-mesurable arbitraire avec des valeurs dans $\mathbb{A}$, telle que :

$$\sup_{\omega \in \Omega} \mid v(\omega) \mid < \infty.$$

On note par $y^\varepsilon(.)$ la trajectoire du système (2.1) correspondant à $u^\varepsilon(.)$.

2.2.1 Equations variationnelles

Soient $y_1(.)$ et $y_2(.)$ des solutions d'équations suivantes respectivement

$$\begin{aligned} y_1(t) = & \int_0^t [g_x(y_s, u_s)y_1(s) + g(y_s, u_s^\varepsilon) - g(y_s, u_s)]ds \\ & + \int_0^t [\sigma_x(y_s, u_s)y_1(s) + \sigma(y_s, u_s^\varepsilon) - \sigma(y_s, u_s)]dB_s, \end{aligned} \tag{2.6}$$

et

$$\begin{aligned} y_2(t) = & \int_0^t [g_x(y_s, u_s)y_2(s) + \frac{1}{2}g_{xx}(y_s, u_s)y_1(s)y_1(s)]ds \\ & + \int_0^t [\sigma_x(y_s, u_s)y_2(s) + \frac{1}{2}\sigma_{xx}(y_s, u_s)y_1(s)y_1(s)]dB_s \\ & + \int_0^t (g_x(y_s, u_s^\varepsilon) - g_x(y_s, u_s))y_1(s)ds \\ & + \int_0^t (\sigma(y_s, u_s^\varepsilon) - \sigma_x(y_s, u_s))y_1(s)dB_s. \end{aligned} \tag{2.7}$$

L'equation (2.6) est appellée équation variationnelle du premier ordre, c'est l'equation variationnelle au sens usuel.

L'equation (2.7) est appellée équation variationnelle du second ordre.

Remarque 2.2.1 *Sous les **Hypothèses H1,** l'équations (2.6), (2.7) possèdent unique fort solution, voir [3]*

Lemme 2.2.1 *Sous les **Hypothèses H1**, on a $y_1(t)$ et $y_2(t)$ vérifiant :*

$$\sup_{0 \le t \le T} \mathbb{E}(|y_1|^2) \le c\varepsilon. \tag{2.8}$$

$$\sup_{0 \le t \le T} \mathbb{E}(|y_2|^2) \le c\varepsilon^2. \tag{2.9}$$

Preuve. D'après les définitions du (2.6) , on peut écrire

$$\begin{aligned}|y_1(t)|^2 = &\left|\int_0^t g_x(y_s,u_s)y_1(s)ds + \int_0^t (g(y_s,u^\varepsilon(s)) - g(y_s,u_s))ds\right.\\ &\left.+ \int_0^t \sigma_x(y_s,u_s)y_1(s)dB_s + \int_0^t (\sigma(y_s,u_s^\varepsilon) - \sigma(y_s,u_s))dB_s\right|^2.\end{aligned}$$

Alors on applique $(a+b+c+d)^2 \leq 4a^2+4b^2+4c^2+4d^2$, on trouve

$$\begin{aligned}|y_1(t)|^2 \leq\ &4\left|\int_0^t g_x(y_s,u_s)y_1(s)ds\right|^2 + 4\left|\int_0^t (g(y_s,u^\varepsilon(s)) - g(y_s,u_s))ds\right|^2\\ &+ 4\left|\int_0^t \sigma_x(y_s,u_s)y_1(s))dB_s\right|^2 + 4\left|\int_0^t (\sigma(y_s,u_s^\varepsilon) - \sigma(y_s,u_s))dB_s\right|^2\end{aligned}$$

Donc on applique l'inégalité de **Cauchy-Schwartz** et l'isométrie d'**Itô,** on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|y_1(t)|^2 \leq\ &4T\mathbb{E}\int_0^t (g_x(y_s,u_s)y_1(s))^2ds + 4T\mathbb{E}\int_0^t (g(y_s,u^\varepsilon(s)) - g(y_s,u_s))^2ds\\ &+ 4\mathbb{E}\int_0^t (\sigma_x(y_s,u_s)y_1(s))^2ds + 4\mathbb{E}\int_0^t (\sigma(y_s,u_s^\varepsilon) - \sigma(y_s,u_s))^2ds.\end{aligned}$$

Comme les dérivées g_x, σ_x sont bornnée, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,|y_1(t)|^2 \leq\ &4TM\mathbb{E}\int_0^t y_1(s))^2ds + 4[\mathbb{E}\int_0^\tau (g(y_s,u_s) - g(y_s,u_s))^2ds\\ &+ \mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\varepsilon} (g(y_s,v) - g(y_s,u_s))^2ds + \mathbb{E}\int_{\tau+\varepsilon}^t (g(y_s,u_s) - g(y_s,u_s))^2ds]\\ &+ 4M\mathbb{E}\int_0^t y_1(s))^2ds + 4[\mathbb{E}\int_0^\tau (\sigma(y_s,u_s) - \sigma(y_s,u_s))^2ds\\ &+ \mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\varepsilon} (\sigma(y_s,v) - \sigma(y_s,u_s))^2ds + \mathbb{E}\int_{\tau+\varepsilon}^t (\sigma(y_s,u_s) - \sigma(y_s,u_s))^2ds].\end{aligned}$$

Alors

$$\mathbb{E}\left|y_1(t)\right|^2 \leq 4TM \int_0^t y_1(s))^2 ds + 4T\mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\varepsilon} (g(y_s,v) - g(y_s,u_s))^2 ds$$
$$+ 4M\mathbb{E}\int_0^t y_1(s))^2 ds + 4\mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\varepsilon} (\sigma(y_s,v) - \sigma(y_s,u_s))^2 ds.$$

On pose $K = 4TM + 4M$ et $C_1 = 4T + 4$, alors par passage à espérance, on a

$$\mathbb{E}\left|y_1(t)\right|^2 \leq K\int_0^t \mathbb{E}y_1(s))^2 ds + C_1\int_\tau^{\tau+\varepsilon} \big[(g(y_s,v) - g(y_s,u_s))^2$$
$$+ (\sigma(y_s,v) - \sigma(y_s,u_s))^2\big]\, ds.$$

Donc d'aprés l'inégalité **Lipschitzienne,** on a

$$\mathbb{E}\left|y_1(t)\right|^2 \leq K\int_0^t \mathbb{E}(y_1(s))^2 ds + C_1\int_\tau^{\tau+\varepsilon} ((k_1)^2\left|v-u\right|^2 + (k_2)^2\left|v-u\right|^2) ds$$

Posons $L = C_1(k_1)^2\left|v-u\right|^2 + (k_2)^2\left|v-u\right|^2$, on obtient

$$\mathbb{E}\left|y_1(t)\right|^2 \leq K\int_0^t \mathbb{E}(y_1(s))^2 ds + L\int_\tau^{\tau+\varepsilon} ds$$
$$\leq K\int_0^t \mathbb{E}y_1(s))^2 ds + L\varepsilon.$$

Comme la fonction $\mathbb{E}\left|y_1(t)\right|^2$ est continue, et d'aprés l'inégalité de **Gronwall**, on a

$$\mathbb{E}\left|y_1(t)\right|^2 \leq L\varepsilon\exp(KT) = c\varepsilon.$$

Donc l'équation (2.8) est vérifier.

$$\mathbb{E}\left|y_1(t)\right|^2 \leq c\varepsilon.$$

D'aprés inégalité maximale (1.2) on a

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}(\left|y_1\right|^2) \leq c\varepsilon.$$

Nous appliquons les mêmes étapes et les mêmes techniques dans (2.9)

$\sup\limits_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}(\left|y_2\right|^2) \leq c\varepsilon^2$. Alors

$$\begin{aligned}
\left|y_2(t)\right|^2 = \bigg| & \int_0^t [g_x(y_s,u_s)y_2(s) + \frac{1}{2}g_{xx}(y_s,u_s)y_1(s)y_1(s)]ds \\
& + \int_0^t [\sigma_x(y_s,u_s)y_2(s) + \frac{1}{2}\sigma_{xx}(y_s,u_s)y_1(s)y_1(s)]dB_s \\
& + \int_0^t (g_x(y_s,u_s^\varepsilon) - g_x(y_s,u_s))y_1(s)ds \\
& + \int_0^t (\sigma(y_s,u_s^\varepsilon) - \sigma_x(y_s,u_s))dB_s \bigg|^2.
\end{aligned}$$

En factorant les mêmes termes sur les mêmes membres et en appliquant $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, on trouve

$$\begin{aligned}
\left|y_2(t)\right|^2 = 2\bigg| & \int_0^t [g_x(y_s,u_s)y_2(s) + \frac{1}{2}g_{xx}(y_s,u_s)y_1(s)y_1(s)]ds \\
& + \int_0^t (g_x(y_s,u_s^\varepsilon) - g_x(y_s,u_s))y_1(s)ds \bigg|^2 \\
& + 2\bigg|\int_0^t [\sigma_x(y_s,u_s)y_2(s) + \frac{1}{2}\sigma_{xx}(y_s,u_s)y_1(s)y_1(s)]dB_s \\
& + \int_0^t (\sigma(y_s,u_s^\varepsilon) - \sigma_x(y_s,u_s))dB_s \bigg|^2.
\end{aligned}$$

Donc on applique l'inégalité de **Cauchy-Schwartz** et l'isométrie d**'Itô,** on trouve

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|y_2(t)\right|^2 \leq 4\mathbb{E}\int_0^t &\left(g_x(y_s,u_s)y_2(s)+\frac{1}{2}g_{xx}(y_s,u_s)y_1(s)y_1(s)\right)^2 \\
&+4\mathbb{E}\int_0^t \left((g_x(y_s,u_s^\varepsilon)-g_x(y_s,u_s))y_1(s)\right)^2 ds \\
&+4\mathbb{E}\int_0^t \left(\sigma_x(y_s,u_s)y_2(s)+\frac{1}{2}\sigma_{xx}(y_s,u_s)y_1(s)y_1(s)\right)^2 ds \\
&+4\mathbb{E}\int_0^t \left(\sigma(y_s,u_s^\varepsilon)-\sigma_x(y_s,u_s)\right)^2 ds.
\end{aligned}
$$

Comme les dérivées $g_x,\ \sigma_x,\ g_{xx},\ \sigma_{xx}$ sont bornnée et d'aprés les **Hypothèses H1,** on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|y_2(t)\right|^2 \leq 8TM\mathbb{E}\int_0^t &(y_2(s))^2\, ds+2TM\int_0^t (y_1(s)y_1(s))^2\, ds \\
&+4\mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\varepsilon} \left((g_x(y_s,u_s^\varepsilon)-g_x(y_s,u_s)\right)^2 (y_1(s))^2\, ds \\
&+8M\mathbb{E}\int_0^t (y_2(s))^2\, ds+2M\int_0^t (y_1(s)y_1(s))^2\, ds \\
&+4\mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\varepsilon} \left((\sigma_x(y_s,u_s^\varepsilon)-\sigma_x(y_s,u_s)\right)^2 (y_1(s))^2\, ds.
\end{aligned}
$$

Donc possons $L_1 = 8TM+8M$ et $L_2 = 2TM+2M$, alors par passage aux espérence, on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|y_2(t)\right|^2 \leq L_1\int_0^t &\mathbb{E}\,(y_2(s))^2\, ds+L_2\int_0^t \mathbb{E}\,(y_1(s)y_1(s))^2\, ds \\
&+4\int_\tau^{\tau+\varepsilon} \left((g_x(y_s,u_s^\varepsilon)-g_x(y_s,u_s)\right)^2 \mathbb{E}\,(y_1(s))^2\, ds \\
&+4\int_\tau^{\tau+\varepsilon} \left((\sigma_x(y_s,u_s^\varepsilon)-\sigma_x(y_s,u_s)\right)^2 \mathbb{E}\,(y_1(s))^2\, ds.
\end{aligned}
$$

Donc d'aprés l'inégalité **Lipschitzienne,** on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|y_2(t)\right|^2 &\leq L_1 \int_0^t \mathbb{E}\left(y_2(s)\right)^2 ds + L_2 \int_0^t \mathbb{E}\left(y_1(s)y_1(s)\right)^2 ds \\ &+ 4T \int_\tau^{\tau+\varepsilon} \mathbb{E}\left|v-u\right|^2 \left(y_1(s)\right)^2 ds + 4 \int_\tau^{\tau+\varepsilon} \mathbb{E}\left|v-u\right|^2 \left(y_1(s)\right)^2 ds.\end{aligned}$$

On pose $C_3 = 4T\left|v-u\right|^2 + 4\left|v-u\right|^2$, on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|y_2(t)\right|^2 &\leq L_1 \int_0^t \mathbb{E}\left(y_2(s)\right)^2 ds + L_2 \int_0^t \mathbb{E}\left(y_1(s)y_1(s)\right)^2 ds \\ &+ C_3 \int_\tau^{\tau+\varepsilon} \mathbb{E}\left(y_1(s)y_1(s)\right)^2 ds.\end{aligned}$$

Alors d'aprés (2.8) on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|y_2(t)\right|^2 &\leq L_1 \int_0^t \mathbb{E}\left(y_2(s)\right)^2 ds + L_2 \int_0^t (c\varepsilon)^2 ds \\ &+ C_3 \int_\tau^{\tau+\varepsilon} (c\varepsilon)^2 ds, \\ &\leq L_1 \int_0^t \mathbb{E}\left(y_2(s)\right)^2 ds + L_2 c\varepsilon^2 T + C_3 c\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Donc on pose $K_3 = L_2 cT + C_3 c$, on obtient

$$\mathbb{E}\left|y_2(t)\right|^2 \leq L_1 \int_0^t \mathbb{E}\left(y_2(s)\right)^2 ds + K_3\varepsilon^2.$$

D'aprés l'inégalité de **Gronwall**, on a

$$\mathbb{E}\left|y_2(t)\right|^2 \leq K_3\varepsilon^2 \exp\left(L_1 T\right) = c\varepsilon^2.$$

L'équation (2.9) est vérifier. D'aprés l'inégalité maximale (1.2), alors

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}(\left|y_2\right|^2) \leq c\varepsilon^2.$$

■

Lemme 2.2.2 *Sous les **Hypothèses H1**, soient G_s^ε, et Λ_s^ε, données par*

$$\begin{aligned} G_s^\varepsilon = & \frac{1}{2} g_{xx}(y_s, u_s)(y_2(s)y_2(s) + 2y_1(s)y_2(s)) \\ & + (g_x(y_s, u_s^\varepsilon - g_x(y_s, u_s))y_2(s) \\ & + \frac{1}{2}\int_0^t [g_{xx}(y+\lambda y_3, u^\varepsilon) - g_{xx}(y,u)]y_3(s)y_3(s), \end{aligned} \tag{2.10}$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda_s^\varepsilon = & \frac{1}{2} \sigma_{xx}(y_s, u_s)(y_2(s)y_2(s) + 2y_1(s)y_2(s)) \\ & + (\sigma_x(y_s, u_s^\varepsilon - \sigma_x(y_s, u_s))y_2(s) \\ & + \frac{1}{2}\int_0^t [\sigma_{xx}(y+\lambda y_3, u^\varepsilon) - \sigma_{xx}(y,u)]d\lambda y_3(s)y_3(s). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Alors

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \mathbb{E}\left(\left|\int_0^t G_s^\varepsilon ds\right|^2\right) = \circ(\varepsilon^2). \tag{2.12}$$

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \mathbb{E}\left(\left|\int_0^t \Lambda_s^\varepsilon dB_s\right|^2\right) = \circ(\varepsilon^2). \tag{2.13}$$

Preuve. D'après la définition du (2.1), on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t G_s^\varepsilon ds\right|^2\right) &= \mathbb{E}\left|\int_0^t \frac{1}{2} g_{xx}(y_s,u_s)(y_2(s)y_2(s)+2y_1(s)y_2(s))\right.\\ &+ (g_x(y_s,u_s^\varepsilon - g_x(y_s,u_s))y_2(s)\\ &\left.+\frac{1}{2}\int_0^1 [g_{xx}(y+\lambda y_3,u^\varepsilon)d\lambda - g_{xx}(y,u)]y_3(s)y_3(s)ds\right|^2.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de **Cauchy-Schwartz,** on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t G_s^\varepsilon ds\right|^2\right) &\leq 3T\mathbb{E}\int_0^t \left(\frac{1}{2} g_{xx}(y_s,u_s)(y_2(s)y_2(s)+2y_1(s)y_2(s))\right)^2 ds\\ &+ 3T\mathbb{E}\int_0^t \left((g_x(y_s,u_s^\varepsilon) - g_x(y_s,u_s))y_2(s)\right)^2 ds\\ &+ 3T\mathbb{E}\int_0^t \left(\frac{1}{2}\int_0^1 [g_{xx}(y+\lambda y_3,u^\varepsilon)d\lambda - g_{xx}(y,u)]y_3(s)y_3(s)\right)^2 ds.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t G^\varepsilon(s)ds\right|^2\right)\\ &\leq 3T\mathbb{E}\int_0^t \left(\frac{1}{2} g_{xx}(y_s,u_s)\right)^2 [(y_2(s)y_2(s))^2 + 4y_2(s)y_2(s)y_1(s)y_2(s) + (2y_1(s)y_2(s))^2]ds\\ &+ 3T\mathbb{E}\int_0^t (g_x(y_s,u_s^\varepsilon) - g_x(y_s,u_s))^2(y_2(s))^2 ds\\ &+ 3T\mathbb{E}\int_0^t \left(\frac{1}{2}\int_0^1 [g_{xx}(y+\lambda y_3,u^\varepsilon)d\lambda - g_{xx}(y,u)]\right)^2 (y_3(s))^2(y_3(s))^2 ds.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t G_s^\varepsilon ds\right|^2\right) &\leq 3T\frac{1}{4}M\mathbb{E}\int_0^t [(y_2(s))^2(y_2(s))^2 + 4y_2(s)y_2(s)y_1(s)y_2(s)\\ &+ 4(y_1(s))^2(y_2(s))^2]ds + 3TM\mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\varepsilon} (y_2(s))^2 ds\\ &+ 3T\frac{3}{4}M\mathbb{E}\int_0^t [(y_1(s)y_1(s))^2 + 4(y_1(s)y_2(s))^2 + (y_2(s)y_2(s))^2].\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t G_s^\varepsilon ds\right|^2\right) \leq 3T\frac{1}{4}M(c\varepsilon^4 + 4c\varepsilon^5 + 4c\varepsilon^3) + 3TMc\varepsilon^4 + \frac{9}{4}TM(c\varepsilon + 4c\varepsilon^3 + c\varepsilon^4). \tag{2.14}$$

Mais dans (2.14), on peut appliquer l'inégalité de **Cauchy-Schwartz** et on pose $\sup\limits_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}(\,|y_2|^4) \leq c\varepsilon^2$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t (y_2(s))^2(y_2(s))^2 ds\right) \leq \left(\int_0^t \mathbb{E}(y_2(s))^4\right) = c\varepsilon^4,$$

$$\begin{aligned}
4\mathbb{E}(\int_0^t y_2(s)y_2(s)y_1(s)y_2(s)ds &= 4\left(\mathbb{E}(\int_0^t (y_2(s))^2)(y_1(s)y_2(s))ds\right)\\
&\leq 4\left(\mathbb{E}(\int_0^t (y_2(s))^4 ds)^{\frac{1}{2}}\right)\mathbb{E}\left(\int_0^t (y_1(s)y_2(s))^2 ds\right)\\
&\leq 4\left(\int_0^t \mathbb{E}(y_2(s))^2 ds\right)\left(\int_0^t \mathbb{E}(y_1(s))^4)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \mathbb{E}(y_2(s))^4)\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq 4c\varepsilon^2 c\varepsilon c\varepsilon^2 = 4c\varepsilon^5,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\varepsilon} (y_2(s))^2 ds &= \left(\mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\varepsilon} 1^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\int_\tau^{\tau+\varepsilon} (y_2(s))^4 ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq (\tau+\varepsilon-\tau)c\varepsilon(\tau+\varepsilon-\tau) = \varepsilon c\varepsilon^2\varepsilon = c\varepsilon^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^t (y_2(s)y_2(s))^2 &= \left(\mathbb{E}\int_0^t (y_2(s))^4 ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbb{E}\int_0^t (y_2(s))^4 ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left(\int_0^t \mathbb{E}(y_2(s))^2 ds\right)\left(\int_0^t \mathbb{E}(y_2(s))^2 ds\right)\\
&\leq c\varepsilon^2 c\varepsilon^2 = c\varepsilon^4.
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t G_s^\varepsilon ds\right|^2\right) \leq \frac{3}{4}TMc(\varepsilon^4 + 4\varepsilon^5 + 4\varepsilon^3) + 3TMc\varepsilon^4 + \frac{9}{4}TMc(4\varepsilon^3 + \varepsilon^4).$$

Posons $K = \max(\frac{3}{4}TMc, 3TMc, \frac{9}{4}TMc)$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t G_s^\varepsilon ds\right|^2\right) &\leq K(\varepsilon^4 + 4\varepsilon^5 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4) \\ &\leq K(4\varepsilon^5 + 3\varepsilon^4 + 8\varepsilon^3).\end{aligned}$$

En passant à la limite au voisinage de zéro sur ε, on a

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t G_s^\varepsilon ds\right|^2\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left[K(4\varepsilon^5 + 3\varepsilon^4 + 8\varepsilon^3)\right] = 0,$$

alors

$$\sup_t \mathbb{E}\left(\left|\int_0^t G_s^\varepsilon ds\right|^2\right) = \circ\left(\varepsilon\right).$$

Donc l'equation (2.12) est vérifier.

En appliquer les mêmes étape sur Λ_s^ε, on trouve :

$$\sup_t \mathbb{E}\left(\left|\int_0^t \Lambda_s^\varepsilon dB_s\right|^2\right) = \circ(\varepsilon^2).$$

Donc d'apés (2.12) et (2.13), on a

$$\sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}\left(\left|\int_0^t G_s^\varepsilon ds\right|^2 + \left|\int_0^t \Lambda_s^\varepsilon dB_s\right|^2\right) = o(\varepsilon^2). \tag{2.15}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Lemme 2.2.3 *Sous les* ***Hypothèses H1****, on a*

$$\sup_{0\leq s\leq t} \mathbb{E} \mid y_t^{\varepsilon} - y_t - y_1(t) - y_2(t) \mid^2 \leq C\varepsilon^2. \tag{2.16}$$

Preuve. On pose que $y_3 = y_1 + y_2$, et d'aprés la formule de **Taylor** d'ordre 1 un au point y avec un reste intégral, et de plus on ajout et on dimune les termes $\pm\int_0^t \left[g(y_s,u_s) + g_x(y_s,u_s)y_3 + \frac{1}{2}\int_0^1 g_{xx}(y_s,u_s)y_3y_3\right] ds$, et aussi $\pm\int_0^t \left[\sigma(y_s,u_s) + \sigma_x(y_s,u_s)y_3(s) + \frac{1}{2}\int_0^1 \sigma_{xx}(y_s,u_s)y_3(s)y_3(s)\right] dB_s$, on obtient pour tout $0 < \lambda < 1$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g(y_s + y_3(s), u_s^{\varepsilon})ds + \int_0^t \sigma(y_s + y_3(s), u_s^{\varepsilon})dB_s \\
&= \int_0^t [g(y_s,u_s^{\varepsilon}) + g_x(y_s,u_s^{\varepsilon})y_3(s) + \frac{1}{2}\int_0^1 g_{xx}(y_s + \lambda y_3(s), u^{\varepsilon}(s))d\lambda y_3(s)y_3(s)]ds \\
&\pm \int_0^t \left[g(y_s,u_s) + g_x(y_s,u_s)y_3(s) + \frac{1}{2}\int_0^1 g_{xx}(y_s,u_s)y_3(s)y_3(s)\right] ds \\
&+ \int_0^t \left[\sigma(y_s,u_s^{\varepsilon}) + \sigma_x(y_s,u_s^{\varepsilon})y_3(s) + \int_0^1 \sigma_{xx}(y_s,u_s^{\varepsilon})y_3(s)y_3(s)\right] dB_s \\
&\pm \int_0^t \left[\sigma(y_s,u_s) + \sigma_x(y_s,u_s)y_3(s) + \frac{1}{2}\int_0^1 \sigma_{xx}(y_s,u_s)y_3(s)y_3(s)\right] dB_s.
\end{aligned}$$

En factorant les mêmes termes sur les mêmes membres, on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g(y_s+y_3(s),u_s^\varepsilon)ds+\int_0^t \sigma(y_s+y_3(s),u_s^\varepsilon)dB_s\\
&=\int_0^t\left[g(y_s,u_s)+g_x(y_s,u_s)y_3(s)+\frac{1}{2}\int_0^1 g_{xx}(y_s,u_s)y_3(s)y_3(s)\right]ds\\
&+\int_0^t\left[\sigma(y_s,u_s)+\sigma_x(y_s,u_s)y_3(s)+\frac{1}{2}\int_0^1 \sigma_{xx}(y_s,u_s)y_3(s)y_3(s)\right]dB_s\\
&+\int_0^t(g(y_s,u_s^\varepsilon)-g(y_s,u_s))ds+\int_0^t(\sigma(y_s,u_s^\varepsilon)-\sigma(y_s,u_s))dB_s\\
&+\int_0^t(g_x(y_s,u_s^\varepsilon)-g_x(y_s,u_s)y_3(s))\,ds+\int_0^t(g_x(y_s,u_s^\varepsilon)-g_x(y_s,u_s))y_3(s))dB_s\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\int_0^1(g_{xx}(y_s+\lambda y_3(s),u_s^\varepsilon)d\lambda y_3(s)y_3(s)-g_{xx}(y_s,u_s)y_3(s)y_3(s))\right)ds\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\int_0^1(\sigma_{xx}(y_s+\lambda y_3(s),u_s^\varepsilon)d\lambda y_3(s)y_3(s)-\sigma_{xx}(y_s,u_s)y_3(s)y_3(s))\right)dB_s.
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
&\int_0^t g(y_s+y_3(s),u_s^\varepsilon)ds+\int_0^t \sigma(y_s+y_3(s),u_s^\varepsilon)dB_s\\
&=\int_0^t g(y_s,u_s)ds+\int_0^t g_x(y_s,u_s)y_1(s)ds+g_x(y_s,u_s)y_2(s)ds\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1 g_{xx}(y_s,u_s)(y_1(s)y_1(s))ds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1 g_{xx}(y_s,u_s)(2y_1(s)y_2(s)+y_2(s)y_2(s))ds\\
&+\int_0^t\sigma(y_s,u_s)ds+\int_0^t\sigma_x(y_s,u_s)y_1(s)dB_s+\sigma_x(y_s,u_s)y_2(s)dB_s\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1 \sigma_{xx}(y_s,u_s)(y_1(s)y_1(s))dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1 \sigma_{xx}(y_s,u_s)(2y_1(s)y_2(s)+y_2(s)y_2(s))dB_s\\
&+\int_0^t g_x(y_s,u_s^\varepsilon)ds-\int_0^t g_x(y_s,u_s)ds+\int_0^t\sigma_x(y_s,u_s^\varepsilon)dB_s-\int_0^t\sigma_x(y_s,u_s)dB_s\\
&+\int_0^t g_x(y_s,u_s^\varepsilon)y_1(s)ds+\int_0^t g_x(y_s,u_s^\varepsilon)y_2ds-\int_0^t g_x(y_s,u_s))y_1(s)ds-\int_0^t g_x(y_s,u_s)y_2(s)ds\\
&+\int_0^t\sigma_x(y_s,u_s^\varepsilon)y_1(s)dB_s+\int_0^t\sigma_x(y_s,u_s^\varepsilon)y_2(s)dB_s-\int_0^t\sigma_x(y_s,u_s))y_1(s)dB_s-\int_0^t\sigma_x(y_s,u_s)y_2(s)dB_s\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\int_0^1(g_{xx}(y_s+\lambda y_3(s),u_s^\varepsilon)d\lambda y_3(s)y_3(s)-g_{xx}(y_s+\lambda y_3(s),u_s)d\lambda y_3(s)y_3(s))\right)ds\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\int_0^1(\sigma_{xx}(y_s+\lambda y_3(s),u_s^\varepsilon)d\lambda y_3(s)y_3(s)-\sigma_{xx}(y_s+\lambda y_3(s),u_s)d\lambda y_3(s)y_3(s))\right)dB_s.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.6), (2.7), (2.12) et (2.13), la formule précédent peut se transfermé par

$$\begin{aligned}&\int_0^t g(y_s + y_3(s), u_s^\varepsilon)ds + \int_0^t \sigma(y_s + y_3(s), u_s^\varepsilon)dB_s \\ &= y(t) + y_3(t) - x_0 + \int_0^t G_s^\varepsilon ds + \int_0^t \Lambda_s^\varepsilon dB_s.\end{aligned}$$

Alors ainsi nous avons

$$\begin{aligned}y(t) + y_3(t) = x_0 &+ \int_0^t g(y_s + y_3(s), u_s^\varepsilon)ds + \int_0^t \sigma(y_s + y_3(s), u_s^\varepsilon)dB_s \\ &- \int_0^t G^\varepsilon(s)ds - \int_0^t \Lambda^\varepsilon dB_s.\end{aligned}$$

De puis $y_s^\varepsilon = x_0 + \int_0^t g(y_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon)ds + \int_0^t \sigma(y_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon)dB_s$, nous pouvons dérivé

$$\begin{aligned}(y^\varepsilon - y_3 - y_s)(s) = &\int_0^t (g(y_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon) - g(y_s + y_3(s), u_s^\varepsilon))ds \\ &+ \int_0^t (\sigma(y_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon) - \sigma(y_s + y_3(s), u_s^\varepsilon))dB_s \\ &+ \int_0^t G_s^\varepsilon ds + \int_0^t \Lambda_s^\varepsilon dB_s.\end{aligned}$$

D'aprés la formule de **Taylor** avec reste intégrale d'ordre 1 au pointe $y + y_3$

$$\begin{aligned}|(y^\varepsilon - y_3 - y)(s)|^2 = &\Bigg| \int_0^t g_x(y^\varepsilon + \lambda(y^\varepsilon - y_3 - y), u^\varepsilon)(y^\varepsilon - y_3 - y)d\lambda ds \\ &+ \int_0^t \sigma_x(y^\varepsilon + \lambda(y^\varepsilon - y_3 - y), u^\varepsilon)(y^\varepsilon - y_3 - y)d\lambda dB_s \Bigg|^2.\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de **Cauchy-Schwartz** et l'isométrie d'**Itô,** on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|(y^\varepsilon - y_3 - y)(s)\right|^2 &\leq 2\mathbb{E}\int_0^t \left|g_x(y_s^\varepsilon + \lambda(y_s^\varepsilon - y_3(s) - y_s), u_s^\varepsilon)\right| \left|(y_s^\varepsilon - y_3(s) - y_s)\right|^2 ds \\
&+ 2\mathbb{E}\int_0^t \left|\sigma_x(y_s^\varepsilon + \lambda(y_s^\varepsilon - y_3(s) - y_s), u_s^\varepsilon)\right| \left|(y_s^\varepsilon - y_3(s) - y_s)\right|^2 ds \\
&= 2M\mathbb{E}\int_0^t (|y_s^\varepsilon| + |y_3(s)| + |y_s|)ds + 2M\mathbb{E}\int_0^t (|y_s^\varepsilon| + |y_3(s)| + |y_s|)ds \\
&\leq MM = c.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|(y^\varepsilon - y_3 - y)(s)\right|^2 &\leq \mathbb{E}\left(4\left(\int_0^t A^\varepsilon(y_s^\varepsilon - y_3(s) - y_s)ds\right)^2 + 4\left(\int_0^t D^\varepsilon(y_s^\varepsilon - y_3(s) - y_s)dB_s\right)^2\right. \\
&\left. + 4\left(\int_0^t G_s^\varepsilon ds\right)^2 + 4\left(\int_0^t \Lambda_s^\varepsilon ds\right)^2\right) \\
&\leq 4c\int_0^t (y_s^\varepsilon - y_3(s) - y_s)^2 ds + 4c\int_0^t (y_s^\varepsilon - y_3(s) - y_s)^2 ds + \circ(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de **Gronwall**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|(y^\varepsilon - y_3 - y)(s)\right|^2 &\leq o(\varepsilon^2)\exp(4cT) \\
&\leq \circ(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Donc l'inégalité(2.16) est vérifie.

$$\mathbb{E} \mid y^\varepsilon(t) - y(t) - y_1(t) - y_2(t) \mid^2 \leq C\varepsilon^2.$$

D'aprés inégalité maximale (1.2) on a

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left|y^\varepsilon(t) - y(t) - y_1(t) - y_2(t)\right|^2 \leq C\varepsilon^2.$$

Ce qui termine la démostration. ■

Chapitre 3

Processus adjoints et inégalité variationnelle

Dans cette chapitre, nous discutons des équations adjointes qui résolvent uniquement les processus adjoints du premier et du second ordre. Nous donnons notre résultat le principe du maximum stochastique sens la forme general, à la fin de cette chapitre, pour plus des détails nous invitons de voir le référence [2, 3, 8].

3.1 Inégalité variationnelle

Le lemme suivant joue un rôle important pour établir les conditions néccessaire d'optimalités pour le problème du contrôle optimal stochastique(2.1), (2.4) et (2.5).

Lemme 3.1.1 *Sous l'hypopthèses **H1**, On définit l'inégalité variationnelle suivante*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T [l_x(y(s),u(s))(y_1(s)+y_2(s))+\frac{1}{2}l_{xx}(y(s),u(s))(y_1(s)y_1(s))ds \qquad (3.1)\\
&+\mathbb{E}\int_0^T (l(y(s),u^\varepsilon(s))-l(y(s),u(s)))ds\\
&+\mathbb{E}(h_x(y(T))(y_1(T)+y_2(T)))+\frac{1}{2}\mathbb{E}h_{xx}(y(T))y_1(T)y_1(T)\\
&\geqq \circ(\varepsilon).
\end{aligned}$$

oú y_1, y_2 sent données respictevment dans (2.1), (2.4).

Preuve. D'aprés la définitions de la fonction de coût (2.4), alors

$$\begin{aligned}
J(u^\varepsilon)-J(u) &= \mathbb{E}\int_0^T l(t,X_t^\varepsilon,u_t^\varepsilon)dt+\mathbb{E}h(X^\varepsilon(T))-\left[\mathbb{E}\int_0^T l(t,X_t,u_t)dt+\mathbb{E}h(X(T))\right]\\
&= \mathbb{E}\int_0^T \left[l(t,X_t^\varepsilon,u_t^\varepsilon)-l(t,X_t,u_t)\right]dt+\mathbb{E}\int_0^T \left[\mathbb{E}h(X^\varepsilon(T))-\mathbb{E}h(X(T))\right].
\end{aligned}$$

D'autre parte et alors de plus on ajout et on dimune le terme $l(y+y_3,u_t)$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T \left[l(y+y_3,u_t^\varepsilon)-l(t,X_t,u_t)\right]dt+\mathbb{E}[h((y+y_3)(T))-h(X(T))]\\
&+\mathbb{E}\int_0^T \left[l(y+y_3,u_t^\varepsilon)-l(y+y_3,u_t)\right]dt+\circ(\varepsilon).
\end{aligned}$$

D'aprés la formule de **Taylor** avec reste intégrale d'ordre 1 au pointe $y + y_3$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T [l(y+y_3,u_t^{\varepsilon}) - l(t,X_t,u_t)]\,dt + \mathbb{E}[h((y+y_3)(T)) - h(X(T))] \\
&+\mathbb{E}\int_0^T [l(y+y_3,u_t^{\varepsilon}) - l(y+y_3,u_t)]\,dt + \circ(\varepsilon) \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \left[l_x(t,X_t,u_t)y_3 + \frac{1}{2}l_{xx}(t,X_t,u_t)y_3y_3 - l(t,X_t,u_t)\right] ds \\
&+\mathbb{E}\int_0^T \left[l_x(t,X_t,u_t^{\varepsilon}) + l_x(t,X_t,u_t)y_3 + \frac{1}{2}l_{xx}(t,X_t,u_t^{\varepsilon})y_3y_3\right] ds \\
&+\mathbb{E}\int_0^T \left[l(t,X_t,u_t) + l_x(t,X_t,u_t)y_3 + \frac{1}{2}l_{xx}(t,X_t,u_t)y_3y_3\right] ds \\
&+\mathbb{E}(h((y)(T)y_3(T)) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(h_{xx}(y(T)y_3(T)y_3(T)) + \circ(\varepsilon)\,.
\end{aligned}$$

On note $y_3 = y_1 + y_2$, et $y_3y_3 = (y_1+y_2)(y_1+y_2) = y_1y_1 + y_2y_2 + 2y_1y_2$, alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T [l(y+y_3,u_t^{\varepsilon}) - l(t,X_t,u_t)]\,dt + \mathbb{E}[h((y+y_3)(T)) - h(X(T))] \\
&+\mathbb{E}\int_0^T [l(y+y_3,u_t^{\varepsilon}) - l(y+y_3,u_t)]\,dt + \circ(\varepsilon) \\
&= \mathbb{E}\int_0^T \left[l_x(t,X_t,u_t)(y_1+y_2) + \frac{1}{2}l_{xx}(t,X_t,u_t)(y_1y_1+y_2y_2+2y_1y_2) - l(t,X_t,u_t)\right] ds \\
&+\mathbb{E}\int_0^T \left[l_x(t,X_t,u_t^{\varepsilon}) + l_x(t,X_t,u_t)(y_1+y_2) + \frac{1}{2}l_{xx}(t,X_t,u_t^{\varepsilon})(y_1y_1+y_2y_2+2y_1y_2)\right] ds \\
&+\mathbb{E}\int_0^T \left[l(t,X_t,u_t) + l_x(t,X_t,u_t)(y_1+y_2) + \frac{1}{2}l_{xx}(t,X_t,u_t)(y_1y_1+y_2y_2+2y_1y_2)\right] ds \\
&+\mathbb{E}(h((y)(T)(y_1+y_2)(T)) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(h_{xx}(y(T)(y_1y_1+y_2y_2+2y_1y_2)(T)) + \circ(\varepsilon)\,.
\end{aligned}$$

On simplifiez la formule précedente, donc on trouve

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T [l(y+y_3,u_s^\varepsilon)-l(s,X_s,u_s)]\,dt+\mathbb{E}[h((y+y_3)\,(T))-h(X(T))]\\
&+\mathbb{E}\int_0^T [l(y+y_3,u_s^\varepsilon)-l(y+y_3,u_s)]\,ds+\circ\,(\varepsilon)\\
&=\mathbb{E}\int_0^T\left[l_x(s,X_s,u_s)\,(y_1+y_2)+\frac{1}{2}l_{xx}(s,X_t,u_t)\,(y_1y_1+y_2y_2+2y_1y_2)\right]ds\\
&+\mathbb{E}\int_0^T (l(s,X_s,u_s^\varepsilon)-l(s,X_s,u_s)ds+\mathbb{E}\int_0^T (l(s,X_s,u_s^\varepsilon)-l(s,X_s,u_s)\,(y_1+y_2)\,ds\\
&+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T (l_{xx}(s,X_s,u_s^\varepsilon)-l_{xx}(s,X_s,u_s))y_1(s)y_1(s)ds\\
&+\mathbb{E}(h_x(y(T))(y_1(T)y_1(T)))+\frac{1}{2}\mathbb{E}h_{xx}(y(T))y_1(T)y_1(T))+\circ(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Donc on remarque il existe des formule est d'ordre $\circ(\varepsilon)$, alors (3.1) vérifier. ■

3.1.1 Équations adjointe et conditions nécessaires d'optimalité

$\mathcal{L}$e but dans cette section est d'obtenir les conditons nécessaires d'optimalité vérifiés par un contrôle optimal, Dans cette partie nous introduisons l'équations adjoints du premier et du second ordre pour (2.6) et (2.7), avec ces processus, nous pouvons facilement dériver l'inégalité variationnelle de (3.1). Pour simplifier, on note $f_x(t)=f_x(y_t,u_t)$, $f_{xx}(t)=f_{xx}(y_t,\ u_t)$, pour $f=g,\ \sigma,\ l,\ h$. Nous pouvons construire une fonctionnelle linéaire comme suite :

$$\begin{aligned}
I_1=\mathbb{E}\int_0^T &[l_x(y(s),u(s))(y_1(s)+y_2(s)) \qquad (3.2)\\
+\mathbb{E}(h_x&(y(T))(y_1(T)+y_2(T))),
\end{aligned}$$

et

$$I_2 = \frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^T [l_{xx}(y(s), u(s))(y_1(s)y_1(s))ds + \frac{1}{2}\mathbb{E}h_{xx}(y(T))y_1(T)y_1(T), \tag{3.3}$$

où y_1, et y_2 sont liés par (2.6) et (2.7) respectivement.

L'équation adjointe du premier ordre est définie par :

$$\begin{cases} dp_t = -H_x(t, X_t, u_t)dt + K_t dB_t, \\ p(T) = h_x(y(T)), \end{cases} \tag{3.4}$$

où $p,\ K \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}^2(\mathbb{R})$.

Remarque 3.1.1 *D'après les conditions* (1.3), *alors l'équation (3.4) possède unique forte solution* (p, K), *où* $p,\ K \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}^2(\mathbb{R})$, *en effet, Comme* l_{xx}, g_{xx}, σ_{xx} *sont bornées, de plus* l_x *et* g_x *et* σ_x *sont bornées par* $C(1 + |x| + |v|)$, *donc la dérivé* H_x *est **Lipschitzienne.***

On définit les fonctions associes aux le **Hamiltonien** par

$$H(t) = l(t, X_t, u_t) + p_t g(t, X_t, u_t) + K_t \sigma(t, X_t, u_t), \tag{3.5}$$

$$H_x(t) = l_x(t, X_t, u_t) + p_t g_x(t, X_t, u_t) + K_t \sigma_x(t, X_t, u_t),$$

$$H_{xx}(t) = l_{xx}(t, X_t, u_t) + p_t g_{xx}(t, X_t, u_t) + K_t \sigma_{xx}(t, X_t, u_t).$$

On peut appliquer ces résultats à certains des termes de (3.2) et (3.4) :

$$\mathbb{E}\int_0^T [l_x(s)y_1(s)]ds + \mathbb{E}(h_x(y(T))y_1(T))$$

$$= \mathbb{E}\int_0^T [l_x(s)y_1(s)]ds + \mathbb{E}(p_T y_1(T)). \tag{3.6}$$

Lemme 3.1.2 *La formule I_1 (3.2) devient*

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \mathbb{E}\int_0^T p_s(g^\varepsilon(s)-g(s))ds + \mathbb{E}\int_0^T K_s(\sigma^\varepsilon(s)-\sigma(s))ds \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T \frac{1}{2}(p_s g_{xx}(s) + K_s\sigma_{xx}(s))y_1(s)y_1(s))ds \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T p_s(g_x^\varepsilon(s)-g_x(s))y_1(s)ds \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T K_s(\sigma^\varepsilon(s)-\sigma_x(s))y_1(s)ds.
\end{aligned}
$$

oú (p_t, K_t) est solution de systéme (3.4).

Preuve. D'aprés la formule d'intégration par partie (formule d'Itô) dans $\mathbb{E}(p_t y_1(t))$, en utilisant les définitions (3.4) et (2.6), on obtient

$$
\begin{aligned}
d(p_t y_1(t)) &= (dp_t)y_1(t) + p_t(dy_1(t)) + d\left\langle p_t, y_1(t)\right\rangle \\
&= (-H_x(t,X_t,u_t)dt + K_t dB_t)y_1(t) + p_t\left[(g_x(t)y_1(t)\right. \\
&+ g^\varepsilon(t) - g(t))dt + (\sigma_x(t)y_1(t) + \sigma^\varepsilon(t) - \sigma(t))dB_t] \\
&+ K_t(\sigma_x(t)y_1(t) + \sigma^\varepsilon(t) - \sigma(t))dt.
\end{aligned}
$$

En remplaçant la formule de **Hamiltonien** (3.5), alors

$$
\begin{aligned}
d(p_t y_1(t)) &= \left[-l_x(t) - p_t g_x(t) - K_t\sigma_x(t))dt + K_t dB_t\right] y_1(t) + p_t\left[(g_x(t)y_1(t)\right. \\
&+ g^\varepsilon(t) - g(t))dt + (\sigma_x(t)y_1(t) + \sigma^\varepsilon(t) - \sigma(t))dB_t] \\
&+ K_t(\sigma_x(t)y_1(t) + \sigma^\varepsilon(t) - \sigma(t))dt.
\end{aligned}
$$

On simplifiez la formule précédente, donc on trouve

$$
\begin{aligned}
d(p_t y_1(t)) &= (-l_x(t))dt + K_t dB_t)y_1(t) + p_t\left[g(t) - g(t))dt\right. \\
&+ (\sigma_x(t)y_1(t) + \sigma^\varepsilon(t) - \sigma(t))dB_t] + K_t(\sigma^\varepsilon(t) - \sigma(t))dt.
\end{aligned}
$$

Alors on intègre de 0 à T, et introduisant l'espérance mathématiques, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(p_t y_1(t)\right) &= \mathbb{E}\left(p_0(y_1(0)\right) + \mathbb{E}\int_0^T (-l_s(s))ds + K_s dB_s) y_1(s) ds \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T p_s(g^\varepsilon(s) - g(s))ds + \mathbb{E}\int_0^T p_s(\sigma_x(s)y_1(s) + \sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s))dB_s \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T K_s(\sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s))ds.\end{aligned}$$

Comme l'espérance mathématiques d'une partie martingale est nulle, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(p_T y_1(t)\right) = \mathbb{E}\int_0^T (-l_s(s))y_1(s)ds + \mathbb{E}\int_0^T p_s(g^\varepsilon(s) - g(s))ds \\ + \mathbb{E}\int_0^T K_s(\sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s))ds.\end{aligned}$$

Donc d'aprés la formule (3.6), le dernié formule devient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^T [l_x(s)y_1(s)]ds + \mathbb{E}(h_x(y(T))y_1(T)) = \mathbb{E}\int_0^T p_s(g^\varepsilon(s) - g(s))ds \\ + \mathbb{E}\int_0^T K_s(\sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s))ds.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Par une méthode analogue, on peut aplique ce résultat à certains des termes de (3.1) :

$$\mathbb{E}\int_0^T [l_x(s)y_2(s)]ds + \mathbb{E}(h_x(y(T))y_2(T). \tag{3.8}$$

D'aprés la formule d'intégration par partie (formule d'Itô) dans $\mathbb{E}(p_t y_2(t))$, alors

$$\begin{aligned} d(p_t y_2(t)) &= (dp_t) y_2(t) + p_t(dy_2(t)) + d\left\langle p_t, y_2(t)\right\rangle \\ &= (-H_x(t, X_t, u_t)dt + K_t dB_t) y_2(t) + p_t\left[(g_x(t)y_2(t)\right. \\ &+ \frac{1}{2} g_{xx}(t) y_1(t) y_1(t))dt + (\sigma_x(t) y_2(t) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma_{xx}(t) y_1(t) y_1(t))dB_t + (g_x^{\varepsilon}(t) - g_x(t)) y_1(t) dt \\ &+ (\sigma^{\varepsilon}(t) - \sigma_x(t)) y_1(t) dB_t] + K_t[\sigma_x(t) y_2(t) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma_{xx}(t) y_1(t) y_1(t) + (\sigma^{\varepsilon}(t) - \sigma_x(t)) y_1(t)]dt. \end{aligned}$$

Les même étapes on remplace la formule de **Hamiltonien (3.5),** alors

$$\begin{aligned} d(p_t y_2(t)) &= (-l_x(t) - p_t g_x(t) - K_t \sigma_x(t))dt + K_t dB_t) y_2(t) \\ &+ p_t\left[(g_x(t) y_2(t) + \frac{1}{2} g_{xx}(t) y_1(t) y_1(t))dt\right. \\ &+ (\sigma_x(t) y_2(t) + \frac{1}{2}\sigma_{xx}(t) y_1(t) y_1(t))dB_t \\ &+ (g_x^{\varepsilon}(t) - g_x(t)) y_1(t) dt + (\sigma^{\varepsilon}(t) - \sigma_x(t)) y_1(t) dB_t] \\ &+ K_t[\sigma_x(t) y_2(t) + \frac{1}{2}\sigma_{xx}(t) y_1(t) y_1(t) + (\sigma^{\varepsilon}(t) - \sigma_x(t)) y_1(t)]dt. \end{aligned}$$

Alors on integre de 0 à T, et introduisant l'espérance Mathématiques, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(p_t y_2(t)\right) &= \mathbb{E}\left(p_0(y_2(0)\right) + \mathbb{E}\int_0^T (-l_s(s))dt + K_s dB_s) y_2(s) ds + \mathbb{E}\int_0^T p_s[(g_x(s) y_2(s) \\ &+ \frac{1}{2} g_{xx}(s) y_1(s) y_1(s))ds + \mathbb{E}\int_0^T (\sigma_x(s) y_2(s) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma_{xx}(s) y_1(t) y_1(s))dB_s + \mathbb{E}\int_0^T (g_x^{\varepsilon}(s) - g_x(s)) y_1(s) ds \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T (\sigma^{\varepsilon}(s) - \sigma_x(s)) y_1(s) dB_s] + \mathbb{E}\int_0^T K_s[\sigma_x(s) y_2(s) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma_{xx}(s) y_1(s) y_1(s) + (\sigma^{\varepsilon}(s) - \sigma_x(s)) y_1(s)]ds. \end{aligned}$$

On sait que l'espérance Mathématiques d'une partie martingale est nulle, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(p_t y_2(t)\right) &= \mathbb{E}\int_0^T (-l_s(t)) y_2(s) ds + \mathbb{E}\int_0^T p_s[(g_x(s) y_2(s)\\ &+ \frac{1}{2} g_{xx}(s) y_1(s) y_1(s)) ds + \mathbb{E}\int_0^T (g_x^\varepsilon(s) - g_x(s)) y_1(s) ds\\ &+ \mathbb{E}\int_0^T K_s[\sigma_x(s) y_2(s) + \frac{1}{2}\sigma_{xx}(s) y_1(s) y_1(s)\\ &+ (\sigma^\varepsilon(s) - \sigma_x(s)) y_1(s)] ds.\end{aligned}$$

Donc d'aprés la formule (3.8) en remplaçant ces dérivées dans (3.3), alors

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_0^T [l_x(s) y_2(s)] ds + \mathbb{E}(h_x(y(T)) y_2(T))\\ &= \mathbb{E}\int_0^T \frac{1}{2}(p_s g_{xx}(s) + K_s \sigma_{xx}(s)) y_1(s) y_1(s)) ds\\ &+ \mathbb{E}\int_0^T p_s (g_x^\varepsilon(s) - g_x(s)) y_1(s) ds\\ &+ \mathbb{E}\int_0^T K_s(\sigma^\varepsilon(s) - \sigma_x(s)) y_1(s) ds.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Ce que fallait à démontré. ■

En remplaçant (3.7), et (3.9) dans (3.1), on trouve

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\int_0^T p_s(g^\varepsilon(s) - g(s)) ds + \mathbb{E}\int_0^T K_s(\sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s)) ds\\ &+ \mathbb{E}\int_0^T \frac{1}{2}(p_s g_{xx}(s) + K_s \sigma_{xx}(s)) y_1(s) y_1(s)) ds\\ &+ \mathbb{E}\int_0^T p_s(g_x^\varepsilon(s) - g_x(s)) y_1(s) ds + \mathbb{E}\int_0^T K_s(\sigma^\varepsilon(s) - \sigma_x(s)) y_1(s) ds\\ &+ \frac{1}{2} l_{xx}(y(s), u(s))(y_1(s) y_1(s)) ds + \mathbb{E} h_{xx}(y(T)) y_1(T) y_1(T)\\ &+ \mathbb{E}\int_0^T (l(y(s), u^\varepsilon(s)) - l(y(s), u(s))) ds \geqq \circ(\varepsilon).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Nous pouvons construire une fonctionnelle linéaire comme suite :

$$I_3 = \mathbb{E}\int_0^T [l_{xx}(y(s), u(s))(y_1(s)y_1(s)) \tag{3.11}$$
$$+ \mathbb{E}(h_{xx}(y(T))(y_1(T)y_1(T))).$$

où y_1 est lié par la formule (2.6).

L'équation adjointe du second ordre est définie par :

$$\begin{cases} dP_t = -(H_{xx}(t) + 2g_x(t)P_t + 2\sigma_x(t)Q_t + \sigma_x^2(t))dt + Q_t dB_t, \\ P(T) = h_{xx}(y(T)), \end{cases} \tag{3.12}$$

Remarque 3.1.2 *D'après les conditions* (1.3), *l'équation (3.12) possède unique solution* (P, Q), *où* P, $Q \in \mathcal{M}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}^2(\mathbb{R})$, *en effet* l_{xx}, g_{xx}, σ_{xx} *sont bornées, de plus* l_x *et* g_x *et* σ_x *sont bornées par* $C(1 + |x| + |v|)$, *voir [3].*

Lemme 3.1.3 *La formule* I_3 *dans (3.11) devient*

$$\begin{aligned} I_3 &= \mathbb{E}\int_0^T [l_{xx}(s)Y(s)]ds + \mathbb{E}(h_x(y(T))Y(T)) \\ &= \mathbb{E}\int_0^T (-p_s g_{xx}(s) - K_s\sigma_{xx}(s) - 2\sigma_x(s)Q_s)Y_s ds \\ &+ 2\mathbb{E}\int_0^T P_s[y_1(s)(g_x(s)y_1(s) + g^\varepsilon(s) - g(s))]ds \\ &+ \mathbb{E}\int_0^T 2y_1Q_s(\sigma_x(s)y_1(s) + \sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s))^2)ds. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Preuve. On note par $Y(s) = y_1(s)y_1(s)$, mais $\int_0^t dY_t dt = Y_t - Y_0 = Y_t$.et par l'application du formule d'intégration par partie d'Itô, on trouve

$$\begin{aligned} d(y_1(t)y_1(t)) &= (dy_1(t))y_1(t) + y_1(t)(dy_1(t)) + d\left\langle y_1(t), y_1(t)\right\rangle \\ &= 2y_1(t)(dy_1(t)) + d\left\langle y_1(t), y_1(t)\right\rangle \\ &= 2y_1(t)\left[(g_x(t)y_1(t) + g^{\varepsilon}(t) - g(t))dt + (\sigma_x(t)y_1(t) + \sigma^{\varepsilon}(t) - \sigma(t))dB_t\right] \\ &+ (\sigma_x(t)y_1(t) + \sigma^{\varepsilon}(t) - \sigma(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Alors on integre de 0 à t, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t d(y_1(s)y_1(s))ds = \int_0^t d(Y(s))ds = Y_t & \qquad (3.14) \\ = 2\int_0^t y_1(s)(g_x(s)y_1(s) + g^{\varepsilon}(s) - g(s))ds & \\ + 2\int_0^t y_1(s)(\sigma_x(s)y_1(s) + \sigma^{\varepsilon}(s) - \sigma(s))dB_s & \\ + \int_0^t (\sigma_x(s)y_1(s) + \sigma^{\varepsilon}(s) - \sigma(s))^2 ds. & \end{aligned}$$

On peut appliquer ces résultats à certains des termes de (3.1) et (3.12) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\int_0^T [l_{xx}(s)Y(s)]ds + \mathbb{E}(h_{xx}(y(T))Y(T)) & \qquad (3.15) \\ = \mathbb{E}\int_0^T [l_{xx}(s)Y(s)]ds + \mathbb{E}(P_T Y(T)). & \end{aligned}$$

D'aprés la formule d'intégration par parties (formule d'Itô) sur $\mathbb{E}(P_t Y(t))$, en utilisant les définitions (3.12) et (3.14), on obtient

$$\begin{aligned} d\left(P_t Y_t\right) &= \left(dP_t\right)Y_t + P_t\left(dY_t\right) + d\left\langle P_t Y_t\right\rangle \\ &= (-(H_{xx}(t) + 2g_x(t)P_t + 2\sigma_x(t)Q_t + \sigma_x^2(t)) + Q_t dB_t)Y_t + 2P_t[y_1(t)(g_x(t)y_1(t) \\ &+ g^{\varepsilon}(t) - g(t))dt + y_1(t)(\sigma_x(s)y_1(s) + \sigma^{\varepsilon}(s) - \sigma(s))]dB_s \\ &+ (2y_1 Q_t(\sigma_x(s)y_1(s) + \sigma^{\varepsilon}(s) - \sigma(s))^2)ds. \end{aligned}$$

On remplace la formule de **Hamiltonienne (3.5),** alors

$$
\begin{aligned}
d\left(P_tY_t\right) &= (-l_{xx}(t) - p_tg_{xx}(t) - K_t\sigma_{xx}(t) - 2\sigma_x(s)Q_t - \sigma_x^2(s))dt + Q_tdB_t)Y_t \\
&\quad + 2P_t[y_1(t)(g_x(t)y_1(t) + g^\varepsilon(t) - g(t))dt + y_1(t)(\sigma_x(s)y_1(s) + (\sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s))]dB_s \\
&\quad + (2y_1Q_t(\sigma_x(s)y_1(s) + \sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s))^2)ds.
\end{aligned}
$$

On simplifiez la formule précédente, donc on trouve

$$
\begin{aligned}
d\left(P_tY_t\right) &= (-l_{xx}(t) - p_tg_{xx}(t) - K_t\sigma_{xx}(t) - 2\sigma_x(s)Q_t - \sigma_x^2(s))dt + Q_tdB_t)Y_t \\
&\quad + 2P_t[(g^\varepsilon(t) - g(t))dt + y_1(t)(\sigma_x(t)y_1(t) + (\sigma^\varepsilon(t) - \sigma(t))]dB_t \\
&\quad + (2y_1Q_t(\sigma_x(t)y_1(t) + \sigma^\varepsilon(t) - \sigma(t))^2)dt.
\end{aligned}
$$

Alors on integre de 0 à T et introduisant l'espérance on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^T(P_sY_s)ds &= \mathbb{E}\int_0^T(-l_{xx}(s) - p_sg_{xx}(s) - K_s\sigma_{xx}(s) - 2\sigma_x(s)Q_s - \sigma_x^2(s))ds \\
&\quad + Q_sdB_s)Y_sds + 2\mathbb{E}\int_0^T P_s[y_1(s)(g_x(s)y_1(s) + g^\varepsilon(s) - g(s))]ds \\
&\quad + \mathbb{E}\int_0^T y_1(s)(\sigma_x(s)y_1(s) + \sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s))]dB_s \\
&\quad + \mathbb{E}\int_0^T 2y_1Q_s(\sigma_x(s)y_1(s) + \sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s))^2)ds.
\end{aligned}
$$

On sait que l'espérance d'une partie martingale égale à zéros, on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^T(P_sY_s)ds &= \mathbb{E}\int_0^T(-l_{xx}(s) - p_sg_{xx}(s) - K_s\sigma_{xx}(s) - 2\sigma_x(s)Q_s - \sigma_x^2(s))Y_sds \\
&\quad + 2\mathbb{E}\int_0^T P_s[y_1(s)(g_x(s)y_1(s) + g^\varepsilon(s) - g(s))]ds \\
&\quad + \mathbb{E}\int_0^T 2y_1Q_s(\sigma_x(s)y_1(s) + \sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s))^2)ds.
\end{aligned}
$$

Donc d'aprés la formule (3.15) en remplaçant

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T [l_{xx}(s)Y(s)]ds + \mathbb{E}(h_x(y(T))Y(T)) \\
&= \mathbb{E}\int_0^T (-p_s g_{xx}(s) - K_s\sigma_{xx}(s) - 2\sigma_x(s)Q_s)Y_s ds \\
&+ 2\mathbb{E}\int_0^T P_s[y_1(s)(g_x(s)y_1(s) + g^\varepsilon(s) - g(s))]ds \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T 2y_1 Q_s(\sigma_x(s)y_1(s) + \sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s))^2)ds.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Ce qui fallait a démontré. ■

En remplaçant (3.16) dans (3.10), on trouve

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\int_0^T p_s(g^\varepsilon(s) - g(s))ds + \mathbb{E}\int_0^T K_s(\sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s))ds \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T \frac{1}{2}(p_s g_{xx}(s) + K_s\sigma_{xx}(s))Y_s ds \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T p_s(g_x^\varepsilon(s) - g_x(s))y_1(s)ds + \mathbb{E}\int_0^T K_s(\sigma^\varepsilon(s) - \sigma_x(s))y_1(s)ds \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T (-p_s g_{xx}(s) - K_s\sigma_{xx}(s) - 2\sigma_x(s)Q_s - \sigma_x^2(s))Y_s ds \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T P_s[2y_1 g_x(s) + g^\varepsilon(s) - g(s)]ds \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T 2y_1 Q_s(\sigma_x(s)y_1(s) + \sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s))^2 ds. \\
&+ \mathbb{E}\int_0^T (l(y(s), u^\varepsilon(s)) - l(y(s), u(s)))ds \\
&\geqq \circ(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Dans (3.17) on remarque $\mathbb{E}\int_0^T p_s(g_x^\varepsilon(s)-g_x(s))y_1(s)ds+\mathbb{E}\int_0^T K_s(\sigma^\varepsilon(s)-\sigma_x(s))y_1(s)ds$ est d'ordre $\circ(\varepsilon)$, alors

$$\mathbb{E}\int_0^T (H(y, u^\varepsilon, p, K) - H(y, u, p, K))dt + \frac{1}{2}p(s)(\sigma^\varepsilon(s) - \sigma(s))^2 \geq \circ(\varepsilon). \tag{3.18}$$

Théorème 3.1.1 *Soit* ***Hypothèses H1.****si* $(y(.), u(.))$ *est une solution du problème de contrôle optimal (2.1), (2.4)et(2.5) alors les processuses*

$$(p(.), K(.)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}),$$
$$(P(.), Q(.)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}) \times (L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}),$$

sont respectivement des solutions de (3.4) et (3.12) telles que l'inégalité variationnelle (3.18) soit vérifiée.

Bibliographie

[1] Bellman, R. (1957). Dynamic Programming, Princeton, Princeton University Press. — Réimpression 2003, Dover Publication, Mineola, New-York, (ISBN 0-486-42809-5).

[2] Bensoussan, A. (1983) AStochastic maximum principle for distributed parameter system, J. of the Franklin Inst.,315 , pp. 387-406.

[3] Briand, P. (2001). Equations Différentielles Stochastique Rétrogrades. INRIA institiut. pp 59 pages.

[4] Jeanblanc, M, Simon, T. (2005). Eléments de calcul stochastique. IRBID institiut. pp 88 pages.

[5] Khalfallah, N . (2019). Cours de théorie générale des processus stochastique. Département des Mathématiques. Université de Biskra.

[6] Labed, B. (2019). Cours de Mouvement Brownien et calcul stochastique. Département des Mathématiques. Université de Biskra.

[7] Revuz, D and M. Yor(1991), Continuous martingales and Brownian motion, Grundlehren Math.Wiss., vol. 293, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

[8] Peng, S. (1990). A General stochastique maximum principle for optimal control problems. SIAM J. control and optimizaition. Vol. 28, No4, pp. 966-979.

[9] Pontrvagin, L. S. BoltyansklI, V. G. Gamkrelidze, R. V. (1962), The Mathematical Theory of Optimal Control Processes, John Wiley, New York.

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité.
$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$	Filtration.
$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$	Espace de probabilité filtré.
$i.e$	c'est à dire.
$\mathbb{P} - p.s.$	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
MB	movement Brownien.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$	La tribu boriliènne sur $\mathbb{R}^d$.
$\mathbb{E}$	L'espérance par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$.
Var	Variation par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$.
$lim\ sup$	Limite supérieur.
$M^2(\mathbb{R})$	Matrice.
EDS	Équation différentielle stochastique.
$EDSR$	Équation différentielle stochastique rétrograde.