République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option :**STATISTIQUE**

Par

AYA NACER

Titre :

Statistiques d'ordre, processus empirique et mouvement Brownien

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	**Yahya Djabrane**	UMKB	Président
Pr.	**Necir Abdelhakim**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Touba Sounya**	UMKB	Examinatrice

18 Juin 2023

DÉDICACE

J*e profite de cette occasion pour dédier à les personnes les plus chère à mon cœur :*

À mes chère parent : Salim et Khaira.

À mes chère frères : Fateh , Yahia , Nafaa et Ali.

À mes chère sœurs : Somia, Chaima et Douaa.

À mes chère amis : Houda, Rayane, ...

À toute la famille des mathématiques de l'Université de Biskra.

REMERCIEMENTS

Alhamdulillah d'avoir complété mon parcours d'études avec succès.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mes chers parents, mes chers frères et mes chères sœurs pour leur soutien constant et leurs encouragements tout au long de mon parcours. Votre présence et votre soutien inconditionnels m'ont inspiré et motivé à persévérer dans mes efforts.

Je souhaite exprimer ma sincère reconnaissance envers mon estimé le Professeur **Necir Abdelhakim**, qui est toujours présent, ponctuel et prêt à partager ses connaissances pour m'aider dans mon travail, votre générosité dans le partage de vos connaissances est une inspiration pour moi. Je vous remercie du fond du cœur pour votre patience, votre encouragement constant et votre volonté de me voir réussir.

Je suis consciente de l'importance du rôle du président le Professeur **D Yahya** et l'examinatrice le Docteur **S. Touba** dans le processus de soutenance et de l'impact de vos commentaires et de vos questions sur ma présentation. Votre expertise et votre expérience contribueront à enrichir ma soutenance et à évaluer la qualité de mon travail.

J' addresse mes remerciements les plus chaleureux envers la famille de notre département, enseigniants et étudiants, dont je suis honorée de faire partie de celle-ci. Votre passion et votre expertise ont contribué à façonner mon parcours académique et à développer ma compréhension en mathématiques.

Aya Nacer

Merci

Résumé

Une fois que on a définit un estimateur ou une variable de décision d'un test statistique, le problème qui se pose toujours est d'établir la normalité asymptotique de ceux-ci. Ce résultat nous conduit, entre autres, à définir des intervalles de confiances pours les paramètres d'un modèle probabiliste et de construire des régions critiques. Cette loi limite constitue la partie la plus difficile dans l'étude du comportement asymptotique d'une statistique Les méthodes basées sur le théorème central limite (TCL) classique peuvent êtres compliquées. A cet effet, dans ce mémoire nous exposons une technique, universelle, basée sur des approximations gaussiennes des processus empiriques uniformes par le processus de Wiener. Nous avons appliqué cette méthode pour redémontrer le TCL pour la moyenne empirique et d'établir la normalité asymptotique d'un ensemble de statistiques, à savoir : l'estimateur du maximum de vraisemblance, les L-statistiques et les estimateurs des queues de distributions.

Table des matières

DÉDICACE i

REMERCIEMENTS ii

Résumé iii

Table des matières iv

Introduction générale 1

1 Statistique d'ordre 4

1.1 Introduction 4

1.2 Fonction inverse généralisée 5

1.2.1 Distribution des statistiques d'ordre 5

1.2.2 Loi jointe de $(X_{1:n}, X_{2:n}, .., X_{n:n})$ 5

1.2.3 Distribution de $X_{1:n}$ et $X_{n:n}$ 6

1.2.4 La loi asymptotique de maximum 6

1.2.5 La loi asymptotique de minimum 7

1.2.6 Distribution de $X_{r:n}$: 8

1.3 Distribution jointe de $(X_{i:n}, X_{j:n})$ou plus 8

1.3.1 Distrubition de L'entendue($X_{1:n} - X_{n:n}$) : 10
1.4 Propriétés de la Statistique d'ordre 10
1.5 Représentation de Rényi 11
1.6 Fonction (combinaison) Linéaire des Statistiques d'ordres : 13
1.6.1 Comportement asymptotique de L_n : 13
1.6.2 Distribution asymptotique de la moyenne tronquée 16
1.7 Estimateur de Hill 16
1.7.1 Comportement asymptotique 16

2 Processus de Wiener (Mouvement Brownien) 18
2.1 Introduction 18
2.2 Processus de Wiener : 19
2.3 Principe d'invariance de Donsker 20
2.4 Pont brownien : 21

3 Processus empirique 22
3.1 Introduction 22
3.2 Distribution empirique : 23
3.2.1 Propriétés sur la distribution empirique 24
3.3 Processus empirique uniforme 24
3.4 Processus des quantiles uniforme 24
3.5 Processus empirique de queue 25
3.6 Processus des quantiles de queue 26
3.7 Processus des quantiles de queue tronquée 26
3.8 La condition de second-ordre : 27

4 Application **29**

4.1 La normalité asymptotique de la moyenne empirique 29

4.1.1 La moyenne empirique uniforme 29

4.1.2 La moyenne empirique exponentielle : 33

4.1.3 La moyenne empirique de la loi de Pareto 38

4.2 La normalité asymptotique du L-statistique 41

4.3 La normalité asymptotique du l'estimateur de l'indice des valeurs extrême : 42

4.3.1 L'estimation paramétrique 42

4.3.2 L'estimation semi-paramétrique : 46

Conclusion **51**

Bibliographie **52**

Annexe B : Abréviations et Notations **54**

4.4 Théorème centrale limite 54

4.5 La fonction de poids 54

4.6 Fonction à variation régulière 55

Annexe B : Abréviations et Notations **56**

Introduction Générale

La normalité asymptotique est un concept important en statistique. Il est apparu au début du 20ème siècle, l'un des premiers à s'intéresser à la normalité asymptotique était le mathématicien russe Andrei Markov, qui a étudié la distribution de la moyenne d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Il a montré que cette distribution tendait vers une distribution normale lorsque la taille de l'échantillon augmentait . Cependant, c'est le mathématicien britannique Ronald Fisher qui a popularisé la normalité asymptotique et qui l'a intégrée dans les méthodes statistiques modernes.

La construction des intervalles de confiance repose sur la connaissance de la loi des estimateurs, mais il n'est pas toujours possible de la connaître précisément, surtout lorsque l'échantillon est de grande taille. Dans ce cas, les statisticiens estiment que la loi des estimateurs peut être remplacée par une approximation avec une erreur négligeable, ce qui simplifie les choses et permet de construire des intervalles de confiance dont le niveau de confiance est garanti asymptotiquement.

En général, la normalité asymptotique est considérée comme une conséquence du théorème central limite. Cependant, il est important de noter que ce théorème ne s'applique pas à tous les estimateurs. En effet, pour que le théorème central limite soit applicable, certaines conditions doivent être satisfaites, telles que l'indépendance et l'identité de distribution des variables aléatoires. De plus, même lorsque ces conditions sont satisfaites, la normalité asymptotique peut ne pas être atteinte si la taille de l'échantillon est trop petite. Par conséquent, il est essentiel de considérer les conditions et les limitations de ce théorème lors de l'utilisation de la normalité asymptotique dans l'analyse statistique.

Pour étudier la normalité asymptotique en statistique, il est nécessaire de posséder de solides connaissances mathématiques. Nous avons résumé ces connaissances en trois chapitres :

le $1^{\text{ère}}$ chapitre consèrnant les statistiques d'ordre.Dans cette partie, nous aborderons les lois des statistiques d'ordre ainsi que quelques notions et théories associées. L'objectif principal de cette partie est de comprendre que la plupart des estimateurs sont exprimés sous forme de statistiques d'ordre et de montrer comment ces notions sont utilisées pour construire des estimateurs en statistique..

le $2^{\text{ème}}$ chapitre : le processus de Wiener ■ous avons survolé le mouvement brownien et le pont brownien et quelques principes de base, qui sont des sujets très riches et instructifs en probabilité et statistique. Il serait difficile de résumer ces sujets de manière exhaustive, mais nous avons principalement mis l'accent sur la convergence vers la loi normale.

le $3^{\text{ème}}$ chapitre le processus empirique. Nous allons aborder les notions de processus empirique uniforme, processus des quantiles uniformes et processus de queue. Ces notions sont importantes car chaque estimateur est écrit en fonction de l'un de ces trois types, et même lorsque l'estimateur converge vers le pont Brownien, il converge vers la loi normale, comme nous l'avons détaillé dans le deuxième chapitre.

Dans le quatrième chapitre, nous aborderons la partie application et nous prendrons quelques estimateurs en commençant par le plus facile, c'est-à-dire la moyenne empirique, pour ensuite passer à des estimateurs plus difficiles et terminer par l'estimateur de Hill.

La normalité asymptotique ne se limite pas uniquement à la construction des intervalles de confiance pour les estimateurs des paramètres inconnus dans une distribution de probabilité. Elle est également utilisée dans de nombreux autres contextes de statistiques :

1. Les tests d'hypothèses : les tests d'hypothèses sont utilisés pour déterminer si une hypothèse sur une population est vraie ou fausse. La normalité asymptotique est utilisée pour calculer les statistiques de test, telles que le test Z et le test t, qui reposent sur la distribution normale pour l'échantillon moyen.
2. La régression : la normalité asymptotique est utilisée pour justifier les hypothèses sous-jacentes à la régression linéaire, une méthode courante de modélisation statistique. Les résidus de la régression doivent être distribués normalement pour que les estimations de la régression soient valides.
3. La simulation : la normalité asymptotique est utilisée pour simuler des échantillons de grande taille à partir d'une population connue ou supposée. Les simulations permettent d'obtenir des estimations précises des paramètres de population, des intervalles de confiance et des statistiques de test.
4. Les analyses multivariées : la normalité asymptotique est utilisée dans les analyses multivariées, telles que l'analyse factorielle et l'analyse discriminante. Ces analyses reposent sur la distribution normale pour les variables continues.

Chapitre 1

Statistique d'ordre

1.1 Introduction

Soient $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq ... \leq X_{n:n}$ les statistiques d'ordre associeés à la suite $(X_1, X_2, .., X_n)$ de v.a iid, telles que :

$$\underbrace{X_{1:n}}_{\text{La valeur minimale}}, X_{2:n}, ..., \underbrace{X_{k:n},}_{\text{Le k}^{\text{ième}}\text{satitistique d'ordre}} ..., \underbrace{X_{n:n}}_{\text{La valeur maximale}}$$

Les statistique fournies par David (1981) et Baclawski (2008). La statistique d'ordre c'est une partie fondamentale du statistique non paramétrique et statistique inférentielle, beaucoup des scientifiques montrent leurs intérêts vers la commençant par Sarhan et greenberg en 1962, et les études du Helbrt Aron David 1970 et 1981. On trouve aussi Balakrishnan, Gnanadesikan, Biometrika(revue scientifique britannique de statistique théorique),...et des autres qui ont une contribution pour le développement et la refraichissement de la statistique d'ordre.

L'utilisation de la dernière concerne à la théorie des moments, les valeurs extremes et d'éstimation des quantiles.

1.2 Fonction inverse généralisée

La fonction inverse généralisée, on dit aussi la fonction des quantiles, associée à la distribution F est définie par :

$$F^{-1}(t) = \inf \{x : F(x) \geqslant t\}, \ t \in]0,1[.$$

– si $t = 1/2$ le quantile appellée la médiane de F.

– si $t = 1/4$ le quantile appellée le quartiles de F.

– si $t = 1/10$ le quantile appellée le déciles de F.

Théorème 1.2.1 *(transformation inverse)*

(1) Soit U une v.a de loi $U_{[0,1]}$, et F une fonction de répartition quelconque. Alors $Y := F^{-1}(U)$ suit la loi F, et on note $(Y \rightsquigarrow F)$.

(2) $[Y \leqslant y] = [U \leqslant F(y)]$

(3) $1_{[Y \leqslant y]} = 1_{[U \leqslant F(y)]}$

(4) $1_{[Y < y]} = 1_{[U < F(y^-)]}$

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(U \leqslant F(y)) = F(y) \text{ car : } F(y) \in [0,1].$$

1.2.1 Distribution des statistiques d'ordre

1.2.2 Loi jointe de $(X_{1:n}, X_{2:n}, .., X_{n:n})$

La loi jointe de $(X_{1:n}, X_{2:n}, .., X_{n:n})$ est donnee par :

$$f_{X_{1:n}, X_{2:n}\ , \dots X_{n/n}}(x_{1:}, x_2, ..., x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i), \tag{1.1}$$

avec $-\infty \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq +\infty$.

1.2.3 Distribution de $X_{1:n}$ et $X_{n:n}$

1. Pour $X_{1:n}$:

$$\begin{aligned} F_{X_{1:n}}(x) &= P(X_{1:n} \leq x) = P(\min(X_1, X_2, .., X_n) \leq x) \\ &= 1 - P(\min(X_1, X_2, .., X_n) \geq x) \\ &= 1 - p(X_1 \geq x, X_2 \geq x, .., X_n \geq x) \\ &= 1 - (1 - F(x))^n \text{ car } (X_1, X_2, .., X_n) \text{ iid} \end{aligned}$$

2. Pour $X_{n:n}$:

$$\begin{aligned} F_{X_{1:n}}(x) &= P(X_{1:n} \leq x) = P(\max(X_1, X_2, .., X_n) \leq x) \\ &= p(X_1 \leq x, X_2 \leq x, .., X_n \leq x) \\ &= F(x)^n \end{aligned}$$

1.2.4 La loi asymptotique de maximum

Soient $(X_1, X_2, .., X_n)$ une suite des v.a suit la loi F_X , on définie $Y = \frac{X_{n:n} - a_n}{b_n}$ avec $a_n \in \mathbb{R}, b_n > 0$et G une autre distribution tel que :

$$F_Y \xrightarrow{D} G \tag{1.2}$$

alors on dit que F_X appartienne à domaine d'attraction de G ($F_X \in D(G)$).

Théorème 1.2.2 *La distribution G prend l'un des trois types :*

$$G_1(x, \gamma) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ exp(-x^{-\frac{1}{\gamma}}) & x \geqslant 0, \gamma > 0 \end{cases} \quad \text{(type de Frechet)}$$

$$G_2(x,\gamma) = \begin{cases} exp(-(-x)^{\frac{1}{\gamma}}) & x \leqslant 0, \gamma > 0 \\ 1 & x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{(type de Weibull)}$$

$G_3(x) = \exp(-\exp(-x)), -\infty < x < +\infty$ (type de Gumbel)

Théorème 1.2.3 *(Les constante de normalisation)On peut choisir $a_n \in \mathbb{R}, b_n > 0$ qui vérifié (1.2) comme suit :*

(i). $a_n = 0, b_n = F_X^{-1}(1 - \frac{1}{n})$ si $G = G_1$.

(ii). $a_n = F_X^{-1}(1), b_n = F_X^{-1}(1) - F_X^{-1}(1 - \frac{1}{n})$ si $G = G_2$.

(iii). $a_n = F_X^{-1}(1 - \frac{1}{n}), b_n = F_X^{-1}(1 - \frac{1}{ne}) - F_X^{-1}(1 - \frac{1}{n})$ si $G = G_3$.

1.2.5 La loi asymptotique de minimum

Théorème 1.2.4 *Soient $(X_1, X_2, .., X_n)$ une suite des v.a suit la loi F_X , on définie $Z = \frac{X_{1:n} - a_n^*}{b_n^*}$ avec $a_n^* \in \mathbb{R}, b_n^* > 0$et G^* une autre distribution telle que ;*

$$F_Y \xrightarrow{D} G^* \tag{1.3}$$

avec G^* sous forme des trois types :

$G_1^*(x,\gamma) = 1 - G_1(-x,\gamma)$

$G_2^*(x,\gamma) = 1 - G_2(-x,\gamma)$

$G_3^*(x,\gamma) = 1 - G_3(-x)$

Théorème 1.2.5 *La construction les constantes de normalisation $a_n^* \in \mathbb{R}, b_n^* > 0$ comme suite :*

(i). $a_n^* = 0, b_n^* = |F_X^{-1}(\frac{1}{n})|$ si $G^* = G_1^*$ et $x > 0$.

(ii). $a_n^* = F_X^{-1}(0), b_n^* = F_X^{-1}(\frac{1}{n}) - F_X^{-1}(0)$ si $G^* = G_2^*$ et $x > 0$.

(iii). $a_n^* = F_X^{-1}(\frac{1}{n}), b_n^* = E[a_n^* - X/X \leqslant a_n^*]$ si $G^* = G_3^*$ et $x > 0$.

1.2.6 Distribution de $X_{r:n}$:

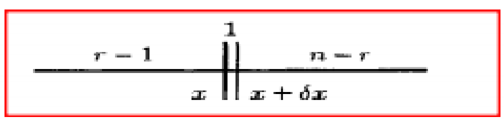
1. La fonction de répartition de $X_{r:n}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
F_{X_{r:n}}(x) &= P(X_{r:n} \leq x) = P(\text{au moins r du } X_i \text{ inférieur ou égale à } x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} F(x)^i (1-F(x))^{n-i}
\end{aligned}$$

2. la densité :

$$\begin{aligned}
f_{X_{r:n}}(x) &= \lim_{dx \to 0} \frac{\boxed{P(x \leq X_{r:n} \leq x+dx)} \leftarrow \circledast}{dx} \\
&= \lim_{dx \to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ r-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-r+1 \\ 1 \end{pmatrix} F(x)^{r-1} P(x \leq X \leq x+dx)(1-F(x))^{n-r}}{dx} \\
&= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} F(x)^{r-1} f(x)(1-F(x))^{n-r}
\end{aligned}$$

$\circledast$ c-à-d :(r-1) X_i inférieur à x ,un X_i entre x et $x+dx$ et le reste X_i strictement supérieur à x



1.3 Distribution jointe de $(X_{i:n}, X_{j:n})$ou plus

Tel que :$1 \leqslant r \prec s \leqslant n$

1. la fonction de répartition :

$$\begin{aligned} F_{X_{r:n},X_{s:n}}(x,y) &= P(\text{au moins r } X_i \leq x, \text{ au moins s } X_i \leq y) \\ &= \sum_{j=s}^{n}\sum_{i=r}^{j} P(\text{exacte } i \ X_i \leq x \text{ ,exacte } j \ X_i \leq y) \\ &= \sum_{j=s}^{n}\sum_{i=r}^{j} \frac{n!}{i!(j-i)!(n-j)!} F(x)^i (F(y)-F(x))^{i-j}(1-F(y))^{n-j} \end{aligned}$$

2. la densité :

$$\begin{aligned} f_{X_{r:n},X_{s:n}}(x,y) &= \lim_{\substack{dx\to 0 \\ dy\to 0}} \frac{P(x \leqslant X_{r:n} \leqslant x+dx, y \leqslant X_{s:n} \leqslant y+dy)}{dxdy} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} F^{r-1}(x) f(x) (F(y)-F(x))^{s-r-1} \\ & f(y)(1-f(y))^{n-s} \end{aligned}$$

Le schéma ullistratif :

La généralisation trop claire :

la loi jointe $(X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, .., X_{r_k:n})$ tel que $(1 \leqslant r_1 \prec ... \prec r_k \leqslant n)$ pour $(x_1, x_2, ..., x_k)$:

$$\begin{aligned} f_{X_{r_1:n},X_{r_2:n},..,X_{r_k:n}}(x_1,x_2,...,x_k) = \frac{n!}{(r_1-1)!(r_2-r_1-1)!...(n-r_k)!} F^{r_1-1}(x_1) f(x_1) \\ (F(x_2)-F(x_1))^{r_2-r_1-1} f(x_2)...(1-F(x_k))^{n-r_k} f(x_k) \end{aligned}$$

la plus générale le resultat dans (1.1).

1.3.1 Distrubition de L'entendue$(X_{1:n} - X_{n:n})$:

Soit $H = X_{1:n} - X_{n:n}$

$$\begin{aligned} E[H] = E[X_{1:n} - X_{n:n}] &= \iint_{\mathbb{R}} (y-x) f_{(X_{1:n}, X_{n:n})}(x,y)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} h \int_{\mathbb{R}} f_{(X_{1:n}, X_{n:n})}(x, h+x)dxdh \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} h \underbrace{\boxed{n(n-1)\int_{\mathbb{R}} (F(h+x) - F(x))^{n-2} f(x) f(h+x)dx}}_{f_{(X_{1:n} - X_{n:n})}} dh \end{aligned}$$

1.4 Propriétés de la Statistique d'ordre

(1). On a $(U_1, U_2, .., U_n)$ suite des v.a uniforme et $(X_1, X_2, .., X_n)$ aussi suite v.a suit la loi $F(x)$ alors :

d'après(1.2.1)

$$F(X_{i:n}) \overset{D}{=} U_{i:n}, i = 1, .., n$$

Si $F(x)$ est inversible alors :

$$F^{-1}(U_{i:n}) \overset{D}{=} X_{i:n}, i = 1, .., n \tag{1.4}$$

(2). Si l'échantillon est symétrique donc :

$$X_{i:n} \overset{D}{=} -X_{n-i+1:n}$$

(3). La Fonction de répartition empirique en terme de statistiques d'ordre :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < v \\ \frac{i}{n} & \text{si } X_{i:n} \leq x < X_{i+1:n}, 1 \leq i \leq n \\ 1 & \text{si } x > X_{n:n} \end{cases}$$

(4). La fonction des quantiles empiriques en terme de statistiques d'ordre :

$$Q_n(x) = \begin{cases} X_{j:n} & \text{si } \frac{j-1}{n} < x < \frac{j}{n} \\ X_{jn:n} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

(5). Soit $(Z_{1:n}, Z_{2:n}, .., Z_{n:n})$ la statistique d'ordre de Loi parente exponentiale on définit :

$$Y_i = (n - i + 1)(Z_{i:n} - Z_{i-1:n}), i = 1, ..., n$$

Tel que les Y_i sont :

(a) indépendante /(b) suite la loi exponentielle /(c) $E[Y_i] = 1$

(6). Les statistique d'ordre ne sont pas indépendante et identiquement distribuée.

1.5 Représentation de Rényi

Construir par Rényi (1953) dit que : soient $(X_{1:n}, X_{2:n}, .., X_{n:n})$ les statistiques d'ordre d'un échantillon exponentiel, alors :

$$\{X_{i:n}\}_{i=1:n} \underset{n\to\infty}{\overset{D}{=}} \left\{ \sum_{k=i}^{n} \frac{E_k}{k} \right\}_{i=1:n}$$

où $E_1, E_1, ..., E_n$ sont des v.a exponectielle indépendantes et identiquenemt distribuée.

Théorème 1.5.1 *Considérons une suite de v.a uniformément distribuée qu'on défi-*

nit :

$$V_1 = \frac{U_{r:n}}{U_{s:n}}, V_2 = U_{s:n} \text{ avec } 1 \leq r < s \leq n$$

sont indépendantes et V_1,V_2 *ont les lois de* $Beta(r, s-r)$ *et* $Beta(s, n-s+1)$ *respectivement.*

Théorème 1.5.2 *Soient* $U_{1:n}, U_{2:n}, .., U_{n:n}$ *la statistique d'ordre correspondante à une suite de v.a uniforme sur* $[0,1]$ *alors :*

$$V_1 = \frac{U_{r_1:n}}{U_{r_2:n}}, V_2 = \frac{U_{r_2:n}}{U_{r_3:n}}, ..., V_{i-1} = \frac{U_{r_{i-1}:n}}{U_{r_i:n}} \text{ et } V_i = U_{r_i:n}$$

avec $1 \leq r_1 < r_2 < ... < r_i \leq n$ *sont indépendantes et suit les lois* $Beta(r_1, r_2 - r_1)$, $Beta(r_2, r_3 - r_2), ...,$ $Beta(r_{i-1}, , r_i -, r_{i-1})$ *et* $Beta(r, s-r)$ *respectivement.*

Théorème 1.5.3 (par Lurie et Hartly (1972)) *La méthode dit que si* $X_1, X_2, ..., X_{n+1}$ *une suite de v.a exponentiel iid alors :*

$$\frac{X_1}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} X_i}, \frac{X_2}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} X_i}, ..., \frac{X_n}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} X_i}$$

ont la même distribution que $U_{1:n}, U_{2:n} - U_{1:n}, .., U_{n:n} - U_{n-1:n}$.

Si on a les observations $V_1, V_2, ..., V_{n+1}$ aussi uniformement distribuées sur $[0,1]$ et poser $X_i = -\log V_i$ alors on peut construire une statistique d'ordre uniforme tel que :

$$U_{1:n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \log V_i}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \log V_i}, i = 1, 2, ..., n$$

Proposition 1.5.1 *Soient* $U_1, U_2, .., U_n$ *suit de v.a uniforme tel que* $U_{1:n} = \min\limits_{1 \leq i \leq n} U_i$ *et* $U_{n:n} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} U_i$ *alors :*

$$nU_{1:n} \underset{n \to \infty}{\overset{P}{\to}} 1$$

$$n(1 - U_{n:n}) \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 1$$

1.6 Fonction (combinaison) Linéaire des Statistiques d'ordres :

La formule générale sous forme :

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i:n} X_{i:n}$$

S'appelle L_Statistique si on utilise un estimateur pour L_n on appelle L_Estimateur par exemple l'entendu $H = X_{1:n} - X_{n:n}$ ou $X_{i:n} - \overline{X}$ excepté si $a_{i:n} = 0$,$\forall i$ sauf l'une c'est difficile d'obtenir sa distribution et des autres exception si F suit la loi $Exp(\theta)$ dans ce cas la combinaison linaire des statique d'ordre un peut facile d'extrait la distribution pour l'exemple voir [8] en plus si $a_{i:n}$ $\perp$ de n ,ainsi, L'étude de le comportement asymptotique du L_n le plus important.

1.6.1 Comportement asymptotique de L_n :

Une collection des formule du L_n sa loi limite possible par example si $a_{i:n} = 0, \forall i$ sauf l'une,d'autre part,loi limite n'est pas toujours exicte par example si L_n composé de statistique d'ordre extreme ou bien centré finit on utilise la distribution joint asymptotique pour obtenir la loi limit de L_n (voir [1] théorème 8.4.2 et 8.5.2 respectivement)la loi limite est gaussien.

Aussi, si $a_{i:n}$ n'annule pas dans la majorité du $1 \leq i \leq n$ on trouve que L_n est asymptotiquement normale , on suppose que $a_{i:n} = J(i/(n+1))/n$ tel que $J(u), 0 <$

$u < 1$ une fonction de poids c-à-d :

$$L_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} J(\frac{i}{n+1})X_{i:n}\ .$$

On obtient la normalité asymptotique sous la conditon sur J une fonction de poids ou bien F suit la loi $Exp(1)$

Preuve. On définit :

$$\mu(J,F) = \int_{-\infty}^{+\infty} xJ(F(x))dF(x)\ .$$

■

et

$$\begin{aligned}\sigma^2(J,F) &= 2\int_{-\infty<x<y<+\infty} J(F(x))J(F(y))\{F(x)(1-F(y))\}dxdy \qquad (1.5)\\ &= 2\int_{-\infty<u_1<u_2<+\infty} J(u_1)J(u_2)u_1(1-u_2)dF^{-1}(u_1)dF^{-1}(u_2)\ .\end{aligned}$$

Preuve.

Théorème 1.6.1 *(Les propriétés asymptotiques de L_n)On assume $E[|X|^3]$ est finis où X représene la population des suite des variable aléatoire suit la loi F,on a la fonction de poids $J(u)$ est borneé et contenue sur chaque point du $F^{-1}(u)$,en plus $\mid J(u) - J(v) \mid < K \mid u - v \mid^{\delta+1/2}$ (Lipschitizienne) nous obtenons les résultats :*

■

$$\text{(i) } Lim\sqrt{n}(E[L_n] - \mu(J,F)) = 0\ .$$

$$\text{(ii) } Lim\ nvar[L_n] = \sigma^2(J,F)\ .$$

$$\text{(ii) } \sqrt{n}(E[L_n] - \mu(J,F)) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2(J,F)) \text{ .}$$

maintenant on applique ce théorème pour trouver la loi limite de L_n.

Exemple 1.6.1 *(la moyenne empirique)*

On pose $J(u) = 1, 0 < u < 1, L_n = \overline{X}, \mu(J,F) = \mu, \sigma^2(J,F) = \sigma^2$, tant que J est cst alors les cds du (théorème 1.5.1) sont vérifiées if $E[|X|^3]$ est finit alors $\overline{X}$ est asymptotiquement normale ce qui nous donne le théorème central limite mais même si le moment d'ordre 3 n'existe pas .

Exemple 1.6.2 *(Différence moyenne de Gini)*

Si X_1 et X_2 iid suivent la loi F, avec $E[|X_1 - X_2|]$ fournit une mesure de dispersion que nous noterons par θ. De toute évidence, un estimateur non biaisé de θ est la différence moyenne de Gini, donnée par :

$$G_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |X_i - X_j|$$

S'expression au sens de statistique d'ordre :

$$G_n = \frac{(n+1)}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} 2(\frac{2i}{n+1} - 1) X_{i:n}$$

En d'autres termes $(n-1)G_n/(n+1)$ est L_Statistique avec la fonction de poids $J(u) = 2(2u-1)$ cette fonction est bornée et contenue donc, si $E[|X|^3] < \infty$ d'après la théorème 1.5.1 on peut conclure que :

$$\sqrt{n}(G_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2(J,F))$$

où $\sigma^2(J,F)$ trouvé par (1.5)

1.6.2 Distribution asymptotique de la moyenne tronquée

Parmi les plus importantes formules du L_n la moyenne tronquée où on exclut les valeurs extrêmes minimale et maximale, si la fonction de poids sous forme $J(u) = (p_2 - p_1)^{-1}$ si $0 \leq p_1 < u < p_2 \leq 1$ sinon $J(u) = 0$ et si $F^{-1}(u)$ est contenue en p_1 et p_2 alors on peut appliquer le théorème (1.6.1).

1.7 Estimateur de Hill

L'estimateur de Hill (construit par Hill 1975) est le meilleur estimateur de l'indice de valeur extrême. De plus, cet estimateur possède une excellente performance s'écrivant en fonction de la statistique d'ordre :

$$\widehat{\gamma}_n = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log X_{n-i+1:n} - \log X_{n-k:n}$$

1.7.1 Comportement asymptotique

La normalité asymptotique de l'estimateur de Hill a prouvé par Davis et Resnick [8] en utilisant les proprétés asymptotique des statistiques d'ordre d'un échantillon issu d'une loi exponentielle et les condition de Von Mises Cs¨orgo et Mason [5] pour exploiter l'approximation des processus empiriques par des ponts browniens. Même chose avec la variation régulière au second ordre de la distribution, De Haan et Resnick ont arrivé à l'objectif la normalité asympotique.

(1) La normalité asymptotique sous quelques conditions de l'estimateur de Hill :

$$\sqrt{k}(\widehat{\gamma}_n - \gamma) \underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow} N(0, \gamma^2)$$

(2)L'intervalle de confiance asympotique :

$$[\widehat{\gamma} - z_{1-\alpha/2}\frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{k}}, \widehat{\gamma} + z_{1-\alpha/2}\frac{\widehat{\gamma}}{\sqrt{k}}]$$

Chapitre 2

Processus de Wiener (Mouvement Brownien)

2.1 Introduction

En 1827, le botaniste Robert Brown découvre ce qu'on appelle actuellement le mouvement brownien du pollen au microscope. Plus précisément, il voit apparaître un phénomène assez étonnant : dans ce pollen, de petites particules bougent sans arrêt dans tous les sens.

À l'agitation thermique : les molécules qui baignent la particule de pollen s'agitent dans tous les sens, et un peu comme si on jouait au billard, la particule de pollen change brusquement de direction à chaque fois qu'elle est heurtée par l'une de ces molécules.Il a fallu attendre les années 20 et Norbert Winner pour avoir la définition d'un objet mathématique correspondant à ce phénomène, mais jusqu'à il y a peu on n'avait pas de preuve rigoureuse du fait que cet objet abstrait correspond bien à ce qu'observent les physiciens.

C'est désormais chose faite, grâce à une collaboration de Thierry Bodineau, Isabelle Gallagher et Laure Saint-Raymond, parue en 2016. Cet article a reçu en décembre dernier le Prix La Recherche, et fait partie des résultats ayant contribué à l'obtention de la médaille d'argent du CNRS d'Isabelle Gallagher en 2016.

Le mouvement brownien occupe aujourd'hui une place centrale en mathématiques et qu'il est lié à la plus part de leurs branches : Les équations d'évolation, L'analyse de Fourier, La théorie du potentiel, La théorie des fonctions d'une variable complexe, La normalité asymptotique d'un estimateur notre objectif.

2.2 Processus de Wiener :

Définition 2.2.1 *Le Processus de Wiener est un processus stochastique.*

$$\{W(t;\omega) = W(t); 0 \leqslant t < \infty\} \;\; \textit{où } \omega \in \Omega, \{\Omega, A, P\}$$

est un espace de probabilité, vérifié que :

(i). $W(t) - W(s) \in N(0, t-s)$ pour $0 \leqslant s < t < \infty$ et $W(0) = 0$.

(ii). Les accroissements sont indépendants, c-à-d :

$$W(t_1) - W(t_1), W(t_4) - W(t_3), ..., W(t_{2i}) - W(t_{2i-1})$$

sont indépendantes où $0 \leqslant t_1 < t_2 < ... < t_{2i} < \infty, i = 2, 3, ...$

(iii). $W(t;\omega)$ contenue en probabilité en t.

Parmi les résultats de (i) et (ii) :

$$cov(W(t), W(s)) = R(s,t) = E[W(t)W(s)] = s \wedge t.$$

Proposition 2.2.1 *(auto-similarité) Soit $B(t)$ un mouvement brownien standard* *alors le processus :*

$$\widetilde{B}(t) = \frac{B(a^2t)}{a}$$

est aussi le mouvement brownien standard pour chaque $a \neq 0$.

Corollaire 2.2.1 *(La Loi des grands nombres)*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = 0, \quad \textit{presque sûrement}$$

2.3 Principe d'invariance de Donsker

Soient $\{X_n, n \geqslant 0\}$ une séquence v.a iid on a la somme partielle définie par :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Interpolation linéaire entre les points d'intégrateur :

$$S(t) = S_{[t]} + (t - [t])(S_{[t]+1} - S_{[t]}) \quad \text{tel que :} S \in C[0, \infty)$$

On définit aussi :

$$S_n^*(t) = \frac{S(nt)}{\sqrt{n}}$$

Théorème 2.3.1 *(Principe d'invariance de Donsker)*

Sur l'espace $C[0,1]$ (l'espace des fonctions contenues) muni $||.||_{\infty}$,la suite $\{S_n^*, n \geqslant 1\}$ converge en loi vers mouvement brownien.

2.4 Pont brownien :

Définition 2.4.1 *Le pont brownien est un processus stochastique* $\{B(t); 0 \leqslant t < 1\}$, *vérifié que :*

(i). La loi jointe de $B(t_1), B(t_2), ..., B(t_n), 0 \leqslant t_1 < t_2 < ... < t_n < 1, n = 1, 2, ...$ est gaussien avec $E[B(t)] = 0$.

(ii). La coveriance de $B(t)$ est :

$$cov(B(s), B(t)) = R(s,t) = E[B(s)B(t)] = s \wedge t - st. \tag{2.1}$$

(iii). $B(t, \omega)$ contenue en probabilité en t.

(ii) implique que :

$$B(0) = B(1) = 0 \qquad \text{p.s.}$$

Lemme 2.4.1 *On a* $\{W(t); 0 \leqslant t < \infty\}$ *est un processus de Wiener, alors :*

$$B(t) = W(t) - tW(1), 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

est un pont brownien.

Preuve. (Voir [4] pages 41-42) ∎

Théorème 2.4.1 *(Transformation de Doob)*

Si $\{B(t); 0 \leqslant t < 1\}$ alors $W(t) = (1+t)B(\frac{t}{1+t})$ pour $t \geqslant 0$ est un processus de Wiener.

Preuve. (Voir [13] page 14). ∎

Chapitre 3

Processus empirique

3.1 Introduction

La théorie des processus empiriques joue un rôle clé dans les statistiques, en fait,ils ont d'innombrables applications avec des problèmes spéciaux. Parmi les caractéristiques les plus importantes de ces mathématiques, il a été recherché depuis le début des statistiques récentes, elles comprennent, entre autres, ce qui suit :Résultats des thèses de *Glyvenko Cantelli* (Glyvenko(1933), Cantelli(1933)), aux théorèmes de Donsker (Donsker(1951)), aux lois du logarithme itéré (Chung(1949), voir Deheuvels(1991) et la bibliographie attanante), ou encore aux lois limites fonctionnelles.

Dans ce chapitre on s'intirèse à quelleque théorème sur les processus empirique pour arrive à la resultats fondamentale c'est que la normalité asymptotique qui n'ont pas réussi à l'atteindre.

3.2 Distribution empirique :

Soient $X_1, X_2, .., X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur (Ω, F, P) une fonction de répartition F telle que :

$$F(x) = P\left\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leqslant x\right\} = P(X \leqslant x), x \in \mathbb{R}.$$

On définit la fonction de répartition empirique ou bien l'estimateur de F s'il est inconnu notée par F_n comme suit :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leqslant x\}}.$$

En plus $\overline{F}$ la fonction de survie (ou la fonction de queue) sous forme :

$$\overline{F}(x) = P\left\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \geqslant x\right\} = 1 - F(x).$$

La formule suivante :

$$\sqrt{n}(F_n(x) - F(x)).$$

appelé le processus empirique qui converge vers $N(0, F(x)(1 - F(x))$.

Théorème 3.2.1 *(Glivenco-Cantelli)*

On suppose que F inversible. Dans ce cas F_n converge uniformément vers F presque sûrement :

$$P(\lim_{n \to +\infty} ||F_n - F|| = 0) = 1.$$

où bien

$$\sup_x |F_n(x) - F(x)| = o(1), \quad n \to \infty.$$

De même pour la fonction de quantile empirique Q_n qui aussi converge uniformément vers Q presque sûrement c-à-d :

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |Q_n(x) - x| = o(1), \quad n \to \infty.$$

3.2.1 Propriétés sur la distribution empirique

- $nF_n(x)$ suit une loi binomiale $B(n, p)$, $p = F(x)$.
- $F_n(x) \overset{\|.\|-}{\underset{p}{\rightarrow}} F(x)$ (converge en norme p).
- $F_n(x) \overset{P-}{\rightarrow} F(x)$ d'après la loi faible des grands nombres.
- $F_n(x) \overset{p.s-}{\rightarrow} F(x)$ d'après la loi forte des grands nombres.
- F_n converge uniformément vers F p.s d'après (3.2.1)

3.3 Processus empirique uniforme

Soient $U_1, U_2, .., U_n$ v.a iid uniforme et G_n la distribution empirique correspondante de suite :

$$G_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{Ui\leqslant x\}}, 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Alors le processus empirique uniforme sous forme :

$$\alpha_n(x) = \sqrt{n}(G_n(x) - x), 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

3.4 Processus des quantiles uniforme

Processus des quantiles uniforme est définie par :

$$u_n(s) = n^{1/2}(s - U_n(s)), 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

tel que U_n est le quantile empirique uniforme c-à-d :

$$U_n(s) = U_{k:n}, \qquad \frac{k-1}{n} < s \leqslant \frac{k}{n}.$$

Théorème 3.4.1 *Soient* $\{U_n, n \geqslant 1\}$ *une suite de v.a uniforme sur l'espace de probabilité* (Ω, A, P) *et* u_n *est le processus des quantiles uniforme, alors il existe une suite de ponts browniens* $\{B_n(t); 0 \leqslant t < 1\}$*,*$n \geqslant 1$ *telle que :*

pour $0 \leqslant \upsilon < 1/2$ et $0 < \lambda < \infty$:

$$\sup_{\lambda/n \leqslant s \leqslant 1-\lambda/n} \frac{n^{\upsilon}|u_n(s) - B_n(s)|}{(s(1-s))^{1/2-\upsilon}} = O_p(1), \quad \text{si } n \to \infty.$$

Preuve. (Voir [6] page 40) ■

Théorème 3.4.2 *Soient* $\{U_n, n \geqslant 1\}$ *une suite de v.a uniforme sur l'espace de probabilité* (Ω, A, P) *et* α_n *est le processus empirique uniforme, alors il existe une suite de ponts browniens* $\{B_n(t); 0 \leqslant t < 1\}$*,*$n \geqslant 1$ *(la même que celle du théorème (3.4.1)) telle que : pour* $0 \leqslant \upsilon < 1/4$:

$$\sup_{U_{1:n} \leqslant s \leqslant U_{n:n}} \frac{n^{\upsilon}|\alpha_n(s) - B_n(s)|}{(s(1-s))^{1/2-\upsilon}} = O_p(1), \quad si\ n \to \infty.$$

Preuve. (Voir [6] p 44). ■

3.5 Processus empirique de queue

Processus empirique de queue (TEP) est un outil important utilisé dans l'estimation non paramétrique des quantités extrêmes comme l'estimateur de Hill de l'index de variation régulière ou diverses mesures de risque.

Soient $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de nombres (pas nécessairement entiers) en savoir que :

$$1 \leqslant k_n < n, \quad k_n/n \to \infty, \quad k_n \to \infty, \text{ (pour } n \to \infty). \tag{3.1}$$

On définit le processus empirique de queue par :

$$w_n(t) = (n/k_n)^{1/2} \alpha_n(tk_n/n), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 \; .$$

3.6 Processus des quantiles de queue

On définit le processus des quantiles de queue comme suit :

$$v_n(t) = (n/k_n)^{1/2} u_n(tk_n/n), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 \; .$$

3.7 Processus des quantiles de queue tronquée

On définit le processus des quantiles de queue tronquée comme suit :

$$\widetilde{v}_n(t) = (n/k_n)^{1/2} \widetilde{u}_n(tk_n/n), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1 \; .$$

tel que :

$$\widetilde{u}_n(s) = \begin{cases} u_n(s) & \text{si } 1/(n+1) \leqslant t \leqslant n/(n+1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 3.7.1 *Soient $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfait (3.1) et soit aussi $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, si $\eta < 1/2$ alors il existe une suite $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ de mouvement brownien vérifié :*

$$\sup_{0 \leqslant t < 1} \frac{|w_n(t) - W_n(t)|}{t^{\eta}} \overset{P}{\to} 0, \quad si\ n \to \infty \; .$$

Théorème 3.7.2 *Soient* $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ *satisfait* (3.1) *et* $0 \leqslant \eta \leqslant 1/2$ *et* F *('tel que* $\lim_{n\to\infty} \frac{F(x)}{|x|f(x)} = \gamma, \gamma > 0$ *) alors il existe une suite* $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de mouvement brownien vérifié :*

$$\sup_{0\leqslant t<1} \frac{|v_n(t) - W_n(t)|}{t^{\eta}} \xrightarrow{P} 0, \quad si\ n \to \infty\ .$$

Théorème 3.7.3 *Soient* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *une suite de v.a suit la loi* F *sa distribution empirique notée* F_n $\sqrt{k_n}A_0(n/k_n)$ *bornée ,* $n \to \infty$ *on définit :*

$$D_n(s) = \sqrt{k_n}(\frac{n}{k_n}\overline{F}(sX_{n-k_n:n-}) - s^{-1/\gamma})\ et\ \Gamma(s;W) = W(s^{-1/\gamma}) - s^{-1/\gamma}W(1)\ .$$

vérifié que pour $0 < \epsilon <$ *:*

$$\sup_{s\geqslant s_0} s^{(1/2-\epsilon)}|D_n(s) - \Gamma(s;W) - s^{-1/\gamma}\frac{s^{\rho/\gamma}-1}{\rho\gamma}\sqrt{k_n}A_0(n/k_n)| \xrightarrow{P} 0\ .$$

3.8 La condition de second-ordre :

Soit $U = Q(\frac{1}{1-F}) = F^{-1}(\frac{1}{1-F})$ à variation régulière pour tout $x > 0$ on a pour une certaine fonction positive a :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx) - U(t)}{a(t)} = \frac{x^{\gamma} - 1}{\gamma}\ .$$

La fonction U (ou la distribution de probabilité qui lui est liée) est dite pour satisfaire la condition de second ordre si pour une certaine fonction positive a et certaine fonction positive ou négative Aavec $\lim_{t\to\infty} A(t) = 0$ équivalente à :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{U(tx)-U(t)}{a(t)} - \frac{x^{\gamma}-1}{\gamma}}{A(t)} =: H(x)\ .$$

$H(x)$ ne doit pas être identique à zéro.

Théorème 3.8.1 *Supposons que F vérifie la condition de second-ordre pour tout $x > 0$ pour toute $A(t)$ positive ou bien négative :*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{x^{-\gamma}U(tx)}{U(t)} - 1}{A(t)} = \frac{x^{\rho} - 1}{\rho} \ .$$

Si $\lim_{t\to\infty} A(t) = 0$ la condition de second-ordre équivalente à :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log U(tx) - \log U(t) - \gamma \log x}{A(t)} = \frac{x^{\rho} - 1}{\rho} \ . \tag{3.2}$$

Chapitre 4

Application

4.1 La normalité asymptotique de la moyenne empirique

Nous allons étudier trois types de moyenne empirique :

4.1.1 La moyenne empirique uniforme

Soient $U_1, U_2, ..., U_n$ une suite de v.a iid uniforme sur $[0,1]$ suit la loi G et associée à une distribution empirique G_n :

(a). la théorème centrale limite implique :

$$\sqrt{n}(\overline{U} - E[U]) \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\to}} N(0, Var[U]) \ .$$

Alors :

$$\sqrt{n}(\overline{U} - \frac{1}{2}) \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\to}} N(0, \frac{1}{12}) \ .$$

(b). En utilisant le processus empirique uniforme :

On a :

$$\mu = E[U] = \int_{\mathbb{R}} x dG(x) = \int_{\mathbb{R}} (1 - G(x))dx, \text{ (l'espérence théorique).}$$

$$\widehat{\mu} = \overline{U} = \int_{\mathbb{R}} x dG_n(x) = \int_{\mathbb{R}} (1 - G_n(x))dx = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \text{ (l'espérence empirique).}$$

en peut écrire :

$$\overline{U} - \int_0^1 (1 - s)ds = -\int_0^1 (G_n(s) - s)ds$$

on obtient :

$$I = \sqrt{n}(\overline{U} - \frac{1}{2}) = -\int_0^1 \underbrace{\sqrt{n}(G_n(s) - s)}_{\alpha_n(s)}$$

On va diviser l'intervalle [0,1] en trois termes :

$$I = \underbrace{-\int_{U_{1:n}}^{U_{n:n}} \alpha_n(s)ds}_{A} \underbrace{-\int_0^{U_{1:n}} \alpha_n(s)ds}_{B} \underbrace{-\int_{U_{n:n}}^{1} \alpha_n(s)ds}_{C}.$$

Pour le terme A, additionner et diminuer $B_n(s)$:

$$A = \underbrace{-\int_{U_{1:n}}^{U_{n:n}} (\alpha_n(s)ds - B_n(s))ds}_{A_1} \underbrace{-\int_{U_{1:n}}^{U_{n:n}} B_n(s)ds}_{A_2}$$

A_1 est négligeable car :

$$A_1 = -\int_{U_{1:n}}^{U_{n:n}} \frac{n^{\upsilon}(\alpha_n(s)ds - B_n(s))}{(s(1-s))^{1/2-\upsilon}} \times (s(1-s))^{1/2-\upsilon} \times n^{-\upsilon} ds$$

$$|A_1| \leqslant n^{-\upsilon} \sup_{U_{1:n} \leqslant s \leqslant U_{n:n}} \frac{n^{\upsilon}|\alpha_n(s) - B_n(s)|}{(s(1-s))^{1/2-\upsilon}} \times \int_{U_{1:n}}^{U_{n:n}} (s(1-s))^{1/2-\upsilon} ds$$

D'après le théorème(3.4.2) alors : soit $0 \leqslant \upsilon < 1/4$:

$$|A_1| \leqslant n^{-\upsilon} \sup_{U_{1:n}\leqslant s\leqslant U_{n:n}} \frac{n^{\upsilon}|\alpha_n(s) - B_n(s)|}{(s(1-s))^{1/2-\upsilon}} \times \int_0^1 (s(1-s))^{1/2-\upsilon} ds$$
$$\leqslant O_p(1) \times n^{-\upsilon} = o_p(1)$$

Donc :

$$A_1 \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0 \ .$$

Alors :

$$A = A_2 + o_p(1) \ .$$

Pour les termes B et C aussi sont négligeables, en effet :

$$B = \sqrt{n} \int_0^{U_{1:n}} -(G_n(s) - s)ds = \sqrt{n} \int_0^{U_{1:n}} sds = \sqrt{n}\frac{(U_{1:n})^2}{2} = \frac{1}{2n^{3/2}}(nU_{1:n})^2$$

D'après la proposition (1.5.1) :

$$B = \frac{1}{2n^{3/2}}(1 + o_p(1))^2 = o_p(n^{-3/2})$$

Alors :

$$B \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0 \ .$$

De même :

$$C = -\sqrt{n} \int_{U_{n:n}}^1 (G_n(s) - s)ds = -\sqrt{n} \int_{U_{n:n}}^1 (1-s)ds = -\sqrt{n}(\frac{1}{2} - U_{n:n} + \frac{(U_{n:n})^2}{2})$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{n}(1 - U_{n:n})^2 = \frac{1}{2n^{3/2}}(n(1 - U_{n:n}))^2 = \frac{1}{2n^{3/2}}(1 + o_p(1))^2 = o_p(n^{-3/2})$$

$$B \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0 \ .$$

Alors on conclut que :

$$I = A_2 + o_p(1) = -\int_{U_{1:n}}^{U_{n:n}} B_n(s)ds + o_p(1) \approx -\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} B_n(s)ds + o_p(1)$$
$$\underset{n\to\infty}{\approx} \int_0^1 B_n(s)ds + o_p(1) \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\to}} N(0,\sigma^2)$$

Où :

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = Var[I] &= Var[\int_0^1 B_n(s)ds] = E[(\int_0^1 B_n(s)ds)^2] - (E[\int_0^1 B_n(s)ds])^2 \\
&= E[(\int_0^1 B_n(s)ds)^2] = E[\int_0^1 \int_0^1 B_n(s)B_n(t)dtds] \\
&= \int_0^1 \int_0^1 E[B_n(s)B_n(t)]dtds = \int_0^1 \int_0^1 cov(B_n(s),B_n(t))dtds \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (s \wedge t - st)dtds, \text{ d'après (2.1)} \\
&= \int_0^1 [\int_0^s (s \wedge t - st)dt + \int_s^1 (s \wedge t - st)dt]ds \\
&= \int_0^1 [\int_0^s (t - st)dt + \int_s^1 (s - st)dt]ds \\
&= \frac{1}{12} .
\end{aligned}$$

Donc on peut construire l'intervalle de confiance comme suit :

$$[\overline{U} - \frac{1}{\sqrt{12}} z_{1-\alpha/2}, \overline{U} + \frac{1}{\sqrt{12}} z_{1-\alpha/2}] .$$

Avec $z_{1-\alpha/2}$ représente le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale centré réduite $(N(0,1))$.

4.1.2 La moyenne empirique exponentielle :

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite des v.a iid suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ noté F sa distribution et $U_1, U_2, ..., U_n$ aussi une suite des v.a iid uniformement distribués sur $[0, 1]$:

(a). Le résultat du théorème centrale limite :

$$\sqrt{n}(\overline{X} - 1) \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\to}} N(0,1) \ .$$

(b). En utilisant le processus empirique des quantiles :

Définie que :

$$\{X_i\}_{i=1:n} \overset{D}{=} \left\{F^{-1}(U_i)\right\}_{i=1:n} \ . \tag{4.1}$$

En écrivant :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F^{-1}(U_i)$$

Où la fonction inverse $F^{-1}(x) = -\log(1-x)$ alors :

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} -\log(1-U_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} -\log(1-U_{i:n}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} -\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \log(1-U_n(s))ds = -\int_0^1 \log(1-U_n(s))ds\end{aligned}$$

Donc :

$$\sqrt{n}(\overline{X} + \int_0^1 \log(1-s)ds) = -\sqrt{n}\int_0^1 (\log(1-U_n(s)) - \log(1-s))ds$$

$$= -\sqrt{n} \int_{1/n}^{1-1/n} (\log(1-U_n(s)) - \log(1-s))ds +$$

$$\sqrt{n} \int_{0}^{1/n} (\log(1-U_n(s)) - \log(1-s))ds + \tag{4.2}$$

$$\sqrt{n} \int_{1-1/n}^{1} (\log(1-U_n(s)) - \log(1-s))ds \tag{4.3}$$

Tel que (4.2) et (4.3) sont des termes négligéables car :

$$(4.2) = \sqrt{n} \int_{0}^{1/n} (\log(1-U_{1:n}) - \log(1-s))ds = \frac{\log(1-U_{1:n})}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}(1-\frac{1}{n}) \log(1-\frac{1}{n}) - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Par la développement limite :

$$= \frac{U_{1:n} + \log(1-\frac{1}{n})}{\log(1-\frac{1}{n}) - \log(1-\frac{1}{ne})} \frac{\log(1-\frac{1}{n}) - \log(1-\frac{1}{ne})}{\sqrt{n}} - \frac{\log(1-\frac{1}{n})}{\sqrt{n}} - (1-\frac{1}{n})\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

D'après (1.3), et que la loi exponentielle appartienne au domaine d'attraction de Gumbel alors :

$$= O_P(1) \times \frac{\log(1-\frac{1}{n}) - \log(1-\frac{1}{ne})}{\sqrt{n}} - \frac{\log(1-\frac{1}{n})}{\sqrt{n}} - (1-\frac{1}{n})\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

$$(4.3) = \sqrt{n} \int_{1-1/n}^{1} (\log(1-U_{n:n}) - \log(1-s))ds = \frac{\log(1-U_{n:n})}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \log(\frac{1}{n}) + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Par la Développement limité :

$$= \frac{U_{n:n}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \log(\frac{1}{n}) + \frac{1}{\sqrt{n}} = (\frac{U_{n:n}-1}{\log(n)}) \times \frac{\log(n)}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \log(\frac{1}{n}) + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

D'après (1.2) :

$$= O_P(1) \times \frac{\log(n)}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\log(\frac{1}{n}) + \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

En utilusant le théorème des accroissement finie, alors :

$$\sqrt{n}(\overline{X} - 1) = \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \underbrace{(s - U_n(s))}_{u_n(s)} \times \frac{1}{\xi_n(s)} ds$$

Où :

$$\min(1 - U_n(s), 1 - s) \leqslant \xi(s) \leqslant \max(1 - U_n(s), 1 - s) \tag{4.4}$$

En multipliant et divisant J par $1 - s$ on obtient :

$$J = \sqrt{n}(\overline{X} - 1) = \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} u_n(s) \times \frac{1}{\xi_n(s)} ds = \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} (\frac{1-s}{\xi_n(s)}) \times \frac{1}{1-s} u_n(s) ds$$

$$= \underbrace{\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} (\frac{1-s}{\xi_n(s)} - 1) \times \frac{1}{1-s} u_n(s) ds}_{R_n} + \underbrace{\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{u_n(s)}{1-s} ds}_{T_n}$$

on écrit :

$$T_n = \int_{1/n}^{1-1/n} \frac{1}{1-s}(u_n(s) - B_n(s) + B_n(s)) ds \tag{4.5}$$

$$= \underbrace{\int_{1/n}^{1-1/n} \frac{1}{1-s}(u_n(s) - B_n(s)) ds}_{T_n'} + \underbrace{\int_{1/n}^{1-1/n} \frac{B_n(s)}{1-s} ds}_{T_n''} \tag{4.6}$$

D'après le théorème (3.4.1) : soit $0 \leqslant \upsilon < 1/2$:

$$|T'_n| \leqslant \int_{1/n}^{1-1/n} \frac{1}{1-s} \frac{n^{\upsilon}|u_n(s)-B_n(s)|}{(s(1-s))^{1/2-\upsilon}} \times n^{-\upsilon}(s(1-s))^{1/2-\upsilon} ds \tag{4.7}$$

$$\leqslant n^{-\upsilon} \sup_{\lambda/n \leqslant s \leqslant 1-\lambda/n} \frac{n^{\upsilon}|u_n(s)-B_n(s)|}{(s(1-s))^{1/2-\upsilon}} \times \underbrace{\int_{1/n}^{1-1/n} \frac{1}{(1-s)^{1/2+\upsilon}} ds}_{M_n}$$

Où $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc :

$$|T'_n| \leqslant n^{-\upsilon} \times O_P(1) \times M_n \underset{n\to+\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} 0 \; .$$

Maintenant $T_n^{"}$:

$$T_n^{"} = \int_0^1 \frac{B_n(s)}{1-s} ds - \overbrace{\int_0^{1/n} \frac{B_n(s)}{1-s} ds}^{T_{n_1}} - \overbrace{\int_{1-1/n}^{1} \frac{B_n(s)}{1-s} ds}^{T_{n_2}}$$

Les deux derniers termes de $T_n^{"}$ sont négligeables car :

$$E|T_{n_1}| \leqslant \int_0^{1/n} \frac{E|B_n(s)|}{1-s} ds \leqslant \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{s(1-s)}}{1-s} ds \leqslant \int_0^{1/n} \frac{1}{\sqrt{1-s}} ds \tag{4.8}$$

$$\leqslant [-2\sqrt{1-s}]_0^{1/n} = -2(\sqrt{1-1/n}-1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

alors :

$$T_{n_1} \underset{n\to+\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} 0 \; .$$

et :

$$E|T_{n_2}| \leqslant \int\limits_{1-1/n}^{1} \frac{E|B_n(s)|}{1-s} ds \leqslant \int\limits_{1-1/n}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-s}} ds = [-2\sqrt{1-s}]_{1-1/n}^{1} \tag{4.9}$$
$$\leqslant 2\sqrt{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

alors :

$$T_{n_2} \overset{P}{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} 0 \ .$$

Maintenant $R_n(s)$:

$$R_n = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} (\frac{1-s}{\xi_n(s)} - 1) \times \frac{1}{1-s} u_n(s) ds$$

Si on fait un changement de variable $1-s=t$ sur $R_n(s)'$ on obtient sur :

$$R_n = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} (\frac{t}{\xi_n(1-t)} - 1) \times \frac{1}{t} u_n(1-t) ds$$

avec $\min(U_n(t),t) \leqslant \xi_n(1-t) \leqslant \max(U_n(t),t)$.

$$|R_n| \leqslant \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} |\frac{t}{\xi_n(1-t)} - 1| \times \frac{1}{t} u_n(1-t) dt \leqslant \sup_{1/n \leqslant 1-t \leqslant 1-} |\frac{t}{\xi_n(1-t)} - 1| \int\limits_{0}^{1-1/n} \frac{1}{t} u_n(1-t) dt \tag{4.10}$$

D'après la preuve de lemme 03 on [14] :

$$|R_n| \leqslant o_P(1) \times \underbrace{O_P(1)}_{N_n} \tag{4.11}$$

N_n est une conséquence de ce qui précède dans T_n Alors

$$R_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0 \ .$$

Finalement :

$$J = \int_0^1 \frac{B_n(s)}{1-s} ds + o_P(1) \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\to}} N(0, \sigma^2) \ .$$

Où :

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = Var[J] = Var[\int_0^1 \frac{B_n(s)}{1-s} ds] &= E[\int_0^1 \frac{B_n(s)}{1-s} ds]^2 \\
= \int_0^1 \int_0^1 \frac{cov(B_n(s), B_n(t)}{(1-s)(1-t)} dsdt &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{(s \wedge t - st)}{(1-s)(1-t)} dsdt \\
= \int_0^1 [\int_0^s \frac{t}{(1-t)} dt + \int_s^1 \frac{s}{(1-s)} dt] ds &= -\int_0^1 \log(1-s) ds = 1 \ .
\end{aligned}$$

4.1.3 La moyenne empirique de la loi de Pareto

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ une suite des v.a iid suit la loi de pareto de paramètre $1/\gamma > 2$ sinon espérence et la variance n'existe pas , $x > 1$ noté F sa distribution et $U_1, U_2, ..., U_n$ une suite des v.a iid uniformement distribués sur $[0, 1]$:

(a). En utilisant la théorème centrale limite :

$$\sqrt{n}(\overline{X} - \frac{1}{\gamma - 1}) \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\to}} N(0, \frac{\gamma^2}{(1-2\gamma)(1-\gamma)^2}) \ .$$

(b). La deuxième méthode en utilisant le processus des quantile empirique :

D'après(4.1) en écrit :

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F^{-1}(U_i)$$

Où $F^{-1}(x) = (1-x)^{-\gamma}$, alors :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-U_i)^{-\gamma} = \sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}}(1-U_n(s))^{-\gamma} = \int_0^1(1-U_n(s))^{-\gamma}(ds$$

$$\sqrt{n}(\overline{X} - \int_0^1(1-s)^{-\gamma}ds) = \sqrt{n}\int_0^1(1-U_n(s))^{-\gamma} - (1-s)^{-\gamma}ds$$

De même technique on divise en trois termes deux négligeables puisque la loi de Pareto appartient au domaine d'attraction de Fréchet et basée sur (1.2) et (1.3), il reste que :

$$\sqrt{n}(\overline{X} - \int_0^1(1-s)^{-\gamma}ds) = \sqrt{n}\int_{1/n}^{1-1/n}(1-U_n(s))^{-\gamma} - (1-s)^{-\gamma}ds$$

Par la théorème des accroissemnt finie :

$$K = \sqrt{n}(\overline{X} - \frac{1}{\gamma-1}) = -\gamma\sqrt{n}\int_{1/n}^{1-1/n}\underbrace{\sqrt{n}(s-U_n(s))}_{u_n(s)} \times \frac{1}{(\xi_n(s))^{\gamma+1}}ds$$

$\xi_n(s)$ vérifie la même condition (4.4).

$$\begin{aligned} K &= -\gamma\int_{1/n}^{1-1/n}\frac{u_n(s)}{(\xi(s))^{\gamma+1}}ds = -\gamma\int_{1/n}^{1-1/n}(\frac{s}{\xi(s)})^{\gamma+1} \times \frac{u_n(s)}{s^{\gamma+1}}ds \\ &= \underbrace{-\gamma\int_{1/n}^{1-1/n}[(\frac{s}{\xi(s)})^{\gamma+1} - 1] \times \frac{u_n(s)}{s^{\gamma+1}}ds}_{R_n^{(1)}} + \underbrace{-\gamma\int_{1/n}^{1-1/n}\frac{u_n(s)}{s^{\gamma+1}}ds}_{T_n^{(1)}} \end{aligned}$$

Concernant $R_n^{(1)}$ on applique le théorème des accroissements finis :

$$R_n^{(1)} = -\gamma\,(\gamma+1)\int_{1/n}^{1-1/n} (\frac{s}{\xi_n(s)}-1)(\xi_n^{'}(s))^{\gamma} \times \frac{u_n(s)}{s^{\gamma+1}}ds$$

Basé sur lemme 03 dans [13] et de même que (4.10) et (4.11) on trouve que :

$$R_n^{(1)} \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} 0 \text{ ou bien } R_n^{(1)} = o_P(1)\ .$$

De même dans (4.8) et (4.9) on arrive :

$$K = -\gamma\int_0^1 \frac{B_n(s)}{s^{\gamma+1}}ds + o_P(1) \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\to}} N(0,\sigma^2)\ .$$

Où :

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = Var[K] = \gamma^2 Var[\int_0^1 \frac{B_n(s)}{s^{\gamma+1}}ds] = E[(\int_0^1 \frac{B_n(s)}{s^{\gamma+1}}ds)^2] = \gamma^2\int_0^1\int_0^1 \frac{cov(B_n(s),B_n(t))}{s^{\gamma+1}t^{\gamma+1}}dtds \\
= \gamma^2\int_0^1\int_0^1 \frac{(s\wedge t - st)}{s^{\gamma+1}t^{\gamma+1}}dtds = \gamma^2\int_0^1 \frac{1}{s^{\gamma+1}}[\int_0^s \frac{t-st}{t^{\gamma+1}}dt + \int_s^1 \frac{s-st}{t^{\gamma+1}}dt]ds \\
= \gamma^2\int_0^1 \frac{1}{s^{\gamma+1}}[(1-s)\int_0^s \frac{1}{t^{\gamma}}dt + s\int_s^1 \frac{1-t}{t^{\gamma+1}}dt]ds \\
= \gamma^2\int_0^1 \frac{1}{s^{\gamma+1}}[\frac{(1-s)s^{-\gamma+1}}{1-\gamma} + \frac{s}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{s^{-\gamma+1}}{\gamma} + \frac{s^{-\gamma+2}}{1-\gamma}]ds \\
= \gamma^2[\frac{1}{1-\gamma}\int_0^1 (\frac{1}{s^{2\gamma}} - \frac{1}{s^{2\gamma-1}})ds - \frac{1}{\gamma(1-\gamma)}\int_0^1 \frac{1}{s^{\gamma}}ds + \frac{1}{\gamma}\int_0^1 \frac{1}{s^{2\gamma}}ds + \frac{1}{1-\gamma}\int_0^1 \frac{1}{s^{2\gamma-1}}ds \\
= \gamma^2[\frac{1}{1-\gamma}(\frac{1}{1-2\gamma} - \frac{1}{2-2\gamma}) - \frac{1}{\gamma(1-\gamma)}\frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{\gamma}\frac{1}{1-2\gamma} + \frac{1}{1-\gamma}\frac{1}{2-2\gamma} \\
= \gamma^2[\frac{-2\gamma^2+6\gamma-2}{2\gamma(1-\gamma)^2 1-2\gamma} + \frac{1}{\gamma(1-2\gamma)}]\ .
\end{aligned}$$

par des simplification on trouve la même résultats du la théorème centrale limite :

$$\sigma^2 = \frac{\gamma^2}{(1-2\gamma)(1-\gamma)^2}$$

4.2 La normalité asymptotique du L-statistique

L-statistique sous forme :

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} a_{i:n} X_{i:n} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} J(s)Q_n(s)ds = \int_0^1 J(s)Q_n(s)ds$$

En écrit :

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{n}(L_n - \int_0^1 J(s)Q(s)ds) = -\int_0^1 J(s)\underbrace{\sqrt{n}(Q(s)-Q_n(s))}_{u_n(Q(s))}ds \\ &= -\int_0^1 J(s)u_n(Q(s)) - J(s)B_n(Q(s))ds - \int_0^1 J(s)B_n(Q(s))ds \\ &= \underbrace{-\int_0^1 J(s)(u_n(Q(s)) - B_n(Q(s)))ds}_{\boxed{1}} \underbrace{- \int_0^1 J(s)B_n(Q(s))ds}_{\boxed{2}} \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes étapes comme d'habitude sur $\boxed{1}$ commençant par diviser l'intervalle et basées sur le théorème (3.4.1) on arrive à :

$$\boxed{1} \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} 0 \ .$$

Il reste que :

$$V = -\int_0^1 J(s)B_n(Q(s))ds \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\longrightarrow}} N(0,\sigma^2) \ .$$

Où :

$$\sigma^2 = Var[V] = Var[\int_0^1 J(s)B_n(Q(s))ds] = E[(\int_0^1 J(s)B_n(Q(s))ds)^2]$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 J(s)J(t)(\min(Q(s), Q(t)) - Q(s)Q(t))dsdt \ .$$

4.3 La normalité asymptotique du l'estimateur de l'indice des valeurs extrême :

Si $(X_1, ..., X_n)$ suit la loi de Fréchet :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ exp(-x^{-\frac{1}{\gamma}}) & x \geqslant 0, \gamma > 0 \end{cases}$$

et sa densité correspondante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ \frac{1}{\gamma}x^{-\frac{1}{\gamma}-1}\exp(-x^{-\frac{1}{\gamma}}) & x \geqslant 0, \gamma > 0 \end{cases}$$

4.3.1 L'estimation paramétrique

Dans l'estimation paramétrique il y a plusieurs façons pour construire un estimateur pour l'indice des valeurs extrêmes, parmi elles le maximum de vraisemblance.

La formule de vraisemblance associée à l'échantillon suivant la loi de Fréchet est :

$$L(x_1, x_2, ..., x_n/\gamma) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = [\frac{1}{\gamma}]^n(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{-\frac{1}{\gamma}-1}\exp(-\sum_{i=1}^{n} x^{-\frac{1}{\gamma}}) \ .$$

alors :

$$\log(L(x_1, x_2, ..., x_n/\gamma)) = -n\log(\gamma) - (\frac{1}{\gamma}+1)\sum_{i=1}^{n}\log(x_i) - \sum_{i=1}^{n}x_i^{-\frac{1}{\gamma}} \ .$$

donc :

$$\frac{\delta(\log(L(x_1, x_2, ..., x_n/\widehat{\gamma})))}{\delta\widehat{\gamma}} = 0 \ .$$

Équivalent :

$$\frac{-n}{\widehat{\gamma}}+\frac{1}{\widehat{\gamma}^2}\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)+\frac{1}{\widehat{\gamma}}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-\frac{1}{\widehat{\gamma}}-1} = \underbrace{\frac{-1}{\widehat{\gamma}}+\frac{1}{\widehat{\gamma}^2}\int_0^1\log(Q_n(s))ds+\frac{1}{\widehat{\gamma}}\int_0^1 Q_n(s)^{-\frac{1}{\widehat{\gamma}}-1}ds}_{L(\widehat{\gamma},Q_n)} = 0$$

La solution de cette equation construire par des méthode numérique ou bien en utilisant les packages dans la langague R.Mais en peut démontré la normalité asymptotique même dans absence d'une formule explicite pour l'estimateur de l'indice de valeur extrême $\widehat{\gamma}$ comme suit : Parmi les formule explicite de l'estimateur de l'indice de valeur extrême $\widehat{\gamma}$ l'estimateur de Hill :

$$L(\widehat{\gamma}, Q_n) = 0 \Longrightarrow L(\gamma, Q) = 0 \ .$$

Donc :

$$L(\widehat{\gamma}, Q_n) - L(\gamma, Q_n) + L(\gamma, Q_n) - L(\gamma, Q) = 0 \ .$$

alors :

$$L(\widehat{\gamma}, Q_n) - L(\gamma, Q_n) = L(\gamma, Q) - L(\gamma, Q_n) \ .$$

En utilisant le développement de Taylor au voisinage de γ pour la $1^{ère}$terme :

$$(\widehat{\gamma}-\gamma)L'(\gamma, Q_n) = \frac{1}{\gamma^2}\int_0^1\log(Q(s))-\log(Q_n(s))ds+\frac{1}{\gamma}\int_0^1 Q(s)^{-\frac{1}{\gamma}-1}-Q_n(s)^{-\frac{1}{\gamma}-1}ds$$

avec :

$$L^{'}(\gamma, Q_n) = \frac{1}{\gamma^2}\int_0^1 1 - Q_n(s)^{-\frac{1}{\gamma}-1}ds + \frac{1}{\gamma^3}\int_0^1 \log(Q_n(s))(Q_n(s)^{-\frac{1}{\gamma}-1} - 2)ds$$

D'après la Loi faible des grands nombres :

$$\int_0^1 Q_n(s)ds \xrightarrow{P} E[X] \Longrightarrow \int_0^1 f(Q_n(s))ds \xrightarrow{P} E[f(X)]$$

Alors :

$$L^{'}(\gamma, Q_n) \xrightarrow{P} \frac{1}{\gamma^2}m_1 + \frac{1}{\gamma^3}m_2$$

Avec :

$$\begin{aligned} m_1 = E[f(X)] &= \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty (1 - x^{-\frac{1}{\gamma}-1})x^{-\frac{1}{\gamma}-1}e^{-x^{-\frac{1}{\gamma}}} \text{ , } f(x) = 1 - x^{-\frac{1}{\gamma}-1} \\ &= -\int_0^\infty e^{-y}dy + \int_0^\infty y^{\gamma+1}e^{-y}dy = -1 + \Gamma(\gamma+2) \end{aligned}$$

Et :

$$m_2 = E[g(X)] = \frac{1}{\gamma}\int_0^\infty \log x(x^{-\frac{1}{\gamma}-1} - 2)x^{-\frac{1}{\gamma}-1}e^{-x^{-\frac{1}{\gamma}}} \text{ , } g(x) = \log x(x^{-\frac{1}{\gamma}-1} - 2)x^{-\frac{1}{\gamma}-1}$$

Par divisé et trouve des terme néglegable et Basé sur la théorème des accroissement finie :

$$\begin{aligned} P = \sqrt{n}(\widehat{\gamma} - \gamma)L^{'}(\gamma, Q_n) &= \frac{1}{\gamma^2}\int_{1/n}^{1-1/n} \sqrt{n}(Q(s) - Q_n(s))\frac{1}{\xi_n(s)}ds \\ &- \frac{1+\gamma}{\gamma^2}\int_{1/n}^{1-1/n} \sqrt{n}(Q(s) - Q_n(s))\frac{1}{\xi_n(s)^{\frac{1}{\gamma}+2}}ds \\ &= \underbrace{\frac{1}{\gamma^2}\int_{1/n}^{1-1/n} u_n(Q(s))\frac{1}{\xi_n(s)}ds}_{\boxed{1}} \underbrace{- \frac{1+\gamma}{\gamma^2}\int_{1/n}^{1-1/n} u_n(Q(s))\frac{1}{\xi_n(s)^{\frac{1}{\gamma}+2}}ds}_{\boxed{2}} \end{aligned}$$

Où : $\min(Q_n(s), Q(s)) \leqslant \zeta_n(s) \leqslant \max(Q_n(s), Q(s))$

De se qui présède on trouve des partie néglegable dans :

$$\boxed{1} = \frac{1}{\gamma^2}\int_{1/n}^{1-1/n} \frac{u_n(Q(s)) - B_n(Q(s))}{1-Q(s)} + \frac{1}{\gamma^2}\int_{1/n}^{1-1/n} \frac{B_n(Q(s))}{1-Q(s)} ds +$$
$$\frac{1}{\gamma^2}\int_{1/n}^{1-1/n} \frac{u_n(Q(s))}{1-Q(s)}[\frac{1-Q(s)}{\xi_n(s)} - 1]ds$$

Et :

$$\boxed{2} = -\frac{1+\gamma}{\gamma^2}\int_{1/n}^{1-1/n} \frac{u_n(Q(s)) - B_n(Q(s))}{Q(s)^{\frac{1}{\gamma}+2}} ds - \frac{1+\gamma}{\gamma^2}\int_{1/n}^{1-1/n} \frac{B_n(Q(s))}{Q(s)^{\frac{1}{\gamma}+2}} ds -$$
$$\int_{1/n}^{1-1/n} \frac{u_n(Q(s))}{Q(s)^{\frac{1}{\gamma}+2}}[\frac{Q(s)}{\xi_n(s)^{\frac{1}{\gamma}+2}} - 1]ds$$

Alors il reste que :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\gamma^2}\int_{1/n}^{1-1/n} \frac{B_n(Q(s))}{1-Q(s)} ds - \frac{1+\gamma}{\gamma^2}\int_{1/n}^{1-1/n} \frac{B_n(Q(s))}{Q(s)^{\frac{1}{\gamma}+2}} ds \\ &\approx \frac{1}{\gamma^2}\int_{0}^{1} \frac{B_n(Q(s))}{1-Q(s)} ds - \frac{1+\gamma}{\gamma^2}\int_{0}^{1} \frac{B_n(Q(s))}{Q(s)^{\frac{1}{\gamma}+2}} ds \underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow} N(0,\sigma^2) \end{aligned}$$

Où :

$$\begin{aligned} \sigma^2 = Var[P] &= \frac{1}{\gamma^4}\int_0^1\int_0^1 \frac{\min(Q(s),Q(t)) - Q(s)Q(t))}{1-Q(s)} dtds \\ &+ \frac{(1+\gamma)^2}{\gamma^4}\int_0^1\int_0^1 \frac{\min(Q(s),Q(t)) - Q(s)Q(t))}{Q(s)^{\frac{1}{\gamma}+2}} dtds \end{aligned}$$

4.3.2 L'estimation semi-paramétrique :

Parmi les formules explicites de l'estimateur de l'indice de valeur extrême $\widehat{\gamma}$ l'estimateur de Hill, et parce que la loi de Frechet vérifiée :

$$\frac{1-F(xt)}{1-F(t)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} x^{-1/\gamma} .$$

C-à-d que $\overline{F} = 1 - F$ à variation régulière dans ce cas on peut estimer l'indice de valeur extrême $\widehat{\gamma}$ par Hill $\widehat{\gamma_{Hill}}$ de la forme :

(a). En fonction de processus des quantile empirique :

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma_{Hill}} &= \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} \log X_{n-i+1:n} - \log X_{n-k_n:n} \\
&= \frac{n}{k_n}\int_0^{k_n/n} \log(Q_n(1-s))ds - \frac{n}{k_n}\int_0^{k_n/n} \log(Q_n(1-\frac{k_n}{n}))ds \\
&= \frac{n}{k_n}\int_0^{k_n/n} \log(Q_n(1-s)) - \log(Q_n(1-\frac{k_n}{n}))ds
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma_{Hill}} - \gamma = & \frac{n}{k_n}\int_0^{k_n/n} \log(Q_n(1-s)) - \log(Q_n(1-\frac{k_n}{n}))ds \\
& - \frac{n}{k_n}\int_0^{k_n/n} \log(Q(1-s)) - \log(Q(1-\frac{k_n}{n}))ds + \\
& \frac{n}{k_n}\int_0^{k_n/n} \log(Q(1-s)) - \log(Q(1-\frac{k_n}{n}))ds - \gamma
\end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis implique que :

$$N=\sqrt{k_n}(\widehat{\gamma_{Hill}}-\gamma)=-\frac{n}{k_n}\int_0^{k_n/n}\sqrt{k_n}(Q(1-s)-Q_n(1-s))\frac{1}{\zeta_n(s)}ds+$$
$$\frac{n}{k_n}\int_0^{k_n/n}\sqrt{k_n}(Q(1-\frac{k_n}{n})-Q_n(1-\frac{k_n}{n}))\frac{1}{\zeta_n'(s)}ds+$$
$$\frac{n}{k_n}\int_0^{k_n/n}\log(Q(1-s))-\log(Q(1-\frac{k_n}{n}))ds-\gamma$$

Tel que :

$$\min(Q(1-s),Q_n(1-s))\leqslant\zeta_n(s)\leqslant\max(Q(1-s),Q_n(1-s))$$
$$\min(Q(1-\frac{k_n}{n}),Q_n(1-\frac{k_n}{n}))\leqslant\zeta_n^{'}(s)\leqslant\max(Q(1-\frac{k_n}{n}),Q_n(1-\frac{k_n}{n}))$$

Puis en écrire :

$$\begin{aligned}N=&-\frac{n}{k_n}\int_0^{k_n/n}\frac{u_n(Q(1-s))}{\zeta_n(s)}ds+\frac{n}{k_n}\int_0^{k_n/n}\frac{u_n(Q(1-\frac{k_n}{n}))}{\zeta_n'(s)}ds+\\&\frac{\sqrt{k_n}n}{k_n}\int_0^{k_n/n}\log(Q(1-s))-\log(Q(1-\frac{k_n}{n}))ds-\gamma\\&\approx-\frac{n}{k_n}\int_0^{1}\frac{u_n(Q(1-s))}{\zeta_n(s)}ds+\frac{n}{k_n}\int_0^{k_n/n}\frac{u_n(Q(1-\frac{k_n}{n}))}{\zeta_n'(s)}ds+\\&\underbrace{\frac{\sqrt{k_n}n}{k_n}\int_0^{1}\log(Q(1-s))-\log(Q(1-\frac{k_n}{n}))ds-\gamma}_{H}\end{aligned}$$

D'après la condition du second-order et (3.2) détailler dans [9]avec $\lim_{n\to\infty}A(\frac{n}{k_n})=0$ et $\lim_{n\to\infty}\sqrt{k_n}A(\frac{n}{k_n})=\lambda$ (finie) :

$$\lim_{n\to\infty}H=\frac{\lambda}{1-\rho}$$

Suivant les étapes comme d'habitude et plus détaillées dans [5] on arrive à la formule finale :

$$N = -\gamma\sqrt{\frac{n}{k_n}}\int_0^1 \frac{1}{s}B_n(1-s\frac{k_n}{n})ds+\gamma\sqrt{\frac{n}{k_n}}B_n(1-\frac{k_n}{n})+\frac{\lambda}{1-\rho}+o_P(1) \underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow} N(\frac{\lambda}{1-\rho},\sigma^2)$$

Où :

$$\begin{aligned}\sigma^2 = Var[N] &= \gamma^2\frac{n}{k_n}\int_0^1\int_0^1 \frac{cov(B_n(1-s\frac{k_n}{n}),B_n(1-t\frac{k_n}{n}))}{st}dtds + \gamma^2\frac{n}{k_n}Var[\sqrt{\frac{n}{k_n}}B_n(1-\frac{k_n}{n})]\\ &- 2\gamma^2\frac{n}{k_n}\int_0^1 \frac{cov(B_n(1-s\frac{k_n}{n}),B_n(1-\frac{k_n}{n}))}{s}ds\end{aligned}$$

Par une changement de variable :$B_n(1-s\frac{k_n}{n}) = x, B_n(1-t\frac{k_n}{n}) = y$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \gamma^2\frac{n}{k_n}\int_{1-\frac{k_n}{n}}^1\int_{1-\frac{k_n}{n}}^1 \frac{cov(B_n(x),B_n(y))}{(1-y)(1-x)}dxdy + \gamma^2(1-\frac{k_n}{n}) - 2\gamma^2(1-\frac{k_n}{n})\\ &= (-\frac{k_n}{n}+2)\gamma^2 + \gamma^2(1-\frac{k_n}{n}) - 2\gamma^2(1-\frac{k_n}{n})\\ &= \gamma^2 .\end{aligned}$$

(b). En fonction du processus de queue :

La deuxième méthode pour démontrer la normalité asympotique de l'estimateur de Hill basé sur le processus de queue par suite :

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma_{Hill}} &= \frac{1}{k_n}\sum_{i=0}^{k_{n-1}} \log X_{n-i:n} - \log X_{n-k_n:n}\\ &= \frac{n}{k_n}\sum_{i=0}^{k_{n-1}}\int_{1-\frac{i+1}{n}}^{1-\frac{i}{n}} \log(Q_n(x))dx - \frac{n}{k_n}\int_{X_{n-k_n:n}}^{\infty} \log X_{n-k_n:n}dF_n(s)\\ &= \frac{n}{k_n}\int_{1-\frac{k_n+1}{n}}^{1} \log(Q_n(x))dx - \frac{n}{k_n}\int_{X_{n-k_n:n}}^{\infty} \log X_{n-k_n:n}dF_n(s)\end{aligned}$$

Par une changement de variable :$Q_n(x) = s$

$$\widehat{\gamma_{Hill}} = \frac{n}{k_n}\int\limits_{X_{n-k_n:n}}^{\infty} \log(s)dF_n(s) - \frac{n}{k_n}\int_{X_{n-k_n:n}}^{\infty} \log X_{n-k_n:n}dF_n(s)$$
$$= \frac{n}{k_n}\int\limits_{X_{n-k_n:n}}^{\infty} (\log(s) - \log X_{n-k_n:n})dF_n(s)$$

Par intégration par partie on trouve :

$$\widehat{\gamma_{Hill}} = \int\limits_{X_{n-k_n:n}}^{\infty} \frac{n}{k_n}(1 - F_n(s))\frac{ds}{s} = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{n}{k_n}(1 - F_n(sX_{n-k_n:n}))\frac{ds}{s}$$

Alors :

$$S = \sqrt{k_n}(\widehat{\gamma_{Hill}} - \gamma) = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\frac{n}{k_n}(1 - F_n(sX_{n-k_n:n})) - s^{-1/\gamma}}{s}ds$$
$$= \int\limits_{1}^{\infty} \frac{D_n(s) - \Gamma(s, W) - s^{-1/\gamma}\frac{s^{\rho/\gamma}-1}{\rho\gamma}\sqrt{k_n}A_0(n/k_n)}{s} +$$
$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\Gamma(s, W) + s^{-1/\gamma}\frac{s^{\rho/\gamma}-1}{\rho\gamma}\sqrt{k_n}A_0(n/k_n)}{s}ds$$

Tel que $\Gamma(s, W) = W(s^{-1/\gamma}) - s^{-1/\gamma}W(1)$ et $\sqrt{k_n}A_0(n/k_n)$ bornée.

D'après [3] (1.9) on trouve que la $1^{ère}$ partie négligeable, il reste que :

$$S = -\gamma W(1) + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{W(s^{-1/\gamma})}{s}ds + \sqrt{k_n}A_0(n/k_n)\int\limits_{1}^{\infty} s^{-1/\gamma}\frac{s^{\rho/\gamma} - 1}{\rho\gamma}\frac{ds}{s} + o_P(1)$$
$$= -\gamma W(1) + \gamma\int\limits_{0}^{1} \frac{W(u)}{u}du + \frac{\lambda}{1-\rho} \underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow} N(\frac{\lambda}{1-\rho}, \sigma^2)$$

Où :

$$\sigma^2 = Var[S] = E[S]^2 = E[-\gamma W(1) + \gamma \int_0^1 \frac{W(u)}{u} du][-\gamma W(1) + \gamma \int_0^1 \frac{W(v)}{v} dv]$$

$$= \gamma^2 (E[W(1)]^2 - 2 \int_0^1 \frac{1}{u} E[W(1)W(u)] du + \int_0^1 \int_0^1 \frac{E[W(u)W(v)]}{uv} dudv$$

$$= \gamma^2 (1 - 2 + 2) = \gamma^2 \ .$$

Conclusion

La normalité asymptotique est une propriété cruciale et utile pour de nombreux problèmes en statistique mathématiques, telles que les constructions des intervalles de confiances et les régions critiques des tests statistiques. La méthode que nous avons employée, pour établir celle-ci, est très puissante et pratique, car elle est basée sur les approximations gaussiennes du processus empirique uniforme, du processus des quantiles uniformes et du processus des queues de distributions.

Bibliographie

[1] Arnold, BC ., Balakrishnan, N et Nagaraja,HN. A first course in order statistics - 2008 - .

[2] Bateka, S . Mémoire determination du nombre de statistiques d'ordre extrêmes.Biskra -2010-.

[3] Benchaira, S.Meraghni, D. Necir, A. Tail product-limit process for truncated data with application to extreme value index estimation Springer Science+Business Media New York -2016-.

[4] Csörgő, M et Révész, P. Strong Approximations in Probability and Statistics -1981-.

[5] Csörgő, M et Mason, D.M. Central limit theorems for sums of extreme values. Mathematical Proceedings Cambridge Philosophy Society 98, 547–558 -1985-.

[6] Csörgő, M., Csörgő, S., Horváth, L et Mason, D.M. Weighted empirical and quantile processes. Annals of Probability 14, 31–85 -1986-.

[7] David, HA et Nagaraja, HN. Order statistics- Third Edition - 2004 -, page 18 .

[8] Davis, R et Resnick, S. Tail estimates motivated by extreme value theory. The Annals of Statistics, vol.12, No. 4,1467–1487.

[9] de Haan, L., Ferreira, A. Extreme Value Theory : An introduction. Springer -2006-.

[10] Einmahl, JHJ.Limit theorems for tail processes with application to intermediate quantile estimation.Journal of Statistical Planning and Inference, -1992-.

[11] Gama, S . Mémoire Statistique d'ordre.Biskra -2020-.

[12] https ://mistis.inrialpes.fr/software/SMEL/cours/ep/node17.html.

[13] Mörters, P et Peres, Y. Brownian motion-2010-

[14] Necir, A et Meraghni, D . Empirical estimation of the proportional hazard premium for heavy-tailed claim amounts. Insurance : Mathematics and Economics journal 45 (2009) 49–58.

[15] Shorack, G.R., Wellner, J.A . Empirical Processes with Applications to Statistics. John Wiley & Sons, New York-1986-.

Annexe A

4.4 Théorème centrale limite

Définition 4.4.1 *Pour* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *,indépendante et identiquement distribuée, supposons que l'espérance* μ *et la variance* σ^2 *existent et finissent avec* $\sigma \neq 0$ *alors :*

$$\sqrt{n}(\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}) \underset{n\to\infty}{\overset{D}{\to}} N(0,1) \ .$$

Tel que $\overline{X_n}$ *est la moyenne empirique.*

4.5 La fonction de poids

Une fonction de poids est un outil mathématique qui permet de donner plus d'importance à certains éléments d'un ensemble lorsqu'on calcule une somme, une intégrale ou une moyenne, par rapport aux autres éléments. Ainsi, en appliquant une fonction de pondération, on obtient une somme ou une moyenne pondérée, où chaque élément de l'ensemble contribue au résultat final en fonction de son poids relatif. En d'autres termes, la fonction de poids permet de prendre en compte l'importance relative de chaque élément lors du calcul d'une mesure agrégée.

4.6 Fonction à variation régulière

Définition 4.6.1 *On dit que G est une fonction à variation régulière s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{G(tx)}{G(t)} = x^{\theta}$$

Annexe B

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$F_X(.)$	:	La Fonction de répartition de X .
$F_{X,Y}(.)$	:	La Fonction de répartition de coupke (X, Y).
$f_X(.)$	:	la densité de X.
$F_n(.)$	:	La distribution empirique.
$Q_n(.)$	:	La Fonction des quantile empirique.
$U_n(.)$	:	La Fonction des quantile empirique uniforme.
$X_{k:n,}$	:	Le k$^{\text{ième}}$satitistique d'ordre.
$E[.]$	:	Espérence mathématique.
$Var[.]$	:	Variance mathématique.
$cov(X, Y)$	:	Covariance mathématique du couple (X, Y).
$W(t)$	:	Processus de wiener (Mouvement brownien).
$B(t)$	:	Pont brownien.
$\alpha_n(.)$	:	Processus empirique uniforme.

$u_n(.)$	:	Processus des quantile uniforme.
$w_n(.)$	:	Processus empirique de queue.
$v_n(.)$	:	Processus des quantile de queue.
$\widetilde{v}_n(.)$	:	Processus des quantile de queue tronqué.
iid	:	indépendante et identiquement distribuée.
v.a	:	Variable aléatoire.
$\xrightarrow{P}$	:	La convergence en probabilité.
$\xrightarrow{D}$	:	La convergence en distibution.
$\stackrel{D}{=}$	:	L'égalité en distribution.

Résumé

Une fois qu'on a défini un estimateur ou une variable de décision d'un test statistique, le problème qui se pose toujours est d'établir la normalité asymptotique de ceux-ci. Ce résultat nous conduit, entre autres, à définir des intervalles de confiances pour les paramètres d'un modèle probabiliste et de construire des régions critiques. Cette loi limite constitue la partie la plus difficile dans l'étude du comportement asymptotique d'une statistique. Les méthodes basées sur le théorème central limite (TCL) classique peuvent êtres compliquées. À cet effet, nous exposons une technique universelle basée sur l'approximation, par des ponts Browniens et mouvement Brownien, des processus empiriques uniformes. Nous avons appliqué cette méthode pour redémontrer le TCL pour la moyenne empirique et d'établir la normalité asymptotique d'un ensemble de statistiques usuelles, à savoir: l'estimateur du maximum de vraisemblance, les L-statistiques et les estimateurs des queues de distributions.

Abstract

Once an estimator or decision variable of a statistical test has been defined, the problem always arises is to establish the asymptotic normality of these. This result leads us, among other things, to define confidence intervals for the parameters of a probabilistic model and to construct critical regions. This law limits is the most difficult part in studying the asymptotic behavior of a statistic. Methods based on the classical central limit theorem (TCL) can be complicated. To this end, we present a universal technique based on the approximation, by Brownian bridges, of uniform empirical processes. This method was used to re-show the TCL for the empirical mean and to establish the asymptotic normality of a common set of statistics, namely: the maximum likelihood estimator, the L-statistics and the tails estimators.

الملخص

بمجرد تحديد مقدر أو متغير قرار للاختبار الإحصائى ، فإن المشكلة التى تنشأ دائمًا هى تحديد الحالة الطبيعية المقاربة لها. تقودنا هذه النتيجة ، إلى تحديد فترات الثقة لمعلمات نموذج احتمالى وإنشاء مناطق حرجة. يشكل هذا القانون المقيد أصعب جزء فى دراسة السلوك المقارب للإحصاء. يمكن أن تكون الطرق المبنية على نظرية الحد المركزي الكلاسيكى (TCL) معقدة. تحقيقا لهذه الغاية ، نكشف عن تقنية عالمية قائمة على التقريب ، بواسطة الجسور البراونية والحركة البراونية ، للعمليات التجريبية الموحدة. طبقنا هذه الطريقة لإعادة توضيح TCL للمتوسط التجريبي ولإثبات الحالة الطبيعية المقاربة لمجموعة من الإحصائيات المعتادة ، وهي: مقدر الاحتمالية القصوى ، وإحصاءات L ومقدرات ذيول التوزيعات.