République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **statistique**

Par

NOUI Chaima

Titre :

Sur mesures de risques et applications

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	**SAYAH Abdallah**	UMKB	Président
Pr.	**BRAHIMI Brahim**	UMKB	Encadreur
Dr.	**TOUBA Sounya**	UMKB	Examinatrice

juin 2023

Dédicace

A mes trés chers parents.

A mes fréres et sœurs.

A toute ma famille.

A mes camarades.

A mes ami(e)s .

REMERCIEMENTS

Je remercie AllahTout-Puissant pour ce que j'ai accompli . Tous mes remerciements et ma gratitude au Professeur ***BRAHIMI Brahim .****C'etait un plaisir de traiter avec lui , et je saisis cette occasion pour exprimer mes sincéres remerciements et ma gratitude pour sa patience et ses précieux conseils .*

Je *remercie également les membres du jury le Professeur* ***SAYAH Abdallah*** *et le Docteur* ***TOUBA Sounya*** *pour leur présence qui m' honore.*

Je termine en remerciant ma famille, mes parents et mes ami(e)s pour leurs encouragements et leur soutien.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Nous sommes confrontés à de nombreux risques dont les causes ne différent pas des facteurs naturels et humains, de sorte que les institutions financiéres sont constamment à la recherche de nouvelles régles et solutions pour gérer les risques et la mesuré.

Les mesures de risque sont des outils utilisés pour quantifier et évaluer les risques associés à une décision ou à une situation donnée. Elles sont utilisées dans de nombreux domaines, tels que la finance, l'assurance, la gestion de projet, la santé et la sécurité au travail, entre autres.

Les mesures de risque sont conçues pour aider les décideurs à comprendre la probabilité d'un événement négatif et son impact potentiel sur leur objectif. Ces mesures peuvent être utilisées pour aider à déterminer la meilleure stratégie pour minimiser le risque ou pour identifier les mesures de prévention nécessaires pour réduire le risque à un niveau acceptable.

Les mesures de risque les plus couramment utilisées incluent la valeur à risque (VaR), l'écart-type, le coefficient de variation et le ratio de Sharpe. Ces mesures peuvent être appliquées à divers types de risques, tels que les risques financiers, les risques opérationnels et les risques environnementaux.

Cependant, il est important de noter que les mesures de risque ne sont que des outils et qu'elles ne peuvent pas prévoir l'avenir avec certitude. Elles doivent être utilisées en conjonction avec d'autres données et analyses pour prendre des décisions éclairées et réduire les incertitudes, c'est ce dont nous parlerons dans les chapites suivants :

Chapitre 1 : Ce premier chapitre, divisé en plusieurs branches, est consacré à quelques définitions des risques et de leurs types, ainis qu'à la mesure des risques et de leurs critères. Enfin, nous présentons les mesures de risque usuelles en finance, que nous utiliserons dans la suite.

Chapitre 2 : Au cours de ce chapitre, nous allons effectuer des calculs de risque et présenter les indices boursiers CAC40, S&P500, DAX, FTSE que nous allons simuler. Pour commencer, nous introduirons quelques concepts importants en mathématiques financiéres pour atteindre les résultats souhaités.

Chapitre 1

Théories des mesures de risques

1.1 Définition de risque

Définition 1.1.1 *Le concept de risque implique la possibilité ou la probabilité qu'un événement indésirable survienne, ce qui mesure l'incertitude ou l'imprévisibilité d'une situation donnée et peut avoir des conséquences positives ou négatives. Lorsqu'il s'agit d'évaluer les risques, il est souvent mesuré en fonction de la probabilité et de la gravité des conséquences potentielles. Par conséquent, un risque élevé est défini par une probabilité importante qu'un événement indésirable se produise, ainsi que par des conséquences graves si cet événement se réalise. Cela s'applique en particulier au sein d'une société de gestion d'actifs, trois services sont généralement dédiés à la gestion du risque :*

1. *Risque liquidité.*
2. *Risque de crédit.*
3. *Risque de marché.*

1.1.1 Types de risques

Le risque est généralement classé en trois grandes catégories [Guibert (2013)] :

Risque de marché

Le risque de marché peut se définir comme le risque de perte associé aux variations des conditions de marché (prix, taux, taux de change, volatilités, etc). Les différents facteurs de risques liés aux Marchés financiers, sont les taux, les cours de change, les cours des actions et les prix des matières premiéres. Toute variation de ces données a un impact sur les positions et les portefeuilles. Il s'agit du principal champ d'utilisation de la (VaR).

Il est important pour les investisseurs de comprendre et d'évaluer le risque de marché associé à leurs investissements afin de prendre des décisions éclairées et de gérer leur portefeuille de manière efficace. Les professionnels de la finance utilisent souvent des mesures telles que la volatilité et le beta pour évaluer le risque de marché d'un actif donné.

Risque de liquidité

C'est un risque lié à liquidité, autement dit si vous souhaitez vendre à un prix donné, il faut qu'une autre partie accepte d'acheter à ce prix. Si personne ne souhaite acheter, vous ne pouvez pas vendre ou vous devez accepter de vendre moins cher. C'est-à-dire à vendre rapidement en cas de besoin de liquidité.

Le risque de liquidité peut également se produire lorsqu'une entreprise ou une institution financière doit faire face à des obligations de paiement importantes, tels que le remboursement de dettes ou le paiement de dividendes, sans disposer des liquidités nécessaires pour y faire face. Si l'entreprise ou l'institution financière n'est pas en mesure de trouver des sources de financement alternatives, cela peut entraîner des conséquences financières négatives, telles que la faillite ou la liquidation forcée.

Risque de crédit

Le risque de crédit est définit comme le risque de perte lié à l'évolution de la qualité de la signature d'un émetteur. Il résulte de l'incertitude quant à la possibilité des contreparties ou des clients à remplir leurs obligations. Il existe un risque pour une banque, dès qu'elle se met en situation d'attendre une entrée de fonds de la part d'un client ou d'une contrepartie du marché.

Pour évaluer le risque de crédit, les prêteurs examinent généralement la cote de crédit de l'emprunteur, ses antécédents de crédit, sa capacité à rembourser la dette et d'autres facteurs qui pourraient influencer sa capacité à honorer ses engagements financiers. Les prêteurs peuvent également exiger des garanties pour réduire leur risque de crédit.

1.2 Mesure de risque

1.2.1 Pourquoi une évaluation des risques est-elle si importante ?

Les évaluations des risques sont très importantes puisqu'elles font partie intégrante d'un bon plan de gestion de la santé et de la sécurité au travail. Elles contribuent à :

- Sensibiliser les personnes aux dangers et aux risques.
- Déterminer qui est exposé à des risques (employés, personnel d'entretien, visiteurs, entrepreneurs, membres du public, etc.).
- Déterminer si un programme de gestion est nécessaire pour un danger particulier.
- Déterminer si les mesures de maîtrise des risques en place sont appropriées ou s'il faut en instaurer d'autres.

– Prévenir les blessures ou les maladies lorsque les évaluations sont effectuées à l'étape de la conception ou de la planification.
– Hiérarchiser les risques et les mesures de maîtrise de ces derniers.
– Satisfaire les obligations juridiques, le cas échéant.

1.2.2 Définition de Mesure de risque

Définition 1.2.1 *Une mesure de risque est une fonction définie sur l'éspace des variables aléatoires X à valeur dans $\mathbb{R}$ et on la note par R [Charpentier (2010)] :*

$$\begin{aligned} R \; : \; X &\rightarrow \quad \mathbb{R} \\ X &\rightarrow R(X) \end{aligned}$$

X est le montant de perte et $R(X)$ est le capital à détenir pour faire face aux pertes X. C'est à ire pour une position X, $R(X)$ s'interpréte comme le montant des fonds propres exigés associé a cette position

$$R(X) \text{ est grand } \rightarrow X \text{ est dangereux}$$

Exemple 1.2.1 *On peut considérer :*

$$\begin{cases} R_{\max}(X) = \sup\limits_{\omega\in\Omega} X(\omega) \\ R(X) = \sup\limits_{p\in P} E_p(X(\omega)) \end{cases}$$

ou P est un ensemble de probilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Définition 1.2.2 (Chargement de sécurité) *Une mesure de risque contient un chargement de sécurité si pour tout risque X on a*

$$R(X) \geq E(X).$$

Remarque 1.2.1 *Il existe de nombreuses mesures de risque introduites dans la littérature et la pratique, et le choix d'une mesure de risque peut être difficile. Une approche pour traiter la question de la mesure du risque consiste à commencer par une liste des propriétés qu'une mesure de risque doit satisfaire.*

1.2.3 Propriétés de mesure de risque

les mesures de risque sont analyseés, oû un ensemble d'axiomes ont été énoncés qui devraient être souhaitables pour toute mesure de risque. Pour les définitions de tous les axiomes, X, Y sont des $(v.a)$ représentant la perte, et R est une mesure de risque [Artzner *et all.* (1999)].

1. Invariance en loi
$$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y \Rightarrow R(X) = R(Y).$$
2. Monotonie
$$X \leq Y \Rightarrow R(X) \leq R(Y).$$
3. Invariance par translation
$$\forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow R(X+k) = R(X) + k.$$
4. Homogénéité positive
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+}, R(\lambda X) = \lambda R(X).$$
5. Sous additivité
$$R(X+Y) \leq R(X) + R(Y).$$

6. Convexité

$$\forall \beta \in [0,1], R(\beta X + (1-\beta) Y) \leq \beta R(X) + (1-\beta) R(Y).$$

7. Comonotone additive

$$R(X+Y) = R(X) + R(Y).$$

X et Y comonotone.

La vérification de ces propriétés axiomatriques amène à la notion de mesure de risque cohérente.

1.2.4 Région de risque

Une notion liée à celle de mesure de risque est la région des portefeuilles acceptables définie comme suit :

Définition 1.2.3 *On définit la région de risque acceptable pour la mésure R par*

$$G = \{X, R(X) \leq 0\}$$

1.2.5 Mesure de risque cohérente et convexe

Le concept de mesure de risque cohérente a été abordé pour la première fois par Artzner dans [Artzner *et all.* (1999)] et [Belzile (2008)].

Définition 1.2.4 (Mesure du risque cohérente) *Une mesure du risque $R(X)$ est dite cohérente si elle vérifie les quatre axiomes suivantes :*

L'invariance par translation : *signifie que l'addition d'un investissement X sans risque, avec les pertes connues k au portefeuille initial décroît simplement la* *mesure de risque R par k.*

La Sous-additivité : *C'est l'axiome le plus important elle a une interprétation facile .Le risque d'un portefeuille comprenant des investissements en X et Y est aussi plus grand que la somme des risques individuels (Diversification du risque).*

L'homogénéité positive : *Cet axiome est un cas limite de la propriété de sous additivité qui représente l'absence de diversification, elle s'assure que nous ne pouvons pas augmenter ou diminuer le risque en investissant des montants. Il est claire que si l'investissement est multiplié, par conséquent le risque est également multiplié.*

La monotonie : *L'axiome de monotonie nous indique que nous associons un plus gros risque à une perte plus élevée. Lorsque la perte de l'investisseur X est toujours plus grande que celle de l'investisseur Y, alors le risque de l'investisseur X est également plus grand.*

Proposition 1.2.1 (Caractérisations des mesures du risque cohérentes) *Si R est une mesure de risque cohérente, alors il existe un ensemble de mesures de probabilité $\mathbb{Q}$ tel que :*

$$R(X) = \sup_{Q \in \mathbb{Q}} E_Q(X).$$

Proposition 1.2.2 (Mesure de risque convexe) [*Kenioua (2017)*] *Une mesure de risque est dite convexe si elle est monotone,invariante par translation et convexe.*

Remarque 1.2.2 *Une mesure cohérente est toujours normalisée à*

$$R(0) = 0$$

par homogénéité, voir [Brazauskas et all. (2008)].

– *Si une mesure convexe est normalisée par* $R(0) = 0$ *alors :*

$$\begin{aligned}
&\forall \lambda \in [0,1], \\
R(\lambda X) &= R(\lambda X + (1-\lambda)0) \\
&\leq \lambda R(X) + (1-\lambda) R(0) \\
&\leq \lambda R(X)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow R(\lambda X) \leq \lambda R(X).$$

–

$$\begin{aligned}
&\forall \lambda \in [1,\infty[, \\
R(X) &= R\left(\frac{1}{\lambda}\lambda X + \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)0\right) \\
&\leq \frac{1}{\lambda} R(\lambda X) + \left(1-\frac{1}{\lambda}\right) R(0) \\
&\leq \frac{1}{\lambda} R(X)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow R(\lambda X) \geq \lambda R(X).$$

Proposition 1.2.3 *Si* R *est invariante par translation alors*

$$R(X - R(X)) = 0$$

Définition 1.2.5 (Mesure de risque monétaire) *Une mesure de risque est dite monétaire si elle est monotone et invariante par translation.*

Lemme 1.2.1 *Toute mesure de risque monétaire est Lipschitzienne pour la norme* $\|.\|_\infty$ *C'est à dire que :*

$$|R(X) - R(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty$$

Preuve. *Soit* $X \leq Y$ *alors*

$$\begin{aligned} X &\leq Y + \|X - Y\|_\infty \\ &\Rightarrow R(X) \leq R(Y + \|X - Y\|_\infty) \\ &\Rightarrow R(X) \leq R(Y) + \|X - Y\|_\infty \\ &\Rightarrow |R(X) - R(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty \end{aligned}$$

Corollaire 1.2.1 *Si* R *est une mesure de risque monétaire et homogène, alors la convexité et la sous-additivité sont des notions équivalentes.*

■

1.3 Mesures des risques usuelles

Dans la littérature il y a plusieurs mesures de risque, les plus usuelles comme "La variance ", il sagit d'une mesure de dispersion d'une $(v.a)$ par rapport à sa moyenne. Si X est une $(v.a)$ de carré intégrable, sa variance est définie par

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right],$$

Son écart type, généralement noté σ_x est définie par [Lévy (1925)]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sqrt{Var(X)} \\ &= \sqrt{E\left[(X - E(X))^2\right]} \\ &= \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2} \end{aligned}$$

et la variance empirique définie

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 .$$

1.4 Quelques mesures de risque

1.4.1 La variance

La variance est la première mesure de risque qui a été utilisée. Elle est considérée comme une mesure de risque d'une variable aléatoire autour de sa moyenne. Soit X une variable aléatoire, sa variance est définie par

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

La variance admet une représéntation de la forme

$$Var(X) = \inf_{x\in\mathbb{R}} E\left[(X - x)^2\right].$$

Cette formule nous aide à démontrer l'équivalence entre un problème d'optimisation stochastique sous une contrainte de risque et un problème économique. La variance autant que mesure de risque, n'est pas beaucoup utilisée car elle possède la propriété du symétrique ce qui fait pénalise les bonnes variations que les mauvaises.

1.4.2 Valeur en Risque

La Valeur en Risque notée par (VaR) a connu ses premières utilisations vers la fin des années 1980 sous le nom de dollar at risk, capital at risk, etc. Cette mesure prit le nom Valeur en risque dans les travaux de **Morgan** (1997) [Morgan (1997)].

La Valeur en Risque a été appliquée pour la première fois dans le domaine financier

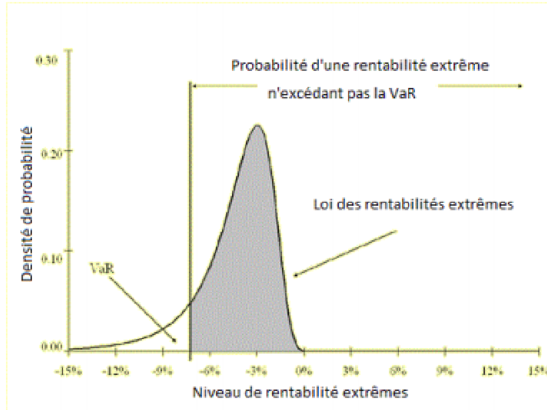

FIG. 1.1 – Calcul de la Var à partir des valeurs extrêmes

puis dans la résolution des problèmes d'assurance oû **Fedor** et **Morel** (2006)[Fedor et Morel (2006)] ont exposé des situations en assurance oû la VaR est une bonne mesure de risque pour les actifs. En finance, la VaR d'un actif financier est définie comme la perte potentielle maximale sur une période fixée au niveau de confiance donné. En statistique, la VaR es définie comme suit :

Définition 1.4.1 *La Valeur en Risque de niveau $\alpha \in [0,1]$ associée au risque X est donnée par*

$$\begin{aligned} VaR(X,\alpha) &= \inf\{x \in \mathbb{R} / \Pr[X \leq x] \geq \alpha\} \\ &= F_X^{-1}(\alpha) \end{aligned}$$

autrement dit, la Valeur en ique n'est rien d'autre qu'un quantile d'ordre associée à la distribution de X.

À titre d'illustration, dire que la $VaR(X, 0.99)$ d'un portefeuille vaut la valeur V,signifie que la perte maximale de valeur du portefeuille est inférieure à V avec une probabilité de 0.99. Si on désigne par Y, la perte reliée à un investissement tel que $Y = -X$, alors on obtient :

$$VaR\,(Y, \alpha) = -VaR\,(X, \alpha - 1)\,.$$

Comme le montre la figure 1.1 ci-dessus, pour une probabilité donnée, la VaR est obtenue comme le quantile de la loi des rentabilités extrêmes. En pratique, cette loi estimée à partir de données historiques sur longue période est une loi de Fréchet.

Lemme 1.4.1 *Soit g une fonction strictement croissante et continue à gauche,* $\forall \alpha \in]0, 1[$ *on a :*

$$\begin{aligned} VaR\,(g\,(X)\,, \alpha) &= F^{-1}_{g(x)}\,(\alpha) \\ &= g\left(F^{-1}_{X}\,(\alpha)\right) \\ &= gVaR\,(X, \alpha)\,. \end{aligned}$$

Si g est strictement décroissante, continue à droite, et si F_X bijective, alors

$$\begin{aligned} VaR\,(g\,(X)\,, \alpha) &= F^{-1}_{g(x)}\,(\alpha) \\ &= g\left(F^{-1}_{X}\,(\alpha - 1)\right) \\ &= gVaR\,(X, \alpha - 1)\,. \end{aligned}$$

Remarque 1.4.1 *La VaR est largement utilisée en finance mais elle n'est pas cohérente car elle ne vérifie pas la propriété de sous-additivité. On peut démontrer ça par un contre exemple*

Soit X er Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Pareto de paramètres alors :

$$\forall \alpha \in]0, 0.8[\,, VaR\,(X + Y, \alpha) \rangle VaR\,(X, \alpha) + VaR\,(Y, \alpha)$$

Comme l'illustre la figure suivante :

Dans la suite on va présenter trois mesures de risques dont l'idée commune est de

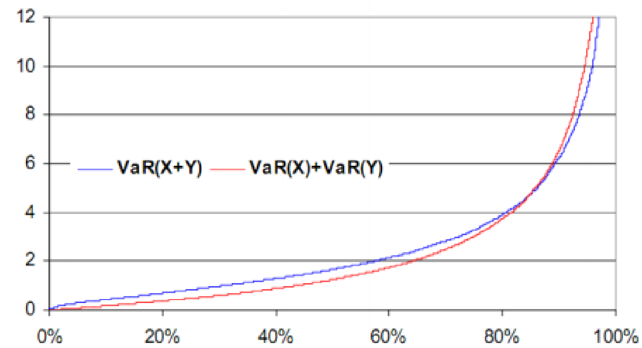

FIG. 1.2 – Value-at-Risk de la somme de deux v.a. de Paret

quantifier la perte lorsque la VaR est dépassée.

1.4.3 Tail Value-at-Risk

La (Tail Value-at-Risk ($TVaR$)) est une mesure qui satisfait la propriété de sousditivité et qu'elle fournit de l'information sur la queue de la distribution étudiée, on peut l'interpréter comme la moyenne des VaR de niveau supérieur à α.

Définition 1.4.2 (Tail Value-at-Risk ($TVaR$)) *Tail Value-at-Risk de niveau associée au risque X telle qu'introduite par Acerbi (2002) [Acerbi (2002)], est donnée par*

$$TVaR\left(X,\alpha\right)=\frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1}VaR\left(X,s\right)ds.$$

Notons que

$$TVaR\left(X,0\right)=E\left(X\right).$$

Et comme

$$TVaR\left(X,\alpha\right)=\frac{1}{1-\alpha}\left(E\left(X\right)+\int_{0}^{\alpha}VaR\left(X,s\right)ds\right),$$

on en déduit que la $TVaR$ *est une fonction croissante en. De plus*

$$TVaR\left(X,\alpha\right) \geq TVaR\left(X,0\right) = E\left(X\right).$$

Donc la Tail-VaR contient toujours un chargement de sécurité.

1.4.4 Conditional Tail Expectation

(Conditional Tail Expectation (CTE)) représente la perte attendue sachant que la VaR au niveau α est dépassée.

Définition 1.4.3 *On définit la* CTE *associée à la variable aléatoire* X *au niveau* α*, notée* $CTE(X,\alpha)$ *comme l'espérance de* X *conditionnellement aux valeurs supérieures à* $VaR(X,\alpha)$:

$$CTE(X,\alpha) = E\left[X/X > VaR(X,\alpha)\right].$$

Proposition 1.4.1 *La* CTE *et la* $TVaR$ *coïncident pour des risques dont la fonction de répartition est continue i.e*

$$CTE(X,\alpha) = TVaR\left(X,\alpha\right) \quad , \alpha \in (0,1).$$

Il est naturel de définir un estimateur empérique de la forme

$$\widetilde{CTE}_n\left(\alpha\right) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1} Q_n\left(s\right)ds,$$

où Q_n *est l'estimateur empirique de la fonction quantile, qui est définit par* $Q_n\left(s\right) = X_{i;n} \quad$ *pour* $\left(i-1\right)/n \leq s \leq i/n$.

L'estimateur $\widetilde{CTE}_n\left(\alpha\right)$ *a été étudié par Brazauskas et al (2008) [Brazauskas et all. (2008)] dans le cas où* $E\left[X^2\right] < \infty$*. Cette estimateur n'a pas de normalité asymptotique dans*

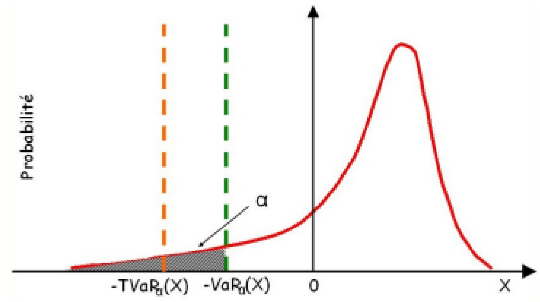

FIG. 1.3 – Perte moyenne au-delà d'un certain seuil dépendant de α.

le cas où $E[X^2] = \infty$ $(X$ *suit la loi de pareto)*. *Pour cette raison Necir et al. (2010) [Necir et all. (2010)] ont proposé un estimateur définit par*

$$\widetilde{CTE}_n(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{1-k/n} Q_n(s)\,ds + \frac{kX_{n-k;n}}{n(1-\alpha)(1-1/\hat{\gamma})},$$

tel que

$$\hat{\gamma} := \left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\log^{+}(X_{n-i+1;n}) - \log^{+}(X_{n-k;n})\right)^{-1}$$

et l'estimteur de Hill (1975) [Hill (1975)] de $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

1.4.5 Expected shortfall

(L'expected shortfall) (ES) de niveau de probabilité α est la perte moyenne au delà de la VaR au niveau α, Autrement dit :

Définition 1.4.4 *(L'Expected shortfall) au niveau* α, *notée* $ES[X,\alpha]$ *,est*

$$ES[X,\alpha] = E\left[(X - VaR(X,\alpha))_{+}\right].$$

Il existe une relation entre les trois mesures de risque définies ci-dessus, qui sont données dans la Proposition suivante.

Proposition 1.4.2 $\forall\alpha \in [0,1]$, *Les identités suivantes sont valides :*

$$TVaR(X,\alpha) = VaR(X,\alpha) + \frac{1}{1-\alpha} ES\left(X,\alpha\right).$$

$$CTE(X,\alpha) = VaR(X,\alpha) + \frac{1}{\bar{F}_X\left(VaR(X,\alpha)\right)} ES\left(X,\alpha\right).$$

$$CVaR(X,\alpha) = \frac{ES\left(X,\alpha\right)}{\bar{F}_X\left(VaR(X,\alpha)\right)}.$$

Chapitre 2

Application avec les données financières

Dans ce chapitre, nous allons calculer des mesures de risque. Nous présenterons également les indices boursiers CAC40, SP500, DAX et FTSE que nous simulerons. Nous commençons d'abord par introduire quelques concepts importants des mathématiques financières afin d'atteindre les résultats souhaités.

2.1 Environnement de travail

Nous utiliserons le logiciel R pour étudier les données réelles des marchés financiers et prédire les pertes possibles et analyser les graphiques de prix sur le marché financier. ll est disponible pour une utilisation dans différents domaines (gestion des risques,séries temporelles). La diversité des fonctions a conduit à considérer R comme une référence pour l'analyse des données et les statistiques. L'un des principaux points forts de R est la facilité de production de graphiques. La haute qualité contribue à la facilité avec laquelle des équations mathématiques complexes peuvent être traitées.

Définition 2.1.1 *(CAC40) Le CAC40 est un indice boursier français qui mesure la* *performance des 40 plus grandes entreprises cotées à la Bourse de Paris, en termes de capitalisation boursière. Les entreprises incluses dans l'indice CAC40 sont sélectionnées en fonction de leur liquidité, de leur capitalisation boursière et de leur secteur d'activité. L'indice CAC40 est considéré comme un indicateur important de la santé économique de la France et de l'évolution de son marché boursier.*

Date	Valeur de *CAC40*
26/10/2012	3435,09
29/10/2012	3408,89
30/10/2012	3459,44
31/10/2012	3429,27
01/11/2012	3475,40

TAB. 2.1 – Echantillon du prix de l'indice bourcier CAC 40

Définition 2.1.2 *(S&P) L'indice S&P (Standard & Poor's) est un indice boursier américain qui mesure la performance de 500 grandes entreprises cotées aux états-Unis, en termes de capitalisation boursière. Contrairement au Dow Jones, qui se concentre sur les 30 plus grandes entreprises américaines, l'indice S&P 500 est considéré comme représentatif de l'ensemble du marché boursier américain. Les entreprises incluses dans l'indice S&P500 sont sélectionnées en fonction de leur liquidité, de leur capitalisation boursière, de leur flottant et de leur secteur d'activité. L'indice S&P500 est largement utilisé comme indicateur de la santé de l'économie américaine et de l'évolution du marché boursier américain.*

Date	Valeur de S&P500
24/10/2012	1408,75
25/10/2012	1412,97
26/10/2012	1411,94
31/10/2012	1412,16
01/11/2012	1427,59

TAB. 2.2 – Echantillon du prix de l'indice bourcier S&P500

Définition 2.1.3 *(DAX) L'indice DAX est pondéré en fonction de la capitalisation boursière des entreprises qui le composent. Les entreprises incluses dans le DAX représentent une large gamme de secteurs, notamment l'automobile, la finance, la technologie, l'énergie et la santé. L'indice est considéré comme un indicateur important de l'économie allemande et est souvent utilisé comme référence pour les investisseurs qui cherchent à investir en Allemagne ou à évaluer la performance du marché allemand.*

Date	Valeur de DAX
26/10/2012	7231,85
29/10/2012	7203,16
30/10/2012	7284,40
31/10/2012	7260,63
01/11/2012	7335,67

TAB. 2.3 – Echantillon du prix de l'indice bourcierDAX

Définition 2.1.4 *(FTSE) L'indice de marché FTSE (prononcé "footsie") est un indice boursier composé des* 100 *plus grandes entreprises cotées à la Bourse de Londres, également connu sous le nom de London Stock Exchange (LSE). Il est calculé par la* *société de services financiers $FTSERussell$, qui est une filiale de la London Stock Exchange Group.*

Date	Valeur de FTSE
26/10/2012	5806,70
29/10/2012	5795,10
30/10/2012	5849,90
31/10/2012	5782,70
01/11/2012	5861,90

TAB. 2.4 – Echantillon du prix de l'indice bourcierFTSE

2.1.1 Le portefeuille CAC40, S&P500, DAX et FTSE

Dans ce chapitre, nous traitons de l'aspect expérimental. Nous avons choisi de travailler sur un portefeuille de 4 indices boursiers. Nous avons utilisé la valeur de (CAC40, S&P500, DAX, FTSE). Le premier indice boursier W_1, le deuxième indice boursier W_2, le troisième W_3, le quatrième W_4, où Pt est le prix du titre financier à l'instant t.

$$V_t = W_{1,t}P_{1,t} + W_{2,t}P_{2,t} + W_{3,t}P_{3,t} + W_{4,t}P_{4,t}$$

Auquel s'affiche le score relatif, nous intéresse plus que le prix lui-même . Cela nous aide à décider quels programmes exécuter. C'est pour cela que les analyses financieres sont bases sur les rendements des actifs au lieu de leurs prix [Föllmer (2005)].

Définition 2.1.5 ***(Rendement logarithmique d'un instrument financier)*** *Le rendement logarithmique est souvent utilisé pour comparer la performance de différents instruments financiers, car il tient compte des variations de la valeur de l'instrument sur toute la période, y compris les fluctuations quotidiennes.*

La formule pour calculer le rendement logarithmique est la suivante $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$:

$$X_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

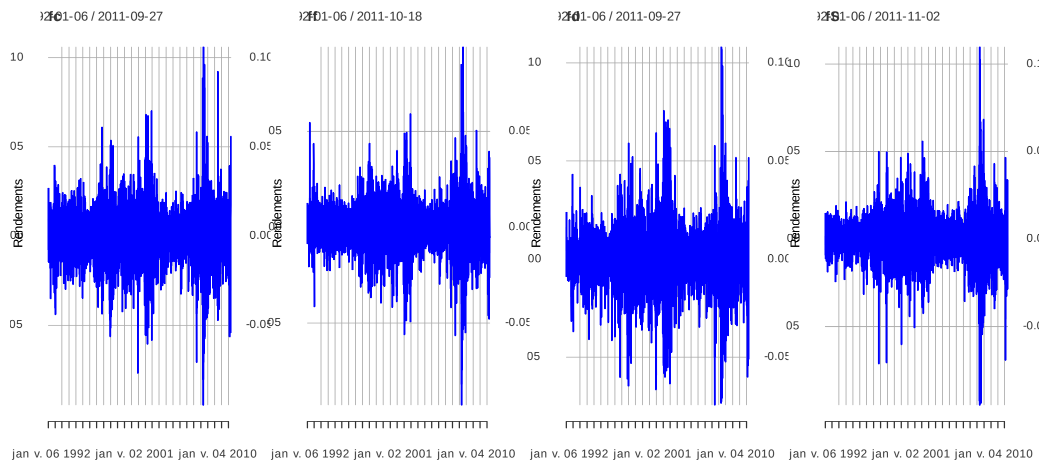

FIG. 2.1 – Rendements journaliers des quatre indices et leurs portefeuille associ.

Le rendement quotidien des quatre indices et leurs portefeuilles associés peuvent être exprimés de la manière suivante :

Chaque jour, les quatre indices, à savoir l'indice CAC40, l'indice S&P500, l'indice DAX et l'indice FTSE, enregistrent des rendements quotidiens différents en fonction de l'évolution du marché. De même, les portefeuilles associés à ces indices, qui comprennent une sélection de titres représentatifs de chaque indice, connaissent également des variations de rendement quotidiennes.

Ainsi, pour maximiser les bénéfices d'un investissement, il est important de surveiller de près les rendements quotidiens des indices et de leurs portefeuilles associés, et de prendre les décisions d'investissement en conséquence. Les investisseurs doivent également être conscients des risques inhérents à l'investissement, car les rendements passés ne garantissent pas les rendements futurs.

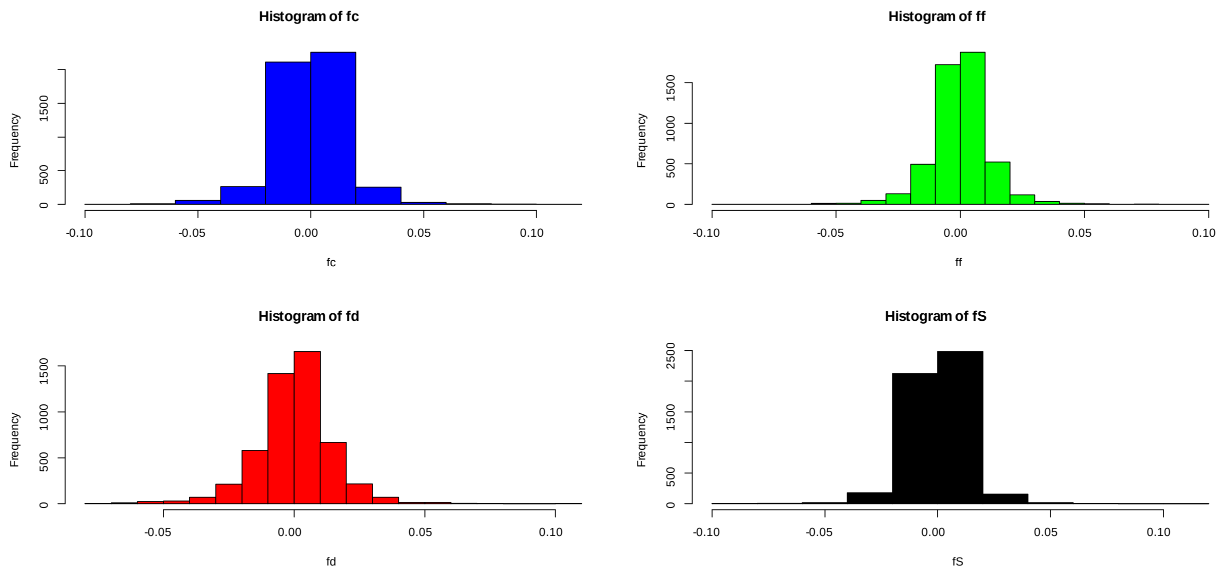

FIG. 2.2 – Histogramme des log-rendements.

Estimation de la distribution stable à quatre paraméters par maximum de vraismblance pour les rendements de quatre indices boursiers européens.

	CAC40	FTSE	DAX	SP500
α	1.624	1.504	1.7200	1.32800
β	0.12700	0.18700	-0.9500	0.08100
γ	0.00910	0.00690	0.0423	0.00642
δ	-0.00023	-0.00068	0.1478	-0.00103

TAB. 2.5 – Stable Parameter Estimation

La plage est $[-1, 1]$, le paramètre d'échelle γ et le paramètre de décalage δ. Dans les modèles qui utilisent des données financières, il est généralement admis que $\alpha \in (1, 2]$. En utilisant le package "fBasics" du logiciel R, basé sur les estimateurs de maximum de vraisemblance pour ajuster les paramètres d'un df des rendements des quatre indices de marché, les résultats sont résumés dans le tableau.

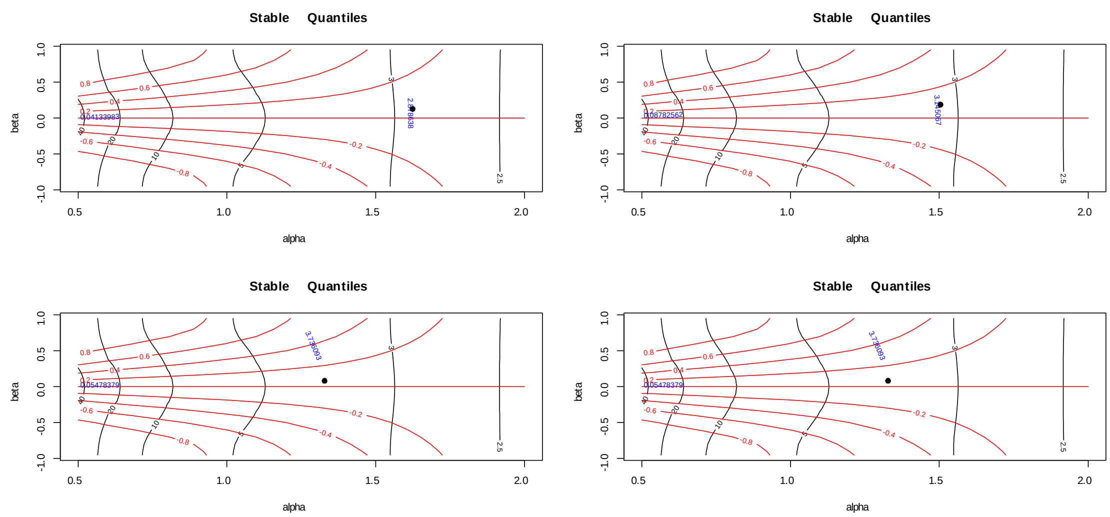

FIG. 2.3 – Stable Quantiles

2.2 Mesures de risques

La variance, la Value-at-Risk (VaR) et l'Expected Shortfall (ES) sont toutes des mesures de risque utilisées dans la gestion des investissements et des portefeuilles. Voici comment calculer chacune de ces mesures :

1. **Variance** :

La variance mesure la dispersion des rendements d'un actif ou d'un portefeuille. Elle est calculée comme la moyenne des carrés des écarts entre chaque rendement individuel et la moyenne des rendements, pondérée par les probabilités correspondantes.

Soit $R_1, R_2, ..., R_n$ les rendements historiques d'un actif ou d'un portefeuille, et μ la moyenne des rendements. La formule de la variance est la suivante :

$$\text{Variance} = \frac{1}{n} \sum \left[(R_i - \mu)^2 \right].$$

2. **Value-at-Risk** (VaR) **:**

La VaR mesure la perte potentielle maximale d'un actif ou d'un portefeuille à un certain niveau de confiance sur une période donnée. Par exemple, la VaR à 95% indique la perte maximale qui ne devrait pas être dépassée avec une probabilité de 95%.

Pour calculer laVaR, vous devez d'abord trier les rendements historiques par ordre croissant. Ensuite, vous sélectionnez le rendement correspondant au percentile souhaité en fonction du niveau de confiance. La formule de la VaR est la suivante :

$$VaR = -R_k$$

où R_k est le rendement correspondant au percentile k. Par exemple, si vous voulez calculer la VaR à 95%, vous sélectionnez le rendement correspondant au 5e percentile.

3. **Expected Shortfall** (ES) **:**

L'Expected Shortfall est une mesure qui estime la perte moyenne en cas de dépassement de la VaR. Il mesure la moyenne pondérée des pertes au-delà de la VaR.

Pour calculer l'ES, vous devez d'abord déterminer le niveau de confiance (par exemple, 95%) et calculer laVaR correspondante. Ensuite, vous prenez la moyenne des rendements qui sont en dessous de la VaR.

La formule de l'ES est la suivante :

$$ES = -\frac{1}{n(1-\alpha)} \sum [Ri] \quad \text{pour} \quad R_i < -VaR$$

où n est le nombre total d'observations, α est le niveau de confiance (par exemple, $0,95$), et R_i est un rendement individuel en dessous de la VaR.

Il convient de noter que ces calculs supposent que les rendements suivent une distribution statistique spécifique, telle que la distribution normale. Dans la pratique, d'autres méthodes et modèles peuvent être utilisés pour estimer ces mesures de risque, en tenant compte des caractéristiques spécifiques des actifs et des portefeuilles. Le tableau suivant montre quelques calculs de mesures de risque pour 4 indicateurs différents.

	CAC40	S&P500	DAX	FTSE
VaR	$-0,02263$	$-0,02263$	$-0,02357$	$-0,01817$
ES	$-0,03418$	$-0,02911$	$-0,03558$	$-0,02820$
$CVaR$	$-0,03418$	$-0,02911$	$-0,03558$	$-0,02820$

Tab. 2.6 – Mesures de risques

2.2.1 Codes R des mesures de risque utilisés

```
# CAC 40

prices <- xts(CAC40$Close , order.by = as.Date(CAC40$Date))

# Calcul de la VaR à 95% avec la méthode historique

Var <- quantile(data, 0.05)

Var

# Affichage de la VaR

print(paste("La VaR à 95% est de", VaR))

Es <- ES(data, p = 0.05, method = "historical")

Es

# Calcul de l'Conditional Value at Risk à 95% avec la méthode historique

CVar <- CVaR(data, p = 0.05, method = "historical")

CVar

# FTSE

prices <- xts(FTSE$Close , order.by = as.Date(FTSE$Date))
```

```
# Calcul de la VaR à 95% avec la méthode historique

Var <- quantile(data, 0.05)

Var

# Affichage de la VaR

print(paste("La VaR à 95% est de", VaR))

Es <- ES(data, p = 0.05, method = "historical")

Es

# Calcul de l'Conditional Value at Risk à 95% avec la méthode historique

CVar <- CVaR(data, p = 0.05, method = "historical")

CVar

# DAX

prices <- xts(DAX$Close, order.by = as.Date(DAX$Date))

# Calcul de la VaR à 95% avec la méthode historique

Var <- quantile(data, 0.05)

Var

Es <- ES(data, p = 0.05, method = "historical")

Es

# Calcul de l'Conditional Value at Risk à 95% avec la méthode historique

CVar <- CVaR(data, p = 0.05, method = "historical")

CVar

# SP500

prices <- xts(SP500$Close , order.by = as.Date(SP500$Date))

# Calcul de la VaR à 95% avec la méthode historique

Var <- quantile(data, 0.05)
```

```
Var

# Affichage de la VaR

print(paste("La VaR à 95% est de", VaR))

Es <- ES(data, p = 0.05, method = "historical")

Es

# Calcul de l'Conditional Value at Risk à 95% avec la méthode historique

CVar <- CVaR(data, p = 0.05, method = "historical")

CVar
```

Instructions utilisées pour les Mesures de risques

- (VaR) `(quantile(data, 0.05))`
- (ES) `( ES(data, p = 0.05, method = "historical"))`
- $(CVaR)$ `(CVaR(data, p = 0.05, method = "historical"))`

Conclusion

Les mesures de risque sont des outils essentiels pour évaluer et gérer les risques dans de nombreux domaines, notamment en finance, en assurance, en gestion de projet et en santé. Elles permettent de quantifier la probabilité et l'impact des événements indésirables, et aident les décideurs à prendre des décisions éclairées en matière de gestion des risques.

Il existe plusieurs mesures de risque, chacune ayant ses avantages et ses inconvénients en fonction du contexte d'utilisation. Les mesures de risque les plus courantes incluent la variance, l'écart-type, la Value-at-Risk (VaR), le Conditional Value-at-Risk ($CVaR$), et la perte maximale probable (PMP).

Il est important de comprendre les limites des mesures de risque et de les utiliser avec prudence. Les mesures de risque sont souvent basées sur des hypothèses et des approximations, et peuvent ne pas refléter pleinement la complexité des risques réels. Par conséquent, il est souvent recommandé d'utiliser plusieurs mesures de risque différentes pour obtenir une évaluation plus complète des risques.

Enfin, il est important de noter que la gestion des risques ne se résume pas à l'utilisation de mesures de risque. La gestion efficace des risques implique également une compréhension approfondie des risques, une planification appropriée, une communication claire, une surveillance continue et une évaluation régulière des résultats.

Bibliographie

Abdelli J., 2018. Sur la théorie des valeurs extrèmes, mesures des risques et applications,thése de doctorat de université mohamed khider, Biskra, Algérie.

Acerbi,E., 2002. A model for mixtures of micromagnetic materials allowing existence and regularity. Variational methods for discontinuous structures, 1–8, Progr. Nonlinear Differential Equation App., 51, Birkhäuser, Basel, 2002.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. Heath, D., 1999. Coherent Measures of Risk, Mathematical Finance.

Belzile, S., 2008. L'utilisation des mesures cohérentes de risque en gestion de portefeuille, Université de Québec à Montréal, Canada.

Bouchareb S., 2019. Risque et mesure de risque, mémoire de master, université mohamed khider, Biskra, Algérie.

Brazauskas, V., Jones, B.L.,Puri, M.L. and Zitikis,R., 2008. Estimating condi-tional tail expectation with actuarial applications in view. J. Statist. Plann. Inference 138, no. 11,3590-3604.

Charpentier, A., 2010. Mesures de risque,Journées d'Études Statistique, Luminy, Université Rennes 1,France.

Fedor, M. and J. Morel, 2006. Value-at-risk en assurance : Recherche d'une méthodologie à long terme. Actes du 28e Congrès International Des Actuaires. pp : 28.

Föllmer, H., 2005. Incertitude financiére, mesures de risque et préférences robustes,Université de Berlin, Allemagne.

Guibert. T., 2013. Mesures de risque de marché, cours de la chaire Risques Financiers de la fondation du Risque.

Hill, B.M., 1975. A simple approach to inference about the tail of a distribution. Ann. Statist. 3, 1136-1174.

Kenioua. Z., 2017. Sur les mesures de risques et leurs applications, Thése de doctorat, Université Biskra.

Lévy, P., 1925. Calcul des probabilités. Paris, Gauthier-Villars.

Morgan, J., 1997. Creditmetric. Rapport technique, JP Morgan, New York. 101, 107.

Necir, A., Rassoul, A. and Zitikis, R., 2010. Estimating the conditional tail expectation in the case fo heavy-tailed losses. Journal of Probability and Statistics 2010, ID 596839.

Ouaar. F., 2010. Estimation empirique de la mesure sepctrale des risques financiers. Mémoire de Magistère (Universite Biskra).

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

Var	:	Variance mathématique
VaR	:	Value-at-Risk
$TVaR$	:	Tail-Value-at-Risk
$CVaR$	:	Conditional Value-at-Risk
CTE	:	Conditional Tail Expectation
ES	:	Expected Shortfall
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des valeurs réelles
F	:	Fonction de distribution
F^{-1}	:	La fonction inverse de F
Ω	:	L'espace Fondamental
P	:	Mesure de probabilité sur Ω
$E(.)$	:	Espérance mathématique
$v.a$	:	Indice boursier de la Bourse de Londres
X	:	variable aléatoire définie sur $(\Omega,\ F, P)$

الخلاصة

قام الباحثون بالتحقيق في قضايا المخاطر للمؤسسات المالية, و تحليلها من اجل اقتراح حلول ملموسة لتحسين إدارة المخاطر في المؤسسات المالية. وهذه الخطوة حاسمة لضمان استقرار النظام المالي و الحفاظ على مصالح اصحاب المصلحة. ستساعد نتائج هذا البحث على فهم كيفية تقييم المخاطر و مراقبتها, و تحديد افضل الممارسات لتجنب الازمات المالية باختصار.

Résumé

Les chercheurs ont enquêté sur les problématiques de risque des institutions financières, les ont analysées afin de proposer des solutions concrètes pour améliorer la gestion des risques dans les institutions financières. Cette étape est cruciale pour assurer la stabilité du système financier et préserver les intérêts des parties prenantes. Les résultats de cette recherche aideront à comprendre comment évaluer et surveiller les risques, Identifier les meilleures pratiques pour éviter les crises financières en un mot.

Abstract

The researchers investigated the risk issues of financial institutions, analyzed them in order to propose concrete solutions for Improve risk management in financial institutions. This step is crucial for ensure the stability of the financial system and preserve the interests of stakeholders. The results of this research will help to understand how to assess and monitor risks, Identify the best practices to avoid financial crises in a nutshell.